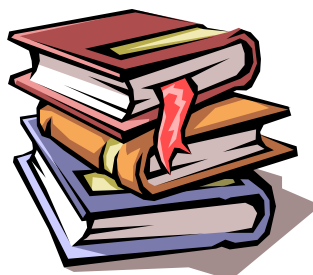


Tailieumontoan.com



Sưu tầm



CHUYÊN ĐỀ
RÚT GỌN BIỂU THỨC



Tài liệu sưu tầm, ngày 15 tháng 11 năm 2020

RÚT GỌN CĂN THỨC

DẠNG 1.1 SỬ DỤNG HẰNG ĐẲNG THỨC $\sqrt{A^2} = |A|$

1/. Căn bậc hai:

Căn bậc hai của số thực a là số x sao cho $x^2 = a$

- Với $a > 0$: Ta có đúng hai căn bậc hai đối nhau là \sqrt{a} và $-\sqrt{a}$.

- Với $a = 0$: Ta có đúng một căn bậc hai là 0.

- Với $a < 0$: Không có căn bậc hai, ta nói \sqrt{a} không có nghĩa hay không xác định.

2/. Căn bậc hai số học:

Căn bậc hai số học (CBHSH) của một số thực a không âm là số không âm x mà $x^2 = a$.

$$\text{Tóm tắt: } x = \sqrt{a} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 = a \end{cases} \text{ Với } a \geq 0. \text{ Ta có: } (\sqrt{a})^2 = a$$

3/. Hằng đẳng thức $\sqrt{A^2} = |A|$:

$$\sqrt{A^2} = |A| = \begin{cases} A & \text{khi } A \geq 0 \\ -A & \text{khi } A < 0 \end{cases}$$

Chú ý: $\sqrt{A^2} = A$ khi $A \geq 0$

$$\sqrt{B^2} = -B \text{ khi } B \leq 0$$

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Câu 1: [Mức độ 1] Rút gọn biểu thức $A = \sqrt{(2-\sqrt{3})^2} + \sqrt{(1-\sqrt{3})^2}$

Lời giải

$$\text{Biểu thức } A = \sqrt{(2-\sqrt{3})^2} + \sqrt{(1-\sqrt{3})^2} = |2-\sqrt{3}| + |1-\sqrt{3}| = 2-\sqrt{3} - 1 + \sqrt{3} = 1.$$

Câu 2: [Mức độ 1] Rút gọn biểu thức $B = 5\sqrt{25a^2} - 25a$ với $a \leq 0$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } B = 5\sqrt{25a^2} - 25a = 5|5a| - 25a = -50a \text{ (vì } a \leq 0)$$

Câu 3: [Mức độ 1] Thực hiện phép tính: $\sqrt{9-\sqrt{17}} \cdot \sqrt{9+\sqrt{17}}$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \sqrt{9-\sqrt{17}} \cdot \sqrt{9+\sqrt{17}} = \sqrt{81-17} = \sqrt{64} = 8.$$

Câu 4: [Mức độ 3] Rút gọn biểu thức $B = \frac{\sqrt{9x^2+12x+4}}{3x+2}$ với $x \neq -\frac{3}{2}$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } B = \frac{\sqrt{9x^2+12x+4}}{3x+2} = \frac{\sqrt{(3x)^2+2 \cdot 3x \cdot 2+2^2}}{3x+2} = \frac{\sqrt{(3x+2)^2}}{3x+2} = \frac{|3x+2|}{3x+2}.$$

$$\text{Vì } x \neq -\frac{3}{2} \text{ nên } B = \frac{|3x+2|}{3x+2} = \begin{cases} 1 \text{ khi } x > -\frac{3}{2} \\ -1 \text{ khi } x < -\frac{3}{2} \end{cases}.$$

Câu 5: [Mức độ 2] Tìm x biết: $x^2 = 4 - 2\sqrt{3}$.

Lời giải

Ta biến đổi phương trình:

$$x^2 = 4 - 2\sqrt{3} = 3 - 2\sqrt{3} + 1 = (\sqrt{3})^2 - 2\sqrt{3} + 1 = (\sqrt{3} - 1)^2$$

$$\Leftrightarrow x = \pm(\sqrt{3} + 1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{3} + 1 \\ x = -(\sqrt{3} + 1) \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình $S = \{\sqrt{3} + 1; -\sqrt{3} - 1\}$.

Câu 6: [Mức độ 2] Rút gọn biểu thức: $C = \sqrt{3 - 2\sqrt{2}} - \sqrt{6 + 4\sqrt{2}}$.

Lời giải

$$\text{Ta viết: } 3 - 2\sqrt{2} = 2 - 2\sqrt{2} + 1 = (\sqrt{2} - 1)^2.$$

$$6 + 4\sqrt{2} = 4 + 2\sqrt{2} + 2 = (2 + \sqrt{2})^2.$$

$$\text{Do đó: } C = \sqrt{(\sqrt{2} - 1)^2} - \sqrt{(2 + \sqrt{2})^2} = |\sqrt{2} - 1| - (2 + \sqrt{2}) = \sqrt{2} - 1 - 2 - \sqrt{2} = -3.$$

Câu 7: [Mức độ 4] Rút gọn biểu thức: $D = \sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}} + \sqrt{x+2+2\sqrt{x+1}}$.

Lời giải

Với $x+1 \geq 0$ thì:

$$x+2-2\sqrt{x+1} = x+1-2\sqrt{x+1}+1 = (\sqrt{x+1}-1)^2 \geq 0.$$

$$x+2+2\sqrt{x+1} = x+1+2\sqrt{x+1}+1 = (\sqrt{x+1}+1)^2 \geq 0.$$

Do đó điều kiện: $x \geq -1$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } D &= \sqrt{x+1-2\sqrt{x+1}+1} + \sqrt{x+1+2\sqrt{x+1}+1} = \sqrt{(\sqrt{x+1}-1)^2} + \sqrt{(\sqrt{x+1}+1)^2} \\ &= |\sqrt{x+1}-1| + |\sqrt{x+1}+1| \end{aligned}$$

$$* \text{ Nếu } \sqrt{x+1} \geq 1 \text{ (hay } x+1 \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 0) \text{ thì } D = \sqrt{x+1} - 1 + \sqrt{x+1} + 1 = 2\sqrt{x+1}.$$

$$* \text{ Nếu } 0 \leq \sqrt{x+1} < 1 \text{ (hay } 0 \leq x+1 < 1 \Leftrightarrow -1 \leq x < 0) \text{ thì } D = 1 - \sqrt{x+1} + \sqrt{x+1} + 1 = 2.$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} D = 2\sqrt{x+1} & \text{khi } x \geq 0 \\ D = 2 & \text{khi } -1 \leq x < 0 \end{cases}$$

Dạng 1: Tổng, hiệu căn liên hợp:

$$\sqrt{A+B} \pm \sqrt{A-B} \text{ hoặc } \sqrt{A-B} \pm \sqrt{A+B}$$

Phương pháp: Dùng phương pháp bình phương (Chú ý: xét dấu biểu thức trước)

Câu 8: [Mức độ 2] Cho $M = \sqrt{57 + 40\sqrt{2}}$, $N = \sqrt{57 - 40\sqrt{2}}$. Tính giá trị của các biểu thức sau:

a). $M - N$. b). $M^3 - N^3$

Lời giải

a). $M - N$

Đặt $Q = M - N = \sqrt{57 + 40\sqrt{2}} - \sqrt{57 - 40\sqrt{2}}$, có $Q > 0$

$$\Rightarrow Q^2 = 114 - 2\sqrt{(57 + 40\sqrt{2})(57 - 40\sqrt{2})} = 114 - 2 \cdot 7 = 100, \text{ mà } Q > 0$$

$$\Rightarrow Q = 10. \text{ Vậy } M - N = 10$$

b). $M^3 - N^3$

$$\text{Có } (M - N)^3 = M^3 - 3MN(M - N) - N^3$$

$$\Rightarrow M^3 - N^3 = (M - N)^3 + 3MN(M - N), \text{ có } M - N = 10, M \cdot N = 7.$$

$$\Rightarrow M^3 - N^3 = 10^3 + 3 \cdot 10 \cdot 7 = 1210.$$

$$\text{Vậy } \Rightarrow M^3 - N^3 = 1210$$

Câu 9: [Mức độ 2] Tính $A = \sqrt{4 + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} + \sqrt{4 - \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}$

Lời giải

$$A = \sqrt{4 + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} + \sqrt{4 - \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}, \text{ có } A > 0.$$

$$\Rightarrow A^2 = 8 + 2\sqrt{(4 + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}})(4 - \sqrt{10 + 2\sqrt{5}})} = 8 + 2\sqrt{16 - (10 + 2\sqrt{5})} = 8 + 2\sqrt{6 - 2\sqrt{5}}$$

$$= 8 + 2\sqrt{(\sqrt{5} - 1)^2} = 6 + 2\sqrt{5} = (\sqrt{5} + 1)^2, \text{ mà } A > 0$$

$$\Rightarrow A = \sqrt{5} + 1$$

Dạng 2: Căn phức tạp:

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} \pm \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}}$$

với $A > 0$, $B > 0$ và $A^2 - B \geq 0$.

(Chú ý công thức trên chứng minh lại trước khi áp dụng).

Chứng minh

$$\text{Dạng 1: } \sqrt{A + \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} + \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}}$$

$$\text{Có } A + \sqrt{B} = A + \sqrt{A^2 - (A^2 - B)}$$

$$= \frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2} + \frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2} + 2\sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} \cdot \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}}$$

$$= \left(\sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} + \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}} \right)^2.$$

$$\Rightarrow \sqrt{A + \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} + \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}}.$$

$$\text{Vậy } \sqrt{A+\sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}} + \sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}.$$

$$\text{Dạng 2 Tương tự có } \sqrt{A-\sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}} - \sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}$$

$$A = \sqrt{3-2\sqrt{44\sqrt{3}-76}} - (2\sqrt{\sqrt{3}-1} + \sqrt{3})$$

Câu 10: [Mức độ 3] Tính

Lời giải

$$A = \sqrt{3-2\sqrt{44\sqrt{3}-76}} - (2\sqrt{\sqrt{3}-1} + \sqrt{3})$$

$$\text{Có } A_1 = \sqrt{3-2\sqrt{44\sqrt{3}-76}} = \sqrt{3-\sqrt{176\sqrt{3}-304}}$$

$$= \sqrt{\frac{3+\sqrt{9-(176\sqrt{3}-304)}}{2}} - \sqrt{\frac{3-\sqrt{9-(176\sqrt{3}-304)}}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{3+\sqrt{313-176\sqrt{3}}}{2}} - \sqrt{\frac{3-\sqrt{313-176\sqrt{3}}}{2}} = \sqrt{\frac{3+\sqrt{(8\sqrt{3}-11)^2}}{2}} - \sqrt{\frac{3-\sqrt{(8\sqrt{3}-11)^2}}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{8\sqrt{3}-8}{2}} - \sqrt{\frac{14-8\sqrt{3}}{2}} = 2\sqrt{\sqrt{3}-1} - \sqrt{7-4\sqrt{3}} = 2\sqrt{\sqrt{3}-1} - \sqrt{(2-\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{\sqrt{3}-1} - 2 + \sqrt{3}$$

$$\text{Có } A = A_1 - (2\sqrt{\sqrt{3}-1} + \sqrt{3}) = -2.$$

Vậy $A = -2$.

$$(\text{Ghi chú để tính } A_1 \text{ dùng } \sqrt{A-\sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}} - \sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}})$$

Câu 11: [Mức độ 3] Tính $B = \sqrt{15-4\sqrt{2+\sqrt{3}}} + 2\sqrt{2-\sqrt{3}} - \sqrt{3}$

Lời giải

$$\text{Có } B_1 = \sqrt{15-4\sqrt{2+\sqrt{3}}} = \sqrt{15-\sqrt{32+16\sqrt{3}}}$$

$$= \sqrt{\frac{15+\sqrt{225-(32+16\sqrt{3})}}{2}} - \sqrt{\frac{15-\sqrt{225-(32+16\sqrt{3})}}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{15+\sqrt{193-16\sqrt{3}}}{2}} - \sqrt{\frac{15-\sqrt{193-16\sqrt{3}}}{2}} = \sqrt{\frac{15+\sqrt{(8\sqrt{3}-1)^2}}{2}} - \sqrt{\frac{15-\sqrt{(8\sqrt{3}-1)^2}}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{14+8\sqrt{3}}{2}} - \sqrt{\frac{16-8\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{7+4\sqrt{3}} - \sqrt{8-4\sqrt{3}} = \sqrt{(2+\sqrt{3})^2} - 2\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

$$= 2 + \sqrt{3} - 2\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

$$\text{Có } B = B_1 + 2\sqrt{2-\sqrt{3}} - \sqrt{3} = 2 + \sqrt{3} - 2\sqrt{2-\sqrt{3}} + 2\sqrt{2-\sqrt{3}} - \sqrt{3} = 2$$

Vậy $B = 2$

(Ghi chú để tính B_1 dùng $\sqrt{A-\sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}} - \sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}$)

Trắc nghiệm

Câu 12: [Mức độ 1] Căn bậc hai số học của 9 là

- A. -3. B. 3. C. -81. D. 81.

Lời giải

Chọn B

Câu 13: [Mức độ 1] Biểu thức $\sqrt{16}$ bằng

- A. 4 và -4. B. -4. C. 4. D. 8.

Lời giải

Chọn C

Câu 14: [Mức độ 1] Giá trị của biểu thức $A = \sqrt{(2-\sqrt{5})^2}$ bằng:

- A. $2-\sqrt{5}$. B. 2. C. $\sqrt{5}$. D. $\sqrt{5}-2$.

Lời giải

Chọn D

Áp dụng công thức $\sqrt{A^2} = |A| = \begin{cases} A & \text{khi } A \geq 0 \\ -A & \text{khi } A < 0 \end{cases}$.

Ta có: $A = \sqrt{(2-\sqrt{5})^2} = |2-\sqrt{5}| = \sqrt{5}-2$.

Câu 15: [Mức độ 1] Biểu thức $\sqrt{(3-2x)^2}$ bằng

- A. $3-2x$. B. $2x-3$. C. $|2x-3|$. D. $3-2x$ và $2x-3$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\sqrt{(3-2x)^2} = |3-2x| = |2x-3|$.

Câu 16: [Mức độ 1] Biểu thức $\sqrt{(1+x^2)^2}$ bằng

- A. $1+x^2$. B. $-(1+x^2)$. C. $\pm(1+x^2)$. D. kết quả khác.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\sqrt{(1+x^2)^2} = |1+x^2| = 1+x^2$.

Câu 17: [Mức độ 2] Biểu thức $\sqrt{9a^2b^4}$ bằng

- A. $3ab^2$. B. $3|a|b^2$. C. $-3ab^2$. D. $3a|b^2|$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\sqrt{9a^2b^4} = \sqrt{(3ab^2)^2} = |3ab^2| = 3|a|b^2$.

Câu 18: [Mức độ 2] Giá trị của biểu thức $B = \sqrt{7+4\sqrt{3}}$ bằng:

- A. $2+\sqrt{3}$. B. $\sqrt{2}-3$. C. $\sqrt{2}+3$. D. $2-\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } B = \sqrt{7+4\sqrt{3}} = \sqrt{4+4\sqrt{3}+3} = \sqrt{2^2+2.2.\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2} = \sqrt{(2+\sqrt{3})^2} = |2+\sqrt{3}| = 2+\sqrt{3}.$$

Câu 19: [Mức độ 2] Biểu thức $2y^2 \sqrt{\frac{x^4}{4y^2}}$ với $y < 0$ được rút gọn là:

- A. $-yx^2$. B. $\frac{x^2y^2}{|y|}$. C. yx^2 . D. $\sqrt{y^2x^4}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } 2y^2 \sqrt{\frac{x^4}{4y^2}} = 2y^2 \sqrt{\frac{(x^2)^2}{(2y)^2}} = 2y^2 \left| \frac{x^2}{2y} \right| = 2y^2 \cdot \frac{x^2}{-2y} = -yx^2 \text{ vì } y < 0.$$

Câu 20: [Mức độ 2] Giá trị của x để $\sqrt{2x+1} = 3$ là:

- A. 13. B. 14. C. 1. D. 4.

Lời giải

Chọn D

$$\sqrt{2x+1} = 3 \Leftrightarrow \sqrt{2x+1} = \sqrt{3^2} \Leftrightarrow \sqrt{2x+1} = \sqrt{9} \Leftrightarrow 2x+1=9 \Leftrightarrow 2x=8 \Leftrightarrow x=4.$$

Câu 21: [Mức độ 3] Kết quả phép tính $\sqrt{9-4\sqrt{5}}$ là:

- A. $2-\sqrt{5}$. B. $\sqrt{5}-2$. C. $3-2\sqrt{5}$. D. Kết quả khác.

Lời giải

Chọn B

$$\sqrt{9-4\sqrt{5}} = \sqrt{2^2-2.2.\sqrt{5}+(\sqrt{5})^2} = \sqrt{(2-\sqrt{5})^2} = |2-\sqrt{5}| = \sqrt{5}-2.$$

Câu 22: [Mức độ 3] Giá trị biểu thức $\sqrt{15-6\sqrt{6}} + \sqrt{15+6\sqrt{6}}$ bằng:

- A. 6. B. $\sqrt{30}$. C. 3. D. $12\sqrt{6}$.

Lời giải

Chọn A

$$\begin{aligned} \sqrt{15-6\sqrt{6}} + \sqrt{15+6\sqrt{6}} &= \sqrt{3^2-2.3.\sqrt{6}+(\sqrt{6})^2} + \sqrt{3^2+2.3.\sqrt{6}+(\sqrt{6})^2} \\ &= \sqrt{(3-\sqrt{6})^2} + \sqrt{(3+\sqrt{6})^2} = |3-\sqrt{6}| + |3+\sqrt{6}| = 3-\sqrt{6}+3+\sqrt{6} = 6. \end{aligned}$$

Câu 23: [Mức độ 3] Giá trị của biểu thức

$$A = \sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$$
 bằng:

- A. -1. B. 1. C. $\sqrt{3}-2$. D. $\sqrt{3}+2$.

Lời giải

Chọn B

Ta có:

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}} \\ &= \sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}} \cdot \sqrt{4-(2+\sqrt{2+\sqrt{3}})} = \sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{4-2-\sqrt{3}} = \sqrt{4-3} = 1 \end{aligned}$$

Câu 24: [Mức độ 3] Cho với $A > 0$, $B > 0$ và $A^2 - B \geq 0$. Biểu thức $Q = \sqrt{A+\sqrt{B}}$ bằng với biểu thức nào dưới đây?

A. $\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}} + \sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}$.

B. $\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}} - \sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}$.

C. $\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}} - \sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}$.

D. $\sqrt{A+\sqrt{A^2-B}} - \sqrt{A-\sqrt{A^2-B}}$.

Lời giải

Chọn A

Có

$$A + \sqrt{B} = A + \sqrt{A^2 - (A^2 - B)}.$$

$$= \frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2} + \frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2} + 2\sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} \cdot \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}}$$

$$= \left(\sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} + \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}} \right)^2.$$

$$\Rightarrow \sqrt{A + \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} + \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}}$$

$$\text{Vậy } \sqrt{A + \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} + \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}}$$

Câu 25: [Mức độ 3] Cho với $A > 0$, $B > 0$ và $A^2 - B \geq 0$. Biểu thức $Q = \sqrt{A-\sqrt{B}}$ bằng với biểu thức nào dưới đây?

A. $\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}} + \sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}$.

B. $\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}} - \sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}$.

C. $\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}} - \sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}$.

D. $\sqrt{A+\sqrt{A^2-B}} - \sqrt{A-\sqrt{A^2-B}}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Có } A - \sqrt{B} = A - \sqrt{A^2 - (A^2 - B)}.$$

$$= \frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2} + \frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2} - 2\sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} \cdot \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}}$$

$$= \left(\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}} - \sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}} \right)^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{A-\sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}} - \sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}$$

$$\text{Vậy } \sqrt{A-\sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}} - \sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}$$

Câu 26: [Mức độ 2] Cho biểu thức $Q = \sqrt{4x^2 - 4x + 1} - \sqrt{x^2 - 6x + 9}$, với $1 \leq x \leq 3$ thì biểu thức rút gọn của Q là

- A.** $Q = 3x - 4$. **B.** $Q = x + 2$. **C.** $Q = -3x + 4$. **D.** $Q = -x - 2$.

Lời giải

Chọn A

$$Q = \sqrt{4x^2 - 4x + 1} - \sqrt{x^2 - 6x + 9}, \text{ với } 1 \leq x \leq 3.$$

$$= \sqrt{(2x-1)^2} - \sqrt{(x-3)^2} = |2x-1| - |x-3|, \text{ có } 1 \leq x \leq 3.$$

$$\Rightarrow Q = 2x - 1 + x - 3 = 3x - 4.$$

Vậy $Q = 3x - 4$.

Dạng 1.1.2. Kỹ thuật lũy thừa hai vế

1.1.2. 1. Lũy thừa bậc hai hai vế

A) Ví dụ mẫu

Câu 1: [Mức độ 2] Rút gọn biểu thức $A = \sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{2-\sqrt{3}}$.

Lời giải

Bình phương 2 vế ta được:

$$A^2 = 2 + \sqrt{3} + 2 - \sqrt{3} + 2\sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow A^2 = 4 + 2 \Leftrightarrow A^2 = 6 \Leftrightarrow A = \sqrt{6} \text{ (vì } A > 0 \text{)}.$$

Vậy $A = \sqrt{6}$.

Câu 2: [Mức độ 2] Rút gọn biểu thức $A = \sqrt{4+\sqrt{7}} - \sqrt{4-\sqrt{7}}$.

Lời giải

Bình phương 2 vế ta được:

$$A^2 = 4 + \sqrt{7} + 4 - \sqrt{7} - 2\sqrt{4+\sqrt{7}} \cdot \sqrt{4-\sqrt{7}} \Leftrightarrow A^2 = 8 - 2\sqrt{9} \Leftrightarrow A^2 = 2 \Leftrightarrow A = \sqrt{2} \text{ (vì } A > 0 \text{)}.$$

Vậy $A = \sqrt{2}$.

Câu 3: [Mức độ 2] Rút gọn biểu thức $A = \sqrt{\sqrt{61} + 2\sqrt{10+2\sqrt{5}}} + \sqrt{\sqrt{61} - 2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$.

Lời giải

Bình phương 2 vế ta được:

$$A^2 = \sqrt{61} + 2\sqrt{10+2\sqrt{5}} + \sqrt{61} - 2\sqrt{10+2\sqrt{5}} + 2\sqrt{\sqrt{61} + 2\sqrt{10+2\sqrt{5}}} \cdot \sqrt{\sqrt{61} - 2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow A^2 &= 2\sqrt{61} + 2\sqrt{61 - (2\sqrt{10} + 2\sqrt{5})^2} \Leftrightarrow A^2 = 2\sqrt{61} + 2\sqrt{21 - 8\sqrt{5}} \\ \Leftrightarrow A^2 &= 2\sqrt{61} + 2\sqrt{(4 - \sqrt{5})^2} \Leftrightarrow A^2 = 2\sqrt{61} + 2(4 - \sqrt{5}) \Leftrightarrow A^2 = 2\sqrt{61} + 8 - 2\sqrt{5} \\ \Leftrightarrow A &= \sqrt{2\sqrt{61} + 8 - 2\sqrt{5}} \text{ (vì } A > 0\text{)}. \\ \text{Vậy } A &= \sqrt{2\sqrt{61} + 8 - 2\sqrt{5}}. \end{aligned}$$

B) Bài tập

Câu 1: [Mức độ 3] Rút gọn biểu thức $A = \sqrt{\frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}} - 1}} - \sqrt{\frac{1}{\sqrt{3}} - \sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}} - 1}}$.

Lời giải

Bình phương 2 vế ta được:

$$\begin{aligned} A^2 &= \frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}} - 1} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}} - 1} - 2\sqrt{\frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}} - 1}} \cdot \sqrt{\frac{1}{\sqrt{3}} - \sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}} - 1}} \\ \Leftrightarrow A^2 &= \frac{2}{\sqrt{3}} - 2\sqrt{\frac{1}{\sqrt{3}} - \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right)} \Leftrightarrow A^2 = \frac{2}{\sqrt{3}} - 2\sqrt{\frac{4}{3} - \frac{2}{\sqrt{3}}} \\ \Leftrightarrow A^2 &= \frac{2}{\sqrt{3}} - 2\sqrt{\frac{4 - 2\sqrt{3}}{3}} \Leftrightarrow A^2 = \frac{2}{\sqrt{3}} - 2\sqrt{\frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{3}} \\ \Leftrightarrow A^2 &= \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}}(\sqrt{3} - 1) \Leftrightarrow A^2 = \frac{4\sqrt{3}}{3} - 2 \Leftrightarrow A = \sqrt{\frac{4\sqrt{3}}{3} - 2} \text{ (vì } A > 0\text{)}. \\ \text{Vậy } A &= \sqrt{\frac{4\sqrt{3}}{3} - 2}. \end{aligned}$$

Câu 2: [Mức độ 2] Rút gọn biểu thức $A = \frac{5 + \sqrt{5}}{5 - \sqrt{5}} + \frac{5 - \sqrt{5}}{5 + \sqrt{5}}$.

Lời giải

Bình phương 2 vế ta được:

$$\begin{aligned} A^2 &= \left(\frac{5 + \sqrt{5}}{5 - \sqrt{5}}\right)^2 + \left(\frac{5 - \sqrt{5}}{5 + \sqrt{5}}\right)^2 + 2 \cdot \frac{5 + \sqrt{5}}{5 - \sqrt{5}} \cdot \frac{5 - \sqrt{5}}{5 + \sqrt{5}} \\ \Leftrightarrow A^2 &= \left(\frac{5 + \sqrt{5}}{5 - \sqrt{5}}\right)^2 + \left(\frac{5 - \sqrt{5}}{5 + \sqrt{5}}\right)^2 + 2. \Leftrightarrow A^2 = \frac{7 + 3\sqrt{5}}{2} + \frac{7 - 3\sqrt{5}}{2} + 2 \\ \Leftrightarrow A^2 &= 7 + 2 \Leftrightarrow A^2 = 9 \Leftrightarrow A = 3 \text{ (vì } A > 0\text{)}. \\ \text{Vậy } A &= 3. \end{aligned}$$

Câu 3: [Mức độ 2] Rút gọn biểu thức $A = \sqrt{8 - 2\sqrt{15}} - \sqrt{8 + 2\sqrt{15}}$.

Lời giải

Bình phương 2 vế ta được:

$$\begin{aligned} A^2 &= 8 - 2\sqrt{15} + 8 + 2\sqrt{15} - 2\sqrt{8 - 2\sqrt{15}}\sqrt{8 + 2\sqrt{15}} \\ \Leftrightarrow A^2 &= 16 - 2\sqrt{64 - 4 \cdot 15} \Leftrightarrow A^2 = 16 - 2 \cdot 2 \Leftrightarrow A^2 = 12 \\ \Leftrightarrow A &= -2\sqrt{3} \text{ (vì } A < 0\text{)}. \end{aligned}$$

Vậy $A = -2\sqrt{3}$.

Câu 4: [Mức độ 2] Rút gọn biểu thức $A = (\sqrt{5} - 1)\sqrt{6 + 2\sqrt{5}}$.

Lời giải

Bình phương 2 vế ta được:

$$A^2 = (\sqrt{5} - 1)^2 (6 + 2\sqrt{5})$$

$$\Leftrightarrow A^2 = (6 - 2\sqrt{5})(6 + 2\sqrt{5}) \Leftrightarrow A^2 = 36 - (2\sqrt{5})^2$$

$$\Leftrightarrow A^2 = 36 - 20 \Leftrightarrow A^2 = 16$$

$$\Leftrightarrow A = 4 \text{ (vì } A > 0 \text{)}.$$

Vậy $A = 4$.

C) Trắc nghiệm

Câu 5: [Mức độ 2] Rút gọn biểu thức $A = \sqrt{6 + 2\sqrt{5}} - \sqrt{6 - 2\sqrt{5}}$.

A. 2.

B. $4\sqrt{5}$.

C. 6.

D. $\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn A

Bình phương hai vế ta được:

$$A^2 = 12 - 2\sqrt{6 + 2\sqrt{5}} \cdot \sqrt{6 - 2\sqrt{5}}$$

$$\Leftrightarrow A^2 = 12 - 2\sqrt{16} \Leftrightarrow A^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow A = 2 \text{ (vì } A > 0 \text{)}$$

Vậy $A = 2$.

Câu 6: [Mức độ 2] Rút gọn biểu thức $A = \sqrt{6 + 2\sqrt{5}} + \sqrt{6 - 2\sqrt{5}}$.

A. 2.

B. $2\sqrt{5}$.

C. 6.

D. $\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn B

Bình phương hai vế ta được:

$$A^2 = 12 + 2\sqrt{6 + 2\sqrt{5}} \cdot \sqrt{6 - 2\sqrt{5}}$$

$$\Leftrightarrow A^2 = 12 + 2\sqrt{16} \Leftrightarrow A^2 = 20$$

$$\Leftrightarrow A = 2\sqrt{5} \text{ (vì } A > 0 \text{)}$$

Vậy $A = 2\sqrt{5}$.

Câu 7: [Mức độ 2] Rút gọn biểu thức $A = \sqrt{6 - 2\sqrt{5}} - \sqrt{6 + 2\sqrt{5}}$.

A. 2.

B. $4\sqrt{5}$.

C. 6.

D. -2 .

Lời giải

Chọn D

Bình phương hai vế ta được

$$A^2 = 12 - 2\sqrt{6 - 2\sqrt{5}} \cdot \sqrt{6 + 2\sqrt{5}}$$

$$\Leftrightarrow A^2 = 12 - 2\sqrt{16} \Leftrightarrow A^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow A = -2 \text{ (vì } A < 0)$$

Vậy $A = -2$.

Câu 8: [Mức độ 2] Rút gọn biểu thức $A = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}} - \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}$.

A. 2.

B. 1.

C. 6.

D. $\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn B

Bình phương hai vế ta được

$$A^2 = \frac{2+\sqrt{3}}{2} + \frac{2-\sqrt{3}}{2} - 2\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}} \cdot \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}$$

$$\Leftrightarrow A^2 = 2 - 2\sqrt{\frac{1}{4}} \Leftrightarrow A^2 = 1 \Leftrightarrow A = 1 \text{ (vì } A > 0)$$

Vậy $A = 1$.

Câu 9: [Mức độ 2] Rút gọn biểu thức $A = (3\sqrt{2} + \sqrt{6})\sqrt{6 - 3\sqrt{3}}$.

A. 2.

B. 6.

C. $3\sqrt{2}$.

D. $\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn B

Bình phương hai vế ta được:

$$A^2 = (3\sqrt{2} + \sqrt{6})^2 (6 - 3\sqrt{3})$$

$$\Leftrightarrow A^2 = (24 + 12\sqrt{3})(6 - 3\sqrt{3})$$

$$\Leftrightarrow A^2 = 12 \cdot 3 \cdot (2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) \Leftrightarrow A^2 = 36 \Leftrightarrow A = 6 \text{ (vì } A > 0)$$

Vậy $A = 6$.

Câu 10: [Mức độ 2] Rút gọn biểu thức $A = \sqrt{7 - 2\sqrt{10}} - \sqrt{7 + 2\sqrt{10}}$.

