

CHỦ ĐỀ 2**GTLN VÀ GTNN LIÊN QUAN THAM SỐ**

Câu 1. Cho hàm số $f(x) = ax^4 + 2(a+4)x^2 - 1$ với a là tham số thực. Nếu $\max_{[0;2]} f(x) = f(1)$ thì $\min_{[0;2]} f(x)$ bằng

A. - 17**B.** - 16**C.** - 1**D.** 1**Lời giải****Chọn A.**

Từ giả thiết ta có $f'(1) = 0$

$$\Rightarrow 4a + 4(a+4) = 0$$

$$\Leftrightarrow a = -2$$

và $f(x) = -2x^4 + 4x^2 - 1$

Ta có $f(0) = -1; f(1) = 1; f(2) = -17$

Vậy $\min_{[0;2]} f(x) = f(2) = -17$

Câu 2. Cho hàm số $y = \frac{x+m}{x-1}$ (m là tham số thực) thỏa mãn $\min_{[2;4]} y = 3$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. $m > 4$ **B.** $3 < m \leq 4$ **C.** $m < -1$ **D.** $1 \leq m < 3$ **Lời giải****Chọn A.**

$$y' = \frac{-1-m}{(x-1)^2}$$

Ta có

* TH 1. $-1-m > 0 \Leftrightarrow m < -1$ suy ra y đồng biến trên $[2;4]$ suy ra

$$\min_{[2;4]} f(x) = f(2) = \frac{2+m}{1} = 3 \Leftrightarrow m = 1 \quad (\text{loại})$$

* TH 2. $-1-m < 0 \Leftrightarrow m > -1$ suy ra y nghịch biến trên $[2;4]$ suy ra

$$\min_{[2;4]} f(x) = f(4) = \frac{4+m}{3} = 3 \Leftrightarrow m = 5 \quad \text{suy ra } m > 4.$$

Câu 3. Số các giá trị tham số m để hàm số $y = \frac{x-m^2-1}{x-m}$ có giá trị lớn nhất trên $[0;4]$ bằng -6 là

A. 2.**B.** 1.**C.** 3.**D.** 0.**Lời giải****Chọn B.**

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{m\}$.

Có $y' = \frac{m^2 - m + 1}{(x - m)^2} > 0$, $\forall x \in D$ (do $m^2 - m + 1 = \left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$, $\forall m \in \mathbb{R}$).

Do đó hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; m)$ và $(m; +\infty)$.

Suy ra $\max_{[0;4]} f(x) = f(4)$

Để hàm số đã cho có giá trị lớn nhất trên $[0;4]$ bằng -6 thì

$$\begin{cases} m \notin [0;4] \\ f(4) = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \notin [0;4] \\ \frac{3 - m^2}{4 - m} = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \notin [0;4] \\ m^2 + 6m - 27 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \notin [0;4] \\ m = 3 \\ m = -9 \end{cases} \Leftrightarrow m = -9.$$

Vậy có một giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 4. Cho hàm số $y = |x^2 + 2x + a - 4|$. Tìm a để giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-2;1]$ đạt giá trị nhỏ nhất.

- A. $a = 2$. B. $a = 1$. C. 4 . D. $a = 3$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có $y = |x^2 + 2x + a - 4| = |(x+1)^2 + a - 5|$. Đặt $u = (x+1)^2$ khi đó $\forall x \in [-2;1]$ thì $u \in [0;4]$. Ta được hàm số $f(u) = |u + a - 5|$. Khi đó.

$$\max_{x \in [-2;1]} y = \max_{u \in [0;4]} f(u) = \max\{f(0), f(4)\} = \max\{|a - 5|; |a - 1|\}$$

Trường hợp 1: $|a - 5| \geq |a - 1| \Leftrightarrow a \leq 3 \Rightarrow \max_{u \in [0;4]} f(u) = 5 - a \geq 2 \Leftrightarrow a = 3$

Trường hợp 2: $|a - 5| \leq |a - 1| \Leftrightarrow a \geq 3 \Rightarrow \max_{u \in [0;4]} f(u) = a - 1 \geq 2 \Leftrightarrow a = 3$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $\max_{x \in [-2;1]} y = 2 \Leftrightarrow a = 3$.

Câu 5. Gọi S là tập giá trị của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = |x^2 - 4x + m|$ trên đoạn $[1;4]$ bằng 6 . Tổng các phần tử của S bằng

- A. -4 . B. 4 . C. -10 . D. 6 .

