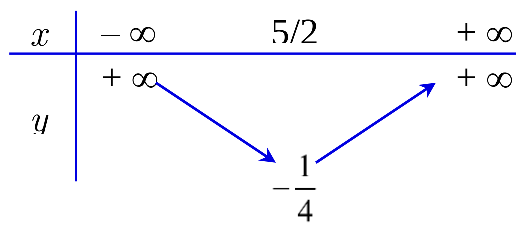
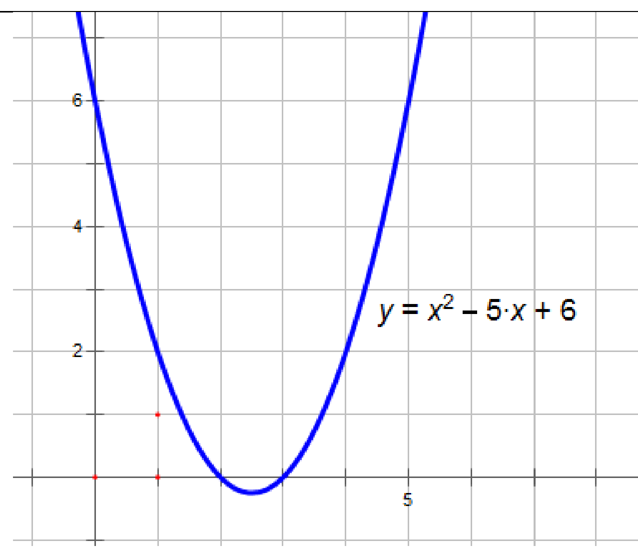
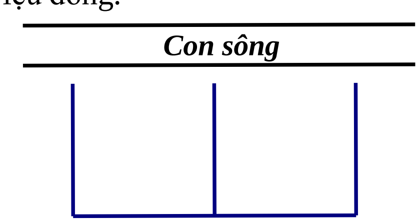
SỞ GD&ĐT HÀ NỘI
CÁC TRƯỜNG THPT CỤM
SÓC SƠN - MÊ LINH

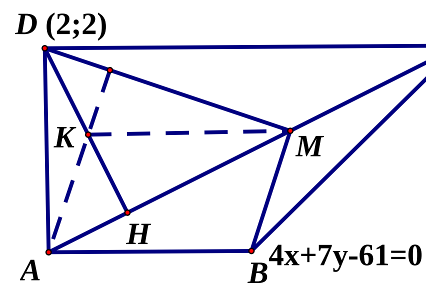
KỲ THI OLYMPIC LỚP 10
NĂM HỌC 2019-2020

Môn thi: TOÁN
Thời gian: 150 phút (không kể thời gian giao đề)

HƯỚNG DẪN CHẤM

Bài	Nội dung	Điểm
Bài I.1	Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y=x^2-5x+6$.	2.0
	Tập xác định $D=\mathbb{R}$ Tọa độ đỉnh $I\left(\frac{5}{2};-\frac{1}{4}\right)$ Hàm số nghịch biến trên $\left(-\infty;\frac{5}{2}\right)$ và đồng biến trên $\left(\frac{5}{2};+\infty\right)$	0.5
	Bảng biến thiên  	0.5
	Vẽ đồ thị  	1.0
Bài I.2	Tìm m để đường thẳng $y=x+m-1$ cắt đồ thị hàm số $y=x^2-4x+6$ tại hai điểm phân biệt.	2.0
	Xét phương trình hoành độ giao điểm $x^2-4x+6=x+m-1$	0.5
	$\Leftrightarrow x^2-5x+6=m-1$	0.5
	Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi đường thẳng $y=m-1$ cắt đồ thị hàm số $y=x^2-5x+6$ tại hai điểm phân biệt.	0.5