A. 2.

B. $4\sqrt{5}$.

C. $-2\sqrt{2}$.

D. -2 .

Lời giải

Chọn C

Bình phương hai vế ta được:

$$A^2 = 14 - 2\sqrt{7 - 2\sqrt{10}} \cdot \sqrt{7 + 2\sqrt{10}}$$

$$\Leftrightarrow A^2 = 14 - 2\sqrt{49 - 4 \cdot 10} \Leftrightarrow A^2 = 14 - 2 \cdot 3$$

$$\Leftrightarrow A^2 = 8 \Leftrightarrow A = -2\sqrt{2} \text{ (vì } A < 0).$$

Vậy $A = -2\sqrt{2}$.

Câu 11: [Mức độ 2] Rút gọn biểu thức $A = \sqrt{7 - 2\sqrt{10}} + \sqrt{7 + 2\sqrt{10}}$.

A. $2\sqrt{2}$.

B. $4\sqrt{5}$.

C. 6.

D. $\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn A

Bình phương hai vế ta được:

$$A^2 = 14 + 2\sqrt{7-2\sqrt{10}} \cdot \sqrt{7+2\sqrt{10}}$$

$$\Leftrightarrow A^2 = 14 + 2\sqrt{49-4 \cdot 10}$$

$$\Leftrightarrow A^2 = 14 + 2 \cdot 3 \Leftrightarrow A^2 = 20 \Leftrightarrow A = 2\sqrt{2} \text{ (vì } A > 0)$$

$$\text{Vậy } A = 2\sqrt{2}.$$

Câu 12: [Mức độ 2] Rút gọn biểu thức $A = (1-\sqrt{5})\sqrt{6+2\sqrt{5}}$.

A. $2\sqrt{2}$.

B. $4\sqrt{5}$.

C. -4 .

D. $\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn C

Bình phương hai vế ta được

$$A^2 = (1-\sqrt{5})^2 (6+2\sqrt{5})$$

$$\Leftrightarrow A^2 = (6-2\sqrt{5})(6+2\sqrt{5}) \Leftrightarrow A^2 = 36 - (2\sqrt{5})^2$$

$$\Leftrightarrow A^2 = 36 - 20 \Leftrightarrow A^2 = 16$$

$$\Leftrightarrow A = -4 \text{ (vì } A < 0).$$

$$\text{Vậy } A = -4.$$

Dạng 1.1.2.1. Lũy thừa bậc ba hai vế**A) Ví dụ mẫu**

Câu 1: [Mức độ 3] Rút gọn biểu thức $A = \sqrt[3]{44+18\sqrt{6}} + \sqrt[3]{44-18\sqrt{6}}$.

Lời giải

Lập phương 2 vế ta được:

$$A^3 = 44+18\sqrt{6} + 44-18\sqrt{6} + 3A \cdot \sqrt[3]{44^2 - (18\sqrt{6})^2}$$

$$\Leftrightarrow A^3 = 88 + 3A \cdot (-2) \Leftrightarrow A^3 + 6A - 88 = 0$$

$$\Leftrightarrow (A-4)(A^2+4A+22) = 0 \Leftrightarrow A = 4 \text{ (vì } A^2+4A+22 > 0).$$

$$\text{Vậy } A = 4.$$

Câu 2: [Mức độ 3] Rút gọn biểu thức $A = \sqrt[3]{6\sqrt{3}+10} - \sqrt[3]{6\sqrt{3}-10}$.

Lời giải

Lập phương hai vế ta có:

$$A^3 = (\sqrt[3]{6\sqrt{3}+10} - \sqrt[3]{6\sqrt{3}-10})^3$$

$$\Leftrightarrow A^3 = 6\sqrt{3}+10 - 3 \cdot \sqrt[3]{6\sqrt{3}+10} \cdot \sqrt[3]{6\sqrt{3}-10} - 10 \cdot (\sqrt[3]{6\sqrt{3}+10} + \sqrt[3]{6\sqrt{3}-10}) - 6\sqrt{3}+10$$

$$\Leftrightarrow A^3 = 20 - 3\sqrt[3]{(6\sqrt{3}+10)(6\sqrt{3}-10)} \cdot A$$

$$\Leftrightarrow A^3 + 6A - 20 = 0 \Leftrightarrow (A-2)(A^2+2A+10) = 0 \Leftrightarrow A = 2.$$

Câu 3: [Mức độ 3] Rút gọn biểu thức $B = \sqrt[3]{2-\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2+\sqrt{5}}$.

Lời giải

Lập phương hai vế ta có: $B^3 = 2 - \sqrt{5} + 3\sqrt[3]{2 - \sqrt{5}}\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}}(\sqrt[3]{2 - \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}}) + 2 + \sqrt{5}$
 $B^3 = 4 + 3\sqrt[3]{(2 - \sqrt{5})(2 + \sqrt{5})}B \Leftrightarrow B^3 = 4 - 3B \Leftrightarrow B^3 + 3B - 4 = 0 \Leftrightarrow (B - 1)(B^2 + B + 4) = 0$
 $\Leftrightarrow B = 1$ (Vì $B^2 + B + 4 > 0$).

Câu 4: [Mức độ 3] Cho $X = \sqrt[3]{3 + 2\sqrt{2}} + \sqrt[3]{3 - 2\sqrt{2}}$, và $Y = \sqrt[3]{17 + 12\sqrt{2}} + \sqrt[3]{17 - 12\sqrt{2}}$
 Rút gọn biểu thức sau: $A = X^3 + Y^3 - 3(X + Y) + 2000$

Lời giải

Lập phương hai vế ta có:
$$\begin{cases} X^3 = 3X + 6 \\ Y^3 = 3Y + 34 \end{cases}$$

Suy ra: $X^3 + Y^3 = 3(X + Y) + 40 \Leftrightarrow X^3 + Y^3 - 3(X + Y) = 40$.

Vậy $A = 40 + 2000 = 2040$.

Dạng 1.1.3. KỸ THUẬT TÌM ĐẾN ĐẠI LƯỢNG LIÊN HỢP**I. PHẦN VÍ DỤ**

Rút gọn các biểu thức sau:

a) $(\sqrt{7} + 1)(\sqrt{14} - \sqrt{2})$

b) $(\sqrt{5} + 2)(\sqrt{15} - 2\sqrt{3}) : \sqrt{3}$

c) $(\sqrt{5} + 3)(\sqrt{2} - \sqrt{10})\sqrt{3 - \sqrt{5}}$

d) $\sqrt[3]{16 + 2\sqrt[3]{4}} + 1 \cdot \left[(\sqrt[3]{4} - 1)^2 + \sqrt[3]{4} \right]$

e) $\left[\sqrt{(\sqrt{3} + 2)^2} - \sqrt[3]{(4\sqrt{3} - 4\sqrt{2})} \sqrt[3]{2(\sqrt{2} + \sqrt{3})} + \sqrt{(\sqrt{3} - 2)^2} \right]^5$

Lời giải

a) Ta có: $(\sqrt{7} + 1)(\sqrt{14} - \sqrt{2}) = (\sqrt{7} + 1)(\sqrt{7} - 1)\sqrt{2} = (\sqrt{7}^2 - 1^2)\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$.

b) Ta có $(\sqrt{5} + 2)(\sqrt{15} - 2\sqrt{3}) : \sqrt{3} = (\sqrt{5} + 2)(\sqrt{5} - 2)\sqrt{3} : \sqrt{3} = \sqrt{5}^2 - 2^2 = 1$.

c) Ta có $(\sqrt{5} + 3)(\sqrt{2} - \sqrt{10})\sqrt{3 - \sqrt{5}}$

$$= \sqrt{\sqrt{5} + 3} \cdot \sqrt{\sqrt{5} + 3} \cdot \sqrt{3 - \sqrt{5}} \cdot (\sqrt{2} - \sqrt{10})$$

$$= \sqrt{\sqrt{5} + 3} \cdot \sqrt{3^2 - \sqrt{5}^2} \cdot \sqrt{2} \cdot (1 - \sqrt{5}) = \sqrt{2\sqrt{5} + 6} \cdot \sqrt{4} \cdot (1 - \sqrt{5})$$

$$= 2 \cdot \sqrt{(\sqrt{5} + 1)^2} \cdot (1 - \sqrt{5}) = 2 \cdot \sqrt{(\sqrt{5} + 1)^2} \cdot (1 - \sqrt{5}) = 2 \cdot |\sqrt{5} + 1| \cdot (1 - \sqrt{5})$$

$$= 2 \cdot (\sqrt{5} + 1) \cdot (1 - \sqrt{5}) = 2(1^2 - \sqrt{5}^2) = -8.$$

d) Ta có $\sqrt[3]{16 + 2\sqrt[3]{4}} + 1 \cdot \left[(\sqrt[3]{4} - 1)^2 + \sqrt[3]{4} \right] = \sqrt{(\sqrt[3]{4} + 1)^2} (\sqrt[3]{4}^2 - \sqrt[3]{4} + 1)$

$$= |\sqrt[3]{4} + 1| (\sqrt[3]{4}^2 - \sqrt[3]{4} + 1) = (\sqrt[3]{4} + 1)(\sqrt[3]{4}^2 - \sqrt[3]{4} + 1) = \sqrt[3]{4}^3 + 1^3 = 5.$$

$$\begin{aligned}
\text{e)} & \left[\sqrt{(\sqrt{3}+2)^2} - \sqrt[3]{(4\sqrt{3}-4\sqrt{2})} \sqrt[3]{2(\sqrt{2}+\sqrt{3})} + \sqrt{(\sqrt{3}-2)^2} \right]^5 \\
& = \left[|\sqrt{3}+2| - \sqrt[3]{8(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{2}+\sqrt{3})} + |\sqrt{3}-2| \right]^5 = \left[\sqrt{3}+2 - \sqrt[3]{8} \sqrt[3]{(\sqrt{3}^2 - \sqrt{2}^2)} + 2 - \sqrt{3} \right]^5 \\
& = \left[4 - 2\sqrt[3]{1} \right]^5 = 2^5 = 32.
\end{aligned}$$

II. PHẦN TỰ LUẬN

Câu 5: Rút gọn các biểu thức sau:

- a) $(\sqrt{11+2\sqrt{30}} - \sqrt{8-4\sqrt{3}}) \cdot (\sqrt{5}-\sqrt{2})$.
- b) $(3-\sqrt{6}+\sqrt{3}-\sqrt{2})(3+\sqrt{6}-\sqrt{3}-\sqrt{2})$.
- c) $\sqrt{\sqrt[3]{9}-2\sqrt[3]{3}+1} \cdot \left[(\sqrt[3]{3}+1)^2 - \sqrt[3]{3} \right]$.
- d) $\sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$.
- e) $(\sqrt{1+2\sqrt{5\sqrt{5}-11}} - \sqrt{3-\sqrt{5}}) \cdot (\sqrt{\sqrt{5}+2})$.

Lời giải

- a) $(\sqrt{11+2\sqrt{30}} - \sqrt{8-4\sqrt{3}}) \cdot (\sqrt{5}-\sqrt{2})$
 $= \left(\sqrt{(\sqrt{6}+\sqrt{5})^2} - \sqrt{2} \cdot \sqrt{4-2\sqrt{3}} \right) \cdot (\sqrt{5}-\sqrt{2})$
 $= \left(\sqrt{6}+\sqrt{5} - \sqrt{2} \cdot \sqrt{(\sqrt{3}-1)^2} \right) \cdot (\sqrt{5}-\sqrt{2})$
 $= (\sqrt{6}+\sqrt{5} - \sqrt{2} \cdot (\sqrt{3}-1)) \cdot (\sqrt{5}-\sqrt{2})$
 $= (\sqrt{5}+\sqrt{2}) \cdot (\sqrt{5}-\sqrt{2}) = 3$.
- b) $(3-\sqrt{6}+\sqrt{3}-\sqrt{2})(3+\sqrt{6}-\sqrt{3}-\sqrt{2})$
 $= (3-\sqrt{2})^2 - (\sqrt{3}-\sqrt{6})^2 = (3-\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{6}) [3-\sqrt{2} - (\sqrt{3}-\sqrt{6})] = 2$
- c) $\sqrt{\sqrt[3]{9}-2\sqrt[3]{3}+1} \cdot \left[(\sqrt[3]{3}+1)^2 - \sqrt[3]{3} \right]$
 $= \sqrt{(\sqrt[3]{3}-1)^2} \cdot (\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{3} + 1) = (\sqrt[3]{3}-1) (\sqrt[3]{3}^2 + \sqrt[3]{3} + 1) = 2$.
- d) $\sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$
 $= \sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}} \cdot \sqrt{2^2 - (2+\sqrt{2+\sqrt{3}})}$
 $= \sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$
 $= \sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{3}} = 1$.

$$\begin{aligned}
& e) \left(\sqrt{1+2\sqrt{5\sqrt{5}-11}} - \sqrt{3-\sqrt{5}} \right) \cdot \left(\sqrt{\sqrt{5}+2} \right) \\
& = \left(\sqrt{3-\sqrt{5}+2\sqrt{(3-\sqrt{5}) \cdot (\sqrt{5}-2)} + \sqrt{5}-2} - \sqrt{3-\sqrt{5}} \right) \cdot \left(\sqrt{\sqrt{5}+2} \right) \\
& = \left(\sqrt{3-\sqrt{5}} + \sqrt{\sqrt{5}-2} - \sqrt{3-\sqrt{5}} \right) \cdot \left(\sqrt{\sqrt{5}+2} \right) = \sqrt{\sqrt{5}-2} \cdot \sqrt{\sqrt{5}+2} = 1.
\end{aligned}$$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\sqrt{2020} - 2\sqrt{2019} \cdot (\sqrt{2019} + 1)$

b) $\sqrt{14+8\sqrt{3}} \cdot (2\sqrt{2} - 6)$

c) $(3\sqrt{2} + \sqrt{6})\sqrt{6-3\sqrt{3}}$

d) $\sqrt{\sqrt{6} + \sqrt{3+2\sqrt{2}}} \cdot \sqrt{\sqrt{6} - \sqrt{3+2\sqrt{2}}}$

e) $\sqrt{\sqrt[3]{25} - 2\sqrt[3]{5} + 1} \cdot \left[\sqrt[3]{5} - (\sqrt[3]{5} + 1)^2 \right]$

f) $\left\{ \sqrt{\sqrt[3]{4} - 2\sqrt[3]{2} + 1} \cdot \left[(\sqrt[3]{2} + 1)^2 - \sqrt[3]{2} \right] \right\}^{2020}$

g) $\sqrt{2-\sqrt{3}}(\sqrt{6}-\sqrt{2})(2+\sqrt{3})$

h) $(5+2\sqrt{6})\sqrt{49-20\sqrt{6}}\sqrt{5-2\sqrt{6}}$

i) $\sqrt{4+\sqrt{7}}(\sqrt{14}+\sqrt{2})(4\sqrt{7}-7)$

j) $(\sqrt{22}-\sqrt{2})(11+\sqrt{216})\sqrt{6-\sqrt{11}}$

k) $\left[\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}} - \sqrt[3]{(25\sqrt{3}-25\sqrt{2})} \sqrt[3]{(\sqrt{50}+\sqrt{75})} + \sqrt{(\sqrt{3}-2)^2} \right]^{15}$

III. PHẦN TRẮC NGHIỆM

Câu 6: Rút gọn $(\sqrt{6}-\sqrt{2}) \cdot (2+\sqrt{3}) \cdot \sqrt{2-\sqrt{3}}$ được kết quả là?

A. 2.

B. $\sqrt{6}-\sqrt{2}$.

C. -2.

D. $2\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn A

Xét $(\sqrt{6}-\sqrt{2}) \cdot (2+\sqrt{3}) \cdot \sqrt{2-\sqrt{3}} = \sqrt{2}(\sqrt{3}-1)\sqrt{2+\sqrt{3}} = (\sqrt{3}-1)\sqrt{4+2\sqrt{3}} = 2$.

Câu 7: Cho $A = (2+\sqrt{5}+\sqrt{3})(2+\sqrt{5}-\sqrt{3})$. Chọn đáp án đúng.

A. $A = 12 - 2\sqrt{15}$.

B. $A = 6 + 4\sqrt{5}$.

C. $A = 12 + 4\sqrt{5}$.

D. $A = 2\sqrt{15} - 4$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Xét } A = (2 + \sqrt{5} + \sqrt{3})(2 + \sqrt{5} - \sqrt{3}) = (2 + \sqrt{5})^2 - 3 = 6 + 4\sqrt{5}.$$

Câu 8: Cho $B = (2 + \sqrt{7})\sqrt{11 - 4\sqrt{7}}$. Chọn đáp án đúng.

- A. $B = -3$. B. $B = 11 + 4\sqrt{7}$. C. $B = -11 - 4\sqrt{7}$. D. $B = 3$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Xét } (2 + \sqrt{7})\sqrt{11 - 4\sqrt{7}} = (2 + \sqrt{7})\sqrt{(\sqrt{7} - 2)^2} = 3.$$

Câu 9: Cho $C = (3\sqrt{5} + 1)\sqrt{46 - 6\sqrt{5}}$. Chọn đáp án đúng.

- A. $C = 44$. B. $C = 46 + 6\sqrt{5}$. C. $C = -44$. D. $C = -46 - 6\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Xét } C = (3\sqrt{5} + 1)\sqrt{46 - 6\sqrt{5}} = (3\sqrt{5} + 1)\sqrt{(3\sqrt{5} - 1)^2} = 44.$$

Câu 10: Cho $D = \left[(\sqrt{6} + \sqrt{2})\sqrt{2 - \sqrt{3}} - \sqrt{7 - 4\sqrt{3}} \right]^2$. Chọn đáp án đúng.

- A. $D = -\sqrt{3}$. B. $D = 3$. C. $D = 4 - \sqrt{3}$. D. $D = \sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn B

$$\begin{aligned} \text{Xét } D &= \left[(\sqrt{6} + \sqrt{2})\sqrt{2 - \sqrt{3}} - \sqrt{7 - 4\sqrt{3}} \right]^2 = \left[(\sqrt{3} + 1)\sqrt{4 - 2\sqrt{3}} - \sqrt{7 - 4\sqrt{3}} \right]^2 \\ &= \left[(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1) - (2 - \sqrt{3}) \right]^2 = (2 - 2 + \sqrt{3})^2 = 3. \end{aligned}$$

Câu 11: Kết quả của phép tính $\left(\sqrt{17 - \sqrt{33}}\sqrt{17 + \sqrt{33}} \right)^5 : (-8)^6$ là:

- A. -2^2 . B. -8 . C. 8 . D. 4 .

Lời giải

Chọn D

$$\text{Có } \sqrt{17 - \sqrt{33}}\sqrt{17 + \sqrt{33}} = \sqrt{(17 - \sqrt{33})(17 + \sqrt{33})} = \sqrt{17^2 - \sqrt{33}^2} = \sqrt{256} = 16$$

$$\text{Suy ra } \left(\sqrt{17 - \sqrt{33}}\sqrt{17 + \sqrt{33}} \right)^5 : (-8)^6 = 16^5 : 8^6 = 2^{20} : 2^{18} = 4.$$

Câu 12: Cho $A = \sqrt{2020} - \sqrt{2019}$. Khi đó:

- A. $\frac{1}{\sqrt{\sqrt{2020} - \sqrt{2019}}}$. B. $\frac{1}{\sqrt{2020} - \sqrt{2019}}$.
C. $A = \frac{1}{\sqrt{2020} + \sqrt{2019}}$. D. $\frac{1}{\sqrt{\sqrt{2020} + \sqrt{2019}}}$.

Lời giải

Chọn C

Có $(\sqrt{2020} - \sqrt{2019})(\sqrt{2020} + \sqrt{2019}) = 1$ suy ra $A = \sqrt{2020} - \sqrt{2019} = \frac{1}{\sqrt{2020} + \sqrt{2019}}$

Câu 13: Cho $M = \sqrt{3 + \sqrt{5}}$; $N = 4 : (\sqrt{10} - \sqrt{2})$. Tính giá trị biểu thức $M^{2019} - N^{2019}$.

A. 0.**B. 1.****C. $(2\sqrt{5})^{2019}$.****D. $3 + 2\sqrt{5}$.****Lời giải****Chọn A**

Có

$$\begin{aligned} M &= \sqrt{3 + \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3 + \sqrt{5}}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6 + 2\sqrt{5}}}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{(\sqrt{5} + 1)^2}}{\sqrt{2}} = \frac{|\sqrt{5} + 1|}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5} + 1}{\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{5} + 1)(\sqrt{5} - 1)}{\sqrt{2}(\sqrt{5} - 1)} = \frac{4}{\sqrt{10} - \sqrt{2}} = N. \end{aligned}$$

Suy ra $M^{2019} - N^{2019} = 0$.

Câu 14: Tính $P = (7 + 4\sqrt{3})^{2019} \cdot (4\sqrt{3} - 7)^{2020}$.

A. $P = 1$.**B. $P = (7 + 4\sqrt{3})^{2020}$.****C. $P = 4\sqrt{3} - 7$.****D. $P = 7 - 4\sqrt{3}$.****Lời giải****Chọn D**

Có
$$P = (7 + 4\sqrt{3})^{2019} \cdot (4\sqrt{3} - 7)^{2020} = (7 + 4\sqrt{3})^{2019} \cdot (7 - 4\sqrt{3})^{2020}$$

$$= [(7 + 4\sqrt{3})(7 - 4\sqrt{3})]^{2019} \cdot (7 - 4\sqrt{3}) = 7 - 4\sqrt{3}.$$

Câu 15: Tính $Q = (3 - 2\sqrt{2})^{21} \cdot (17 + \sqrt{288})^{11}$.

A. $Q = 3 - 2\sqrt{2}$.**B. $Q = (3 + 2\sqrt{2})^2$.****C. $Q = 3 + 2\sqrt{2}$.****D. $Q = (3 - 2\sqrt{2})^2$.****Lời giải****Chọn C**

Có
$$Q = (3 - 2\sqrt{2})^{21} \cdot (17 + \sqrt{288})^{11} = (3 - 2\sqrt{2})^{21} \cdot (17 + 12\sqrt{2})^{11} = (3 - 2\sqrt{2})^{21} \cdot [(3 + 2\sqrt{2})^2]^{11}$$

$$= (3 - 2\sqrt{2})^{21} \cdot (3 + 2\sqrt{2})^{22} = [(3 - 2\sqrt{2})(3 + 2\sqrt{2})]^{21} \cdot (3 + 2\sqrt{2}) = 3 + 2\sqrt{2}.$$

I. TỰ LUẬN

Câu 16: Tính $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}}$

Lời giải

Ta có

$$x = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}} \Leftrightarrow x^3 = 2+\sqrt{5} + 2-\sqrt{5} + 3\sqrt[3]{(2+\sqrt{5})(2-\sqrt{5})} \left(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}} \right)$$

$$\Leftrightarrow x^3 = 4 - 3x \Leftrightarrow x^3 + 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + x + 4) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ (vì } x^2 + x + 4 > 0 \forall x \in \mathbb{R} \text{)}.$$

Vậy $x = 1$.

Câu 17: Tính $x = \sqrt[3]{3 + \sqrt{\frac{368}{27}}} + \sqrt[3]{3 - \sqrt{\frac{368}{27}}}$

Lời giải

Ta có

$$x^3 = 3 + \sqrt{\frac{368}{27}} + 3 - \sqrt{\frac{368}{27}} + 3\sqrt[3]{\left(3 + \sqrt{\frac{368}{27}}\right)\left(3 - \sqrt{\frac{368}{27}}\right)} \left(\sqrt[3]{3 + \sqrt{\frac{368}{27}}} + \sqrt[3]{3 - \sqrt{\frac{368}{27}}} \right)$$

$$\Leftrightarrow x^3 = 6 - 5x \Leftrightarrow x^3 + 5x - 6 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + x + 6) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ (do } x^2 + x + 6 > 0 \forall x \text{)}$$

Vậy $x = 1$

Câu 18: Tính $x = \sqrt[3]{9+4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}$

Lời giải

Ta có

$$x^3 = 9 + 4\sqrt{5} + 9 - 4\sqrt{5} + 3\sqrt[3]{(9+4\sqrt{5})(9-4\sqrt{5})} \left(\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{9-4\sqrt{5}} \right)$$

$$\Leftrightarrow x^3 = 18 + 3x \Leftrightarrow x^3 - 3x - 18 = 0 \Leftrightarrow (x-3)(x^2 + 3x + 6) = 0 \Leftrightarrow x = 3 \text{ (do } x^2 + 3x + 6 > 0 \forall x \in \mathbb{R} \text{)}$$

Vậy $x = 3$.

Câu 19: Chứng minh rằng $(\sqrt[3]{2} + 1)^3 \sqrt[3]{\frac{\sqrt[3]{2} - 1}{3}} = 1$

Lời giải

Đặt $x = (\sqrt[3]{2} + 1)^3 \sqrt[3]{\frac{\sqrt[3]{2} - 1}{3}}$ suy ra $x^3 = (\sqrt[3]{2} + 1)^3 \cdot \frac{\sqrt[3]{2} - 1}{3} \Leftrightarrow x^3 = \left[2 + 1 + 3\sqrt[3]{2}(\sqrt[3]{2} + 1) \right] \cdot \frac{\sqrt[3]{2} - 1}{3}$

$$\Leftrightarrow x^3 = (1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4})(\sqrt[3]{2} - 1) \Leftrightarrow x^3 = 1 \Leftrightarrow x = 1.$$

Vậy $(\sqrt[3]{2} + 1)^3 \sqrt[3]{\frac{\sqrt[3]{2} - 1}{3}} = 1$.

Câu 20: Chứng minh rằng x là số nguyên biết:

a. $x = \sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} - \sqrt[3]{14\sqrt{2}-20}$ b. $x = \sqrt[3]{1+\frac{\sqrt{84}}{9}} + \sqrt[3]{1-\frac{\sqrt{84}}{9}}$

Lời giải

a. Ta có: $x^3 = 20 + 14\sqrt{2} - 14\sqrt{2} + 20 - 3\sqrt[3]{(20+14\sqrt{2})(14\sqrt{2}-20)} \left(\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} - \sqrt[3]{14\sqrt{2}-20} \right)$

$$\Leftrightarrow x^3 = 40 + 6x \Leftrightarrow x^3 - 6x - 40 = 0 \Leftrightarrow x = 4. \text{ Suy ra điều phải chứng minh.}$$

b. Ta có: $x^3 = 1 + \frac{\sqrt{84}}{9} + 1 - \frac{\sqrt{84}}{9} + 3\sqrt[3]{\left(1 + \frac{\sqrt{84}}{9}\right)\left(1 - \frac{\sqrt{84}}{9}\right)\left(\sqrt[3]{1 + \frac{\sqrt{84}}{9}} + \sqrt[3]{1 - \frac{\sqrt{84}}{9}}\right)} \Leftrightarrow x^3 = 2 - x$
 $\Leftrightarrow x^3 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Suy ra điều phải chứng minh.

Câu 21: Chứng minh rằng $x = \sqrt[3]{\sqrt{5} + 2} - \sqrt[3]{\sqrt{5} - 2}$ là nghiệm của phương trình $x^3 + 3x - 4 = 0$.

Lời giải

Ta có $x^3 = \sqrt{5} + 2 - \sqrt{5} + 2 - 3\sqrt[3]{(\sqrt{5} + 2)(\sqrt{5} - 2)(\sqrt[3]{\sqrt{5} + 2} - \sqrt[3]{\sqrt{5} - 2})}$

$\Leftrightarrow x^3 = 4 - 3x \Leftrightarrow x^3 + 3x - 4 = 0$.

Vậy $x = \sqrt[3]{\sqrt{5} + 2} - \sqrt[3]{\sqrt{5} - 2}$ là nghiệm của phương trình $x^3 + 3x - 4 = 0$.

II. TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Biết $x = \sqrt[3]{44 + 18\sqrt{6}} = a + \sqrt{b}$. Tổng $a + b$ bằng

A. 7.

B. 8.

C. 6.

D. 9.

Lời giải

Chọn B

Cách 1.

Giả sử x viết được dưới dạng $x = \sqrt[3]{(a + b)^3} \Leftrightarrow x^3 = a(a^2 + 3b^2) + b(b^2 + 3a^2)$.

Suy ra $44 + 18\sqrt{6} = a(a^2 + 3b^2) + b(b^2 + 3a^2)$.

Ta lấy giá trị như sau: $18\sqrt{6} = a(a^2 + 3b^2) \Rightarrow \begin{cases} a = \sqrt{6} \\ a^2 + 3b^2 = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \sqrt{6} \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow a + b = 8$.

Cách làm trên chỉ phù hợp với trắc nghiệm và trong một vài trường hợp cụ thể.

Cách 2.

Đi từ suy luận nếu rút gọn được $A = \sqrt[3]{a + \sqrt{b}} = m + \sqrt{n}$ thì $B = \sqrt[3]{a - \sqrt{b}} = m - \sqrt{n}$ nên ta

có công thức $A = \frac{A + B + \sqrt{(A - B)^2}}{2}$.

Dùng máy tính CASIO như sau:

Gán $A = \sqrt[3]{44 + 18\sqrt{6}}$

Gán $B = \sqrt[3]{44 - 18\sqrt{6}}$.

Nhập vào máy tính $\frac{A + B + \sqrt{(A - B)^2}}{2}$ được kết quả $A = 2 + \sqrt{6} \Rightarrow a + b = 8$.

Câu 2: Biết $x = \sqrt[3]{\frac{1801}{8} + \frac{3015}{4}\sqrt{6}} = \frac{a}{b} + c\sqrt{d}$ với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tổng $a + b + c + d$ bằng

A. 13.

B. 14.

C. 16.

D. 12.

Lời giải

Chọn B

Đi từ suy luận nếu rút gọn được $A = \sqrt[3]{a+\sqrt{b}} = m+\sqrt{n}$ thì $B = \sqrt[3]{a-\sqrt{b}} = m-\sqrt{n}$ nên ta có công thức $A = \frac{A+B+\sqrt{(A-B)^2}}{2}$.