Lời giải

Chọn B.

+ Đặt $g(t) = t^2 - 4t + m$ với $t \in [1;4]$. Đạo hàm: $g'(t) = 2t - 4$; $g'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 2$.

+ Suy ra giá trị nhỏ nhất: $\min f(x) = \min\{|m - 3|; |m - 4|; |m|\}$

Xét $|m - 4| = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 10 \\ m = -2 \end{cases}$. Ta thấy $m = 10$ thỏa mãn.

Xét $|m - 3| = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 9 \\ m = -3 \end{cases}$ (không thỏa mãn).

Xét $|m| = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 6 \\ m = -6 \end{cases}$. Ta thấy $m = -6$ thỏa mãn.

Câu 6. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x^3 - 3x^2 - 9x + m|$ trên đoạn $[-2; 4]$ bằng 16. Số phần tử của S là

- A. 0. B. 2. C. 4. D. 1.

Lời giải

Chọn D.

Xét hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + m$ trên đoạn $[-2; 4]$.

$$f' = 3x^2 - 6x - 9; \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases} \quad (\text{thỏa mãn}).$$

$$f(-2) = -2 + m; \quad f(-1) = 5 + m; \quad f(3) = -27 + m; \quad f(4) = -20 + m$$

$$\Rightarrow \min_{[-2; 4]} f(x) = m - 27; \quad \max_{[-2; 4]} f(x) = m + 5 \Rightarrow \max_{[-2; 4]} |f(x)| = \max\{|m - 27|; |m + 5|\}$$

+) Trường hợp 1: Nếu $|m - 27| \leq |m + 5|$ (*)

$$\Rightarrow \max_{[-2; 4]} |f(x)| = |m + 5| \Rightarrow |m + 5| = 16 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 11 \\ m = -21 \end{cases} \quad \text{Đổi chiếu điều kiện (*)} \Rightarrow m = 11.$$

+) Trường hợp 1: Nếu $|m - 27| > |m + 5|$ (**)

$$\Rightarrow \max_{[-2; 4]} |f(x)| = |m - 27| \Rightarrow |m - 27| = 16 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 43 \\ m = 11 \end{cases} \quad (\text{Không thỏa mãn điều kiện (**)}).$$

Vậy $S = \{11\} \Rightarrow S$ có 1 phần tử.

Câu 7. *Cho hàm số $y = |x^3 + x^2 + (m^2 + 1)x + 27|$. Giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-3; -1]$ có giá trị nhỏ nhất bằng

- A. 26. B. 18. C. 28. D. 16.

Lời giải

Chọn B.

Xét $u = x^3 + x^2 + (m^2 + 1)x + 27$ trên đoạn $[-3; -1]$ ta có: $u' = 3x^2 + 2x + m^2 + 1 > 0, \forall x$.

$$\text{Do đó } A = \max_{[-3; -1]} u = u(-1) = 26 - m^2; \quad a = \min_{[-3; -1]} u = u(-3) = 6 - 3m^2.$$

Do $M = \max_{[-3; -1]} y = \max \left\{ |26 - m^2|, |6 - 3m^2| \right\}$ và $4M \geq 3|26 - m^2| + |6 - 3m^2| \geq 72$.

Vậy $M \geq 18$.

Dấu bằng xảy ra khi $|26 - m^2| = |6 - 3m^2| = 18 \Leftrightarrow m = \pm 2\sqrt{2}$.

Chọn đáp án B.

Câu 8. Cho hàm số $y = |x^2 + x + m|$. Tổng tất cả giá trị thực của tham số m để $\min_{[-2; 2]} y = 2$ bằng

A. $-\frac{31}{4}$.

B. -8 .

C. $-\frac{23}{4}$.

D. $\frac{9}{4}$.

Lời giải

Chọn C.

Xét hàm số $u = x^2 + x + m$ trên đoạn $[-2; 2]$, có: $u' = 0 \Leftrightarrow 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$.

$$\begin{cases} \max_{[-2; 2]} u = \max \left\{ u(-2), u\left(-\frac{1}{2}\right), u(2) \right\} = m + 6 \\ \min_{[-2; 2]} u = \min \left\{ u(-2), u\left(-\frac{1}{2}\right), u(2) \right\} = m - \frac{1}{4} \end{cases}$$

Khi đó:

▪ Nếu $m - \frac{1}{4} \geq 0$ hay $m \geq \frac{1}{4}$ thì $\min_{[-2; 2]} y = m - \frac{1}{4} = 2 \Leftrightarrow m = \frac{9}{4}$ (thỏa mãn).