	Khi đó $m-1>-\frac{1}{4}\Leftrightarrow m>\frac{3}{4}$	0.5
Bài II.1	Giải bất phương trình $\sqrt[3]{14-3x}+x^2\ge 7-\sqrt{x-1}$	2.0
	Điều kiện: $x\ge 1$ BPT $\Leftrightarrow\left(\sqrt[3]{14-3x}-2\right)+\left(x^2-4\right)+\left(\sqrt{x-1}-1\right)\ge 0$	0.5
	$\Leftrightarrow\frac{3(2-x)}{\sqrt[3]{(14-3x)^2}+2\sqrt[3]{14-3x}+4}+\left(x^2-4\right)+\frac{x-2}{\sqrt{x-1}+1}\ge 0$	0.5
	$\Leftrightarrow(x-2)\left[\frac{-3}{\sqrt[3]{(14-3x)^2}+2\sqrt[3]{14-3x}+4}+x+2+\frac{1}{\sqrt{x-1}+1}\right]\ge 0\ \ (*)$	0.5
	Vì biểu thức trong ngoặc vuông bằng $\frac{\sqrt[3]{(14-3x)^2}+2\sqrt[3]{14-3x}+1}{\sqrt[3]{(14-3x)^2}+2\sqrt[3]{14-3x}+4}+x+1+\frac{1}{\sqrt{x-1}+1}>0\ \ \forall x\ge 1$ nên $(*)\Leftrightarrow x\ge 2$ (thỏa mãn điều kiện). Vậy tập nghiệm là $S=[2;+\infty)$	0.5
Bài II.2	Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^2+y^4+xy=2xy^2+7\\ xy^3-x^2y+4xy+11x=28+11y^2\end{cases}(*)$	2.0
	Hệ $(*)\Leftrightarrow\begin{cases}\left(x-y^2\right)^2+xy=7\\ xy\left(y^2-x\right)+11\left(x-y^2\right)+4xy=28\end{cases}$	0.5
	Đặt $u=y^2-x;\ \ v=xy$ $\Rightarrow\begin{cases}u^2+v=7\\ uv+4v-11u=28\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}v=7-u^2\\ u\left(7-u^2\right)+4\left(7-u^2\right)-11u=28\end{cases}$	0.5
	$\Rightarrow u^3+4u^2+4u=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}u=0,v=7\\ u=-2;v=3\end{array}\right.$	0.5
	- Với $u=0,v=7\Rightarrow x=\sqrt[3]{49};\ \ y=\sqrt[3]{7}$ - Với $u=-2,v=3\Rightarrow x=3;\ \ y=1$. Vậy tập nghiệm là $\left\{(3;1);\ \left(\sqrt[3]{49};\sqrt[3]{7}\right)\right\}$	0.5
Bài II.3	Một người có một khu đất bãi rộng dọc theo bờ sông. Người đó muốn làm một hàng rào hình chữa E (như hình vẽ) để được khu đất hình chữ nhật gồm hai phần để trồng rau và chăn nuôi. Đối với mặt hàng rào song song với bờ sông thì chi phí nguyên vật liệu là 80000 đồng một mét dài, đối với phần còn lại thì chi phí nguyên vật liệu là 40000 đồng một mét dài. Tính diện tích lớn nhất của phần đất mà người đó rào được với chi phí vật liệu 20 triệu đồng. 	2.0
	Gọi x (m) là chiều dài hàng rào vuông góc với bờ sông, y (m) là chiều dài hàng rào song song với bờ sông .	0.5

	Theo giả thiết thì $3x.40000+y.80000=20000000\ \left(x>0,\ \ y>0\right)$	
	$\Leftrightarrow 3x+2y=500 \Leftrightarrow y=\frac{500-3x}{2}$	0.5
	Diện tích khu vườn sau khi rào là $S=xy=-\frac{3}{2}x^2+250x,\ \ 0<x<\frac{500}{3}$	0.5
	Xét tam thức $f\left(x\right)=-\frac{3}{2}x^2+250x$ trên $\left(0;\frac{500}{3}\right)$, suy ra diện tích lớn nhất là $\frac{31250}{3}\left(m^2\right)$ khi $x=\frac{250}{3}$ (m)	0.5
Bài III	Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình thang ABCD vuông tại A và $D\left(2;2\right)$, cạnh $CD=2AB$. Gọi H là hình chiếu của D lên cạnh AC và M là trung điểm HC. Biết phương trình đường thẳng DH và BM lần lượt là $2x+y-6=0$ và $4x+7y-61=0$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C của hình thang.	4.0
	 - Gọi K là trung điểm DH → KM là đường trung bình trong tam giác CDH và $KM=\frac{1}{2}DC$. Mà $AB//DC;\ \ AB=\frac{1}{2}DC$ → Tứ giác ABMK là hình bình hành.	0.5
	- Vì $AB\perp AD,\ \ KM//AB$ nên $KM\perp AD$, do đó K là trực tâm tam giác ADM → $AK\perp DM$ → $BM\perp DM$	0.5
	- Khi đó đường thẳng DM qua D và vuông góc BM có phương trình là $7x-4y-6=0$. - Ta có $M=DM\cap BM \Rightarrow M\left(\frac{22}{5};\frac{31}{5}\right)$	0.5
	- Đường thẳng AC qua M và vuông góc DH có phương trình là $x-2y+8=0$. Ta có $H=AC\cap DH \Rightarrow H\left(\frac{4}{5};\frac{22}{5}\right)$.	0.5
	Vì M là trung điểm CH nên $C\left(8;8\right)$.	0.5
	- Đường thẳng AD qua D và vuông góc CD có phương trình là $x+y-4=0$. Ta có $A=AD\cap AC \Rightarrow A\left(0;4\right)$.	0.5