Dùng máy tính CASIO như sau:

$$\text{Gán } A = \sqrt[3]{\frac{1801}{8} + \frac{3015}{4}\sqrt{6}}$$

$$\text{Gán } B = \sqrt[3]{\frac{1801}{8} - \frac{3015}{4}\sqrt{6}}.$$

Nhập vào máy tính $\frac{A+B+\sqrt{(A-B)^2}}{2}$ được kết quả $A = \frac{1+10\sqrt{6}}{2} = \frac{1}{2} + 5\sqrt{6}$

$$\Rightarrow a+b+c+d=14.$$

Dạng 1.2. CÁC BÀI TOÁN CƠ BẢN VỀ BIỂU THỨC CHỨA CĂN Ở MẪU

Câu 3: Trục căn thức ở mẫu: $A = \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{6}}$

Lời giải

$$A = \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \frac{(2-\sqrt{3}) \cdot \sqrt{6}}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}-3\sqrt{2}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{3} - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Câu 4: Rút gọn biểu thức $A = \sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{54}$

Lời giải

$$A = \sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{54} = \frac{\sqrt{6}}{2} - 3\sqrt{6} = -\frac{5\sqrt{6}}{2}$$

Câu 5: Tính giá trị của biểu thức: $B = \frac{6}{\sqrt{3}-2} + \frac{4}{3\sqrt{3}-5}$

Lời giải

$$\begin{aligned} B &= \frac{6}{\sqrt{3}-2} + \frac{4}{3\sqrt{3}-5} = \frac{6(\sqrt{3}+2)}{(\sqrt{3}-2)(\sqrt{3}+2)} + \frac{4(3\sqrt{3}+5)}{(3\sqrt{3}-5)(3\sqrt{3}+5)} \\ &= -(6\sqrt{3}+12) + \frac{4(3\sqrt{3}+5)}{2} = -6\sqrt{3}-12+6\sqrt{3}+10 = -2. \end{aligned}$$

Câu 6: Rút gọn biểu thức $B = \frac{4}{3-\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}-2}$

Lời giải

$$\begin{aligned} B &= \frac{4}{3-\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}-2} = \frac{4(3+\sqrt{5})}{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})} - \frac{1(\sqrt{5}+2)}{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)} \\ &= \frac{12+4\sqrt{5}}{3^2-(\sqrt{5})^2} - \frac{\sqrt{5}+2}{(\sqrt{5})^2-2^2} = \frac{12+4\sqrt{5}}{4} - \frac{\sqrt{5}+2}{1} = \frac{12+4\sqrt{5}-4\sqrt{5}-8}{4} = 1 \end{aligned}$$

Câu 7: Rút gọn biểu thức $C = \left(\frac{4}{2+\sqrt{6}} + \frac{2}{2-\sqrt{3}} \right) : \left(\frac{3\sqrt{2}+3}{\sqrt{3}} \right)$

Lời giải

$$C = \left(\frac{4}{2+\sqrt{6}} + \frac{2}{2-\sqrt{3}} \right) : \left(\frac{3\sqrt{2}+3}{\sqrt{3}} \right)$$

$$C = \left[\frac{4(2-\sqrt{6})}{(2+\sqrt{6})(2-\sqrt{6})} + \frac{2(2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} \right] : \frac{\sqrt{3}(\sqrt{6}+\sqrt{3})}{\sqrt{3}}$$

$$C = [-2(2-\sqrt{6}) + 2(2+\sqrt{3})] : (\sqrt{6}+\sqrt{3})$$

$$C = (2\sqrt{6} + 2\sqrt{3}) \cdot \frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{3}}$$

$$C = 2(\sqrt{6} + \sqrt{3}) \cdot \frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{3}}$$

$$C = 2$$

Câu 8: Rút gọn biểu thức sau: $H = \left(\frac{2}{\sqrt{10-4\sqrt{6}}} - \frac{\sqrt{6}+12}{\sqrt{6}} \right) : \frac{1-\sqrt{6}}{3}$

Lời giải

$$H = \left[\frac{2}{\sqrt{(\sqrt{6}-2)^2}} - \frac{\sqrt{6}(1+2\sqrt{6})}{\sqrt{6}} \right] : \frac{1-\sqrt{6}}{3}$$

$$H = \left[\frac{2}{\sqrt{6}-2} - (1+2\sqrt{6}) \right] : \frac{1-\sqrt{6}}{3}$$

$$H = \left[\frac{2(\sqrt{6}+2)}{(\sqrt{6}-2)(\sqrt{6}+2)} - 1 - 2\sqrt{6} \right] : \frac{1-\sqrt{6}}{3}$$

$$H = (\sqrt{6}+2-1-2\sqrt{6}) : \frac{1-\sqrt{6}}{3}$$

$$H = (1-\sqrt{6}) \cdot \frac{3}{1-\sqrt{6}}$$

$$H = 3$$

Câu 9: Rút gọn biểu thức sau: $A = \frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{5}}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} - \frac{30}{\sqrt{15}}$

Lời giải

$$A = \frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{5}}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} - \frac{30}{\sqrt{15}} = \frac{6+3\sqrt{15}}{3} + \frac{(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2}{5-3} - 2\sqrt{15}$$

$$A = \frac{6+3\sqrt{15}}{3} + \frac{8+2\sqrt{15}}{2} - 2\sqrt{15} = \frac{6+3\sqrt{15}}{3} + 4 + \sqrt{15} - 2\sqrt{15}$$

$$A = \frac{6+3\sqrt{15}}{3} + 4 - \sqrt{15} = \frac{6+3\sqrt{15}+12-3\sqrt{15}}{3} = 6$$

Câu 10: Rút gọn biểu thức sau $B = \sqrt{29 + 6\sqrt{6}} - \sqrt{32 - 6\sqrt{15}}$

Lời giải

$$B = \sqrt{(3\sqrt{3} + \sqrt{2})^2} - \sqrt{(3\sqrt{3} - \sqrt{5})^2}$$

$$B = |3\sqrt{3} + \sqrt{2}| - |3\sqrt{3} - \sqrt{5}| = 3\sqrt{3} + \sqrt{2} - 3\sqrt{3} + \sqrt{5} = \sqrt{2} + \sqrt{5}$$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 11: Trục căn thức ở mẫu của biểu thức $G = \sqrt{\frac{2}{3}} - 4\sqrt{\frac{3}{2}} + 2\sqrt{6}$ ta được:

- A. $-3\sqrt{6}$. B. $\frac{\sqrt{6}}{2}$. C. $2\sqrt{6}$. D. $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải

Chọn D

$$G = \sqrt{\frac{2}{3}} - 4\sqrt{\frac{3}{2}} + 2\sqrt{6}$$

$$G = \frac{\sqrt{6}}{3} - 2\sqrt{6} + 2\sqrt{6}$$

$$G = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

Câu 12: Trục căn thức ở mẫu của biểu thức $A = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{3}{\sqrt{18}} - \frac{2}{\sqrt{50}}$ là:

- A. $-2\sqrt{2}$. B. $-\frac{\sqrt{2}}{5}$. C. $\frac{\sqrt{5}}{2}$. D. $-\frac{\sqrt{5}}{3}$.

Lời giải

Chọn B

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{3}{\sqrt{18}} - \frac{2}{\sqrt{50}}$$

$$A = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} - \frac{3\sqrt{2}}{3\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} - \frac{2\sqrt{2}}{5\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}$$

$$A = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{5}$$

$$A = -\frac{\sqrt{2}}{5}$$

Câu 13: Kết quả của biểu thức $H = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{10}}{\sqrt{20} - 2\sqrt{3}}$ là:

- A. $-\frac{\sqrt{2}}{3}$. B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. C. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn C

$$H = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{10}}{\sqrt{20} - 2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} - \sqrt{5})}{-2(\sqrt{3} - \sqrt{5})} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Câu 14: Kết quả của biểu thức $E = \frac{2}{3+2\sqrt{2}} - \frac{2}{3-2\sqrt{2}}$ là:

- A. $2\sqrt{2}$. B. $8\sqrt{2}$. C. $-8\sqrt{2}$. D. $5\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn C

$$E = \frac{2}{3+2\sqrt{2}} - \frac{2}{3-2\sqrt{2}}$$

$$E = \frac{2(3-2\sqrt{2})}{(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})} - \frac{2(3+2\sqrt{2})}{(3-2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})}$$

$$E = 6 - 4\sqrt{2} - 6 - 4\sqrt{2}$$

$$E = -8\sqrt{2}$$

Câu 15: Giá trị của biểu thức $F = \frac{2}{\sqrt{3}-\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{3}-2}$ là:

- A. $2 - \sqrt{5}$. B. $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$. C. $2 + \sqrt{5}$. D. $1 + \sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn A

$$F = \frac{2(\sqrt{3} + \sqrt{5})}{(\sqrt{3} - \sqrt{5})(\sqrt{3} + \sqrt{5})} - \frac{1(\sqrt{3} - 2)}{(\sqrt{3} - 2)(\sqrt{3} + 2)} = -(\sqrt{3} + \sqrt{5}) - (\sqrt{3} - 2) = 2 - \sqrt{5}$$

Câu 16: Giá trị của biểu thức $I = \frac{3+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} - \frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + (\sqrt{3} + \sqrt{2})$ là:

- A. $1 + 2\sqrt{3}$. B. $2 - 2\sqrt{2}$. C. $2 - \sqrt{3}$. D. $1 - 2\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A

$$I = \frac{3+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} - \frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + (\sqrt{3} + \sqrt{2})$$

$$I = \frac{(\sqrt{3}+2)\sqrt{3}}{\sqrt{3}} - \frac{(\sqrt{2}+1)\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + (\sqrt{3} + \sqrt{2})$$

$$I = \sqrt{3} + 2 - \sqrt{2} - 1 + \sqrt{3} + \sqrt{2}$$

$$I = 1 + 2\sqrt{3}$$

Câu 17: Giá trị của biểu thức $J = \frac{\sqrt{3}-2}{3+2\sqrt{3}} - \frac{1}{2+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}$ là:

- A. $2 + \sqrt{3}$. B. $2 - \sqrt{3}$. C. $3 + \sqrt{3}$. D. $3 - \sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn B

$$J = \frac{\sqrt{3}-2}{(\sqrt{3}+2)\sqrt{3}} - \frac{1}{2+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$J = \frac{\sqrt{3}-2-\sqrt{3}+2+\sqrt{3}}{(\sqrt{3}+2)\sqrt{3}}$$

$$J = \frac{\sqrt{3}}{(\sqrt{3}+2)\sqrt{3}}$$

$$J = \frac{1}{\sqrt{3}+2}$$

$$J = \frac{\sqrt{3}-2}{(\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}-2)}$$

$$J = 2-\sqrt{3}$$

Câu 18: Giá trị của biểu thức $K = \frac{5}{\sqrt{7-4\sqrt{3}}} - \frac{4}{\sqrt{7+4\sqrt{3}}} + \frac{6-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$ là:

A. $2-3\sqrt{3}$.

B. $11\sqrt{3}$.

C. $-3\sqrt{3}$.

D. $3+\sqrt{3}$.

Lời giải**Chọn B**

$$K = \frac{5}{\sqrt{(2-\sqrt{3})^2}} - \frac{4}{\sqrt{(2+\sqrt{3})^2}} + \frac{(2\sqrt{3}-2)\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$K = \frac{5}{2-\sqrt{3}} - \frac{4}{2+\sqrt{3}} + 2\sqrt{3}-2$$

$$K = \frac{5(2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} - \frac{4(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} + 2\sqrt{3}-2$$

$$K = 10+5\sqrt{3}-8+4\sqrt{3}+2\sqrt{3}-2$$

$$K = 11\sqrt{3}$$

Câu 19: Giá trị của biểu thức $X = \frac{(3+2\sqrt{2})\sqrt{3-2\sqrt{2}}}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}$ là

A. $2\sqrt{3}$.

B. $-2\sqrt{2}$.

C. 1 .

D. $\sqrt{2}$.

Lời giải**Chọn B**

$$X = \frac{(3+2\sqrt{2})\sqrt{3-2\sqrt{2}}}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{(3+2\sqrt{2})^2} \sqrt{3-2\sqrt{2}}}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}} = \sqrt{(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})} = 1.$$

Câu 20: Giá trị của biểu thức $C = \frac{\sqrt{3}}{2-\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{2}}$ là

A. $\frac{3-\sqrt{3}}{2}$.

B. $\frac{4\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}$.

C. $\frac{-2\sqrt{3}+2}{3}$.

D. $\frac{-4\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn D

$$C = \frac{\sqrt{3}(2+\sqrt{6})}{(2-\sqrt{6})(2+\sqrt{6})} + \frac{\sqrt{3}(2-\sqrt{6})}{(2+\sqrt{6})(2-\sqrt{6})} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}+2\sqrt{3}-3\sqrt{2}+\sqrt{2}}{-2} = \frac{4\sqrt{3}+\sqrt{2}}{-2}$$

RÚT GỌN CĂN THỨC

DẠNG 1. RÚT GỌN BIỂU THỨC CHỨA CĂN BẬC HAI Ở MẪU BẰNG CÁCH SỬ DỤNG PHÉP LIÊN HỢP CƠ SỞ LÝ THUYẾT

Sử dụng hằng đẳng thức $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Rút gọn biểu thức $A = \frac{4}{\sqrt{5}-1} + \frac{1}{\sqrt{5}-2}$.

Lời giải

Tác giả: Trần Xuân Thành; Fb Trần Xuân Thành:

$$\begin{aligned} A &= \frac{4}{\sqrt{5}-1} + \frac{1}{\sqrt{5}-2} = \frac{4(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} + \frac{\sqrt{5}+2}{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)} = \frac{4(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5})^2-1^2} + \frac{(\sqrt{5}+2)}{(\sqrt{5})^2-2^2} \\ &= \frac{4(\sqrt{5}+1)}{4} + \frac{\sqrt{5}+2}{1} = \sqrt{5}+1+\sqrt{5}+2 = 2\sqrt{5}+3 \end{aligned}$$

Ví dụ 2. Rút gọn biểu thức sau: $A = \frac{2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

Lời giải

Tác giả: Trần Xuân Thành; Fb Trần Xuân Thành:

$$A = \frac{2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{2}(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})}{(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})} = 1+\sqrt{2}+\sqrt{3}$$

Ví dụ 3. Rút gọn biểu thức sau: $A = \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}}$ ($ab=cd, a+b \neq c+d$)

Lời giải

Tác giả: Trần Xuân Thành; Fb Trần Xuân Thành:

$$A = \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}} = \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})-(\sqrt{c}+\sqrt{d})}{a+b+2\sqrt{ab}-c-d-2\sqrt{cd}} = \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}-\sqrt{d}}{a+b-c-d}$$

Ví dụ 4. Rút gọn biểu thức sau: $A = \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{15}+\sqrt{16}}$

Lời giải

Tác giả: Trần Xuân Thành; Fb Trần Xuân Thành:

$$A = \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{15}+\sqrt{16}}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1-\sqrt{2}}{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})} + \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{3})} + \dots + \frac{\sqrt{15}-\sqrt{16}}{(\sqrt{15}+\sqrt{16})(\sqrt{15}-\sqrt{16})} \\
&= \frac{1-\sqrt{2}+\sqrt{2}-\sqrt{3}+\dots+\sqrt{15}-\sqrt{16}}{-1} = -1+\sqrt{16} = 3.
\end{aligned}$$

DẠNG 2. RÚT GỌN BIỂU THỨC CHỨA CĂN BẬC BA Ở MẪU BẰNG CÁCH SỬ DỤNG PHÉP LIÊN HỢP

CƠ SỞ LÝ THUYẾT

Sử dụng hằng đẳng thức

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

Ví dụ 1. Rút gọn biểu thức sau: $A = \frac{2}{\sqrt[3]{5}-1}$

Lời giải

$$A = \frac{2}{\sqrt[3]{5}-1} = \frac{4 \cdot \left[(\sqrt[3]{5})^2 + \sqrt[3]{5} + 1 \right]}{(\sqrt[3]{5})^3 - 1^3} = \sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{5} + 1$$

Ví dụ 2. Rút gọn biểu thức sau: $A = \frac{3}{\sqrt[3]{2}+1} - \frac{1}{\sqrt[3]{2}-1}$

Lời giải

$$A = \frac{3}{\sqrt[3]{2}+1} - \frac{1}{\sqrt[3]{2}-1} = \frac{3 \left[(\sqrt[3]{2})^2 - \sqrt[3]{2} + 1 \right]}{(\sqrt[3]{2})^3 + 1^3} - \frac{(\sqrt[3]{2})^2 + \sqrt[3]{2} + 1}{(\sqrt[3]{2})^3 - 1^3} = -2 \cdot \sqrt[3]{2}$$

Ví dụ 3. Rút gọn biểu thức sau: $A = \frac{2}{2\sqrt[3]{2}+2+\sqrt[3]{32}}$

Lời giải

$$A = \frac{2}{2\sqrt[3]{2}+2+\sqrt[3]{32}} = \frac{1}{(\sqrt[3]{2})^2 + \sqrt[3]{2} + 1} = \frac{\sqrt[3]{2}-1}{(\sqrt[3]{2}-1) \left[(\sqrt[3]{2})^2 + \sqrt[3]{2} + 1 \right]} = \frac{\sqrt[3]{2}-1}{(\sqrt[3]{2})^3 - 1^3} = \sqrt[3]{2} - 1$$

Ví dụ 4. Rút gọn biểu thức sau: $A = \frac{2}{\sqrt[3]{3}-1} - \frac{4}{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3}+1}$

Lời giải

$$\begin{aligned}
A &= \frac{2}{\sqrt[3]{3}-1} - \frac{4}{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3}+1} = \frac{2 \left[(\sqrt[3]{3})^2 + \sqrt[3]{3} + 1 \right]}{(\sqrt[3]{3})^3 - 1^3} - \frac{4}{(\sqrt[3]{3})^2 - \sqrt[3]{3} + 1} = (\sqrt[3]{3})^2 + \sqrt[3]{3} + 1 - \frac{4 \cdot (\sqrt[3]{3} + 1)}{(\sqrt[3]{3})^3 + 1^3} \\
&= (\sqrt[3]{3})^2 + \sqrt[3]{3} + 1 - \sqrt[3]{3} - 1 = \sqrt[3]{9}
\end{aligned}$$

DẠNG 3. RÚT GỌN BIỂU THỨC CHỨA CĂN BẬC HAI Ở MẪU BẰNG CÁCH PHÂN TÍCH ĐA THỨC THÀNH NHÂN TỬ.

I. Các ví dụ:

Ví dụ 1: Rút gọn biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} - \frac{3x+9}{x-9}$

Lời giải

Điều kiện: $x \geq 0, x \neq 9$

$$\begin{aligned} \text{Có } A &= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} - \frac{3x+9}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} \\ &= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} + \frac{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} - \frac{3x+9}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} \\ &= \frac{x-3\sqrt{x}+2x+6\sqrt{x}-3x-9}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} = \frac{3(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} = \frac{3}{\sqrt{x}+3} \end{aligned}$$

Vậy $A = \frac{3}{\sqrt{x}+3}$ với điều kiện $x \geq 0, x \neq 9$

Ví dụ 2: Rút gọn biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} + \frac{2}{\sqrt{x}+3} - \frac{9\sqrt{x}-3}{x+\sqrt{x}-6}$

Lời giải

$$\text{Có } x + \sqrt{x} - 6 = x + 3\sqrt{x} - 2\sqrt{x} - 6 = \sqrt{x}(\sqrt{x}+3) - 2(\sqrt{x}+3) = (\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+3)$$

Điều kiện: $x \geq 0, x \neq 4$

$$\begin{aligned} &= \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+3)} + \frac{2(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+3)} - \frac{9\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+3)} \\ &= \frac{x+4\sqrt{x}+3+2\sqrt{x}-4-9\sqrt{x}+3}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+3)} = \frac{x-3\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+3)} \\ &= \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+3)} = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+3} \end{aligned}$$

Vậy: $A = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+3}$ với điều kiện $x \geq 0, x \neq 4$.

Ví dụ 3: Rút gọn biểu thức $P = 1 : \left(\frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1} - \frac{1}{\sqrt{x}-1} \right)$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Có } P &= 1 : \left(\frac{x+2}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} + \frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1} - \frac{1}{\sqrt{x}-1} \right) \\ &= 1 : \left(\frac{x+2}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} + \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} - \frac{x+\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} \right) \\ &= 1 : \frac{x+2+x-1-x-\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} = 1 : \frac{x-\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} \\ &= 1 \cdot \frac{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} = \frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}. \text{ Điều kiện } x > 0, x \neq 1. \end{aligned}$$

Vậy $P = \frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$ với điều kiện $x > 0, x \neq 1$.

Chú ý: Câu này có phép chia phân thức nên đoạn cuối xuất hiện thêm \sqrt{x} ở mẫu, do đó ta làm bước đặt điều kiện sau.

Ví dụ 4: Rút gọn biểu thức $P = \left[\frac{a+3\sqrt{a}+2}{(\sqrt{a}+2)(\sqrt{a}-1)} - \frac{a+\sqrt{a}}{a-1} \right] : \left(\frac{1}{\sqrt{a}+1} + \frac{1}{\sqrt{a}-1} \right)$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Có } P &= \left[\frac{(\sqrt{a}+1)(\sqrt{a}+2)}{(\sqrt{a}+2)(\sqrt{a}-1)} - \frac{a+\sqrt{a}}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)} \right] : \left(\frac{\sqrt{a}-1}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)} + \frac{\sqrt{a}+1}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)} \right) \\ &= \left[\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1} - \frac{a+\sqrt{a}}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)} \right] : \frac{\sqrt{a}-1+\sqrt{a}+1}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)} \\ &= \left[\frac{(\sqrt{a}+1)^2}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)} - \frac{a+\sqrt{a}}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)} \right] : \frac{2\sqrt{a}}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)} \\ &= \frac{a+2\sqrt{a}+1-a-\sqrt{a}}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)} \cdot \frac{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)}{2\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}+1}{2\sqrt{a}} \end{aligned}$$

Điều kiện $a > 0, a \neq 1$

Vậy $P = \frac{\sqrt{a}+1}{2\sqrt{a}}$ với điều kiện $a > 0, a \neq 1$.

Ví dụ 5: Rút gọn biểu thức sau:

a) $P = \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2\sqrt{a}-2\sqrt{b}} - \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{2\sqrt{a}+2\sqrt{b}} - \frac{2b}{b-a}$ với $a \geq 0, b \geq 0, a \neq b$

b) $Q = \left(\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{6}}{\sqrt{8}-2} - \frac{\sqrt{216}}{3} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{6}}$

Lời giải:

a) Biến đổi vế trái ta được:

$$\begin{aligned} VT &= \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2\sqrt{a}-2\sqrt{b}} - \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{2\sqrt{a}+2\sqrt{b}} - \frac{2b}{b-a} = \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2(\sqrt{a}-\sqrt{b})} - \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{2(\sqrt{a}+\sqrt{b})} + \frac{2b}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})} \\ &= \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 - (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 + 4b}{2(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})} = \frac{a+2\sqrt{ab}+b-b-a+2\sqrt{ab}-b+4b}{2(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})} = \frac{4\sqrt{ab}+4b}{2(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})} \\ &= \frac{4\sqrt{b}(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{2(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})} = \frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = VP \end{aligned}$$

b) $Q = \left(\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{6}}{\sqrt{8}-2} - \frac{\sqrt{216}}{3} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{6}}$

Biến đổi vế trái ta được:

$$VT = \left(\frac{2\sqrt{3} - \sqrt{6}}{\sqrt{8} - 2} - \frac{\sqrt{216}}{3} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} = \left(\frac{\sqrt{6}(\sqrt{2} - 1)}{2(\sqrt{2} - 1)} - \frac{6\sqrt{6}}{3} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$= \left(\frac{\sqrt{6}}{2} - 2\sqrt{6} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{-3}{2} \sqrt{6} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{-3}{2} = VP$$

II. BÀI TẬP TỰ LUÂN:

Bài 1: Cho biểu thức $A = \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 - 4\sqrt{ab}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} - \frac{a\sqrt{b} + b\sqrt{a}}{\sqrt{ab}}$

Chứng tỏ rằng giá trị của biểu thức A không phụ thuộc vào a

Lời giải:

đk: $a > 0; b > 0; a \neq b$

$$\text{Ta có: } A = \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 - 4\sqrt{ab}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} - \frac{a\sqrt{b} + b\sqrt{a}}{\sqrt{ab}} = \frac{a + 2\sqrt{ab} + b - 4\sqrt{ab}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} - \frac{\sqrt{ab}(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{\sqrt{ab}}$$

$$= \frac{a - 2\sqrt{ab} + b}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} - (\sqrt{a} + \sqrt{b}) = \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} - (\sqrt{a} + \sqrt{b}) = \sqrt{a} - \sqrt{b} - \sqrt{a} - \sqrt{b} = -2\sqrt{b}.$$

Bài 2: Cho biểu thức $B = \left(\frac{2\sqrt{x} + x}{x\sqrt{x} - 1} - \frac{1}{\sqrt{x} - 1} \right) : \frac{x - 1}{x + \sqrt{x} + 1}$

a) Tìm đk xác định

b) Rút gọn biểu thức B

Lời giải :

a) đk: $x \geq 0; x \neq 1$

b) Ta có:

$$B = \left(\frac{2\sqrt{x} + x}{x\sqrt{x} - 1} - \frac{1}{\sqrt{x} - 1} \right) : \frac{x - 1}{x + \sqrt{x} + 1} = \left(\frac{2\sqrt{x} + x}{(\sqrt{x} - 1)(x + \sqrt{x} + 1)} - \frac{1}{\sqrt{x} - 1} \right) : \frac{x - 1}{x + \sqrt{x} + 1}$$

$$= \frac{2\sqrt{x} + x - x - \sqrt{x} - 1}{(\sqrt{x} - 1)(x + \sqrt{x} + 1)} \cdot \frac{x + \sqrt{x} + 1}{x - 1} = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} - 1} \cdot \frac{1}{x - 1} = \frac{1}{x - 1}$$

Bài 3: Cho biểu thức $C = \left(1 - \frac{x - 3\sqrt{x}}{x - 9} \right) : \left(\frac{\sqrt{x} - 3}{2 - \sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x} - 2}{3 + \sqrt{x}} - \frac{9 - x}{x + \sqrt{x} - 6} \right)$

a) Tìm đk để C có nghĩa

b) Rút gọn C

Lời giải

a) đk: $x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9$

b) Ta có:

$$C = \left(1 - \frac{x - 3\sqrt{x}}{x - 9} \right) : \left(\frac{\sqrt{x} - 3}{2 - \sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x} - 2}{3 + \sqrt{x}} - \frac{9 - x}{x + \sqrt{x} - 6} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \left(1 - \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} \right) : \left(\frac{3-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+3} - \frac{9-x}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+3)} \right) \\
&= \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} \right) : \left(\frac{(3-\sqrt{x})(3+\sqrt{x}) + (\sqrt{x}-2)^2 - 9 + x}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+3)} \right) = \frac{\sqrt{x}+3-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} : \frac{9-x+(\sqrt{x}-2)^2-9+x}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+3)} \\
&= \frac{3}{\sqrt{x}+3} \cdot \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}-2)^2} = \frac{3}{\sqrt{x}-2}
\end{aligned}$$

Bài 4: Cho biểu thức $D = \left(\frac{\sqrt{x}}{3+\sqrt{x}} + \frac{x+9}{9-x} \right) : \left(\frac{3\sqrt{x}+1}{x-3\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right)$

- a) Tìm điều kiện.
b) Rút gọn

Lời giải

a) đk: $x > 0 ; x \neq 9$

Ta có:

$$\begin{aligned}
D &= \left(\frac{\sqrt{x}}{3+\sqrt{x}} + \frac{x+9}{9-x} \right) : \left(\frac{3\sqrt{x}+1}{x-3\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) = \left(\frac{\sqrt{x}}{3+\sqrt{x}} + \frac{x+9}{(3+\sqrt{x})(3-\sqrt{x})} \right) : \left(\frac{3\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) \\
&= \frac{\sqrt{x}(3-\sqrt{x}) + x+9}{(3+\sqrt{x})(3-\sqrt{x})} : \frac{3\sqrt{x}+1-\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)} = \frac{3\sqrt{x}+9}{(3+\sqrt{x})(3-\sqrt{x})} : \frac{2(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)} \\
&= \frac{3(\sqrt{x}+3)}{(3+\sqrt{x})(3-\sqrt{x})} \cdot \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)}{2(\sqrt{x}+2)} = \frac{-3\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+4}
\end{aligned}$$

Bài 5: Cho biểu thức $B = 1 : \left(\frac{x+2}{x\sqrt{x}+1} + \frac{\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} \right)$

- a) Rút gọn biểu thức B
b) So sánh B với 1

Lời giải

a) đk: $x \geq 0 ; x \neq 1$. Ta có:

$$\begin{aligned}
B &= 1: \left(\frac{x+2}{(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)} + \frac{\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} \right) \\
&= 1: \left(\frac{x+2}{(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)} + \frac{\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}+1} - \frac{1}{\sqrt{x}+1} \right) \\
&= 1: \frac{x+2+(\sqrt{x}-1) \cdot (\sqrt{x}+1) - (x-\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)} = 1: \frac{x+2+x-1-x+\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)} \\
&= 1: \frac{x+\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)} = 1: \frac{\sqrt{x} \cdot (\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)} = 1: \frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1} = \frac{x-\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}
\end{aligned}$$

b) xét hiệu:

$$\begin{aligned}
B-1 &= \frac{x-\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} - 1 = \frac{x-\sqrt{x}+1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{x-2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} = \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{\sqrt{x}} > 0 \\
\Rightarrow B-1 > 0 &\Rightarrow B > 1
\end{aligned}$$

Bài 6: Rút gọn biểu thức $P = \left(\frac{x\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}} - \frac{x\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{2 \cdot (x-2\sqrt{x}+1)}{x-1} \right)$

Lời giải

Đk: $0 < x \neq 1$. Ta có:

$$\begin{aligned}
P &= \left(\frac{x\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}} - \frac{x\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{2 \cdot (x-2\sqrt{x}+1)}{x-1} \right) \\
&= \left(\frac{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} - \frac{(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} \right) : \left(\frac{2 \cdot (\sqrt{x}-1)^2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \right) \\
&= \left(\frac{(x+\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}} - \frac{(x-\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{2 \cdot (\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}+1)} \right) = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{2 \cdot (\sqrt{x}-1)} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}
\end{aligned}$$

Bài 7: Cho bth: $P = \left(\frac{3}{\sqrt{x}-1} - \frac{3}{\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1} \right)$

a) Rút gọn biểu thức P

b) Tìm x nguyên để P nguyên

Lời giải

a) đk: $x > 0; x \neq 1; x \neq 4$

Ta có:

$$P = \frac{3\sqrt{x}-3(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} \cdot \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)-(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-1)} = \frac{3}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} \cdot \frac{x-1-x+4}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-1)}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} \cdot \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-1)}{3} = \frac{(\sqrt{x}-2)}{\sqrt{x}}$$

b) Tìm x nguyên để P nguyên.

$$P = \frac{(\sqrt{x}-2)}{\sqrt{x}} = 1 - \frac{2}{\sqrt{x}} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \sqrt{x} \in U_{(2)} = \{\pm 1; \pm 2\}$$

$$+) \sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1 (\text{loại})$$

$$+) \sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x = 4 (\text{loại})$$

$$+) \sqrt{x} = -1 (\text{loại})$$

$$+) \sqrt{x} = -2 (\text{loại})$$

Câu 21: [Mức độ 1] Rút gọn biểu thức: $B = \frac{x-2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}+x}{\sqrt{x}}$ với $x > 0, x \neq 1$.

A. -3.

B. $-3\sqrt{2}$.

C. -2.

D. $-2\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn C:

$$\text{Ta có: } B = \frac{x-2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}+x}{\sqrt{x}} \text{ với } x > 0, x \neq 1$$

$$= \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} - \frac{x}{\sqrt{x}}$$

$$= \sqrt{x} - 1 - 1 - \sqrt{x} = -2.$$

Câu 22: [Mức độ 1]. Tính giá trị biểu thức $T = \sqrt{\frac{1}{2}} + \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10}-\sqrt{2}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}}$.

A. 1.

B. $\sqrt{2}$.

C. 2.

D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A:

$$T = \sqrt{\frac{1}{2}} + \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10}-\sqrt{2}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)} - \sqrt{(\sqrt{2}-1)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - |\sqrt{2}-1| = \frac{2}{\sqrt{2}} - |\sqrt{2}-1|$$

$$= \sqrt{2} - (\sqrt{2}-1) \text{ (vì } \sqrt{2} > 1)$$

$$= \sqrt{2} - \sqrt{2} + 1 = 1.$$

- Câu 23:** [Mức độ 1] Biết giá trị biểu thức $A = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+\sqrt{2}}-1}$ có dạng $\sqrt{1+x\sqrt{2}} + y$ ($x, y \in \mathbb{N}$). Tính $2x^2 + y$.
- A. 4. B. 20. C. 9. **D. 3.**

Lời giải

Chọn D

$$A = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+\sqrt{2}}-1} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{1+\sqrt{2}}+1)}{(\sqrt{1+\sqrt{2}})^2-1^2} = \sqrt{1+\sqrt{2}}+1 \Rightarrow x=y=1 \Rightarrow 2x^2+y=3$$

- Câu 24:** [Mức độ 1] Biết giá trị biểu thức $A = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}$ có dạng $x + y\sqrt{3}$ ($x, y \in \mathbb{N}$). Tính $x + 3y$.
- A. 8. B. 4. C. 3. **D. 5.**

Lời giải

Chọn D

$$A = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}} = \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}} = \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2^2-(\sqrt{3})^2}} = 2+\sqrt{3} \Rightarrow x=2, y=1 \Rightarrow x+3y=5.$$

- Câu 25:** [Mức độ 2]. Biểu thức $A = \left(\frac{x\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} - \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} \right) : \left(\sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} \right)$ ($x > 0; x \neq 1$) được

rút gọn là:

- A. $\frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$. **B. $\frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$.** C. $\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$. D. $\frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$.