▪ Nếu $m + 6 \leq 0$ hay $m \leq -6$ thì $\min_{[-2; 2]} y = -m - 6 = 2 \Leftrightarrow m = -8$ (thỏa mãn).

▪ Nếu $-6 < m < \frac{1}{4}$ thì $\min_{[-2; 2]} y = 0$ (không thỏa mãn).

Vậy có hai số thực $m = \frac{9}{4}$ và $m = -8$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Tổng các giá trị đó bằng $-\frac{23}{4}$.

Câu 9. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x^3 - 3x + m|$ trên đoạn $[0; 2]$ bằng 3. Số phần tử của S là

A. 0

B. 6

C. 1

D. 2

Lời giải

Chọn D.

Xét hàm số $f(x) = x^3 - 3x + m$, ta có $f'(x) = 3x^2 - 3$. Ta có bảng biến thiên của $f(x)$:

x	0	1	2
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	m	$-2 + m$	$2 + m$

TH1: $2 + m < 0 \Leftrightarrow m < -2$. Khi đó $\max_{[0;2]} |f(x)| = -(-2 + m) = 2 - m$

$2 - m = 3 \Leftrightarrow m = -1$ (loại).

TH2: $\begin{cases} 2 + m > 0 \\ m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < m < 0$. Khi đó: $|m - 2| = 2 - m > 2 > 2 + m \Rightarrow \max_{[0;2]} |f(x)| = -(-2 + m) = 2 - m$

$2 - m = 3 \Leftrightarrow m = -1$ (thỏa mãn).

TH3: $\begin{cases} m > 0 \\ -2 + m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 2$. Khi đó: $|m - 2| = 2 - m < 2 < 2 + m \Rightarrow \max_{[0;2]} |f(x)| = 2 + m$

$2 + m = 3 \Leftrightarrow m = 1$ (thỏa mãn).

TH4: $-2 + m > 0 \Leftrightarrow m > 2$. Khi đó $\max_{[0;2]} |f(x)| = 2 + m$

$2 + m = 3 \Leftrightarrow m = 1$ (loại).

Câu 10. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x^3 + x^2 + (m^2 + 1)x + m^2 - m - 3|$ trên đoạn $[-1; 2]$ không vượt quá 15?

A. 3.

B.

C. 5.

D. Vô số.

Lời giải

Chọn A.

Xét hàm số $f(x) = x^3 + x^2 + (m^2 + 1)x + m^2 - m - 3$ trên đoạn $[-1; 2]$.

Ta có $f'(x) = 3x^2 + 2x + (m^2 + 1) = 2x^2 + (x + 1)^2 + m^2 > 0, \forall x \in [-1; 2]$

Suy ra hàm số $f(x)$ đồng biến trên đoạn $[-1; 2] \Rightarrow \begin{cases} \min_{[-1;2]} f(x) = f(-1) = -m - 4 \\ \max_{[-1;2]} f(x) = f(2) = 3m^2 - m + 11 \end{cases}$

Khi đó $\max_{[-1;2]} y = \max_{[-1;2]} |f(x)| = \max \{ |-m - 4|; |3m^2 - m + 11| \} \leq 15 \Leftrightarrow \begin{cases} |-m - 4| \leq 15 \\ |3m^2 - m + 11| \leq 15 \end{cases}$

$\begin{cases} -15 \leq m + 4 \leq 15 \\ -15 \leq 3m^2 - m + 11 \leq 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -19 \leq m \leq 11 \\ 3m^2 - m - 4 \leq 0 \\ 3m^2 - m + 26 \geq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -19 \leq m \leq 11 \\ -1 \leq m \leq \frac{4}{3} \end{cases}$. Với $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-1; 0; 1\}$

Câu 11. Cho hàm số $f(x) = |2x^3 - 6x^2 + m|$, gọi A là giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[1; 3]$. Số giá trị nguyên của tham số m để $A < 2020$ là

A. 4031.

B. 4032.

C. 4033.

D. 2019.

Lời giải

Chọn A.