	- Vì $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} \Rightarrow B(3;7)$.	0.5
	Vậy $A(0;4)$, $B(3;7)$, $C(8;8)$	0.5
Bài IV	Cho tam giác ABC. O là điểm tùy ý trong tam giác. Gọi M, N, P lần lượt là hình chiếu của O lên cạnh BC, AC, AB. Chứng minh rằng $\frac{BC}{OM} + \frac{AC}{ON} + \frac{AB}{OP} \ge \frac{2p}{r}$, trong đó p là nửa chu vi và r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC.	3.0
	- Có $(BC + AC + AB)^2 = \left(\sqrt{BC^2} + \sqrt{AC^2} + \sqrt{AB^2}\right)^2$	0.5
	$= \left(\sqrt{\frac{BC}{OM}}.\sqrt{BC.OM} + \sqrt{\frac{AC}{ON}}.\sqrt{AC.ON} + \sqrt{\frac{AB}{OP}}.\sqrt{AB.OP}\right)^2$	0.5
	$\le \left(\frac{BC}{OM} + \frac{AC}{ON} + \frac{AB}{OP}\right)(BC.OM + AC.ON + AB.OP)$	0.5
	$\Rightarrow 4p^2 \le \left(\frac{BC}{OM} + \frac{AC}{ON} + \frac{AB}{OP}\right).2S_{\Delta ABC}$	0.5
	- Vì $S_{\Delta ABC} = pr$ nên suy ra điều phải chứng minh.	0.5
	- Dấu = xảy ra khi và chỉ khi $\frac{\frac{BC}{OM}}{BC.OM} = \frac{\frac{AC}{ON}}{AC.ON} = \frac{\frac{AB}{OP}}{AB.OP} \Leftrightarrow OM = ON = OP$ $\Leftrightarrow$ O là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.	0.5
Bài V	Cho các số thực dương a, b, c. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \sqrt[3]{\frac{a^2}{(b+c)^2 + 5bc}} + \sqrt[3]{\frac{b^2}{(c+a)^2 + 5ca}} + \sqrt[3]{\frac{c^2}{(a+b)^2 + 5ab}}$	3.0
	Ta có $(b+c)^2 \le 2(b^2 + c^2)$. Suy ra $(b+c)^2 + 5bc \le 2(b^2 + c^2) + 5bc = (b+2c)(c+2b)$	0.5
	Do đó $\frac{a^2}{(b+c)^2 + 5bc} \ge \frac{a^2}{(b+2c)(c+2b)}$	0.5
	Mặt khác $a + b + c = a + \frac{b+2c}{3} + \frac{c+2b}{3} \ge 3\sqrt[3]{a.\frac{b+2c}{3}.\frac{c+2b}{3}}$	0.5
	$\Rightarrow \sqrt[3]{\frac{a^2}{(b+2c)(c+2b)}} \ge \sqrt[3]{3}.\frac{a}{a+b+c} \Rightarrow \sqrt[3]{\frac{a^2}{(b+c)^2 + 5bc}} \ge \sqrt[3]{3}.\frac{a}{a+b+c}$	0.5
	Tương tự có $\sqrt[3]{\frac{b^2}{(c+a)^2 + 5ca}} \ge \sqrt[3]{3}.\frac{b}{a+b+c}$; $\sqrt[3]{\frac{c^2}{(a+b)^2 + 5ab}} \ge \sqrt[3]{3}.\frac{c}{a+b+c}$	0.5
	Do vậy $P \ge \sqrt[3]{3}$. Dấu = xảy ra khi $a = b = c$. Vậy $\min P = \sqrt[3]{3}$	0.5

**** Lưu ý:** Học sinh có thể làm theo cách khác, nếu đúng vẫn cho điểm theo thang điểm của câu.*