Lời giải

Chọn B

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{x\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} - \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} \right) : \left(\sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} \right) \\ &= \left(\frac{(\sqrt{x})^3+1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} - \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}-1} \right) : \frac{x-\sqrt{x}+\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} \\ &= \left(\frac{(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} - \sqrt{x}-1 \right) \cdot \frac{\sqrt{x}-1}{x} \\ &= \left(\frac{x-\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} + \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}-1}{x} = \frac{x-\sqrt{x}+1+x-1}{\sqrt{x}-1} \cdot \frac{\sqrt{x}-1}{x} \\ &= \frac{2x-\sqrt{x}}{x} = \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

- Câu 26:** [Mức độ 2]. Biểu thức $P = \left(\frac{1}{y-\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{y}-1} \right) : \frac{\sqrt{y}}{y-2\sqrt{y}+1}$ ($y > 0, y \neq 1$) có giá trị là:
- A. $\frac{y-1}{y}$. B. $\frac{y+1}{y}$. C. $\frac{y-2}{y}$. D. $\frac{y+2}{y}$.

Lời giải

Chọn A

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{1}{y-\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{y}-1} \right) : \frac{\sqrt{y}}{y-2\sqrt{y}+1} \quad (y > 0, y \neq 1) \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{y}(\sqrt{y}-1)} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{y}(\sqrt{y}-1)} \right) \cdot \frac{y-2\sqrt{y}+1}{\sqrt{y}} \\ &= \frac{1+\sqrt{y}}{\sqrt{y}(\sqrt{y}-1)} \cdot \frac{(\sqrt{y}-1)^2}{\sqrt{y}} = \frac{(1+\sqrt{y}) \cdot (\sqrt{y}-1)}{\sqrt{y} \cdot \sqrt{y}} = \frac{y-1}{y} \end{aligned}$$

- Câu 27:** [Mức độ 2]. Biểu thức $A = \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2017}+\sqrt{2018}}$ có dạng $\sqrt{a-b}$ với $a, b \in \mathbb{N}$. Tính: $a+2b$.
- A. 2015. B. 2016. C. 2017. D. 2018.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\frac{1}{1+\sqrt{2}} = \sqrt{2}-1$; $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \sqrt{3}-\sqrt{2}$; ...; $\frac{1}{\sqrt{2017}+\sqrt{2018}} = \sqrt{2018}-\sqrt{2017}$.

Vậy $A = \sqrt{2}-1 + \sqrt{3}-\sqrt{2} + \dots + \sqrt{2017}-\sqrt{2016} + \sqrt{2018}-\sqrt{2017} = \sqrt{2018}-1$.

Vậy $a = 2018, b = -1$ nên: $a+2b = 2016$

- Câu 28:** [Mức độ 2] Biết giá trị biểu thức $A = \frac{4}{\sqrt[3]{5}-1}$ có dạng $x\sqrt[3]{25} + y\sqrt[3]{5} + z^2$ ($x, y, z \in \mathbb{N}$). Tính $x+y+z$
- A. 4. B. 5. C. 11. D. 3.

Lời giải

Chọn D

$$A = \frac{4}{\sqrt[3]{5}-1} = \frac{4(\sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{5} + 1)}{(\sqrt[3]{5})^3 - 1^3} = \frac{4(\sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{5} + 1)}{4} = \sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{5} + 1$$

$$\Rightarrow x = y = 1 = z = 1 \Rightarrow x + y + z = 3$$

- Câu 29:** [Mức độ 2] Biết giá trị biểu thức $A = \frac{3\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ có dạng $-\frac{3(x-y\sqrt{2}+z\sqrt{3})}{2}$ ($x, y, z \in \mathbb{N}$). Tính $x+y+z$.
- A. 5. B. 8. C. 6. D. 3.

Chọn D

$$A = \frac{3\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}-\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{2} \cdot (1-\sqrt{2}+\sqrt{3})}{(1-\sqrt{2})^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{3\sqrt{2} \cdot (1-\sqrt{2}+\sqrt{3})}{-2\sqrt{2}} = -\frac{3 \cdot (1-\sqrt{2}+\sqrt{3})}{2}$$

$$\Rightarrow x = y = z = 1 \Rightarrow x + y + z = 3$$

Câu 30: [Mức độ 3] Biết giá trị biểu thức $A = \frac{1}{\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}} - \sqrt[3]{10}}$

có dạng $\frac{x + \sqrt{3}(\sqrt[3]{10} + y) + \sqrt[3]{10} + \sqrt[3]{z^2}}{6\sqrt{3}}$ ($x, y, z \in \mathbb{N}$). Tính $x + y + z$.

A. 24.

B. 25.

C. 14.

D. 16.

Chọn D

$$A = \frac{1}{\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}} - \sqrt[3]{10}} = \frac{(\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}})^2 + \sqrt[3]{10+6\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{10} + \sqrt[3]{100}}{(\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}})^3 - (\sqrt[3]{10})^3} \text{ do } 10+6\sqrt{3} = (1+\sqrt{3})^3$$

$$= \frac{4+2\sqrt{3} + \sqrt[3]{10}(\sqrt{3}+1) + \sqrt[3]{100}}{6\sqrt{3}} = \frac{4 + \sqrt{3}(\sqrt[3]{10} + 2) + \sqrt[3]{10} + \sqrt[3]{100}}{6\sqrt{3}}$$

Câu 31: [Mức độ 3] Biết giá trị biểu thức $A = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \dots + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{11699}+\sqrt{11700}}$ có dạng

$x\sqrt{65} - y\sqrt{5}$ ($x, y \in \mathbb{N}$). Tính tổng $x + y$.

A. 27.

B. 40.

C. 58.

D. 31.

Lời giải**Chọn D**

$$A = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \dots + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{11699}+\sqrt{11700}}$$

$$A = \frac{\sqrt{5}(\sqrt{1}-\sqrt{2})}{1-2} + \frac{\sqrt{5}(\sqrt{2}-\sqrt{3})}{2-3} + \dots + \frac{\sqrt{5}(\sqrt{11699}-\sqrt{11700})}{11699-11700}$$

$$A = \frac{\sqrt{5}(\sqrt{1}-\sqrt{2}+\sqrt{2}-\sqrt{3}+\dots+\sqrt{11699}-\sqrt{11700})}{-1}$$

$$A = \sqrt{5} \cdot \sqrt{11700} - \sqrt{5} = 30\sqrt{65} - \sqrt{5}$$

$$\Rightarrow x = 30, y = 1 \Rightarrow x + y = 31$$

Câu 32: [Mức độ 3] Biết giá trị biểu thức $A = \frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{900\sqrt{899}+899\sqrt{900}}$ có

dạng $\frac{x}{y}$ ($x, y \in \mathbb{N}^*$ và x, y tối giản) Tính $y^2 - x^2$.

A. 56.

B. 135.

C. 65.

D. 59.

Lời giải**Chọn D**

$$A = \frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{900\sqrt{899}+899\sqrt{900}}$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{899}} - \frac{1}{\sqrt{900}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{900}} = \frac{29}{30} \Rightarrow x = 29, y = 30 \Rightarrow y^2 - x^2 = 59$$

Câu 33: [Mức độ 3] Cho $A = \frac{1}{\sqrt{1.999}} + \frac{1}{\sqrt{2.198}} + \frac{1}{\sqrt{3.197}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{199.1}}$.

Khẳng định nào đúng?

- A. $0 < A < \frac{9}{5}$. B. $\frac{9}{5} < A < 1$. C. $A = 1 - \frac{1}{\sqrt{199}}$. D. $A > 1,99$.

Lời giải

Chọn D

$$\frac{1}{\sqrt{1.999}} > \frac{1}{100}, \frac{1}{\sqrt{2.198}} > \frac{1}{100}, \dots, \frac{1}{\sqrt{199.1}} > \frac{1}{100}$$

$$\Rightarrow A > \frac{1}{100} + \frac{1}{100} + \dots + \frac{1}{100} = \frac{199}{100} = 1,99$$

Câu 34: [Mức độ 3] Biết giá trị biểu thức $A = \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}} + \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}$ có dạng

$x\sqrt{2} + y$ ($x, y \in \mathbb{N}$). Tính tổng $x + y$.

- A. 21. B. 3. C. 10. D. 1.

Lời giải

Chọn D

$$\frac{A}{\sqrt{2}} = \frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{4+2\sqrt{3}}} + \frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{4-2\sqrt{3}}} = \frac{2+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} + \frac{2-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} = \frac{(2+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})}{3^2-(\sqrt{3})^2} + \frac{(2-\sqrt{3})(3+\sqrt{3})}{3^2-(\sqrt{3})^2}$$

$$\frac{A}{\sqrt{2}} = \frac{3+\sqrt{3}}{6} + \frac{3-\sqrt{3}}{6} = 1 \Rightarrow A = \sqrt{2} \Rightarrow x = 1, y = 0 \Rightarrow x + y = 1$$

DẠNG 1.3: RÚT GỌN VÀ TÍNH GIÁ TRỊ BIỂU THỨC KHI BIẾT GIÁ TRỊ CỦA BIẾN.

Dạng 1.3.1 Tính giá trị của biểu thức khi biến là 1 số

Ví dụ 1.

Tính giá trị biểu thức $P = \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} + 1$ biết $x = 6 - 2\sqrt{5}$

Lời giải

Thay $x = 6 - 2\sqrt{5}$ vào biểu thức, ta được

$$P = \frac{2\sqrt{6-2\sqrt{5}}-1}{\sqrt{6-2\sqrt{5}}+1} = \frac{\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}-1}{\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}+1} = \frac{\sqrt{5}-1-1}{\sqrt{5}-1+1} = \frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}} = \frac{5-2\sqrt{5}}{5}$$

Ví dụ 2.

Tính giá trị biểu thức $\frac{1-x}{\sqrt{x}}$ biết $x = 3 - 2\sqrt{2}$

Thay $x = 3 - 2\sqrt{2}$ vào biểu thức, ta được

$$P = \frac{1-(3-2\sqrt{2})}{\sqrt{3-2\sqrt{2}}} = \frac{2\sqrt{2}-2}{\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}} = \frac{2(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}-1} = 2.$$

Dạng 1.3.2 Rút gọn biến trước khi tính giá trị của biểu thức

1. Phương pháp

- Bước 1: Tìm điều kiện xác định.
- Bước 2: Tìm mẫu thức chung, quy đồng mẫu thức, rút gọn tử, phân tích tử thành nhân tử.
- Bước 3: Chia cả tử và mẫu cho nhân tử chung của tử và mẫu.
- Bước 4: Khi nào phân thức tối giản thì ta hoàn thành việc rút gọn. Rồi thay giá trị của x đã cho vào ta được giá trị biểu thức cần tìm.

2. Ví dụ

Ví dụ 1.

Bài 1: Cho biểu thức $P = \frac{3\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1} - \frac{2\sqrt{x}-3}{3-\sqrt{x}} - \frac{3(3\sqrt{x}-5)}{x-2\sqrt{x}-3}$.

a. Rút gọn biểu thức

b. Tìm giá trị của P , biết $x = 4 + 2\sqrt{3}$

Hướng dẫn giải

a. ĐKXĐ: $x \geq 0$; $x \neq 9$.

$$\begin{aligned} P &= \frac{3\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1} + \frac{2\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-3} - \frac{3(3\sqrt{x}-5)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)} \\ &= \frac{(3\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-3) + (2\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+1) - 3(3\sqrt{x}-5)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)} \\ &= \frac{3x - 9\sqrt{x} + 2\sqrt{x} - 6 + 2x + 2\sqrt{x} - 3\sqrt{x} - 3 - 9\sqrt{x} + 15}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{5x - 17\sqrt{x} + 6}{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 3)} \\
&= \frac{5x - 15\sqrt{x} - 2\sqrt{x} + 6}{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 3)} \\
&= \frac{(5\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} - 3)}{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 3)} = \frac{5\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} + 1}.
\end{aligned}$$

b. Ta có $x = 4 + 2\sqrt{3} = (\sqrt{3} + 1)^2 \Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{3} + 1$;

$$\text{Do đó: } P = \frac{5(\sqrt{3} + 1) - 2}{(\sqrt{3} + 1) + 1} = \frac{5\sqrt{3} + 3}{\sqrt{3} + 2} = \frac{(5\sqrt{3} + 3)(2 - \sqrt{3})}{(\sqrt{3} + 2)(2 - \sqrt{3})} = 7\sqrt{3} - 9.$$

Ví dụ 2.

$$\text{Cho biểu thức } P = \left(\frac{\sqrt{x} - 3}{2 - \sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x} + 2}{3 + \sqrt{x}} - \frac{9 - x}{x + \sqrt{x} - 6} \right) : \left(1 - \frac{3\sqrt{x} - 9}{x - 9} \right)$$

(với $x > 0; x \neq 4; x \neq 9$).

a. Rút gọn biểu thức

b. Tính giá trị biểu thức P khi $x = \frac{\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} \cdot (\sqrt{3} - 1)}{\sqrt{6 + 2\sqrt{5}} - \sqrt{5}}$

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned}
\text{a. } P &= \frac{(x - 9) + (4 - x) + (9 - x)}{(2 - \sqrt{x})(3 + \sqrt{x})} : \frac{x - 9 - 3\sqrt{x} + 9}{x - 9} \\
&= \frac{4 - x}{(2 - \sqrt{x})(3 + \sqrt{x})} \times \frac{(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 3)}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 3)} = \frac{2 + \sqrt{x}}{\sqrt{x}}
\end{aligned}$$

$$\text{b. Ta có } x = \frac{\sqrt{(\sqrt{3} + 1)^2} (\sqrt{3} - 1)}{\sqrt{(1 + \sqrt{5})^2} - \sqrt{5}} = \frac{(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1)}{1 + \sqrt{5} - \sqrt{5}} = 2. \text{ Nên } P = \frac{2 + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} + 1$$

Ví dụ 3.

$$\text{Cho biểu thức } P = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}} + \frac{1 - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x}} \right), \text{ (với } x > 0 \text{ và } x \neq 1).$$

a. Rút gọn biểu thức

b. Tính giá trị của biểu thức P tại $x = \sqrt{2022 + 4\sqrt{2018}} - \sqrt{2022 - 4\sqrt{2018}}$.

Hướng dẫn giải

a. Ta có $1 - \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$

Và $\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} + \frac{1-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}} = \frac{x-1+1-\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+1)\sqrt{x}} = \frac{(\sqrt{x}-1)\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+1)\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$

nên $P = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$.

b. Ta có $x = \sqrt{2022+4\sqrt{2018}} - \sqrt{2022-4\sqrt{2018}}$

$$= \sqrt{(\sqrt{2018}+2)^2} - \sqrt{(\sqrt{2018}-2)^2}$$

$$= |\sqrt{2018}+2| - |\sqrt{2018}-2| = \sqrt{2018}+2 - \sqrt{2018}+2 = 4 \text{ thỏa mãn điều kiện } x > 0 \text{ và } x \neq 1.$$

+ Vậy giá trị của biểu thức P tại $x=4$ là: $\frac{\sqrt{4}+1}{\sqrt{4}} = \frac{3}{2}$.

Ví dụ 4.

Cho biểu thức $A = \frac{3}{\sqrt{x}+1} - \frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}-3}{x-1}$ với $x \geq 0$ và $x \neq 1$.

a. Rút gọn biểu thức

b. Tính giá trị của A khi $x = 3 - 2\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải

a. $A = \frac{3}{\sqrt{x}+1} - \frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}-3}{x-1}$ với $x \geq 0$ và $x \neq 1$

$$= \frac{3}{\sqrt{x}+1} - \frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}$$

$$= \frac{3(\sqrt{x}-1) - (\sqrt{x}+1) - (\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}$$

$$= \frac{3\sqrt{x}-3-\sqrt{x}-1-\sqrt{x}+3}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} = \frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} = \frac{1}{\sqrt{x}+1}$$

b. Ta có $x = 3 - 2\sqrt{2} = (\sqrt{2}-1)^2$ thỏa mãn $x \geq 0$ và $x \neq 1$

+) Thay $x = (\sqrt{2}-1)^2$ vào A

$$A = \frac{1}{\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2} + 1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}-1+1} \quad (\text{do } \sqrt{2} > 1)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Kết luận $x = (\sqrt{2} - 1)^2$ thì $A = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Ví dụ 5.

Cho biểu thức $A = \sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$. Rút gọn và tính giá trị biểu thức A tại $x = 5 + 2\sqrt{3}$.

Lời giải

Điều kiện xác định $x \geq 1$. Khi đó

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = \sqrt{x-1+2\sqrt{x-1}+1} + \sqrt{x-1-2\sqrt{x-1}+1} \\ &= \sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2} = |\sqrt{x-1}-1| + |\sqrt{x-1}+1|. \end{aligned}$$

Với $x = 5 + 2\sqrt{3}$, ta được:

$$\begin{aligned} A &= \left| \sqrt{5+2\sqrt{3}}-1 \right| + \left| \sqrt{5+2\sqrt{3}}+1 \right| = \sqrt{4+2\sqrt{3}}-1 + \sqrt{4+2\sqrt{3}}+1 \\ &= 2\sqrt{4+2\sqrt{3}} = 2\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2} = 2(\sqrt{3}+1). \end{aligned}$$

Ví dụ 6.

Tính giá trị các biểu thức sau:

a. $A = \frac{\sqrt{x^2-3x+5}}{\sqrt{x-3}} \cdot \frac{x^2+1}{3\sqrt{x}}$ tại $x = (\sqrt{5}-1)\sqrt{6+2\sqrt{5}}$.

b. $B = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} + \frac{2\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}}$ tại $x = \frac{1}{2-\sqrt{3}} + \sqrt{7-4\sqrt{3}}$.

Lời giải

a. Ta có:

$$x = (\sqrt{5}-1)\sqrt{6+2\sqrt{5}} = (\sqrt{5}-1)\sqrt{(\sqrt{5}+1)^2} = (\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1) = 4$$

Do đó,

$$A = \frac{\sqrt{4^2-3 \cdot 4+5}}{\sqrt{4-3}} \cdot \frac{4^2+1}{3\sqrt{4}} = \frac{3}{1} \cdot \frac{17}{6} = \frac{17}{2}.$$

b. Ta có:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2-\sqrt{3}} + \sqrt{7-4\sqrt{3}} = \frac{1}{2-\sqrt{3}} + \sqrt{4-4\sqrt{3}+3} = \frac{1}{2-\sqrt{3}} + \sqrt{(2-\sqrt{3})^2} \\ &= \frac{1}{2-\sqrt{3}} + 2-\sqrt{3} = \frac{2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} + 2-\sqrt{3} = \frac{2+\sqrt{3}}{1} + 2-\sqrt{3} = 4. \end{aligned}$$

Lại có:

$$B = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} + \frac{2\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}} = \frac{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}) + (2\sqrt{x}+1)\sqrt{x}}{\sqrt{x}(x+\sqrt{x})} = \frac{x\sqrt{x}+2x}{x\sqrt{x}+x} = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}+1}.$$

Thay $x = 4$ vào biểu thức B , ta được: $B = 1 + \frac{1}{\sqrt{4+1}}$.

Ví dụ 7.

Cho $x = \left(\frac{\sqrt[4]{9} - \sqrt[4]{3}}{1 - \sqrt[4]{3}} + \frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt[4]{3}} \right)^2 - \frac{\sqrt{1 + \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3}}}{1 + \sqrt{3}}$. Tính giá trị biểu thức $M = \frac{(x + \sqrt{x+1})^{2020}}{x^{2020} + 2020}$.

Lời giải

Đặt $y = \sqrt[4]{3}$ thì $y^4 = 3, \sqrt[4]{9} = y^2 = \sqrt{3}$. Ta có:

$$x = \left(\frac{y^2 - y}{1 - y} + \frac{1 + y^2}{y} \right)^2 - \frac{\sqrt{1 + \frac{2}{y^2} + \frac{1}{y^4}}}{1 + y^2} = \left(-y + \frac{1 + y^2}{y} \right)^2 - \frac{1 + y^2}{y^2(1 + y^2)} = \frac{1}{y^2} - \frac{1}{y^2} = 0.$$

Suy ra

$$M = \frac{(0 + \sqrt{0+1})^{2020}}{0^{2020} + 2020} = \frac{1}{2020}.$$

Dạng 1.3.3 Rút gọn và tìm một biểu thức chứa biến bằng 0 trước khi thay vào biểu thức cần tính

Ví dụ 1

Cho $f(x) = (x^3 + 6x - 7)^{2019}$. Tính $f(a)$ với $a = \sqrt[3]{3 + \sqrt{17}} + \sqrt[3]{3 - \sqrt{17}}$

Lời giải

Sử dụng hằng đẳng thức: $(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y)$

Đặt $x = \sqrt[3]{3 + \sqrt{17}}; y = \sqrt[3]{3 - \sqrt{17}}$

Do đó $xy = \left(\sqrt[3]{3 + \sqrt{17}} \right) \cdot \left(\sqrt[3]{3 - \sqrt{17}} \right) = \sqrt[3]{9 - 17} = -2$

$$\begin{aligned} a^3 &= \left(\sqrt[3]{3 + \sqrt{17}} + \sqrt[3]{3 - \sqrt{17}} \right)^3 \\ &= \left(\sqrt[3]{3 + \sqrt{17}} \right)^3 + \left(\sqrt[3]{3 - \sqrt{17}} \right)^3 + 3 \cdot \left(\sqrt[3]{3 + \sqrt{17}} \right) \cdot \left(\sqrt[3]{3 - \sqrt{17}} \right) \cdot \left(\sqrt[3]{3 + \sqrt{17}} + \sqrt[3]{3 - \sqrt{17}} \right) \end{aligned}$$

Suy ra: $= 3 + \sqrt{17} + 3 - \sqrt{17} + 3(-2)a$
 $= 6 - 6a$

$$\Leftrightarrow a^3 + 6a - 6 = 0 \Leftrightarrow a^3 + 6a - 7 = -1$$

Vì $f(x) = (x^3 + 6x - 7)^{2019}$. Suy ra $f(a) = (a^3 + 6a - 7)^{2019}$

Do đó: $f(a) = (-1)^{2019} = -1$

Ví dụ 2

Tính giá trị của biểu thức: $A = 2x^3 + 3x^2 - 4x + 2$,

$$\text{với } x = \sqrt{2 + \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}}} + \sqrt{2 - \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}}} - \sqrt{3 - \sqrt{5}} - 1$$

Lời giải

$$\text{Đặt } a = \sqrt{2 + \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}}} + \sqrt{2 - \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}}}, a > 0$$

$$\Rightarrow a^2 = \left(\sqrt{2 + \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}}} + \sqrt{2 - \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}}} \right)^2$$

$$= \left(\sqrt{2 + \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}}} \right)^2 + \left(\sqrt{2 - \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}}} \right)^2 + 2 \cdot \sqrt{\left(2 - \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}} \right)} \cdot \left(2 - \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}} \right)$$

$$= 4 + 2 \sqrt{4 - \frac{5 + \sqrt{5}}{2}}$$

$$= 4 + 2 \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{2}}$$

$$= 4 + \sqrt{6 - 2\sqrt{5}}$$

$$= 4 + \sqrt{(\sqrt{5} - 1)^2}$$

$$= 3 + \sqrt{5}$$

$$\Rightarrow a = \sqrt{3 + \sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{3 + \sqrt{5}} - \sqrt{3 - \sqrt{5}} - 1$$

$$= \sqrt{\frac{6 + 2\sqrt{5}}{2}} - \sqrt{\frac{6 - 2\sqrt{5}}{2}} - 1$$

$$= \frac{\sqrt{5} + 1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{5} - 1}{\sqrt{2}} - 1$$

$$= \sqrt{2} - 1$$

$$\Rightarrow x^2 + 2x - 1 = (\sqrt{2} - 1)^2 + 2(\sqrt{2} - 1) - 1 = 2 - 2\sqrt{2} + 1 + 2\sqrt{2} - 2 - 1 = 0$$

Ta có:

$$\begin{aligned} A &= 2x^3 + 3x^2 - 4x + 2 \\ &= 2x^3 + 4x^2 - x^2 - 2x - 2x + 1 + 1 \\ &= 2x(x^2 + 2x - 1) - (x^2 + 2x - 1) + 1 \end{aligned}$$

Thay $x^2 + 2x - 1 = 0$ vào biểu thức A , ta có: $A = 2x \cdot 0 - 0 + 1 = 1$

Dạng 1.3.4 Rút gọn được hết các biến trong biểu thức

Ví dụ 1

Câu 1. Chứng minh biểu thức P không phụ thuộc vào x .

$$P = \frac{x\sqrt{3}}{3\sqrt{x} + x\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3x} - 3}{x - 3} \text{ với } x > 0, x \neq 3$$

Lời giải

Với $x > 0; x \neq 3$, ta có:

$$\begin{aligned} P &= \frac{x\sqrt{3}}{3\sqrt{x} + x\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3x} - 3}{x - 3} \\ &= \frac{x\sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{x} (\sqrt{3} + \sqrt{x})} + \frac{\sqrt{3}(\sqrt{x} - \sqrt{3})}{(\sqrt{x} - \sqrt{3})(\sqrt{x} + \sqrt{3})} \\ &= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{3} + \sqrt{x}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{x} + \sqrt{3}} = 1 \end{aligned}$$

Ví dụ 2

Câu 2. Chứng minh biểu thức Q không phụ thuộc vào x .

$$Q = \left(\frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}+1} + \frac{1}{1-\sqrt{x}} \right) : \frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1} \text{ với } x \geq 0, x \neq 1.$$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Biến đổi biểu thức } Q &= \frac{x+2+x+\sqrt{x}-2-x-\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} \\ &= \frac{x-1}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Dạng 1.3.5 Đổi biến

Ví dụ 1

$$\text{Rút gọn biểu thức } A = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} \right) \cdot \frac{x-4}{\sqrt{4x}} \text{ với } x > 0, x \neq 4.$$

Lời giải

Cách 1: Đặt $t = \sqrt{x}$ ($t \geq 0$) $\Leftrightarrow t^2 = x$, biểu thức đã cho trở thành:

$$A = \left(\frac{t}{t-2} - \frac{t}{t+2} \right) \cdot \frac{t^2-4}{\sqrt{4t^2}}$$

$$A = \left[\frac{t(t+2)}{(t-2)(t+2)} - \frac{t(t-2)}{(t-2)(t+2)} \right] \cdot \frac{(t-2)(t+2)}{|2t|}$$

$$A = \frac{t(t+2-t+2)}{(t-2)(t+2)} \cdot \frac{(t-2)(t+2)}{2t} \quad (\text{vì } t \geq 0)$$

$$A = \frac{4t}{2t} = 2$$

Cách 2:

$$A = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} \right) \cdot \frac{x-4}{\sqrt{4x}}$$

$$A = \left[\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} - \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} \right] \cdot \frac{x-4}{\sqrt{4x}}$$

$$A = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2-\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} \cdot \frac{(\sqrt{x})^2-2^2}{2\sqrt{x}}$$

$$A = \frac{4\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} \cdot \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{2\sqrt{x}}$$

$$A = 2$$

Ví dụ 2

Rút gọn biểu thức $B = \frac{2\sqrt{x}-9}{x-5\sqrt{x}+6} - \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} - \frac{2\sqrt{x}+1}{3-\sqrt{x}}$ với $x > 0, x \neq 4, 9$.

Lời giải

Cách 1:

Đặt $t = \sqrt{x} \Leftrightarrow t^2 = x$ ($t \geq 0$), biểu thức đã cho trở thành:

$$B = \frac{2t-9}{t^2-5t+6} - \frac{t+3}{t-2} - \frac{2t+1}{3-t}$$

$$B = \frac{2t-9}{(t-2)(t-3)} - \frac{t+3}{t-2} + \frac{2t+1}{t-3}$$

$$B = \frac{2t-9}{(t-2)(t-3)} - \frac{(t+3)(t-3)}{(t-2)(t-3)} + \frac{(2t+1)(t-2)}{(t-2)(t-3)}$$

$$B = \frac{2t-9-(t^2-9)+(2t^2-3t-2)}{(t-2)(t-3)}$$

$$B = \frac{t^2 - t - 2}{(t-2)(t-3)}$$

$$B = \frac{(t+1)(t-2)}{(t-2)(t-3)}$$

$$B = \frac{t+1}{t-3}$$

$$\text{Vậy } B = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}.$$

Cách 2:

$$B = \frac{2\sqrt{x}-9}{x-5\sqrt{x}+6} - \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} - \frac{2\sqrt{x}+1}{3-\sqrt{x}}$$

$$B = \frac{2\sqrt{x}-9}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} - \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} + \frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}$$

$$B = \frac{2\sqrt{x}-9}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} - \frac{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} + \frac{(2\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)}$$

$$B = \frac{2\sqrt{x}-9-(x-9)+(2x-3\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)}$$

$$B = \frac{2\sqrt{x}-9-x+9+2x-3\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)}$$

$$B = \frac{x-\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)}$$

$$B = \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)}$$

$$B = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}$$

Dạng 1.3.6 Tính giá trị biểu thức chứa 2 biến

Bài 1

Cho biểu thức: $B = \left[\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{xy}+1} + \frac{\sqrt{x}(\sqrt{y}+1)}{1-\sqrt{xy}} + 1 \right] : \left[1 - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{xy}+1} - \frac{\sqrt{x}(\sqrt{y}+1)}{\sqrt{xy}-1} \right].$

a) Rút gọn B .

b) Tính giá trị của B khi $x = 2(3-\sqrt{5})$ và $y = 2(3+\sqrt{5})$.

Lời giải

a) Điều kiện xác định:
$$\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ xy \neq 1 \end{cases}$$

Ta có:

$$\begin{aligned} B &= \left[\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{xy}+1} + \frac{\sqrt{x}(\sqrt{y}+1)}{1-\sqrt{xy}} + 1 \right] : \left[1 - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{xy}+1} - \frac{\sqrt{x}(\sqrt{y}+1)}{\sqrt{xy}-1} \right] \\ &= \frac{(\sqrt{x}+1)(1-\sqrt{xy}) + \sqrt{x}(\sqrt{y}+1)(\sqrt{xy}+1) + (\sqrt{xy}+1)(1-\sqrt{xy})}{(\sqrt{xy}+1)(1-\sqrt{xy})} \\ &= \frac{(\sqrt{xy}+1)(\sqrt{xy}-1) - (\sqrt{x}+1)(\sqrt{xy}-1) - \sqrt{x}(\sqrt{y}+1)(\sqrt{xy}+1)}{(\sqrt{xy}+1)(\sqrt{xy}-1)} \\ &= \frac{2+2\sqrt{x}}{(\sqrt{xy}+1)(1-\sqrt{xy})} \cdot \frac{(\sqrt{xy}+1)(\sqrt{xy}-1)}{-2x\sqrt{y}-2\sqrt{xy}} \\ &= \frac{2(1+\sqrt{x})}{(\sqrt{xy}+1)(1-\sqrt{xy})} \cdot \frac{(\sqrt{xy}+1)(\sqrt{xy}-1)}{-2\sqrt{xy}(\sqrt{x}+1)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{xy}}. \end{aligned}$$

b) Ta có: $x = 2(3-\sqrt{5})$ và $y = 2(3+\sqrt{5})$ thỏa mãn điều kiện xác định.