Xét $u(x) = 2x^3 - 6x^2 - m$ trên đoạn $[1; 3]$. Ta có hàm số $u(x)$ liên tục trên đoạn $[1; 3]$.

$$u'(x) = 6x^2 - 12x$$

$$u'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \notin (1; 3) \\ x = 2 \in (1; 3) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \max_{[1; 3]} u(x) &= \max \{u(1); u(2); u(3)\} = m \\ \min_{[1; 3]} u(x) &= \min \{u(1); u(2); u(3)\} = m - 8 \end{aligned}$$

Khi đó:

$$A = \max \{|m|; |m - 8|\}$$

$$A < 2020 \Leftrightarrow \begin{cases} |m| < 2020 \\ |m| \geq |m - 8| \\ |m - 8| < 2020 \\ |m - 8| \geq |m| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2020 < m < 2020 \\ m \geq 4 \\ -2012 < m < 2028 \\ m \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 \leq m < 2020 \\ -2012 < m \leq 4 \end{cases}$$

Yêu cầu

Vậy có 4031 số nguyên m để $A < 2020$.

Câu 12. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = |x^4 - 8x^2 + m|$ trên đoạn $[-1; 1]$ bằng 5. Tổng tất cả các phần tử của S bằng

A. -7.

B. 7.

C. 5.

D. -5.

Lời giải

Chọn B.

Xét hàm số $g(x) = x^4 - 8x^2 + m, x \in [-1; 1]$, ta có $g'(x) = 4x^3 - 16x; g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 2 \end{cases}$.

$$g(-1) = g(1) = -7 + m, g(0) = m$$

$$\max_{[-1; 1]} f(x) = \max \{|-7 + m|, |m|\} = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} |-7 + m| = 5 \\ |-7 + m| \geq |m| \\ |m| = 5 \\ |m| \geq |-7 + m| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = 5 \end{cases}$$

Do đó:

Vậy $S = \{2; 5\}$. Vậy tổng các giá trị của S bằng 7.

Câu 13. Có bao nhiêu số thực m để hàm số $y = f(x) = |3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + m - 1|$ có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-1; 2]$ bằng 2020.

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

Lời giải

Chọn C.

Đặt $g(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + m - 1$ trên đoạn $[-1; 2]$

$$g'(x) = 12x^3 + 12x^2 - 24x \Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$$

Ta có

Khi đó

$$\begin{cases} M = \max_{[-1; 2]} g(x) = \max \{g(-1); g(0); g(1); g(2)\} = \max \{m - 14; m - 1; m - 6; m + 31\} = m + 31 \\ m = \min_{[-1; 2]} g(x) = \min \{g(-1); g(0); g(1); g(2)\} = \min \{m - 14; m - 1; m - 6; m + 31\} = m - 14 \end{cases}$$

Vậy $\min_{[-1; 2]} f(x) = \min \{|m + 31|; |m - 14|\} = 2020$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |m + 31| = 2020 \\ |m + 31| \leq |m - 14| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -2051 \\ m = 2034 \end{cases}$$

Vậy có 2 giá trị của m thỏa mãn.

Câu 14. Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số

$y = \left| \frac{1}{4}x^4 - \frac{19}{2}x^2 + 30x + m - 20 \right|$ trên đoạn $[0; 2]$ không vượt quá 20. Tổng các phần tử của S bằng

A. 210

B. -195

C. 105

D. 300

Lời giải

Chọn C.

Xét hàm số $g(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{19}{2}x^2 + 30x + m - 20$ trên đoạn $[0; 2]$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 \notin [0; 2] \\ x = 2 \\ x = 3 \notin [0; 2] \end{cases}$$

Ta có $g'(x) = x^3 - 19x + 30$;

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-5	0	2	3	$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$			$g(0)$	$g(2)$		

$$g(0) = m - 20, \quad g(2) = m + 6$$

Để $\max_{[0; 2]} |g(x)| \leq 20$ thì $\begin{cases} g(0) \leq 20 \\ g(2) \leq 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |m - 20| \leq 20 \\ |m + 6| \leq 20 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 14.$

Mà $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{0; 1; 2; \dots; 14\}$.

Vậy tổng các phần tử của S là 105.

Câu 15. Cho hàm số $f(x) = |x^4 - 4x^3 + 4x^2 + a|$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[0; 2]$. Có bao nhiêu số nguyên a thuộc đoạn $[-3; 3]$ sao cho $M \leq 2m$?

- A. 3. B. 7. C. 6. D. 5.

Lời giải

Chọn D.