Khi đó thay $x = 2(3-\sqrt{5})$ và $y = 2(3+\sqrt{5})$ vào biểu thức $B = \frac{1}{\sqrt{xy}}$ ta được:

$$B = \frac{1}{\sqrt{2(3-\sqrt{5}) \cdot 2(3+\sqrt{5})}} = \frac{1}{4}.$$

Bài 2

Cho biểu thức
$$B = \left(\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} + \frac{3\sqrt{ab}}{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}} \right) \cdot \left[\left(\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} - \frac{3\sqrt{ab}}{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}} \right) : \frac{a-b}{a+\sqrt{ab}+b} \right].$$

a) Rút gọn B.

b) Tính giá trị của B biết $a = \sqrt{4 + \sqrt{5\sqrt{3} + 5\sqrt{48 - 10\sqrt{7 + 4\sqrt{3}}}}$, $b = 12$.

Lời giải

a) Điều kiện xác định:
$$\begin{cases} a \geq 0 \\ b \geq 0 \\ a \neq b \end{cases}$$

Ta có:

$$B = \left(\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} + \frac{3\sqrt{ab}}{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}} \right) \cdot \left[\left(\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} - \frac{3\sqrt{ab}}{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}} \right) : \frac{a-b}{a+\sqrt{ab}+b} \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \frac{3\sqrt{ab}}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(a - \sqrt{ab} + b)} \right) \cdot \left[\left(\frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} - \frac{3\sqrt{ab}}{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(a + \sqrt{ab} + b)} \right) \cdot \frac{a - b}{a + \sqrt{ab} + b} \right] \\
&= \frac{a - \sqrt{ab} + b + 3\sqrt{ab}}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(a - \sqrt{ab} + b)} \cdot \left[\frac{a + \sqrt{ab} + b - 3\sqrt{ab}}{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(a + \sqrt{ab} + b)} \cdot \frac{a + \sqrt{ab} + b}{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})} \right] \\
&= \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(a - \sqrt{ab} + b)} \cdot \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(a + \sqrt{ab} + b)} \cdot \frac{a + \sqrt{ab} + b}{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})} \\
&= \frac{1}{a - \sqrt{ab} + b}
\end{aligned}$$

b) Ta có:

$$\begin{aligned}
a &= \sqrt{4 + \sqrt{5\sqrt{3} + 5\sqrt{48} - 10\sqrt{4 + 4\sqrt{3} + 3}}} \\
&= \sqrt{4 + \sqrt{5\sqrt{3} + 5\sqrt{48} - 10(2 + \sqrt{3})}} \\
&= \sqrt{4 + \sqrt{5\sqrt{3} + 5(5 - \sqrt{3})}} \\
&= \sqrt{9} = 3
\end{aligned}$$

$a = 3, b = 12$ thỏa mãn điều kiện xác định,

Khi đó thay $a = 3, b = 12$ vào $B = \frac{1}{a - \sqrt{ab} + b}$ ta được:

$$B = \frac{1}{3 - \sqrt{3 \cdot 12} + 12} = \frac{1}{9}.$$

Dạng 1.3.7 Tính giá trị của biểu thức chứa hai biến. Tìm một biểu thức chứa hai biến bằng không để thay vào biểu thức cần tính

Ví dụ 1

Tính giá trị biểu thức $M = \frac{(x+y)^2 + 16xy + 2019}{(x-y)^2 + 20xy + 2020}$ biết $x = \sqrt{9 + 4\sqrt{5}}$ và $y = -\sqrt{9 - 4\sqrt{5}}$

Lời giải

Ta có: $x = \sqrt{9 + 4\sqrt{5}} = \sqrt{(\sqrt{5} + 2)^2} = \sqrt{5} + 2$

$$y = -\sqrt{9 - 4\sqrt{5}} = -\sqrt{(\sqrt{5} - 2)^2} = -(\sqrt{5} - 2) = 2 - \sqrt{5}$$

$$\Rightarrow x + y = 4; \quad x - y = 2\sqrt{5}; \quad xy = (\sqrt{5} + 2)(2 - \sqrt{5}) = -1$$

Do đó: $(x + y)^2 + 16xy = 4^2 - 16 = 0$

$$(x - y)^2 + 20xy = (2\sqrt{5})^2 - 20 = 0$$

$$\text{Vậy } M = \frac{2019}{2020}$$

* Có thể biến tấu để bài toán khó hơn một chút bằng cách

$$\text{Cho } y = \sqrt[3]{38-17\sqrt{5}}$$

Khi đó học sinh phải khéo léo biến đổi hằng đẳng thức bậc 3

$$\begin{aligned} y &= \sqrt[3]{38-17\sqrt{5}} = \sqrt[3]{8-12\sqrt{5}+30-5\sqrt{5}} \\ &= \sqrt[3]{2^3-3\cdot 2^2\cdot\sqrt{5}+3\cdot 2\cdot(\sqrt{5})^2-(\sqrt{5})^3} \\ &= \sqrt[3]{(2-\sqrt{5})^2} = 2-\sqrt{5} \end{aligned}$$

Thay vào biểu thức ta vẫn được kết quả như trên

Ví dụ 2

Tính giá trị biểu thức $T = x^3 + y^3 - 3(x - y) + 2000$.

biết $x = \sqrt[3]{3+2\sqrt{2}} + \sqrt[3]{3-2\sqrt{2}}$ và $y = \sqrt[3]{7-\sqrt{50}} + \sqrt[3]{7+\sqrt{50}}$.

Lời giải

$$\text{Để thấy } \sqrt[3]{3+2\sqrt{2}} \cdot \sqrt[3]{3-2\sqrt{2}} = \sqrt[3]{3^2 - (2\sqrt{2})^2} = 1.$$

$$\sqrt[3]{7-\sqrt{50}} \cdot \sqrt[3]{7+\sqrt{50}} = \sqrt[3]{7^2 + (\sqrt{50})^2} = -1.$$

Áp dụng hằng đẳng thức: $(A+B)^3 = A^3 + B^3 + 3AB(A+B)$.

$$\text{Ta được: } \begin{cases} x^3 = 6 + 3\left(\sqrt[3]{3+2\sqrt{2}} + \sqrt[3]{3-2\sqrt{2}}\right) = 6 + 3x \\ y^3 = 14 + 3\left(\sqrt[3]{7-\sqrt{50}} + \sqrt[3]{7+\sqrt{50}}\right)(-1) = 14 - 3y \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^3 - 3x = 6 \\ y^3 + 3y = 14 \end{cases} \Rightarrow x^3 + y^3 - 3(x - y) - 20 = 0.$$

$$\text{Do đó } T = [x^3 + y^3 - 3(x - y) - 20] + 2020 = 2020.$$

Dạng 1.4.

TÍNH GIÁ TRỊ CỦA BIẾN KHI BIẾT GIÁ TRỊ CỦA BIỂU THỨC.

Dạng 1.4.1 Tìm biến số khi biết giá trị của biểu thức bằng một số

1. Phương pháp

- Thực chất đây là việc giải phương trình

Liên hệ tài liệu word toán SĐT và zalo: 039.373.2038

- Học sinh thường quên khi tìm được giá trị của x không xét xem giá trị x đó có thỏa mãn ĐKXD của A hay không.

2. Ví dụ

Ví dụ 1

Cho $A = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+2}}$, điều kiện xác định $x \geq 0$. Tìm x biết $A = 2$

Lời giải

Ta có $A = 2 \Rightarrow \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+2}} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x+1} = 2\sqrt{x+2} \Rightarrow \sqrt{x} = -3$ (vô lý)

Vậy không tồn tại x để $A = 2$.

Ví dụ 2

Cho biểu thức $A = \frac{1}{2+\sqrt{x}} + \frac{1}{2-\sqrt{x}} - \frac{2\sqrt{x}}{4-x}$ ($x \geq 0, x \neq 4$). Tìm x để $A = \frac{1}{3}$.

Lời giải

Ta có $A = \frac{1}{2+\sqrt{x}} + \frac{1}{2-\sqrt{x}} - \frac{2\sqrt{x}}{4-x} = \frac{4}{4-x} - \frac{2\sqrt{x}}{4-x} = \frac{2(2-\sqrt{x})}{4-x} = \frac{2}{2+\sqrt{x}}$.

Với $A = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{2}{2+\sqrt{x}} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \sqrt{x} = 4 \Leftrightarrow x = 16$ (nhận).

Vậy $A = \frac{1}{3}$ khi $x = 16$.

Dạng 1.4.2 Tìm 1 biến số trong 2 biến số khi biết giá trị của biểu thức và biến còn lại

Ví dụ 1

Cho biểu thức: $B = \left(\sqrt{x} + \frac{y - \sqrt{xy}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \right) : \left(\frac{x}{\sqrt{xy} + y} + \frac{y}{\sqrt{xy} - x} - \frac{x+y}{\sqrt{xy}} \right)$.

a) Rút gọn B .

b) Tính giá trị của x khi $B = 1$ và $y = \sqrt{4 + \sqrt{5\sqrt{3} + 5\sqrt{48 - 10\sqrt{7 + 4\sqrt{3}}}}}$

Phân tích

- Để rút gọn biểu thức thì cần tìm các điều kiện sao cho biểu thức có nghĩa $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ x \neq y \end{cases}$

và quy đồng mẫu số.

- Để tính giá trị của x , ta cần rút gọn $y = \sqrt{4 + \sqrt{5\sqrt{3} + 5\sqrt{48 - 10\sqrt{7 + 4\sqrt{3}}}}}$ rồi thay giá trị y vào biểu thức B

Lời giải

$$\text{a) Điều kiện xác định: } \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ x \neq y \end{cases}$$

Ta có:

$$\begin{aligned} B &= \left(\sqrt{x} + \frac{y - \sqrt{xy}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \right) : \left(\frac{x}{\sqrt{xy} + y} + \frac{y}{\sqrt{xy} - x} - \frac{x+y}{\sqrt{xy}} \right) \\ &= \left(\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} + \sqrt{y}) + y - \sqrt{xy}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \right) : \left(\frac{x}{\sqrt{y}(\sqrt{x} + \sqrt{y})} + \frac{y}{\sqrt{x}(\sqrt{y} - \sqrt{x})} - \frac{x+y}{\sqrt{xy}} \right) \\ &= \left(\frac{x+y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \right) : \left(\frac{x\sqrt{x}(\sqrt{y} - \sqrt{x}) + y\sqrt{y}(\sqrt{x} + \sqrt{y}) - (x+y)(y-x)}{\sqrt{xy}(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{y} - \sqrt{x})} \right) \\ &= \frac{x+y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \cdot \frac{\sqrt{xy}(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{y} - \sqrt{x})}{x\sqrt{xy} + y\sqrt{xy}} \\ &= \frac{x+y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \cdot \frac{\sqrt{xy}(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{y} - \sqrt{x})}{\sqrt{xy}(x+y)} = \sqrt{y} - \sqrt{x} \end{aligned}$$

b) Ta có:

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{4 + \sqrt{5\sqrt{3} + 5\sqrt{48 - 10\sqrt{4 + 4\sqrt{3} + 3}}} \\ &= \sqrt{4 + \sqrt{5\sqrt{3} + 5\sqrt{48 - 10(2 + \sqrt{3})}}} \\ &= \sqrt{4 + \sqrt{5\sqrt{3} + 5(5 - \sqrt{3})}} \\ &= \sqrt{9} = 3 \text{ (tm)} \end{aligned}$$

Mặt khác:

$$B = 1 = \sqrt{y} - \sqrt{x}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{y} - 1 = \sqrt{3} - 1$$

$$\Rightarrow x = (\sqrt{3} - 1)^2 = 4 - 2\sqrt{3} \text{ (tm)}$$

$$\text{Vậy } (x, y) = (4 - 2\sqrt{3}, \sqrt{3}).$$

Ví dụ 2

$$\text{Cho biểu thức } A = \left[\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} \right) \frac{2}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right] : \frac{\sqrt{x^3} + y\sqrt{x} + x\sqrt{y} + \sqrt{y^3}}{\sqrt{xy^3} + \sqrt{x^3y}}$$

a) Rút gọn B .

$$\text{b) Tính giá trị của } x, y \text{ biết } x, y = \frac{1}{36}, A = 5$$

Phân tích

- Để rút gọn biểu thức thì cần tìm các điều kiện sao cho biểu thức có nghĩa $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$

và quy đồng mẫu số.

- Để tính giá trị của x , ta thay giá trị $x.y = \frac{1}{36}$, $A = 5$ rồi áp dụng định lí Viét để tìm các giá trị cặp số $(x; y)$

Lời giải

a) Điều kiện xác định: $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$

Ta có:

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{xy}} \cdot \frac{2}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} + \frac{x+y}{xy} \right) : \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x - \sqrt{xy} + y) + \sqrt{xy}(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{\sqrt{xy}(x+y)} \\ &= \left(\frac{2}{\sqrt{xy}} + \frac{x+y}{xy} \right) : \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x - \sqrt{xy} + y - \sqrt{xy})}{\sqrt{xy}(x+y)} \\ &= \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2}{xy} \cdot \frac{\sqrt{xy}(x+y)}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x+y)} = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{xy}} \end{aligned}$$

b) Ta có: $A = 5 \Leftrightarrow \sqrt{x} + \sqrt{y} = 5\sqrt{xy} \Leftrightarrow \sqrt{x} + \sqrt{y} = \frac{5}{6} \left(\text{do } \sqrt{xy} = \frac{1}{6} \right)$

$$\text{Khi đó: } \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = \frac{5}{6} & (1) \\ \sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = \frac{1}{6} & (2) \end{cases}$$

Từ (1) $\Rightarrow \sqrt{x} = \frac{5}{6} - \sqrt{y}$ thế vào (2) ta được:

$$\sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow \left(\frac{5}{6} - \sqrt{y} \right) \cdot \sqrt{y} = \frac{1}{6}$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{y} - \frac{5}{12} \right)^2 = \frac{1}{144} = \left(\frac{1}{12} \right)^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{y} = \frac{1}{2} \\ \sqrt{y} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } (x; y) = \left(\frac{1}{4}; \frac{1}{9} \right); \left(\frac{1}{9}; \frac{1}{4} \right)$$

Dạng 1.4.3 Tìm giá trị biến khi biết biểu thức bằng một biểu thức chứa biến khác.

Ví dụ 1

Cho biểu thức $M = \frac{3}{\sqrt{x}-2}$. Tìm x để $M = \frac{\sqrt{x}}{8}$.

Phân tích

- Đưa bài toán về bài toán giải phương trình.
- Phương trình chứa phân thức và biểu thức chứa căn nên trước hết cần đi tìm điều kiện xác định của phương trình:
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x} - 2 \neq 0 \end{cases}$$

Lời giải

Điều kiện: $x \geq 0, x \neq 4$.

Với điều kiện trên, theo yêu cầu bài toán ta có:

$$\begin{aligned} \frac{3}{\sqrt{x}-2} &= \frac{\sqrt{x}}{8} \\ \Leftrightarrow \frac{24}{8(\sqrt{x}-2)} &= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}{8(\sqrt{x}-2)} \\ \Leftrightarrow 24 &= x - 2\sqrt{x} \Leftrightarrow x - 2\sqrt{x} + 1 = 25 \Leftrightarrow (\sqrt{x}-1)^2 = 25 \\ \Leftrightarrow \sqrt{x}-1 &= \pm 5 \Leftrightarrow \sqrt{x} = -4 \text{ (loại)}, \sqrt{x} = 6 \Leftrightarrow x = 36 \text{ (thỏa mãn điều kiện)}. \end{aligned}$$

Vậy với $x = 36$ thì $M = \frac{\sqrt{x}}{8}$.

Ví dụ 2

Cho biểu thức $P = \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{\sqrt{x}}$. Tìm x để $P \cdot \sqrt{x} = 6\sqrt{x} - 3 - \sqrt{x-4}$.

Phân tích

- Phương trình chứa phân thức và biểu thức chứa căn nên trước hết cần đi tìm điều kiện xác định của phương trình:
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x} \neq 0 \\ x-4 \geq 0 \end{cases}$$
- Phương trình thu gọn có dạng $m^2 + \sqrt{n} = 0$, nhận thấy $m^2 \geq 0, \sqrt{n} \geq 0$ nên $m^2 + \sqrt{n} \geq 0$, do đó $m^2 + \sqrt{n} = 0$ chỉ xảy ra khi và chỉ khi
$$\begin{cases} m = 0 \\ n = 0 \end{cases}$$

Lời giải

Điều kiện: $x \geq 4$.

Với điều kiện trên, theo yêu cầu bài toán ta có:

$$\begin{aligned} \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{\sqrt{x}} \cdot \sqrt{x} &= 6\sqrt{x} - 3 - \sqrt{x-4} \\ \Leftrightarrow x + 2\sqrt{x} + 1 &= 6\sqrt{x} - 3 - \sqrt{x-4} \Leftrightarrow x - 4\sqrt{x} + 4 + \sqrt{x-4} = 0 \\ \Leftrightarrow (\sqrt{x}-2)^2 + \sqrt{x-4} &= 0. \end{aligned}$$

Vì $(\sqrt{x}-2)^2 \geq 0, \sqrt{x-4} \geq 0$ nên $(\sqrt{x}-2)^2 + \sqrt{x-4} \geq 0$.

Do đó $(\sqrt{x}-2)^2 + \sqrt{x-4} = 0$ chỉ xảy ra khi $\begin{cases} \sqrt{x}-2=0 \\ \sqrt{x-4}=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=4$ (thỏa mãn).

Vậy với $x=4$ thì $P.\sqrt{x} = 6\sqrt{x} - 3 - \sqrt{x-4}$.

CHUYÊN ĐỀ RÚT GỌN BIỂU THỨC

Dạng 1.6. Tìm điều kiện để biểu thức có giá trị nguyên

I. CÁC DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

II. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

III. BÀI TẬP TỰ LUẬN

✓ **Tìm $x \in \mathbb{Z}$ để biểu thức P có giá trị nguyên**

Phương pháp giải:

Bước 1: Đặt điều kiện, khử x ở trên tử, đưa biểu thức về dạng $P = a + \frac{b}{c\sqrt{x+d}}$ ($a, b, c, d \in \mathbb{Z}$)

Bước 2: Xét hai trường hợp:

TH1. Xét $x \in \mathbb{Z}$ nhưng $\sqrt{x} \notin \mathbb{Z} \Rightarrow \sqrt{x}$ là số vô tỷ $\Rightarrow c\sqrt{x+d}$ là số vô tỷ $\Rightarrow \frac{b}{c\sqrt{x+d}}$ là số vô tỷ

$\Rightarrow a + \frac{b}{c\sqrt{x+d}}$ là số vô tỷ $\Rightarrow P$ là số vô tỷ $\Rightarrow P \notin \mathbb{Z}$ (loại).

TH2. Xét $x \in \mathbb{Z}$ và $\sqrt{x} \in \mathbb{Z}$ thì $P \in \mathbb{Z}$ khi $\frac{b}{c\sqrt{x+d}} \in \mathbb{Z} \Rightarrow c\sqrt{x+d} \in U(b)$. Từ đó tìm x .

✓ **Tìm $x \in \mathbb{R}$ hoặc $x \in \mathbb{Q}$ để biểu thức P có giá trị nguyên**

Phương pháp giải:

Bước 1: Đặt điều kiện, khử x ở trên tử, đưa biểu thức về dạng $P = m \pm \frac{a}{b\sqrt{x+c}}$ ($m \in \mathbb{Z}; a, b, c \in \mathbb{N}^*$)

Bước 2: Lập luận: Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \pm \frac{a}{b\sqrt{x+c}} \in \mathbb{Z}$ khi $\frac{a}{b\sqrt{x+c}} \in \mathbb{Z}$

Bước 3: Chặn hai đầu của $A = \frac{a}{b\sqrt{x+c}}$

- $a > 0, b\sqrt{x+c} > 0 \Rightarrow \frac{a}{b\sqrt{x+c}} > 0 \Rightarrow A > 0$ (1)

- $\sqrt{x} \geq 0 \Leftrightarrow b\sqrt{x} \geq 0 \Leftrightarrow b\sqrt{x+c} \geq c \Rightarrow \frac{a}{b\sqrt{x+c}} \leq \frac{a}{c} \Rightarrow A \leq \frac{a}{c}$ (2)

Từ (1) và (2) Suy ra $0 < A \leq \frac{a}{c}$

Bước 4: Chọn $A \in \mathbb{Z}, 0 < A \leq \frac{a}{c}$. Từ đó suy ra x .

II. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Tìm $x \in \mathbb{N}$ để biểu thức $P = \frac{1}{\sqrt{x}-1}$ có giá trị nguyên

A. $x = 0$.

B. $x = 4$.

C. $x = 4, 0$.

D. $x \in \{4; 0\}$.

Lời giải

Chọn D

ĐKXD: $x \geq 0; x \neq 1$.

Để $P = \frac{1}{\sqrt{x}-1}$ có giá trị nguyên thì $\sqrt{x}-1 \in U(1) = \{1; -1\} \Rightarrow x \in \{0; 4\}$.

Câu 2. Có bao nhiêu số nguyên x để biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}$ có giá trị nguyên.

A. 4.

B. 5.

C. 7.

D. 3.

Lời giải

Chọn B

$$A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} = \frac{\sqrt{x}-3+4}{\sqrt{x}-3} = 1 + \frac{4}{\sqrt{x}-3}$$

ĐKXD: $x \geq 0; x \neq 9$.

Để A nguyên thì $\frac{4}{\sqrt{x}-3}$ nguyên khi đó $\sqrt{x}-3 \in U(4)$

$$\Rightarrow \sqrt{x}-3 \in \{-4; -2; -1; 1; 2; 4\}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} \in \{1; 2; 4; 5; 7\}$$

$$\Leftrightarrow x \in \{1; 4; 16; 25; 49\}.$$

Câu 3. Có bao nhiêu số nguyên x để biểu thức $A = \frac{2\sqrt{x}-9}{x-5\sqrt{x}+6} - \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} - \frac{2\sqrt{x}+1}{3-\sqrt{x}}$ có giá trị nguyên.

A. 4.

B. 5.

C. 7.

D. 3.

Lời giải

Chọn B

ĐKXD: $x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9$.

$$\begin{aligned} A &= \frac{2\sqrt{x}-9}{x-5\sqrt{x}+6} - \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} - \frac{2\sqrt{x}+1}{3-\sqrt{x}} \\ &= \frac{2\sqrt{x}-9}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} - \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} - \frac{2\sqrt{x}+1}{3-\sqrt{x}} \\ &= \frac{2\sqrt{x}-9}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} - \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} + \frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} \\ &= \frac{2\sqrt{x}-9 - (\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3) + (2\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} \\ &= \frac{2\sqrt{x}-9 - x + 9 + 2x - 3\sqrt{x} - 2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{x - \sqrt{x} - 2}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} - 3)} \\
&= \frac{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 2)}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} - 3)} \\
&= \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 3} \\
&= 1 + \frac{4}{\sqrt{x} - 3}.
\end{aligned}$$

Để A nguyên thì $\frac{4}{\sqrt{x} - 3}$ nguyên khi đó $\sqrt{x} - 3 \in U(4)$

$$\Rightarrow \sqrt{x} - 3 \in \{-4; -2; -1; 1; 2; 4\}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} \in \{1; 2; 4; 5; 7\}$$

$$\Leftrightarrow x \in \{1; 4; 16; 25; 49\}.$$

Câu 4. Có bao nhiêu giá trị nguyên của x để biểu thức $E = \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)}$ có giá trị nguyên.

A.1.

B.-1.

C.0.

D.6.

Lời giải

Chọn CĐKXD: $x > 0$.

Để E có giá trị nguyên $\begin{cases} \sqrt{x}(\sqrt{x} + 1) = 1 \\ \sqrt{x}(\sqrt{x} + 1) = -1(l) \end{cases}$

$$\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1) = 1 \Leftrightarrow x + \sqrt{x} - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}(l) \\ x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}(l) \end{cases}.$$

Câu 5. Có bao nhiêu giá trị nguyên của x để biểu thức $B = \frac{-\sqrt{x} + 8}{\sqrt{x} + 2}$ có giá trị nguyên.

A. 1.

B.3.

C. 4.

D.5.

Lời giải

Chọn B

$$B = \frac{-\sqrt{x} + 8}{\sqrt{x} + 2} = -1 + \frac{10}{\sqrt{x} + 2}.$$

Với $x \in \mathbb{Z}$ để B nguyên thì $10 : (\sqrt{x} + 2) \Leftrightarrow \sqrt{x} + 2 \in U(10) = \{-10; -5; -2; -1; 1; 2; 5; 10\}$

Mà $\sqrt{x} \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} + 2 \geq 2$ nên $\sqrt{x} + 2 \in \{2; 5; 10\}$

Nên $\sqrt{x} + 2 = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x = 4(tm)$

$\sqrt{x} + 2 = 5 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 3 \Leftrightarrow x = 9(tm)$

$\sqrt{x} + 2 = 10 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 8 \Leftrightarrow x = 64(tm)$

Liên hệ tài liệu word toán SĐT và zalo: 039.373.2038

Vậy $x \in \{4; 9; 64\}$.

Câu 6. Cho $A = \frac{7}{2\sqrt{x+3}}$. Tìm x để $A \in \mathbb{Z}$.

A. $x \in \left\{-4; -\frac{1}{16}\right\}$.

B. $x \in \left\{-4; \frac{1}{16}\right\}$.

C. $x \in \left\{-\frac{1}{16}; 4\right\}$.

D. $x \in \left\{\frac{1}{16}; 4\right\}$.

Lời giải

Chọn D

ĐKXD: $x \geq 0$

Với $x \geq 0$ thì $2\sqrt{x+3} \geq 3 \Leftrightarrow \frac{7}{2\sqrt{x+3}} \leq \frac{7}{3}$.

Do đó $0 < A \leq \frac{7}{3}$ mà $A \in \mathbb{Z} \Rightarrow A \in \{1; 2\}$.

Với $A = 1 \Rightarrow \frac{7}{2\sqrt{x+3}} = 1 \Leftrightarrow 2\sqrt{x+3} = 7 \Leftrightarrow x = 4$.

Với $A = 2 \Rightarrow \frac{7}{2\sqrt{x+3}} = 2 \Leftrightarrow 2\sqrt{x+3} = \frac{7}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{16}$.

Vậy $x \in \left\{\frac{1}{16}; 4\right\}$ thì $A \in \mathbb{Z}$.

Câu 7. Cho $A = \frac{-5}{2\sqrt{x+1}}$. Có bao nhiêu giá trị của x để $A \in \mathbb{Z}$.

A. 5.

B. 4.

C. 3.

D. 2.

Lời giải

Chọn A

ĐKXD: $x \geq 0$

Với $x \geq 0$ thì $2\sqrt{x+1} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{-5}{2\sqrt{x+1}} \geq -5$.

Do đó $-5 \leq A < 0$ mà $A \in \mathbb{Z} \Rightarrow A \in \{-5; -4; -3; -2; -1\}$.

Với $A = -5 \Rightarrow \frac{-5}{2\sqrt{x+1}} = -5 \Leftrightarrow 2\sqrt{x+1} = 1 \Leftrightarrow x = 0$.

Với $A = -4 \Rightarrow \frac{-5}{2\sqrt{x+1}} = -4 \Leftrightarrow 2\sqrt{x+1} = \frac{5}{4} \Leftrightarrow x = \frac{1}{64}$.

Với $A = -3 \Rightarrow \frac{-5}{2\sqrt{x+1}} = -3 \Leftrightarrow 2\sqrt{x+1} = \frac{5}{3} \Leftrightarrow x = \frac{1}{9}$.

Với $A = -2 \Rightarrow \frac{-5}{2\sqrt{x+1}} = -2 \Leftrightarrow 2\sqrt{x+1} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow x = \left(\frac{3}{4}\right)^2$.

Với $A = -1 \Rightarrow \frac{-5}{2\sqrt{x+1}} = -1 \Leftrightarrow 2\sqrt{x+1} = 5 \Leftrightarrow x = 4$.

Vậy $x \in \left\{0; \frac{1}{64}; \frac{1}{9}; \frac{9}{16}; 4\right\}$ thì $A \in \mathbb{Z}$.

Câu 8. Cho $A = \frac{2\sqrt{x+8}}{\sqrt{x+1}}$. Có bao nhiêu giá trị của x để $A \in \mathbb{Z}$.

A. 6.

B. 5.

C. 4.

D. 3.

Lời giải

Chọn AĐKXD: $x \geq 0$

Ta có

$$A = \frac{2(\sqrt{x+1})+6}{\sqrt{x+1}} = 2 + \frac{6}{\sqrt{x+1}} \Rightarrow A \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{6}{\sqrt{x+1}} \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Với } \sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow 0 < \frac{6}{\sqrt{x+1}} \leq 6 \Rightarrow \frac{6}{\sqrt{x+1}} \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}.$$

Lập bảng:

$\frac{6}{\sqrt{x+1}}$	1	2	3	4	5	6
$\sqrt{x+1}$	6	3	2	$\frac{3}{2}$	$\frac{6}{5}$	1
\sqrt{x}	5	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	0
x	25	4	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{25}$	0

Vậy $x \in \left\{ \frac{1}{25}; \frac{1}{4}; 0; 1; 4; 25 \right\}$ thì $A \in \mathbb{Z}$.

Câu9. Cho $A = \frac{2\sqrt{x}}{x - \sqrt{x+1}}$. Có bao nhiêu giá trị của x để $A \in \mathbb{Z}$.

A. 4.

B.3.

C.2.

D. 1.

Lời giải**Chọn B**ĐKXD: $x \geq 0$

$$\text{Ta có } A = \frac{2}{\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} - 1}.$$

$$\text{Do } \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} - 1 \geq 1 \Rightarrow 0 < A \leq 2; A \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} A=1 \\ A=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} - 1 = 1 \\ \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} - 1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x = \frac{7 \pm 3\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Vậy có 3 giá trị của x để $A \in \mathbb{Z}$.

Câu10. Cho $A = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x+1}}$. Có bao nhiêu giá trị của x để $A \in \mathbb{Z}$.

A. 4.

B.3.

C.2.

D.1.

Lời giải**Chọn C**ĐKXD: $x \geq 0$

$$\text{Ta có } A = \frac{(\sqrt{x+1})-2}{\sqrt{x+1}} = 1 - \frac{2}{\sqrt{x+1}}.$$

$$\text{Để } A \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{x+1}} \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Với } \sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow 0 < \frac{2}{\sqrt{x+1}} \leq 2.$$

$$\text{Suy ra } \frac{2}{\sqrt{x+1}} \in \{1; 2\}.$$

$\frac{2}{\sqrt{x+1}}$	1	2
\sqrt{x}	1	0
x	1	0

Vậy $x \in \{0; 1\}$ thì $A \in \mathbb{Z}$.

Câu 11. Cho $A = \frac{\sqrt{x} + 2}{1 - \sqrt{x}}$ giá trị nguyên dương lớn nhất của x để biểu thức A đạt giá trị

nguyên là

A. 5.

B. 14.

C. 2

D. 16.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x \neq 1 \\ x \geq 0 \end{cases}.$$

$$\text{Ta có } A = \frac{\sqrt{x} + 2}{1 - \sqrt{x}} = \frac{3}{1 - \sqrt{x}} - 1.$$

$$\text{Để } A \in \mathbb{Z} \text{ thì } \frac{3}{1 - \sqrt{x}} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 1 - \sqrt{x} \in U(3) \text{ mà } U(3) = \{\pm 3, \pm 1\}$$

$1 - \sqrt{x}$	-3	-1	1	3
\sqrt{x}	4	2	0	-2
x	16	4	0	
	Thỏa mãn	Thỏa mãn	Thỏa mãn	Loại

Vậy giá trị nguyên dương lớn nhất của x để biểu thức A đạt giá trị nguyên là : $x = 16$.

Câu 12. Cho $A = \frac{2x + 3}{x + 1}$ giá trị nguyên dương lớn nhất của x để biểu thức A đạt giá trị

nguyên là

A. 6.

B. 4.

C. 4

D. 1.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện $x \neq -1$.

$$\text{Ta có } A = \frac{2x + 3}{x + 1} = 2 + \frac{5}{x + 1}.$$

$$\text{Để } A \in \mathbb{Z} \text{ thì } \frac{5}{x + 1} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x + 1 \in U(5) \text{ mà } U(5) = \{\pm 5, \pm 1\}.$$

$x-1$	-5	-1	1	5
x	-4	0	2	6
	Thỏa mãn	Thỏa mãn	Thỏa mãn	Thỏa mãn

Vậy giá trị nguyên dương lớn nhất của x để biểu thức A đạt giá trị nguyên là : $x = 6$.

Câu 13. Cho $A = \frac{\sqrt{x^3}-1}{x-1}$ và $B = \frac{-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}$ giá trị nguyên lớn nhất của x để biểu thức $C = -A.B$

đạt giá trị nguyên là

A. 2.

B. 4.

C. 0

D. 1.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện $x \geq 0; x \neq 1$.

$$\text{Ta có } C = -A.B = -\frac{\sqrt{x^3}-1}{x-1} \cdot \left(\frac{-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} \right) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}+1}$$

Có $\sqrt{x}+1 \geq 1, x \geq 0, x \neq 1$.

$$\text{Để } C \in \mathbb{Z} \text{ thì } \frac{1}{\sqrt{x}+1} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \sqrt{x}+1 \in U(1) \text{ mà } U(1) = \{\pm 1\}.$$

$$\text{Do } \sqrt{x}+1 \geq 1 \Leftrightarrow \sqrt{x}+1=1 \Leftrightarrow x=0 \text{ (nhận).}$$

Câu 14. Cho $A = \frac{x^2+2x+1}{x^3+3x^2+3x+1}$ giá trị nguyên của x để biểu thức A đạt giá trị nguyên lớn nhất là

A. 5.

B. 4.

C. 4

D.1.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } A = \frac{x^2+2x+1}{x^3+3x^2+3x+1} = \frac{(x+1)^2}{(x+1)^3} = \frac{1}{x+1}. \text{ Điều kiện } x \neq -1.$$

$$\text{Để } A \in \mathbb{Z} \text{ thì } \frac{1}{x+1} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x+1 \in U(1) \text{ mà } U(1) = \{\pm 1\}.$$

$x+1$	1	-1
x	0	-2
A	1	-1
	Thỏa mãn	Thỏa mãn

Vậy giá trị nguyên của x để biểu thức A đạt giá trị nguyên lớn nhất là : $x = 0$ khi đó $A = 1$.

Câu 15. Cho $A = \frac{4\sqrt{x}+4}{25-x}, B = \frac{1}{\sqrt{x}+1}$ giá trị nguyên của x để biểu thức $P = A.B$ có giá trị nguyên nhỏ nhất là

A. 12.

B. 24.

C. -5.

D. 26.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện $x \geq 0; x \neq 25$.

$$\text{Ta có } P = A.B = \frac{4\sqrt{x} + 4}{25 - x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{4}{25 - x}$$

Để $P \in \mathbb{Z}$ thì $\frac{4}{25 - x} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 25 - x \in U(4)$ mà $U(4) = \{\pm 4, \pm 2, \pm 1\}$

$25 - x$	-4	-2	-1	1	2	4
x	29	27	26	24	23	21
P	-1	-2	-4	4	2	1
	Thỏa mãn	Thỏa mãn	Thỏa mãn	Thỏa mãn	Thỏa mãn	Thỏa mãn

Vậy giá trị nguyên của x để biểu thức $P = A.B$ đạt giá trị nguyên nhỏ nhất là :
 $x = 26 \Leftrightarrow P = -4$.

Câu 16. Cho biểu thức $P = \frac{5\sqrt{x} + 1}{2\sqrt{x} + 1}$. Có bao nhiêu giá trị x để P có giá trị nguyên.

A. 3.

B. 0.

C. 4.

D. 2.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện : $x \geq 0$

$$P = \frac{5\sqrt{x} + 1}{2\sqrt{x} + 1} \Rightarrow 2\sqrt{x}P + P = 5\sqrt{x} + 1 \Leftrightarrow \sqrt{x}(2P - 5) = 1 - P \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{1 - P}{2P - 5}$$

$$x \geq 0 \text{ nên } \frac{1 - P}{2P - 5} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - P \geq 0 \\ 2P - 5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq P < \frac{5}{2}.$$

$$P \in \mathbb{Z} \Rightarrow P \in \{1; 2\}.$$

$$\text{Với } P = 1 \Rightarrow \sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

$$\text{Với } P = 2 \Rightarrow \sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1.$$

Câu 17. Cho biểu thức $P = \frac{8\sqrt{x} - x - 31}{x - 8\sqrt{x} + 15} - \frac{\sqrt{x} + 5}{\sqrt{x} - 3} - \frac{3\sqrt{x} - 1}{5 - \sqrt{x}}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của x để P có giá trị nguyên

A. 12.

B. 8.

C. 4.

D. 6.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x \neq 9 \\ x \neq 25 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$P = \frac{8\sqrt{x} - x - 31}{x - 8\sqrt{x} + 15} - \frac{\sqrt{x} + 5}{\sqrt{x} - 3} - \frac{3\sqrt{x} - 1}{5 - \sqrt{x}} = \frac{8\sqrt{x} - x - 31}{(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} - 5)} - \frac{\sqrt{x} + 5}{\sqrt{x} - 3} + \frac{3\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} - 5}$$

$$= \frac{8\sqrt{x} - x - 31 - x + 25 + 3x - 10\sqrt{x} + 3}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-5)} = \frac{x - 2\sqrt{x} - 3}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-5)} = \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-5)} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-5}$$

$$P = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-5} = 1 + \frac{6}{\sqrt{x}-5} \quad (\text{với } x \neq 9; x \neq 25; x \geq 0)$$

P có giá trị nguyên khi và chỉ khi $\sqrt{x}-5$ là ước của 6 hay

$$\begin{cases} \sqrt{x}-5=1 \\ \sqrt{x}-5=-1 \\ \sqrt{x}-5=2 \\ \sqrt{x}-5=-2 \\ \sqrt{x}-5=3 \\ \sqrt{x}-5=-3 \\ \sqrt{x}-5=6 \\ \sqrt{x}-5=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ x=9(l) \\ x=16 \\ x=36 \\ x=49 \\ x=64 \\ x=121 \end{cases}$$

Câu 18. Cho $P = \left(\frac{1}{\sqrt{x}+2} + \frac{1}{\sqrt{x}-2} \right) \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của x để $Q = \frac{7}{3}P$ có giá trị nguyên

A. 0.

B. 1.

C. 4.

D. 2.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 4 \end{cases}$$

$$P = \left(\frac{1}{\sqrt{x}+2} + \frac{1}{\sqrt{x}-2} \right) \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} \cdot \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{x}+2}$$

$$Q = \frac{7}{3}P = \frac{14}{3\sqrt{x}+6}. \text{ Để } Q \in \mathbb{Z} \text{ thì } \frac{14}{3\sqrt{x}+6} \in \mathbb{Z} \Rightarrow 14 : (3\sqrt{x}+6)$$

$$\text{Vì } (3\sqrt{x}+6) \geq 6 \Rightarrow \begin{cases} 3\sqrt{x}+6=7 \\ 3\sqrt{x}+6=14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\sqrt{x}=1 \\ 3\sqrt{x}=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{9} \\ x=\frac{64}{9} \end{cases}$$

Câu 19. Cho biểu thức $P = \left(\frac{1}{1-\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{2x+\sqrt{x}-1}{1-x} + \frac{2x\sqrt{x}+x-\sqrt{x}}{1+x\sqrt{x}} \right)$.

Tìm giá trị lớn nhất của a để $P > a$.

A. $a=2$.

B. $a=1$.

C. $a=-2$.

D. $a=-1$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
P &= \left(\frac{1}{1-\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{2x+\sqrt{x}-1}{1-x} + \frac{2x\sqrt{x}+x-\sqrt{x}}{1+x\sqrt{x}} \right) \\
&= \left[\frac{2\sqrt{x}-1}{(1-\sqrt{x})\sqrt{x}} \right] : \left[\frac{(\sqrt{x}+1)(2\sqrt{x}-1)}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})} + \frac{\sqrt{x}(2\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(1+\sqrt{x})(1-\sqrt{x}+x)} \right] \\
&= \left[\frac{2\sqrt{x}-1}{(1-\sqrt{x})\sqrt{x}} \right] : \left[\frac{(2\sqrt{x}-1)}{(1-\sqrt{x})} + \frac{\sqrt{x}(2\sqrt{x}-1)}{(1-\sqrt{x}+x)} \right] \\
&= \frac{(2\sqrt{x}-1)}{(1-\sqrt{x})\sqrt{x}} : \left[(2\sqrt{x}-1) \frac{1-\sqrt{x}+x+\sqrt{x}-x}{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt{x}+x)} \right] \\
&= \frac{(2\sqrt{x}-1)}{(1-\sqrt{x})\sqrt{x}} \cdot \frac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt{x}+x)}{(2\sqrt{x}-1)} = \frac{1-\sqrt{x}+x}{\sqrt{x}}.
\end{aligned}$$

$$P = \frac{1-\sqrt{x}+x}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x} - 1 \geq 2\sqrt{\frac{1}{\sqrt{x}}\sqrt{x}} - 1 = 1 \Rightarrow P \geq 1.$$

Đẳng thức xảy ra khi $\frac{1}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} \Leftrightarrow x=1$ (Không thỏa mãn).

$\Rightarrow P > 1$. Do đó giá trị lớn nhất của a để $P > a$ là $a=1$.

Câu 20. Cho biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{x}-x-3}{x\sqrt{x}-1} + \frac{1}{\sqrt{x}-1} \right) : \left(\frac{2\sqrt{x}+3}{x+\sqrt{x}+1} \right)$. Tổng giá trị x để $3P$ là số nguyên.

A. $\frac{3}{2}$.

B. 0.

C. $\frac{9}{4}$.

D. $\frac{-3}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $\begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$.

$$\begin{aligned}
P &= \left(\frac{\sqrt{x}-x-3}{x\sqrt{x}-1} + \frac{1}{\sqrt{x}-1} \right) : \left(\frac{2\sqrt{x}+3}{x+\sqrt{x}+1} \right) = \frac{\sqrt{x}-x-3+x+\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{x+\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}+3} \\
&= \frac{2\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{x+\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}+3} = \frac{2(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)(2\sqrt{x}+3)} = \frac{2}{2\sqrt{x}+3}.
\end{aligned}$$

$$+ \quad 3P = \frac{6}{2\sqrt{x}+3} \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{2-3P}{2P}. \quad \text{Vì } \sqrt{x} \geq 0 \quad \text{nên} \quad \frac{2-3P}{2P} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2-3P \geq 0 \\ 2P > 0 \\ 2-3P \leq 0 \\ 2P < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 0 < P \leq \frac{2}{3} \Rightarrow 0 < 3P \leq 2.$$

$$+ \quad 3P \in \mathbb{Z} \Rightarrow 3P \in \{1; 2\} \Rightarrow \begin{cases} P = \frac{1}{3} \\ P = \frac{2}{3} \end{cases}.$$

$$\text{Với } P = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{2}{2\sqrt{x+3}} = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \frac{9}{4}.$$

$$\text{Với } P = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{2}{2\sqrt{x+3}} = \frac{2}{3} \Rightarrow x = 0.$$

Câu 21. Tìm giá trị của $x \in \mathbb{Z}$ để $P = 4 - (x-2)^2$ đạt giá trị lớn nhất.

A. 1.

B. 4.

C. 3.

D. 2.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } (x-2)^2 \geq 0 \Leftrightarrow 4 - (x-2)^2 \leq 4$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi } x-2=0 \Leftrightarrow x=2$$

Vậy giá trị lớn nhất của P là 4 khi $x=2$.

Câu 22. Tìm giá trị của $x \in \mathbb{Z}$ để $P = 4 - (x-2)^2$ đạt giá trị lớn nhất

A. 1.

B. 6.

C. 3.

D. 2.

Lời giải

Chọn D

Để D đạt giá trị lớn nhất thì $|x-2|+2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

$$\text{Mà } |x-2| \geq 0 \Rightarrow |x-2|+2 \geq 2.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi } |x-2|=0 \Leftrightarrow x=2$$

Vậy $x=2$ thì D đạt giá trị lớn nhất.

Câu 23. Tìm giá trị của $x \in \mathbb{Z}$ để $Q = 1010 - |3-x|$ đạt giá trị nhỏ nhất

A. 6.

B. 2.

C. 1.

D. 3.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } -|3-x| \leq 0 \Leftrightarrow 1010 - |3-x| \leq 1010$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi } |3-x|=0 \Rightarrow x=3$$

Vậy giá trị lớn nhất của Q là 1010 khi $x=3$.

Câu 24. Tìm giá trị của $x \in \mathbb{Z}$ để $A = \frac{x(\sqrt{x+4\sqrt{x-4}} + \sqrt{x-4\sqrt{x-4}})}{\sqrt{x^2-8x+16}}$, đạt giá trị nhỏ nhất.

A. 5.

B. 1.

C. 3.

D. 8.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện để biểu thức A xác định là $x > 4$.

$$\begin{aligned} A &= \frac{x \left(\sqrt{(\sqrt{x-4}+2)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-4}-2)^2} \right)}{\sqrt{(x-4)^2}} \\ &= \frac{x \left(|\sqrt{x-4}+2| + |\sqrt{x-4}-2| \right)}{|x-4|} \\ &= \frac{x \left(\sqrt{x-4}+2 + |\sqrt{x-4}-2| \right)}{x-4} \end{aligned}$$

$$+ \text{ Nếu } 4 < x < 8 \text{ thì } \sqrt{x-4} - 2 < 0 \text{ nên } A = \frac{x(\sqrt{x-4} + 2 + 2 - \sqrt{x-4})}{x-4} = \frac{4x}{x-4} = 4 + \frac{16}{x-4}$$

Do $4 < x < 8$ nên $0 < x-4 < 4 \Rightarrow A > 8$.

+ Nếu $x \geq 8$ thì $\sqrt{x-4} - 2 \geq 0$ nên

$$A = \frac{x(\sqrt{x-4} + 2 + \sqrt{x-4} - 2)}{x-4} = \frac{2x\sqrt{x-4}}{x-4} = \frac{2x}{\sqrt{x-4}} = 2\sqrt{x-4} + \frac{8}{\sqrt{x-4}} \geq 2\sqrt{16} = 8 \text{ (cauchy)}$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi } 2\sqrt{x-4} = \frac{8}{\sqrt{x-4}} \Leftrightarrow x-4 = 4 \Leftrightarrow x = 8.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $A = 8$ khi $x = 8$.

Câu 25. Tìm giá trị của $x \in \mathbb{Z}$ để $A = \frac{x(\sqrt{x+4\sqrt{x-4}} + \sqrt{x-4\sqrt{x-4}})}{\sqrt{x^2 - 8x + 16}}$, đạt giá trị nguyên.

A. $x \in \{1; 5; 6; 8; 20; 68\}$.

B. $x \in \{5; 6\}$.

C. $x \in \{8; 20; 68\}$.

D. $x \in \{5; 6; 8; 20; 68\}$.

Lời giải

Chọn D

Xét $4 < x < 8$ thì $A = 4 + \frac{16}{x-4}$, ta thấy $A \in \mathbb{Z}$ khi và chỉ khi $\frac{16}{x-4} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x-4$ là ước số nguyên dương của 16. Hay $x-4 \in \{1; 2; 4; 8; 16\} \Leftrightarrow x \in \{5; 6; 8; 12; 20\}$ đối chiếu điều kiện suy ra $x = 5$ hoặc $x = 6$.

+ Xét $x \geq 8$ ta có: $A = \frac{2x}{\sqrt{x-4}}$, đặt $\sqrt{x-4} = m \Rightarrow \begin{cases} x = m^2 + 4 \\ m \geq 2 \end{cases}$ khi đó ta có:

$$A = \frac{2(m^2 + 4)}{m} = 2m + \frac{8}{m} \text{ suy ra } m \in \{2; 4; 8\} \Leftrightarrow x \in \{8; 20; 68\}.$$

Tóm lại để A nhận giá trị nguyên thì $x \in \{5; 6; 8; 20; 68\}$.

Câu 26. Cho biểu thức $P = x^2 - 2x$. Tìm x nguyên để biểu thức P đạt giá trị nhỏ nhất?

A. $x = -1$.

B. $x = -2$.

C. $x = 1$.

D. $x = 2$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } P = x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1 \geq -1.$$

Biểu thức P đạt giá trị nhỏ nhất khi $x = 1$

Câu 27. Cho biểu thức $P = 2|x^2 - 1| + |2x^2 - 9|$. Có bao nhiêu giá trị x nguyên dương để biểu thức P đạt giá trị nhỏ nhất?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn B

$$\begin{aligned} \text{Ta có } P &= 2|x^2 - 1| + |2x^2 - 9| \\ &= |2x^2 - 2| + |2x^2 - 9| = |2 - 2x^2| + |2x^2 - 9| \geq |2 - 2x^2 + 2x^2 - 9| = 7 \end{aligned}$$

Vậy $P \geq 7$. Dấu bằng xảy ra khi $(2 - 2x^2)(2x^2 - 9) \geq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x^2 \leq \frac{9}{2}$.

Vì x nguyên dương nên $x \in \{1; 2\}$. Có 2 giá trị cần tìm.

Câu 28. Cho biểu thức $P = -x + 4\sqrt{x}$. Tìm x để biểu thức P đạt giá trị lớn nhất?

A. $x = 4$.

B. $x = 2$.

C. $x = 1$.

D. $x = 3$.

Lời giải

Chọn A

$$P = -x + 4\sqrt{x} = -(\sqrt{x} - 2)^2 + 4 \leq 4.$$

Dấu bằng xảy ra khi $\sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x = 4$.

Câu 29. Cho biểu thức $P = \frac{3}{3 + 2\sqrt{4 - x^2}}$. Gọi $x_1; x_2$ là những giá trị để biểu thức P đạt giá trị lớn nhất thì tích $x_1 \cdot x_2$ bằng bao nhiêu?

A. -1 .

B. -4 .

C. 0 .

D. 4 .

Lời giải

Chọn B

Điều kiện $-2 \leq x \leq 2$

Ta có $3 + 2\sqrt{4 - x^2} \geq 3, \forall x$ thoả mãn điều kiện xác định.

Khi đó $P = \frac{3}{3 + 2\sqrt{4 - x^2}} \leq 1$. Vậy P đạt giá trị lớn nhất tại $x = \pm 2$.

Nên tích $x_1 \cdot x_2 = -4$

Câu 30. Cho biểu thức $P = \frac{7}{3 + 2\sqrt{4 - x^2}}$. Gọi x_0 để biểu thức P đạt giá trị nhỏ nhất thì x_0 thoả mãn điều kiện nào dưới đây?

A. $x_0 < 0$.

B. $-1 < x_0 < 1$.

C. $x_0 > 1$.

D. $x_0 < -1$.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện $-2 \leq x \leq 2$

Ta có $4 - x^2 \leq 4$, với $-2 \leq x \leq 2$

Nên $3 + 2\sqrt{4 - x^2} \leq 7$, với $-2 \leq x \leq 2$

Khi đó $P = \frac{7}{3 + 2\sqrt{4 - x^2}} \geq 1$. Vậy P đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = 0$.

III. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Câu 1. Cho biểu thức $B = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} - 3} - \frac{3}{\sqrt{a} + 3} - \frac{a - 2}{a - 9}$ với $a \geq 0; a \neq 9$. Tìm các số nguyên a để B nhận giá trị nguyên.

Lời giải

Với $a \geq 0; a \neq 9$ ta có:

$$B = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} - 3} - \frac{3}{\sqrt{a} + 3} - \frac{a - 2}{a - 9} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} - 3} - \frac{3}{\sqrt{a} + 3} - \frac{a - 2}{(\sqrt{a} - 3)(\sqrt{a} + 3)}$$

$$= \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a}+3)}{(\sqrt{a}-3)(\sqrt{a}+3)} - \frac{3(\sqrt{a}-3)}{(\sqrt{a}-3)(\sqrt{a}+3)} - \frac{a-2}{(\sqrt{a}-3)(\sqrt{a}+3)}$$

$$= \frac{a+3\sqrt{a}-3\sqrt{a}+9-a+2}{\sqrt{a}-3)(\sqrt{a}+3)} = \frac{11}{a-9}$$

$$\text{Để } B \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{11}{a-9} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 11:(a-9) \Leftrightarrow (a-9) \in \mathcal{U} \quad (11)$$

$\mathcal{U}(11) = \{1; 11; -1; -11\}$. Khi đó ta có bảng giá trị

$a-9$	-11	-1	1	11
a	-2	8	10	20
	Không thoả mãn	Thoả mãn	Thoả mãn	Thoả mãn

Vậy $a \in \{8; 10; 20\}$ thì $B \in \mathbb{Z}$.

Câu 2: Cho biểu thức $A = \frac{x-2\sqrt{x}}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}} + \frac{1+2x-2\sqrt{x}}{x^2-\sqrt{x}}$ (Với $x > 0, x \neq 1$). Tìm x để biểu thức A nhận giá trị là số nguyên.

Lời giải

$$\text{Rút gọn } A \text{ ta được } A = \frac{\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}+1}.$$

Cách 1: Với $x > 0, x \neq 1 \Rightarrow x + \sqrt{x} + 1 > \sqrt{x} + 1 > 1$.

$$\text{Vậy } 0 < A = \frac{\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}+1} < \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1} = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}+1} < 2.$$

$$\text{Vì } A \text{ nguyên nên } A = 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}+1} = 1 \Leftrightarrow x = 1 \text{ (Không thoả mãn)}.$$

Vậy không có giá trị nguyên nào của x để giá trị A là một số nguyên.

Cách 2: Dùng miền giá trị

$$A = \frac{\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}+1} \Leftrightarrow Ax + (A-1)\sqrt{x} + A - 2 = 0$$

$$\text{Trường hợp 1: } A = 0 \Rightarrow \sqrt{x} = -2 \Rightarrow x \in \emptyset$$

$$\text{Trường hợp 2: } A \neq 0 \Rightarrow \Delta = (A-1)^2 - 4A(A-2) = -3A^2 + 6A + 1 \geq 0 \Leftrightarrow A^2 - 2A - \frac{1}{3} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow A^2 - 2A + 1 \leq \frac{4}{3} \Leftrightarrow (A-1)^2 \leq \frac{4}{3} \Rightarrow A \in \{1; 2\} \text{ do } A \in \mathbb{Z}, A > 0.$$

Với $A = 1 \Leftrightarrow x = 1$ (loại)

$$\text{Với } A = 2 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}+1} = 2 \Leftrightarrow x = 0 \text{ (loại)}.$$

Vậy không có giá trị nguyên nào của x để giá trị A là một số nguyên.

Câu 3: Cho biểu thức $P = \frac{\sqrt{x}-3}{2-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}-2}{3+\sqrt{x}} - \frac{9-x}{x+\sqrt{x}-6}$ với $x \geq 0; x \neq 4$

Tìm tất cả các giá trị nguyên của x để $\frac{1}{P}$ nhận giá trị nguyên dương lớn nhất.

Lời giải

$$\text{Rút gọn } P \text{ ta được } P = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+3}$$

$$\text{Ta có } \frac{1}{P} = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} = \frac{\sqrt{x}-2+5}{\sqrt{x}-2} = 1 + \frac{5}{\sqrt{x}-2}$$

$$\frac{1}{P} \text{ nguyên} \Leftrightarrow \frac{5}{\sqrt{x}-2} \text{ nguyên} \Leftrightarrow 5 : (\sqrt{x}-2) \Leftrightarrow \sqrt{x}-2 \text{ là Ư}(5) = \{\pm 1; \pm 5\}$$

Lập bảng:

$\sqrt{x}-2$	-1	1	-5	5
\sqrt{x}	1	3	-3	7
x	1	9		49
$\frac{1}{P}$	-4	6	Loại	2

Vậy $\frac{1}{P} = 6$ là giá trị nguyên dương lớn nhất khi $x = 9$.

Câu 4: Cho biểu thức $P = \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right) : \left(\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+3} + \frac{\sqrt{x}-3}{2-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}-2}{x+\sqrt{x}-6}\right)$ với $x \geq 0; x \neq 4$

Tìm tất cả các giá trị nguyên của x để P nhận giá trị nguyên.

Lời giải

Rút gọn P ta được $P = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1}$.

$$\text{Ta có } P = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1} = \frac{\sqrt{x}+1-3}{\sqrt{x}+1} = 1 - \frac{3}{\sqrt{x}+1}$$

$$P \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{3}{\sqrt{x}+1} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 3 : (\sqrt{x}+1) \Leftrightarrow \sqrt{x}+1 \text{ là Ư}(3)$$

$$\text{Ư}(3) = \{\pm 1; \pm 3\}$$

Mà $\sqrt{x} \geq 0, \forall x \geq 0; x \neq 4 \Rightarrow \sqrt{x}+1 > 0, \forall x \geq 0; x \neq 4$ nên:

$$\text{TH1: } \sqrt{x}+1=1 \Leftrightarrow \sqrt{x}=0 \Leftrightarrow x=0 \text{ (thỏa mãn)}$$

$$\text{TH2: } \sqrt{x}+1=3 \Leftrightarrow \sqrt{x}=2 \Leftrightarrow x=4 \text{ (loại)}$$

Vậy $x \in \{0\}$ thì $P \in \mathbb{Z}$.

Câu 5: Cho biểu thức $B = \frac{2(x+4)}{x-3\sqrt{x}-4} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} - \frac{8}{\sqrt{x}-4}$ với $x \geq 0, x \neq 16$

Tìm tất cả các giá trị nguyên của x để B nhận giá trị nguyên.

Lời giải

ĐKXĐ: $x \geq 0, x \neq 16$

Rút gọn P ta được $B = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$.

$$B = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} = \frac{3\sqrt{x}+3-3}{\sqrt{x}+1} = 3 - \frac{3}{\sqrt{x}+1} < 3 \text{ (vì } \frac{3}{\sqrt{x}+1} > 0 \text{ với } x \geq 0; x \neq 16)$$

Vì $\sqrt{x} \geq 0$ với mọi $x \geq 0; x \neq 16$ nên $\sqrt{x}+1 \geq 1$ với mọi $x \geq 0; x \neq 16$.

$$\Rightarrow \frac{3}{\sqrt{x}+1} \leq 3 \Rightarrow -\frac{3}{\sqrt{x}+1} \geq -3 \Rightarrow 3 - \frac{3}{\sqrt{x}+1} \geq 0$$

Suy ra $0 \leq B < 3$ Mà $B \in \mathbb{Z}$ nên $B \in \{0; 1; 2\}$

$$\text{TH1: } B = 0 \Leftrightarrow \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x+3}} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ (thỏa mãn)}$$

$$\text{TH2: } B = 1 \Leftrightarrow \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x+3}} = 1 \Leftrightarrow 3\sqrt{x} = \sqrt{x+3} \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = \frac{9}{4} \text{ (thỏa mãn)}$$

$$\text{TH3: } B = 2 \Leftrightarrow \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x+3}} = 2 \Leftrightarrow 3\sqrt{x} = 2\sqrt{x+3} \Leftrightarrow \sqrt{x} = 6 \Leftrightarrow x = 36 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy $x \in \left\{0; \frac{9}{4}; 36\right\}$ thì $B \in \mathbb{Z}$.

Câu 6. Tìm số hữu tỉ x để biểu thức $P = \frac{2}{\sqrt{x+1}}$ đạt giá trị nguyên.

Lời giải

$$x \in \mathbb{Q} \text{ nên } x = \frac{a}{b} (a, b \in \mathbb{Z}; b \neq 0)$$

$$\text{Điều kiện xác định: } x \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a}{b} \geq 0 \\ a, b \in \mathbb{Z} \\ b \neq 0 \end{cases}$$

$$\text{Ta có } P = \frac{2}{\sqrt{x+1}} = \frac{2}{\sqrt{\frac{a}{b}+1}} = \frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a+\sqrt{b}}} = k; (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{b} = k\sqrt{a+k\sqrt{b}} \Leftrightarrow (2-k)\sqrt{b} = k\sqrt{a}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{2-k}{k} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < k \leq 2 \\ \frac{a}{b} = \left(\frac{2-k}{k}\right)^2 \end{cases}$$

Với $k = 1$ thì $x = 1, P = 1$

Với $k = 2$ thì $x = 0, P = 2$.

Câu 7. Tìm số hữu tỉ x để biểu thức $Q = \frac{4}{\sqrt{x-1}}$ đạt giá trị nguyên.

Lời giải

$$x \in \mathbb{Q} \text{ nên } x = \frac{a}{b} (a, b \in \mathbb{Z}; b \neq 0)$$

$$\text{Điều kiện xác định: } 0 \leq x \neq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a}{b} \geq 0 \\ a, b \in \mathbb{Z} \\ a \neq b \neq 0 \end{cases}$$

$$\text{Ta có } P = \frac{4}{\sqrt{x-1}} = \frac{4}{\sqrt{\frac{a}{b}-1}} = \frac{4\sqrt{b}}{\sqrt{a-\sqrt{b}}} = k; (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow 4\sqrt{b} = k\sqrt{a-k\sqrt{b}} \Leftrightarrow (4+k)\sqrt{b} = k\sqrt{a}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{4+k}{k} \Leftrightarrow \begin{cases} k \leq -4 \\ k > 0 \\ \frac{a}{b} = \left(\frac{4+k}{k}\right)^2 \end{cases}.$$

Vậy số hữu tỉ x cần tìm có dạng $x = \frac{a}{b} = \left(\frac{4+k}{k}\right)^2, (k \in \mathbb{Z} \setminus \{-3; -2; -2; 0\})$.

Câu 8. Tìm số hữu tỉ x để biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+2}$ đạt giá trị nguyên.

Lời giải

$$x \in \mathbb{Q} \text{ nên } x = \frac{a}{b} (a, b \in \mathbb{Z}; b \neq 0). \text{ Điều kiện xác định: } x \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a}{b} \geq 0 \\ a, b \in \mathbb{Z} \\ b \neq 0 \end{cases}$$

$$A = \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+2} = 1 - \frac{5}{\sqrt{x}+2} = 1 - \frac{5}{\sqrt{x}+2}.$$

Để A nguyên thì $\frac{5}{\sqrt{x}+2}$ nguyên.

$$\text{Ta có } \frac{5}{\sqrt{x}+2} = \frac{5}{\sqrt{\frac{a}{b}}+2} = \frac{5\sqrt{b}}{\sqrt{a}+2\sqrt{b}} = k, (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\Leftrightarrow 5\sqrt{b} = k\sqrt{a} + 2k\sqrt{b} \Leftrightarrow (5-2k)\sqrt{b} = k\sqrt{a}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{5-2k}{k} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < k \leq \frac{5}{2} \\ \frac{a}{b} = \left(\frac{5-2k}{k}\right)^2 \end{cases}.$$

Với $k=1$ thì $x=9, A=0$

Với $k=2$ thì $x=\frac{1}{4}, A=-1$.