Xét hàm số $g(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + a$.

$$g'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 8x, \quad g'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 12x^2 + 8x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	0	1	2
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	a	$a+1$	a

Do $2m \geq M > 0$ nên $m > 0$ suy ra $g(x) \neq 0 \quad \forall x \in [0; 2]$.

$$\text{Suy ra } \begin{cases} a+1 < 0 \\ a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < -1 \\ a > 0 \end{cases}$$

Nếu $a < -1$ thì $M = -a, m = -a-1 \Rightarrow 2(-a-1) \geq -a \Leftrightarrow a \leq -2$.

Nếu $a > 0$ thì $M = a+1, m = a \Rightarrow 2a \geq a+1 \Leftrightarrow a \geq 1$.

Do đó $a \leq -2$ hoặc $a \geq 1$, do a nguyên và thuộc đoạn $[-3; 3]$ nên $a \in \{-3; -2; 1; 2; 3\}$.

Vậy có 5 giá trị của a thỏa mãn đề bài.

Câu 16. Cho hàm số $f(x) = (x-1)^2(ax^2 + 4ax - a + b - 2)$, với $a, b \in \mathbb{R}$. Biết trên khoảng $\left(-\frac{4}{3}; 0\right)$ hàm

số đạt giá trị lớn nhất tại $x = -1$. Hỏi trên đoạn $\left[-2; -\frac{5}{4}\right]$ hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại giá trị nào của x ?

- A. $x = -\frac{5}{4}$. B. $x = -\frac{4}{3}$. C. $x = -\frac{3}{2}$. D. $x = -2$.

Lời giải

Chọn C.

Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.

Ta có: $f'(x) = 2(x-1)(2ax^2 + 5ax - 3a + b - 2)$

Vì trên khoảng $\left(-\frac{4}{3}; 0\right)$ hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $x = -1$ nên hàm số đạt cực trị tại $x = -1$ (cũng là điểm cực đại của hàm số) và $a > 0$.

$$\Rightarrow f'(-1) = 0 \Leftrightarrow -4(-6a + b - 2) = 0 \Leftrightarrow b = 6a + 2$$

$$\Rightarrow f'(x) = 2a(x-1)(2x^2 + 5x + 3)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{2} \\ x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

Khi đó $\cdot$ (đều là các nghiệm đơn)

Hàm số đạt cực đại tại $x = -1$ nên có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	-1	1	$+\infty$			
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$+\infty$			CD			CT	$+\infty$

$$\Rightarrow x = -\frac{3}{2} \text{ là điểm cực tiểu duy nhất thuộc } \left[-2; -\frac{5}{4}\right]$$

Vậy hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = -\frac{3}{2}$ trên đoạn $\left[-2; -\frac{5}{4}\right]$.

Câu 17. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \left| \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} + m \right|$ trên $[0; 2]$ đạt giá trị nhỏ nhất là bao nhiêu?

A. $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$

B. $\frac{1-\sqrt{2}}{2}$

C. $-\frac{\sqrt{2}+1}{2}$

D. $\frac{1+\sqrt{5}}{5}$

Lời giải

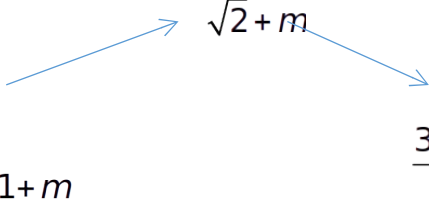
Chọn A.

Ta xét $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} + m \Rightarrow f'(x) = \frac{1-x}{x^2+1} = 0 \Leftrightarrow x = 1 \in [0; 2]$

Mặt khác $f(0) = 1 + m; f(1) = \sqrt{2} + m; f(2) = \frac{3\sqrt{5}}{5} + m$

BBT

x	0	1	2
$f'(x)$	$+$	0	$-$

$f(x)$	
--------	---

Suy ra $\max_{[0;2]} y = \max \left\{ |m+1|; |m+\sqrt{2}| \right\} = M$ (do $1+m < \frac{3\sqrt{5}}{5}+m < \sqrt{2}+m$)

Vì $\begin{cases} M \geq |m+1| \\ M \geq |-\sqrt{2}-m| \end{cases} \Rightarrow 2M \geq \sqrt{2}-1 \Leftrightarrow M \geq \frac{\sqrt{2}-1}{2}$

$M = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$ khi $m+1 = -\sqrt{2}-m = \pm \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2} \right)$ khi $m = -\frac{1+\sqrt{2}}{2}$

Suy ra giá trị nhỏ nhất của M là $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$.