Câu 9. Cho hai biểu thức $A = \frac{4(\sqrt{x}+1)}{25-x}$ và $B = \left(\frac{15-\sqrt{x}}{x-25} + \frac{2}{\sqrt{x}+5}\right) : \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-5}$ với $x \geq 0; x \neq 25$

1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x=9$.

2) Rút gọn biểu thức B .

3) Tìm tất cả các giá trị nguyên của x để biểu thức $P = A.B$ đạt giá trị nguyên lớn nhất.
(Trích đề tuyển sinh vào 10 – TP Hà Nội – Năm học 2019 – 2020)

Lời giải

1) Ta có $x=9$ thỏa mãn điều kiện xác định. Thay $x=9$ vào A ta có :

$$A = \frac{4(\sqrt{x}+1)}{25-x} = \frac{4(\sqrt{9}+1)}{25-9} = \frac{4.(3+1)}{16} = 1.$$

2) Rút gọn biểu thức B .

Với $x \geq 0, x \neq 25$, ta có $B = \left(\frac{15 - \sqrt{x}}{x - 25} + \frac{2}{\sqrt{x} + 5} \right) : \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 5}$.

$$B = \left[\frac{15 - \sqrt{x}}{(\sqrt{x} + 5)(\sqrt{x} - 5)} + \frac{2}{\sqrt{x} + 5} \right] : \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 5}$$

$$B = \frac{15 - \sqrt{x} + 2(\sqrt{x} - 5)}{(\sqrt{x} + 5)(\sqrt{x} - 5)} : \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 5}$$

$$B = \frac{15 - \sqrt{x} + 2\sqrt{x} - 10}{(\sqrt{x} + 5)(\sqrt{x} - 5)} : \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 5}$$

$$B = \frac{\sqrt{x} + 5}{(\sqrt{x} + 5)(\sqrt{x} - 5)} \cdot \frac{\sqrt{x} - 5}{\sqrt{x} + 1}$$

$$B = \frac{1}{\sqrt{x} + 1}$$

3) Tìm tất cả giá trị nguyên của x để biểu thức $P = A.B$ đạt giá giá trị nguyên lớn nhất.

Ta có $P = A.B = \frac{4(\sqrt{x} + 1)}{25 - x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{4}{25 - x}$.

Để P nhận giá trị nguyên khi $x \in \mathbb{Z}$ thì $4:(25 - x)$ hay $25 - x \in U_{(4)} = \{-4; -2; -1; 1; 2; 4\}$.

Khi đó, ta có bảng giá trị sau:

$25 - x$	-4	-2	-1	1	2	4
x	29	27	26	24	23	21
$P = A.B$	-1	-2	-4	4	2	1
Đánh giá	Thỏa mãn	Thỏa mãn	Thỏa mãn	Thỏa mãn	Thỏa mãn	Thỏa mãn

Do P đạt giá trị nguyên lớn nhất nên ta có $P = 4$. Khi đó giá trị cần tìm của x là $x = 24$.

Câu 10. Cho biểu thức $A = \frac{(\sqrt{x} + 1)^2 + (\sqrt{x} - 1)^2}{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1)} - \frac{3\sqrt{x} + 1}{x - 1}$ với $x > 0; x \neq 1$.

a) Rút gọn biểu thức A .

b) Tìm x là số chính phương để $2019A$ là số nguyên.

(Trích đề thi tuyển sinh vào lớp 10 tỉnh Bắc Ninh – Năm học 2019-2020.)

Lời giải

a) Ta có:

$$\begin{aligned} A &= \frac{(\sqrt{x} + 1)^2 + (\sqrt{x} - 1)^2 - 3\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \frac{x + 2\sqrt{x} + 1 + x - 2\sqrt{x} + 1 - 3\sqrt{x} - 1}{x - 1} \\ &= \frac{2x - 3\sqrt{x} + 1}{x - 1} = \frac{2x - 2\sqrt{x} - \sqrt{x} + 1}{x - 1} = \frac{(\sqrt{x} - 1)(2\sqrt{x} - 1)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \frac{2\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1} \end{aligned}$$

$$2019A = \frac{2019(2\sqrt{x} + 2 - 3)}{\sqrt{x} + 1} = 4038 - \frac{6057}{\sqrt{x} + 1}$$

- b) 2019A là số nguyên khi và chỉ khi $\sqrt{x} + 1$ là ước nguyên dương của 6057 gồm: 1; 3; 9; 673; 2019; 6057.
- +) $\sqrt{x} + 1 = 1 \Leftrightarrow x = 0$, thỏa mãn.
- +) $\sqrt{x} + 1 = 3 \Leftrightarrow x = 4$, thỏa mãn.
- +) $\sqrt{x} + 1 = 9 \Leftrightarrow x = 64$, thỏa mãn.
- +) $\sqrt{x} + 1 = 673 \Leftrightarrow x = 451584$, thỏa mãn.
- +) $\sqrt{x} + 1 = 2019 \Leftrightarrow x = 4072324$, thỏa mãn.
- +) $\sqrt{x} + 1 = 6057 \Leftrightarrow x = 36675136$, thỏa mãn.

- Câu 11.** a) Tính $A = \sqrt{12} + \sqrt{18} - 8 - 2\sqrt{3}$.
- b) Cho biểu thức $B = \sqrt{9x+9} + \sqrt{4x+4} + \sqrt{x+1}$ với $x \geq -1$. Tìm x sao cho B có giá trị là 18.
- c) Tìm tất cả các giá trị nguyên của x để biểu thức $P = A.B$ đạt giá trị nguyên lớn nhất.

(Trích đề thi tuyển sinh vào lớp 10 tỉnh Đà Nẵng– Năm học 2019-2020.)

Lời giải

a) Tính

$$A = \sqrt{12} + \sqrt{18} - 8 - 2\sqrt{3}$$

$$= 2\sqrt{3} + 3\sqrt{2} - 8 - 2\sqrt{3} = 3\sqrt{2} - 8.$$

Vậy $A = 3\sqrt{2} - 8$.

b) $B = \sqrt{9x+9} + \sqrt{4x+4} + \sqrt{x+1} = 3\sqrt{x+1} + 2\sqrt{x+1} + \sqrt{x+1} = 6\sqrt{x+1}$

Để B có giá trị là 18 thì

$$6\sqrt{x+1} = 18 \Leftrightarrow \sqrt{x+1} = 3 \Leftrightarrow x+1 = 9 \Leftrightarrow x = 8 \text{ (tmdk)}$$

Vậy $x = 8$.

Câu 12. 1) Rút gọn biểu thức: $A = \frac{4}{\sqrt{5}-1} - 3\sqrt{45} + \sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}$

2) Cho biểu thức: $B = \left(\frac{1}{3-\sqrt{x}} - \frac{1}{3+\sqrt{x}} \right) \cdot \frac{3+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$, (với $x > 0; x \neq 9$).

Rút gọn biểu thức và tìm tất cả các giá trị nguyên của x để $B > \frac{1}{2}$.

(Trích đề thi tuyển sinh vào lớp 10 tỉnh Hà Nam– Năm học 2019-2020.)

Lời giải

1)

Ta có $A = \frac{4}{\sqrt{5}-1} - 3\sqrt{45} + \sqrt{(\sqrt{5}-1)^2} = \frac{4(\sqrt{5}+1)}{5-1} - 9\sqrt{5} + |\sqrt{5}-1|$

$$= \sqrt{5} + 1 - 9\sqrt{5} + \sqrt{5} - 1 = -7\sqrt{5}.$$

2)

$$\begin{aligned} \text{Ta có } B &= \left(\frac{1}{3-\sqrt{x}} - \frac{1}{3+\sqrt{x}} \right) \cdot \frac{3+\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{3+\sqrt{x} - (3-\sqrt{x})}{(3-\sqrt{x})(3+\sqrt{x})} \cdot \frac{3+\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \\ &= \frac{2\sqrt{x}}{(3-\sqrt{x})(3+\sqrt{x})} \cdot \frac{3+\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{2}{3-\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

$$B > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2}{3-\sqrt{x}} > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2}{3-\sqrt{x}} - \frac{1}{2} > 0 \Leftrightarrow \frac{4 - (3-\sqrt{x})}{2(3-\sqrt{x})} > 0 \Leftrightarrow \frac{1+\sqrt{x}}{2(3-\sqrt{x})} > 0; (*)$$

$$\text{Vì } 1+\sqrt{x} > 0 \text{ nên } (*) \Leftrightarrow 3-\sqrt{x} > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} < 3 \Leftrightarrow 0 < x < 9$$

$$\text{Vì } x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}.$$

Câu 13. Cho biểu thức:

$$M = \left(\frac{3\sqrt{x}}{x + \sqrt{xy} + y} - \frac{3x}{x\sqrt{x} - y\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} \right) : \frac{(x-1)(\sqrt{x} - \sqrt{y})}{2x + 2\sqrt{xy} + 2y}$$

a) Rút gọn biểu thức M .

b) Tìm các số nguyên x sao cho biểu thức M có giá trị nguyên.

(Trích đề thi tuyển sinh vào lớp 10 tỉnh Hà Giang– Năm học 2019-2020.)

Lời giải

a/ Điều kiện: $x \geq 0$; $y \geq 0$; $x \neq y$; $x \neq 1$

$$M = \frac{3\sqrt{x}(\sqrt{x} - \sqrt{y}) - 3x + x + \sqrt{xy} + y}{x\sqrt{x} - y\sqrt{y}} \cdot \frac{2(x + \sqrt{xy} + y)}{(x-1)(\sqrt{x} - \sqrt{y})}$$

$$M = \frac{x - 2\sqrt{xy} + y}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(x + \sqrt{xy} + y)} \cdot \frac{2(x + \sqrt{xy} + y)}{(x-1)(\sqrt{x} - \sqrt{y})}$$

$$M = \frac{2}{x-1}$$

b/ Để M có giá trị nguyên khi $x-1$ là ước của 2.

Các ước nguyên của 2 là $\pm 1; \pm 2$.

Câu 14. Cho $A = \frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}$ và $B = \frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1}$ với $x \geq 0$, $x \neq 1$.

a). Tính giá trị của biểu thức A khi $x=2$.

b). Rút gọn biểu thức B .

c). Tìm x sao cho $C = -A.B$ nhận giá trị là số nguyên.

(Trích đề thi tuyển sinh vào lớp 10 tỉnh Thái Bình– Năm học 2019-2020.)

Lời giải

a). Tính giá trị của biểu thức A khi $x=2$.

$$\text{Có } A = \frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} = \frac{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}{x-1} = \frac{\sqrt{x^3}-1}{x-1}$$

Khi $x = 2 \Rightarrow A = 2\sqrt{2} - 1$.

$$b). B = \frac{x + \sqrt{x} + 1 - (x + 2) - (\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1)}{(\sqrt{x} - 1)(x + \sqrt{x} + 1)} = \frac{-x + \sqrt{x}}{(\sqrt{x} - 1)(x + \sqrt{x} + 1)} = \frac{-\sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1}$$

$$c) \text{ Có } C = -A.B = -\frac{\sqrt{x^3} - 1}{x - 1} \cdot \left(\frac{-\sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} \right) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1} = 1 - \frac{1}{\sqrt{x} + 1}$$

Có $\sqrt{x} + 1 \geq 1, x \geq 0, x \neq 1$.

C nhận giá trị là số nguyên $\Leftrightarrow \sqrt{x} + 1 = 1 \Leftrightarrow x = 0$ (nhận).

Dạng 1.7. Bài toán có chứa tham số

I. CÁC DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

- ✓ Tìm tham số để phương trình $P = m$ có nghiệm

Phương pháp giải:

Bước 1: Đặt điều kiện để P xác định

Bước 2: Từ , rút \sqrt{x} theo m

Bước 3: Dựa vào điều kiện của x để giải m

- ✓ Tìm điều kiện của tham số m để biểu thức thỏa mãn yêu cầu ...

Phương pháp giải:

Dùng các kĩ thuật tách, hằng đẳng thức, ... Dựa vào đề bài, tìm m

II. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho $A = \frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} - 3}$ ($x \geq 0; x \neq 9$). Giá trị m để phương trình $A = m$ có nghiệm là:

A. $m \geq 1$.

B. $m \leq -1$.

C. $-1 \leq m \leq 1$.

D. $m \leq -1$ hoặc $m > 1$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Khi } A = m \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} - 3} = m \Leftrightarrow m(\sqrt{x} - 3) = \sqrt{x} + 3 \Leftrightarrow (m - 1)\sqrt{x} = 3 + 3m \quad (*)$$

$$\text{Khi } m = 1 \text{ thì } (*) \Leftrightarrow 0 \cdot \sqrt{x} = 6 \text{ vô lí.}$$

$$\text{Khi } m \neq 1 \text{ thì } (*) \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{3 + 3m}{m - 1}.$$

Do $\sqrt{x} \geq 0$ nên để phương trình trên có nghiệm khi:

$$\frac{3 + 3m}{m - 1} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3 + 3m \geq 0 \\ m - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -1 \\ m > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m \leq -1 \end{cases}$$

Câu 2. Cho phương trình $m\sqrt{2x} - (2m - 1)\sqrt{8x} + (3m - 2)\sqrt{18x} = 14$. Với giá trị nào của m thì

phương trình có nghiệm $x = \frac{1}{2}$

A. $m = 2$.

B. $m = -1$.

C. $m = -3$.

D. $m = 3$.

Lời giải

Chọn D

Yêu cầu bài toán

$$\Leftrightarrow m\sqrt{2 \cdot \frac{1}{2}} - (2m-1)\sqrt{8 \cdot \frac{1}{2}} + (3m-2)\sqrt{18 \cdot \frac{1}{2}} = 14 \Leftrightarrow m - 2(2m-1) + 3(3m-2) = 14$$

$$\Leftrightarrow 6m - 4 = 14 \Leftrightarrow m = 3$$

Câu 3. Cho $P = \left(\frac{x-2}{x+2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x+2}}\right) \cdot \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}$ $x > 0, x \neq 1$. Sau khi rút gọn ta được biểu thức

$$P = \frac{\sqrt{x+3m-4}}{\sqrt{x}}. \text{ Giá trị của } m \text{ là bao nhiêu?}$$

A. $m = -\frac{5}{2}$.

B. $m = \frac{5}{3}$.

C. $m = -\frac{5}{3}$.

D. $m = \frac{5}{2}$.

Lời giải

Chọn B

$$P = \left(\frac{x-2}{x+2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x+2}}\right) \cdot \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}} = \left(\frac{x-2+\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x+2})}\right) \cdot \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}} = \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x+2})}{\sqrt{x}(\sqrt{x+2})} \cdot \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}} = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}$$

$$\text{Suy ra: } 3m - 4 = 1 \Leftrightarrow m = \frac{5}{3}$$

Câu 4. Cho $Q = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}}$ với $x \geq 0; x \neq 1$ tìm tất cả các giá trị của m để có x thỏa mãn $Q - m = 0$.

A. $m < 1$ hoặc $m \geq 2$

B. $m > -1$ hoặc $m < -2$.

C. $m > 1$ hoặc $m \leq 0$.

D. $m < \frac{1}{2}$ hoặc $m \geq 2$.

Lời giải

Chọn C

$$Q = m \Leftrightarrow (m-1)\sqrt{x} = m(1)$$

- Nếu $m = 1$ thì (1) $\Leftrightarrow 0 \cdot \sqrt{x} = 1$ (vô lý)

- Nếu $m \neq 1$ thì (1) $\Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{m}{m-1}$

$$x \geq 0; x \neq 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} \geq 0; \sqrt{x} \neq 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{m}{m-1} \geq 0 \\ \frac{m}{m-1} \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m \leq 0 \end{cases}$$

Câu 5. Cho $N = \frac{5\sqrt{x+9}}{\sqrt{x+1}}$ với $x \geq 0; x \neq 1$ tìm tất cả các giá trị của m để có x thỏa mãn $N = m$.

A. $5 < m < 9$ và $m \neq 7$

C. $5 < m \leq 9$ và $m \neq 7$

B. $5 \leq m < 9$ và $m \neq 7$

D. $5 \leq m \leq 9$ và $m \neq 49$

Lời giải

Chọn C

$$N = m \Leftrightarrow (5-m)\sqrt{x} = m-9 \quad (1)$$

- Nếu $m = 5$ thì (1) $\Leftrightarrow 0 \cdot \sqrt{x} = -4$ (vô lý)

- Nếu $m \neq 5$ thì (1) $\Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{m-9}{5-m}$

$$x \geq 0; x \neq 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} \geq 0; \sqrt{x} \neq 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{m-9}{5-m} \geq 0 \\ \frac{m-9}{5-m} \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 < m \leq 9 \\ m \neq 7 \end{cases}$$

Câu 6. Cho biểu thức $P = \sqrt{mx+2m+1}$. Tìm tất cả giá trị không âm của m để biểu thức P xác định với mọi giá trị của $x \geq 3$.

A. $m < \frac{1}{5}$.

B. $m > 3$.

C. $m \geq -\frac{1}{5}$.

D. $m < 0$.

Lời giải

Chọn C

ĐKXD: $mx+2m+1 \geq 0 \Leftrightarrow mx \geq -2m-1$.

+ Với $m = 0$ ta có $0x \geq -1 \Leftrightarrow 0 \geq -1$ (luôn đúng)

+ Với $m > 0$ ta có $x \geq \frac{-2m-1}{m}$ kết hợp với điều kiện $x \geq 3$ thì

$$\frac{-2m-1}{m} \leq 3 \Rightarrow -2m-1 \leq 3m \Leftrightarrow 5m \geq -1 \Leftrightarrow m \geq -\frac{1}{5}$$

Vậy $m \geq -\frac{1}{5}$.

Câu 7. Cho biểu thức $Q = \frac{3\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1} - \frac{2\sqrt{x}-3}{3-\sqrt{x}} - \frac{3(3\sqrt{x}-5)}{x-2\sqrt{x}-3}$. Tìm m không âm để với $x = 4+2\sqrt{3}$

thỏa mãn $Q = 7\sqrt{3} - m^2$.

A. $m = \pm 3$.

B. $m = -3$.

C. $m = 3$.

D. $m \neq \pm 3$.

Lời giải

Chọn C

Rút gọn biểu thức ta được: $Q = \frac{5x-17\sqrt{x}+6}{x-2\sqrt{x}-3}$ với $x \geq 0, x \neq 9$.

Ta có: $x = 4+2\sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{4+2\sqrt{3}} = \sqrt{(1+\sqrt{3})^2} = 1+\sqrt{3}$ (thỏa mãn ĐKXD)

Khi đó: $Q = \frac{5(4+2\sqrt{3})-17(1+\sqrt{3})+6}{(4+2\sqrt{3})-2(1+\sqrt{3})-3} = \frac{20+10\sqrt{3}-17-17\sqrt{3}+6}{4+2\sqrt{3}-2-2\sqrt{3}-3} = \frac{9-7\sqrt{3}}{-1} = -9+7\sqrt{3}$

Mà $Q = 7\sqrt{3} - m^2$ nên $7\sqrt{3} - m^2 = -9+7\sqrt{3} \Leftrightarrow m^2 = 9 \Leftrightarrow m = \pm 3$ kết hợp với ĐKXD ta nhận giá trị $m = 3$.

Vậy $m = 3$.

Câu 8. Cho biểu thức $A = \frac{x^2 + \sqrt{x}}{x - \sqrt{x} + 1} - \frac{x^2 - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1}$. Tìm m để x thỏa mãn $x + A = m$.

A. $m \geq -1$.

B. $m < -1$.

C. $m \leq -1$.

D. $m > -1$.

Lời giải

Chọn A

Rút gọn biểu thức ta được: $A = -2\sqrt{x}$ với $x > 0$.

Ta có: $x + A = m \Leftrightarrow m = x - 2\sqrt{x} \Leftrightarrow x - 2\sqrt{x} - m = 0$.

Đặt $\sqrt{x} = t > 0$ ta được phương trình $t^2 - 2t - m = 0$ (*).

Để x thỏa mãn $x + A = m$ thì phương trình (*) có nghiệm không âm.

Để phương trình (*) có nghiệm thì $\Delta' = (-1)^2 - 1 \cdot (-m) = 1 + m \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -1$.

Ta thấy: $t_1 + t_2 = 2 > 0$ nên phương trình (*) luôn có ít nhất một nghiệm không âm.

Vậy $m \geq -1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 9. Cho biểu thức $B = \frac{x + \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1}$ và $C = \frac{x + 2}{x\sqrt{x} - 1} + \frac{\sqrt{x} + 1}{x + \sqrt{x} + 1} - \frac{1}{\sqrt{x} - 1}$. Tìm giá trị của m để

$B.C = m$ có nghiệm.

A. $m < 0$.

B. $\begin{cases} m \leq 0 \\ m > 1 \end{cases}$.

C. $m < 1$.

D. $m > 0$.

Lời giải

Chọn B

Rút gọn biểu thức ta được: $C = \frac{\sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1}$ với $x \geq 0, x \neq 1$.

Ta có: $B.C = \frac{x + \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1} \cdot \frac{\sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}$.

Lại có: $B.C = m$.

Nên $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} = m \Rightarrow \sqrt{x} = m\sqrt{x} - m \Rightarrow \sqrt{x}(m - 1) = m$.

+ Nếu $m = 1$ thì $0 \cdot \sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow 0 = 1$ phương trình vô nghiệm.

+ Nếu $m \neq 1 \Rightarrow m - 1 \neq 0$ thì $\sqrt{x} = \frac{m}{m - 1}$.

$$\text{Mà } \begin{cases} \sqrt{x} \geq 0 \\ \sqrt{x} \neq 1 \end{cases} \text{ nên } \begin{cases} \frac{m}{m-1} \geq 0 \\ \frac{m}{m-1} \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m \leq 0 \end{cases}.$$

Vậy $m \leq 0$ hoặc $m > 1$.

Câu 10. Cho biểu thức $P = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 2}$. Giá trị m để phương trình $P = m$ có nghiệm là:

A. $m < -\frac{1}{2}$.

B. $m < 1$.

C. $-\frac{1}{2} < m < 1$

D. $-\frac{1}{2} \leq m < 1$.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $x \geq 0$.

Khi $P = m$ ta có $\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2} = m \Leftrightarrow m(\sqrt{x}+2) = \sqrt{x}-1 \Leftrightarrow (m-1)\sqrt{x} = -2m-1$

* Xét $m = 1 \Rightarrow 0 \cdot \sqrt{x} = -3$ (loại)

* Xét $m \neq 1 \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{-2m-1}{m-1}$

Do $\sqrt{x} \geq 0$ nên phương trình đã cho có nghiệm khi $\frac{-2m-1}{m-1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2m+1}{m-1} \leq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m+1 \leq 0 \\ m-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -\frac{1}{2} \\ m > 1 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq m < 1.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m+1 \geq 0 \\ m-1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -\frac{1}{2} \\ m < 1 \end{cases}$$

Vậy $-\frac{1}{2} \leq m < 1$ là giá trị cần tìm.

Câu 11. Cho hai biểu thức $A = \frac{4(\sqrt{x}+1)}{x-4}$ và $B = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}$. Các giá trị $m \in \mathbb{Z}$ để phương trình

$\frac{A}{B} = \frac{m}{2}$ có nghiệm là:

A. $m \in \{1; 4\}$.

B. $m \in \{3; 4\}$.

C. $m \in \{1; 2; 3; 4\}$

D. $m \in \{1; 3; 4\}$.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện : $x \geq 0, x \neq 4$

Ta có $\frac{A}{B} = \frac{m}{2} \Leftrightarrow \frac{4(\sqrt{x}+1)}{x-4} \cdot \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1} = \frac{m}{2} \Leftrightarrow \frac{4}{\sqrt{x}+2} = \frac{m}{2}$

$$\Leftrightarrow m(\sqrt{x}+2) = 8 \Leftrightarrow m\sqrt{x} = 8-2m \quad (1)$$

* Xét $m = 0$ ta có (1) $\Leftrightarrow 0 \cdot \sqrt{x} = 8$ (loại)

* Xét $m \neq 0$ ta có (1) $\Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{8-2m}{m}$

Do $\sqrt{x} \geq 0, \sqrt{x} \neq 2$ nên phương trình đã cho có nghiệm khi $\frac{8-2m}{m} \geq 0, \frac{8-2m}{m} \neq 2$

$$+\text{Giải } \frac{8-2m}{m} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 8-2m \geq 0 \\ m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 4 \\ m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m \leq 4$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8-2m \leq 0 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 4 \\ m > 0 \end{cases}$$

+ Giải $\frac{8-2m}{m} \neq 2 \Leftrightarrow 8-2m \neq 2m \Leftrightarrow m \neq 2$

Như vậy $0 < m \leq 4, m \neq 2$, mà $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{1; 3; 4\}$

Vậy $m \in \{1; 3; 4\}$ là giá trị cần tìm.

Câu 12. Cho $P = 1 - \sqrt{x}$. Điều kiện xác định: $x > 0, x \neq 4$. Giá trị m để có x thỏa mãn $(\sqrt{x} + 1).P > \sqrt{x} + m$ là:

A. $m \leq -1$.

B. $m > 1$.

C. $m \leq 1$

D. $m < 1$.

Lời giải

Chọn D

Ta có:

$$(\sqrt{x} + 1).P > \sqrt{x} + m$$

$$\Leftrightarrow x + \sqrt{x} + m - 1 < 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x} + \frac{1}{2}\right)^2 + m - \frac{5}{4} < 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x} + \frac{1}{2}\right)^2 < \frac{5}{4} - m \quad (1)$$

$$\text{Ta có: } x > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left(\sqrt{x} + \frac{1}{2}\right)^2 \geq \frac{1}{4} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta có: } \frac{5}{4} - m > \frac{1}{4} \Leftrightarrow m < 1$$

Câu 13. Cho $P = \frac{3}{\sqrt{x} - 2}$. Điều kiện xác định: $x \geq 0, x \neq 4, x \neq 9$. Tìm m để với $\forall x > 9$ ta có

$$x \left[P(\sqrt{x} - 2) + 2m \right] < 1 + 4x$$

A. $m \leq -1$.

B. $m > \frac{1}{2}$.

C. $m \leq \frac{1}{2}$

D. $m < \frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có:

$$x \left[P(\sqrt{x} - 2) + 2m \right] < 1 + 4x$$

$$\Leftrightarrow x(2m - 1) < 1$$

Để bất phương trình đúng với $\forall x > 9$ thì

$$\begin{cases} 2m - 1 < 0 \\ x > \frac{1}{2m - 1} \\ \forall x > 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m - 1 < 0 \\ \frac{1}{2m - 1} \leq 9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m - 1 < 0 \\ \frac{10 - 18m}{2m - 1} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{1}{2} \\ m \leq \frac{5}{9} \end{cases} \Leftrightarrow m < \frac{1}{2}$$

Câu 14. Cho $P = \frac{2x}{\sqrt{x} - 2}$. Điều kiện xác định: $x \geq 0, x \neq 4$. Tìm m để có một giá trị x thỏa mãn:

$$P(\sqrt{x} - 2) + \sqrt{x}(m - 2x) - \sqrt{x} = m - 1.$$

A. $\begin{cases} m = 3 \\ m < 1 \end{cases}$

B. $\begin{cases} m = 3 \\ m = 9 \end{cases}$

C. $\begin{cases} m = 3 \\ m = 1 \\ m = 9 \end{cases}$

D. $\begin{cases} m = 3 \\ m < 1 \\ m = 9 \end{cases}$

Lời giải

Chọn D

Ta có :

$$P(\sqrt{x}-2) + \sqrt{x}(m-2x) - \sqrt{x} = m-1$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x}-1)(-2x+m-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{m-1}{2} \end{cases}$$

Để có một giá trị x thì

$$\begin{cases} \frac{m-1}{2} = 1 \\ \frac{m-1}{2} < 0 \\ \frac{m-1}{2} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 \\ m < 1 \\ m = 9 \end{cases}$$

Vậy để có một giá trị x thỏa mãn: $P(\sqrt{x}-2) + \sqrt{x}(m-2x) - \sqrt{x} = m-1$ thì $\begin{cases} m = 3 \\ m < 1 \\ m = 9 \end{cases}$

III. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1: Cho biểu thức: $A = \frac{4(\sqrt{x}+1)}{x-4}$ và $B = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}$. Tìm $m \in Z$ để phương trình $\frac{A}{B} = \frac{m}{2}$ có nghiệm.

Lời giải

ĐKXĐ: $x \geq 0; x \neq 4$

$$\text{Xét } \frac{A}{B} = \frac{m}{2} \Rightarrow \frac{4(\sqrt{x}+1)}{x-4} : \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} = \frac{m}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4(\sqrt{x}+1)}{x-4} \cdot \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1} = \frac{m}{2} \Leftrightarrow \frac{4}{\sqrt{x}+2} = \frac{m}{2}$$

$$\Leftrightarrow m(\sqrt{x}+2) = 8 \Rightarrow m \cdot \sqrt{x} = 8 - 2m$$

Do $\sqrt{x} \geq 0, \sqrt{x} \neq 2$ nên phương trình có nghiệm khi $\frac{8-2m}{m} \geq 0, \frac{8-2m}{m} \neq 2$

$$\text{+) Giải: } \frac{8-2m}{m} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 8-2m \geq 0 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 4 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m \leq 4$$

$$\begin{cases} 8-2m \leq 0 \\ m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 4 \\ m < 0 \end{cases}$$

$$\text{+) Giải: } \frac{8-2m}{m} \neq 2 \Leftrightarrow 8-2m \neq 2m \Leftrightarrow m \neq 2$$

Như vậy $0 < m \leq 4, m \neq 2$ mà $m \in Z$ nên $m \in \{1; 3; 4\}$.

Vậy $m \in \{1; 3; 4\}$ là giá trị cần tìm.

Bài 2:

Cho biểu thức: $P = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x+m}} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-m}} - \frac{m^2}{4x-4m^2}$.

a) Rút gọn P.

b) Tìm x theo m để $P = 0$.

c) Xác định giá trị của m để x tìm được ở câu b) thỏa mãn điều kiện $x > 1$.

Lời giải

a) ĐKXĐ: $x \geq 0; x \neq m^2$

$$P = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x+m}} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-m}} - \frac{m^2}{4x-4m^2}$$

$$\Leftrightarrow P = \frac{8\sqrt{x}(\sqrt{x-m})}{4(x-m^2)} + \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x+m})}{4(x-m^2)} - \frac{m^2}{4(x-m^2)}$$

$$\Leftrightarrow P = \frac{8\sqrt{x}(\sqrt{x-m}) + 4\sqrt{x}(\sqrt{x+m}) - m^2}{4(x-m^2)}$$

$$\Leftrightarrow P = \frac{8x - 8m\sqrt{x} + 4x + 4m\sqrt{x} - m^2}{4(x-m^2)}$$

$$\Leftrightarrow P = \frac{12x - 4m\sqrt{x} - m^2}{4(x-m^2)} = \frac{12x - 6m\sqrt{x} + 2m\sqrt{x} - m^2}{4(x-m^2)}$$

$$\Leftrightarrow P = \frac{12x - 4m\sqrt{x} - m^2}{4(x-m^2)} = \frac{6\sqrt{x}(2\sqrt{x} - m) + m(2\sqrt{x} - m)}{4(x-m^2)}$$

$$\Leftrightarrow P = \frac{(6\sqrt{x} + m)(2\sqrt{x} - m)}{4(x-m^2)}$$

b) Tìm x theo m để $P = 0$

$$\text{Để } P = 0 \text{ thì } \frac{(6\sqrt{x} + m)(2\sqrt{x} - m)}{4(x-m^2)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6\sqrt{x} + m = 0 & (1) \\ 2\sqrt{x} - m = 0 & (2) \end{cases}$$

- Nếu $m \geq 0$ thì (1) loại vì $x \geq 0; x \neq m^2$

$$\Rightarrow (2) \Leftrightarrow x = \frac{m^2}{4} \text{ (thỏa mãn đk)}$$

- Nếu $m < 0$ thì (2) loại vì $x \geq 0; x \neq m^2$

$$\Rightarrow (1) \Leftrightarrow x = \frac{m^2}{36} \text{ (thỏa mãn đk)}$$

$$\text{Vậy với } x = \frac{m^2}{36}; x = \frac{m^2}{4} \text{ thì } P = 0$$

c) Xác định giá trị của m để x tìm được ở câu b) thỏa mãn điều kiện $x > 1$

$$\text{Để } x > 1 \text{ thì } \begin{cases} \frac{m^2}{36} > 1 \\ m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 > 36 \\ m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 6 \\ m < -6 \\ m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 6 \\ m < -4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{m^2}{4} > 1 \\ m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 > 4 \\ m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 4 \\ m < -4 \\ m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 6 \\ m < -4 \end{cases}$$

Vậy với $\begin{cases} m > 6 \\ m < -4 \end{cases}$ thì $x > 1$

Bài 3: Cho biểu thức: $P = \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2\sqrt{x}}{x\sqrt{x}-x+\sqrt{x}-1} \right) : \left(\frac{x+\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}+1} + \frac{1}{x+1} \right)$ với $x \geq 0, x \neq 1$

a) Rút gọn P

b) Tìm x để $P < \frac{1}{2}$

c) Tìm m để phương trình $(\sqrt{x}+1)P = m-x$ có nghiệm x .

Lời giải

a) Rút gọn P

Với $x \geq 0, x \neq 1$ ta có:

$$P = \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2\sqrt{x}}{x\sqrt{x}-x+\sqrt{x}-1} \right) : \left(\frac{x+\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}+1} + \frac{1}{x+1} \right)$$

$$P = \left(\frac{x+1}{(x+1)(\sqrt{x}-1)} - \frac{2\sqrt{x}}{(x+1)(\sqrt{x}-1)} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{(x+1)(\sqrt{x}+1)} + \frac{\sqrt{x}+1}{(x+1)(\sqrt{x}+1)} \right)$$

$$P = \frac{x-2\sqrt{x}+1}{(x+1)(\sqrt{x}-1)} : \frac{x+2\sqrt{x}+1}{(x+1)(\sqrt{x}+1)}$$

$$P = \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{(x+1)(\sqrt{x}-1)} \cdot \frac{(x+1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)^2} = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$$

b) Tìm x để $P < \frac{1}{2}$

$$\text{Để } P < \frac{1}{2} \text{ thì } \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-3}{2(\sqrt{x}+1)} < 0$$

Giải BPT trên ta được kết quả: $0 \leq x < 9, x \neq 1$

c) Tìm m để phương trình $(\sqrt{x}+1)P = m-x$ có nghiệm x .

Thay P vào phương trình đã cho ta được: $x + \sqrt{x} - (m+1) = 0$

Đặt $\sqrt{x} = t (t \geq 0, t \neq 1) \Rightarrow t^2 + t - (m+1) = 0$ (*)

- Phương trình có nghiệm kép $\Leftrightarrow m = \frac{-5}{4} \Rightarrow$ khi đó (*) trở thành $t^2 + t + \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow t = \frac{-1}{2}$

(không thỏa đk)

- Phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m > \frac{-5}{4}$.

Do $t_1 + t_2 = -1$ nên phương trình (*) không thể có hai nghiệm cùng dương.

Suy ra (*) có nghiệm $t \geq 0, t \neq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -1 \\ m \neq 1 \end{cases}$

Vậy $m \geq -1$ và $m \neq 1$.

Bài 4: Cho biểu thức: $P = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \frac{1}{x-\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} + \frac{2}{x-1} \right)$ với $x > 0$ và $x \neq 1$.

a) Rút gọn P

b) Tìm x để $P < 2$

c) Chứng minh với mọi $m \neq 0$ luôn có một giá trị của x thỏa mãn $P = m$.

Lời giải

a) Rút gọn P

Rút gọn P ta được $P = \frac{x-1}{\sqrt{x}}$ với $x > 0, x \neq 1$

b) Tìm x để $P < 2$

Ta có $P < 2 \Leftrightarrow \frac{x-1}{\sqrt{x}} < 2 \Leftrightarrow |\sqrt{x}-1| < \sqrt{2} \Leftrightarrow 0 < x < 3+2\sqrt{2}$

Kết hợp điều kiện ta được $\begin{cases} 0 < x < 3+2\sqrt{2} \\ x \neq 1 \end{cases}$

c) Chứng minh với mọi $m \neq 0$ luôn có một giá trị của x thỏa mãn $P = m$.

Ta có $P = m \Leftrightarrow x - m\sqrt{x} - 1 = 0$

Đặt $\sqrt{x} = t (t > 0, t \neq 1) \Rightarrow t^2 - mt - 1 = 0$ (*)

- Vì $t_1 t_2 = -1 < 0$ nên (*) có hai nghiệm trái dấu.

- Nghiệm dương luôn khác 1 vì $m \neq 0$

Vậy với mọi $m \neq 0$, luôn có một giá trị của x thỏa mãn $P = m$.

Bài 5: Cho biểu thức: $A = \frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} + \frac{1}{1-\sqrt{x}}$ với $x \geq 0$ và $x \neq 1$.

a) Rút gọn A

b) Cho biểu thức $B = \frac{\sqrt{x}-1}{2}$. Hãy tìm $P = \frac{A}{B}$.

c) Tìm giá trị của m để $\frac{1}{P} > m + \sqrt{x}$ nghiệm đúng với mọi $x > 1$.

Lời giải

a) Rút gọn A

Với $x \geq 0$ và $x \neq 1$ ta có:

$$A = \frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} + \frac{1}{1-\sqrt{x}}$$

$$A = \frac{\sqrt{x}-1}{x+\sqrt{x}+1}$$

b) Cho biểu thức $B = \frac{\sqrt{x}-1}{2}$. Hãy tìm $P = \frac{A}{B}$.

$$P = \frac{A}{B} = \frac{\sqrt{x}-1}{x+\sqrt{x+1}} \cdot \frac{\sqrt{x}-1}{2}$$

$$P = \frac{A}{B} = \frac{\sqrt{x}-1}{x+\sqrt{x+1}} \cdot \frac{2}{\sqrt{x}-1} = \frac{2}{x+\sqrt{x+1}} \text{ với } x \geq 0 \text{ và } x \neq 1.$$

c) Tìm giá trị của m để $\frac{1}{P} > m + \sqrt{x}$ nghiệm đúng với mọi $x > 1$.

$$\text{Ta có: } \frac{1}{P} > m + \sqrt{x} \Leftrightarrow x - \sqrt{x} > 2m - 1$$

Với $x > 1$ ta có $x - \sqrt{x} = \sqrt{x}(\sqrt{x} - 1) > 0$ nên để $x - \sqrt{x} > 2m - 1$ thì $2m - 1 \leq 0 \Leftrightarrow m \leq \frac{1}{2}$

Vậy $m \leq \frac{1}{2}$.

Bài 6. Cho biểu thức $A = \frac{x-3\sqrt{x}+2}{x-1} : \frac{x-4}{\sqrt{x}+2}$. Tìm các giá trị m để phương trình $A = \frac{1}{m}$ có nghiệm.

Lời giải

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq 4 \\ x \geq 0 \end{cases} \quad (1).$$

$$\text{Ta có: } A = \frac{x-3\sqrt{x}+2}{x-1} : \frac{x-4}{\sqrt{x}+2} = \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{1}{\sqrt{x}+1}.$$

$$\text{Phương trình } A = \frac{1}{m} \text{ (2) trở thành: } \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{m} \text{ (} m \neq 0 \text{)}.$$

$$\Rightarrow \sqrt{x}+1 = m \Leftrightarrow \sqrt{x} = m-1 \quad (3).$$

(2) có nghiệm x thỏa đk (1) \Leftrightarrow (3) có nghiệm x thỏa đk (1), đk $m \neq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m-1 \geq 0 \\ m-1 \neq 1 \\ m-1 \neq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 1 \\ m \neq 2 \\ m \neq 5 \end{cases}.$$

Vậy $\begin{cases} m \geq 1 \\ m \neq 2 \\ m \neq 5 \end{cases}$ là các giá trị m cần tìm.

Bài 7. Cho biểu thức $A = \frac{(x^3-7x+6)(\sqrt{x}-1)}{x^2+2x-3}$ và biểu thức $B = \sqrt{x}-1$.

a) Rút gọn hai biểu thức A và B .

b) Tìm m để phương trình $\frac{B}{A} = m^2 + 2m - 3$ có nghiệm $x = 2$.

Lời giải

$$\text{Điều kiện để cả hai biểu thức } A \text{ và } B \text{ xác định là: } \begin{cases} x \neq -1 \\ x \neq 3 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 3 \\ x \geq 0 \end{cases}.$$

Ta có:

$$A = \frac{(x^3 - 7x + 6)(\sqrt{x} - 1)}{x^2 + 2x - 3} = \frac{(x-1)(x^2 + x - 6)(\sqrt{x} - 1)}{(x-1)(x+3)} = \frac{(x-2)(x+3)(\sqrt{x} - 1)}{(x+3)}$$

$$= (x-2)(\sqrt{x} - 1).$$

Lại có: $\frac{B}{A} = m^2 + 2m - 3 \Leftrightarrow \frac{(x-2)(\sqrt{x} - 1)}{\sqrt{x} - 1} = m^2 + 2m - 3 \Leftrightarrow x - 2 = m^2 + 2m - 3.$

Phương trình $\frac{B}{A} = m^2 + 2m - 3$ có nghiệm $x = 2$ khi và chỉ khi:

$$m^2 + 2m - 3 = 0 \Leftrightarrow (m-1)(m+3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -3 \end{cases}.$$

Vậy $m \in \{1; -3\}$.

Bài 8. Cho biểu thức $A = \frac{x^2 - 2x\sqrt{x} + x}{x\sqrt{x} - 2x + \sqrt{x}}$. Hãy rút gọn biểu thức A và tìm m để biểu thức $\sqrt{A+m}$ xác định với mọi x không âm khác 1.

Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases} x\sqrt{x} - 2x + \sqrt{x} \neq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}(x - 2\sqrt{x} + 1) \neq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} \neq 0 \\ (\sqrt{x} - 1)^2 \neq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}.$

Ta có: $A = \frac{x^2 - 2x\sqrt{x} + x}{x\sqrt{x} - 2x + \sqrt{x}} = \frac{x(x - 2\sqrt{x} + 1)}{\sqrt{x}(x - 2\sqrt{x} + 1)} = \sqrt{x}.$

Lại có: $\sqrt{A+m} = \sqrt{\sqrt{x} + m}$ xác định với mọi x không âm khác 1.

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} + m \geq 0 \text{ với mọi } x \text{ không âm khác 1.}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} \geq -m \text{ với mọi } x \text{ không âm khác 1.}$$

$$\Leftrightarrow -m \leq 0 \Leftrightarrow m \geq 0.$$

Bài 9. Cho biểu thức $A = \frac{x-1}{\sqrt{x}+2} : \frac{x+\sqrt{x}}{x+2\sqrt{x}}$. Tìm m để biểu thức $m+A \geq 0 \forall x > 0$.

Lời giải

Điều kiện: $x > 0$.

Ta có: $A = \frac{x-1}{\sqrt{x}+2} : \frac{x+\sqrt{x}}{x+2\sqrt{x}} = \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}+2} : \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} = \sqrt{x} - 1.$

Ta có: $m+A \geq 0 \forall x > 0 \Leftrightarrow m + \sqrt{x} - 1 \geq 0 \forall x > 0 \Leftrightarrow -m + 1 \leq \sqrt{x} \forall x > 0.$

$$\Leftrightarrow -m + 1 \leq 0 \Leftrightarrow m \geq 1.$$

Vậy $m \geq 1$ là các giá trị m cần tìm.

Bài 10. Cho biểu thức $A = \frac{x\sqrt{x} + x}{\sqrt{x} + 2} \cdot \frac{x-4}{x+\sqrt{x}}$. Tìm m để biểu thức $A+m$ có giá trị nhỏ nhất bằng 3.

Lời giải

Điều kiện: $x > 0$.

$$\text{Ta có: } A = \frac{x\sqrt{x}+x}{\sqrt{x}+2} \cdot \frac{x-4}{x+\sqrt{x}} = \frac{x(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}+2} \cdot \frac{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} = \sqrt{x}(\sqrt{x}-2) = x-2\sqrt{x}.$$

$$\text{Ta có: } A+m = x-2\sqrt{x}+m = (\sqrt{x}-1)^2 + m-1 \geq m-1.$$

Dấu "=" xảy ra khi $x=1$ (thỏa mãn điều kiện).

Do đó giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A+m$ bằng $m-1$ khi $x=1$.

Theo đề suy ra $m-1=3 \Leftrightarrow m=4$.

CHƯƠNG

1

CHUYÊN ĐỀ RÚT GỌN

DẠNG 1.8: GTLN – GTNN của biểu thức

DẠNG 1.9: Bài toán mới lạ



I LÝ THUYẾT.

Các BĐT thường dùng:

1) BĐT Cô si: Cho hai số a, b không âm. Khi đó $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$. Dấu "=" xảy ra khi $a=b$

2) BĐT Bu-nhi-a-cốp-x-ki: Cho các số thực a, b, x, y . Khi đó: $(ax+by)^2 \leq (a^2+b^2)(x^2+y^2)$. Dấu "=" xảy ra khi $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$.



II HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Dạng 1.8.1; 1.8.ii.

Xây dựng Bài Giảng 14-15

Tìm GTNN của : $B = \left(\frac{4}{\sqrt{x+1}} + \frac{2}{1-\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}-5}{x-1} \right) (x-1)$ với $x \geq 0, x \neq 1$.

Lời giải

Với $x \geq 0, x \neq 1$.

$$\begin{aligned} B &= \left(\frac{4}{\sqrt{x+1}} + \frac{2}{1-\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}-5}{x-1} \right) (x-1) \\ &= \left[\frac{4(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} + \frac{-2(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} - \frac{\sqrt{x}-5}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} \right] (x-1) \\ &= \frac{4(\sqrt{x}-1) - 2(\sqrt{x}+1) - (\sqrt{x}-5)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} \cdot (x-1) \\ &= \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} (x-1) = \sqrt{x}-1 \end{aligned}$$

Do $\sqrt{x} \geq 0$ nên $B \geq -1$.

Dấu "=" xảy ra khi $x=0$

Vậy GTNN của B là -1 khi $x=0$.

Câu 8

Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} - \frac{2+5\sqrt{x}}{x-4}$ với $x \geq 0, x \neq 4$.

Lời giải

Ta có : $P = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} - \frac{2+5\sqrt{x}}{x-4}$

$$P = \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+2) + 2\sqrt{x}(\sqrt{x}-2) - 2-5\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{x+3\sqrt{x}+2+2x-4\sqrt{x}-2-5\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}$$

$$= \frac{3x-6\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} = \frac{3\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}$$

$$P = \frac{3\sqrt{x}+6}{\sqrt{x}+2} - \frac{6}{\sqrt{x}+2} = 3 - \frac{6}{\sqrt{x}+2}$$

Ta có : $\sqrt{x}+2 \geq 2 \Rightarrow \frac{6}{\sqrt{x}+2} \leq 3 \Rightarrow P = 3 - \frac{6}{\sqrt{x}+2} \geq 0$

Giá trị nhỏ nhất của P là 0 khi $x=0$.

Câu 9

Tìm giá trị nhỏ nhất của $M = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x^3-1})}{x+\sqrt{x+1}} - \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x^3+1})}{x-\sqrt{x+1}} + x + 5$ với $x \geq 0$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } M &= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x^3-1})}{x+\sqrt{x+1}} - \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x^3+1})}{x-\sqrt{x+1}} + x + 5 \\ &= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x+1})}{x+\sqrt{x+1}} - \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x+1})(x-\sqrt{x+1})}{x-\sqrt{x+1}} + x + 5 \\ &= x - \sqrt{x} - x - \sqrt{x} + x + 5 = x - 2\sqrt{x} + 5 = (\sqrt{x}-1)^2 + 4 \geq 4 \\ M &\geq 4, \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Giá trị nhỏ nhất của } M \text{ là } 4 \text{ khi } x = 1. \end{aligned}$$

Câu 10

Cho hai biểu thức:

$$A = \frac{x+2\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}-3} \quad \text{và} \quad B = \frac{2\sqrt{x}-9}{x-5\sqrt{x}+6} - \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} - \frac{2\sqrt{x}+1}{3-\sqrt{x}}, \text{ với } x \geq 0, x \neq 4 \text{ và } x \neq 9.$$

a) Rút gọn B .

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của $\frac{1}{B}$.

c) Đặt $P = \frac{A}{B}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của P .

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{a) } B &= \frac{2\sqrt{x}-9}{x-5\sqrt{x}+6} - \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} - \frac{2\sqrt{x}+1}{3-\sqrt{x}} \\ &= \frac{2\sqrt{x}-9}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} - \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} + \frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} \\ &= \frac{2\sqrt{x}-9 - (\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3) + (2\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} \\ &= \frac{2\sqrt{x}-9-x+9+2x-4\sqrt{x}+\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} \\ &= \frac{x-\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} \\ &= \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} \end{aligned}$$

$$= \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-3}}, \text{ với } x \geq 0, x \neq 4 \text{ và } x \neq 9.$$

$$b) \text{ Ta có: } \frac{1}{B} = \frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x+1}} = \frac{\sqrt{x+1}-4}{\sqrt{x+1}} = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}} - \frac{4}{\sqrt{x+1}} = 1 - \frac{4}{\sqrt{x+1}}.$$

Ta thấy $\sqrt{x} \geq 0$, với mọi x .

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+1} \geq 1, \text{ với mọi } x.$$

$$\Leftrightarrow 0 < \frac{1}{\sqrt{x+1}} \leq 1, \text{ với mọi } x.$$

$$\Leftrightarrow \frac{-4}{\sqrt{x+1}} \geq -4, \text{ với mọi } x.$$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{4}{\sqrt{x+1}} \geq -3, \text{ với mọi } x.$$

Vậy $\frac{1}{B}$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng -3 khi $\sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

$$c) P = \frac{A}{B} = \frac{\frac{x+2\sqrt{x}+5}{\sqrt{x-3}}}{\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-3}}} = \frac{x+2\sqrt{x}+5}{\sqrt{x-3}} \cdot \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-3}} = \frac{x+2\sqrt{x}+5}{\sqrt{x+1}}$$

$$\text{Ta có: } P = \frac{x+2\sqrt{x}+5}{\sqrt{x+1}} = \frac{(\sqrt{x+1})^2 + 4}{\sqrt{x+1}} = \frac{(\sqrt{x+1})^2}{\sqrt{x+1}} + \frac{4}{\sqrt{x+1}} = \sqrt{x+1} + \frac{4}{\sqrt{x+1}}$$

$$\geq 2\sqrt{(\sqrt{x+1}) \cdot \frac{4}{\sqrt{x+1}}} = 2 \cdot 2 = 4$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi } \sqrt{x+1} = \frac{4}{\sqrt{x+1}} \Leftrightarrow (\sqrt{x+1})^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+1} = -2 \\ \sqrt{x+1} = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+1} = 2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} = 1$$

$$\Leftrightarrow x = 1.$$

Vậy $P_{\min} = 4 \Leftrightarrow x = 1$.

Câu 13 Câu 5

Cho biểu thức:

$$A = 1 - \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \text{ và } B = \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-2}} + \frac{\sqrt{x+2}}{3-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x+2}}{x-5\sqrt{x}+6} \text{ với } x \geq 0, x \neq 4, x \neq 9.$$

a. Tính giá trị biểu thức A khi $x = 16$

b. Rút gọn B .

Xét biểu thức $T = \frac{A}{B}$. Hãy tính giá trị nhỏ nhất của T .

Lời giải

a.

$$A = 1 - \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} = \frac{1+\sqrt{x}-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} = \frac{1}{1+\sqrt{x}}$$

Thay $x=16$ (TMĐK) vào biểu thức A ta có: $A = \frac{1}{1+\sqrt{16}} = \frac{1}{5}$.

b. $B = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}+2}{3-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}+2}{x-5\sqrt{x}+6}$ với $x \geq 0, x \neq 4, x \neq 9$.

$$= \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3} + \frac{\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)}$$

$$= \frac{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3) - (\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2) + \sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)}$$

$$= \frac{\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} = \frac{1}{\sqrt{x}-2}$$

c. $T = \frac{A}{B} = \frac{1}{1+\sqrt{x}} : \frac{1}{\sqrt{x}-2} = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1} = 1 - \frac{3}{\sqrt{x}+1}$

Ta có: $\sqrt{x} \geq 0$

$$\sqrt{x} \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}+1 \geq 1 \Leftrightarrow \frac{3}{\sqrt{x}+1} \leq 3 \Leftrightarrow -\frac{3}{\sqrt{x}+1} \geq -3$$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{3}{\sqrt{x}+1} \geq 1-3 \Leftrightarrow 1 - \frac{3}{\sqrt{x}+1} \geq -2$$

$$\Leftrightarrow T \geq -2$$

Vậy GTNN của T = -2 khi và chỉ khi $x = 0$.

Câu 14

Cho biểu thức: $A = \left(\frac{2\sqrt{x}}{x-9} + \frac{1}{\sqrt{x}-3} \right) : \frac{3}{\sqrt{x}-3}$ với $x \geq 0$ và $x \neq 9$

- Rút gọn biểu thức A.
- Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức A.

Lời giải

a. $A = \left(\frac{2\sqrt{x}}{x-9} + \frac{1}{\sqrt{x}-3} \right) : \frac{3}{\sqrt{x}-3}$ với $x \geq 0$ và $x \neq 9$

$$A = \left(\frac{2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} + \frac{1}{\sqrt{x}-3} \right) : \frac{3}{\sqrt{x}-3} = \frac{2\sqrt{x} + \sqrt{x} + 3}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} : \frac{3}{\sqrt{x}-3}$$

$$= \frac{3\sqrt{x}+3}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} \cdot \frac{\sqrt{x}-3}{3} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+3}$$

- b. Tìm GTNN của A

$$A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+3} = 1 - \frac{2}{\sqrt{x}+3}$$

Ta có : $\sqrt{x} \geq 0$

$$\sqrt{x} \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} + 3 \geq 3 \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{x} + 3} \leq \frac{2}{3} \Leftrightarrow -\frac{2}{\sqrt{x} + 1} \geq -\frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{2}{\sqrt{x} + 1} \geq 1 - \frac{2}{3} \Leftrightarrow 1 - \frac{2}{\sqrt{x} + 1} \geq \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow A \geq \frac{1}{3}$$

Vậy GTNN của $A = \frac{1}{3}$ khi và chỉ khi $x = 0$.

Câu 15

[Mức độ] Cho biểu thức : $A = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 2} + \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} - 2} - \frac{2x + 8}{x - 4} \right) : \frac{2}{\sqrt{x} - 6}$ với $x \geq 0$, $x \neq 4$ và $x \neq 36$

- Rút gọn biểu thức A.
- Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức A.

Lời giải

$$a. A = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 2} + \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} - 2} - \frac{2x + 8}{x - 4} \right) : \frac{2}{\sqrt{x} - 6}$$

$$A = \left(\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 2)}{(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 2)} + \frac{(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} + 2)}{(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 2)} - \frac{2x + 8}{(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 2)} \right)$$

$$A = \frac{2\sqrt{x} - 4}{(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 2)} \cdot \frac{\sqrt{x} - 6}{2}$$

$$A = \frac{\sqrt{x} - 6}{\sqrt{x} + 2}$$

- Tìm GTNN của A.

$$A = \frac{\sqrt{x} - 6}{\sqrt{x} + 2}$$

$$A = 1 - \frac{8}{\sqrt{x} + 2}$$

Ta có : $\sqrt{x} \geq 0$

$$\sqrt{x} \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} + 2 \geq 2 \Leftrightarrow \frac{8}{\sqrt{x} + 1} \leq \frac{8}{2} \Leftrightarrow -\frac{8}{\sqrt{x} + 1} \geq -4$$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{8}{\sqrt{x} + 1} \geq 1 - 4 \Leftrightarrow 1 - \frac{8}{\sqrt{x} + 1} \geq -3$$

$$\Leftrightarrow A \geq -3$$

Vậy GTNN của $A = -3$ khi và chỉ khi $x = 0$.

Câu 16

[Mức độ] Cho biểu thức $P = \frac{1}{\sqrt{x}+1} - \frac{3}{x\sqrt{x}+1} + \frac{2}{x-\sqrt{x}+1}$

- a) Rút gọn P
b) Tìm giá trị nhỏ nhất của P.

Lời giải

a) ĐKXĐ: $x \geq 0$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } P &= \frac{1}{\sqrt{x}+1} - \frac{3}{x\sqrt{x}+1} + \frac{2}{x-\sqrt{x}+1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}+1} - \frac{3}{(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)} + \frac{2}{x-\sqrt{x}+1} \\ &= \frac{x-\sqrt{x}+1-3+2(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)} \\ &= \frac{x+\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)} \\ &= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)} \\ &= \frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1} \end{aligned}$$

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của P

$$\text{Ta có } \begin{cases} x-\sqrt{x}+1 = \left(\sqrt{x}-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \quad \forall x \geq 0 \\ \sqrt{x} \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow P = \frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1} \geq 0, \quad \forall x \geq 0 \Rightarrow P_{\min} = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Câu 17

[Mức độ] : Cho biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x-1}\right) : \left(\frac{2}{x} - \frac{2-x}{x\sqrt{x}+x}\right)$

- a) Rút gọn b) Tìm giá trị nhỏ nhất của \sqrt{P} .

Lời giải

a) ĐKXĐ: $x \geq 0; x \neq 1$

$$\text{Ta có: } P = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x-1}\right) : \left(\frac{2}{x} - \frac{2-x}{x\sqrt{x}+x}\right)$$

Liên hệ tài liệu word toán SĐT và zalo: 039.373.2038

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \right) : \left(\frac{2}{x} - \frac{2-x}{x(\sqrt{x}+1)} \right) \\
&= \left(\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1) + \sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \right) : \left(\frac{2(\sqrt{x}+1) - 2 + x}{x(\sqrt{x}+1)} \right) \\
&= \frac{x+2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} : \frac{x+2\sqrt{x}}{x(\sqrt{x}+1)} \\
&= \frac{x+2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{x(\sqrt{x}+1)}{x+2\sqrt{x}} \\
&= \frac{x}{\sqrt{x}-1}.
\end{aligned}$$

b) Với $x > 0$, nên \sqrt{P} có nghĩa $\Leftrightarrow P > 0 \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x}-1} > 0 \Leftrightarrow x > 1$ (do ĐKXĐ đề bài là $x \geq 0$)

Do $P > 0$ với mọi $x > 1 \Rightarrow \sqrt{P}_{\min} \Leftrightarrow P_{\min}$

$$\begin{aligned}
\text{Ta có: } \frac{1}{P} &= \frac{\sqrt{x}-1}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x} \\
&= -\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{4} \\
&= -\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Vậy $\max \frac{1}{P} = \frac{1}{4} \Rightarrow P_{\min} = 4$ (Dấu bằng xảy ra khi $x = 4$) $\Rightarrow \sqrt{P}_{\min} = 2$, khi $x = 4$.

Câu 18

[Mức độ] Cho biểu thức $P = \left(\frac{3}{x-1} + \frac{1}{\sqrt{x}+1} \right) : \frac{1}{\sqrt{x}+1}$

a) Nêu điều kiện xác định và rút gọn biểu thức P

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $M = \frac{x+12}{\sqrt{x}-1} \cdot \frac{1}{P}$.

Lời giải

a) ĐKXĐ: $x \geq 0; x \neq 1$

$$\begin{aligned}
\text{Ta có: } P &= \left(\frac{3}{x-1} + \frac{1}{\sqrt{x}+1} \right) : \frac{1}{\sqrt{x}+1} \\
&= \left(\frac{3}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} + \frac{1}{\sqrt{x}+1} \right) : \frac{1}{\sqrt{x}+1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{3 + \sqrt{x} - 1}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} \right) : \frac{1}{\sqrt{x} + 1} \\
&= \frac{(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} + 1)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} \\
&= \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} - 1}
\end{aligned}$$

b)

Ta có: $M = \frac{x+12}{\sqrt{x}-1} \cdot \frac{1}{P} = \frac{x+12}{\sqrt{x}-1} \cdot \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2} = \frac{x+12}{\sqrt{x}+2} = \sqrt{x} + 2 + \frac{16}{\sqrt{x}+2} - 4$

Theo BĐT Cosi: $\sqrt{x} + 2 + \frac{16}{\sqrt{x}+2} \geq 2\sqrt{16} = 8$

$$\Rightarrow M \geq 8 - 4 = 4 \Rightarrow M_{\min} = 4$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \sqrt{x} + 2 = \frac{16}{\sqrt{x}+2}$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x} + 2)^2 = 16$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x} + 2 + 4)(\sqrt{x} + 2 - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x} + 6)(\sqrt{x} - 2) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 4 \text{ (TMĐK)}$$

Vậy $M_{\min} = 4 \Leftrightarrow x = 4$.

Câu 19

Cho biểu thức, $A = \frac{\sqrt{x} + 26\sqrt{x} - 19}{x + 2\sqrt{x} - 3} - \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} + \frac{\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x} + 3}$ với $x \geq 0, x \neq 1$.

a) Rút gọn A b) Tìm giá trị nhỏ nhất của A .

Lời giải

Điều kiện: $0 \leq x \neq 1$. Ta có:

a) $A = \frac{x+16}{\sqrt{x}+3}$.

Nhận xét do $x > 0$ nên $A > 0$.

b)

Cách 1: Dùng BĐT Cô-si hoặc đánh giá dựa vào ĐKXD

$$\begin{aligned}
A &= \frac{x+16}{\sqrt{x}+3} = \frac{x-9+25}{\sqrt{x}+3} = \sqrt{x} - 3 + \frac{25}{\sqrt{x}+3} \\
&= \sqrt{x} + 3 + \frac{25}{\sqrt{x}+3} - 6 \geq 2\sqrt{(\sqrt{x}+3) \cdot \frac{25}{\sqrt{x}+3}} - 6 \geq 4.
\end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra khi chỉ khi $\sqrt{x} + 3 = \frac{25}{\sqrt{x} + 3} \Leftrightarrow x = 4$.

Cách 2: Dùng phương pháp miền giá trị

$$A = \frac{x+16}{\sqrt{x}+3} \Leftrightarrow (\sqrt{x})^2 - A\sqrt{x} + 16 - 3A = 0$$

Để phương trình có nghiệm thì $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 4 \\ A \leq -16 \end{cases}$. Do $A \geq 0$ nên $A \geq 4$. Do đó $\text{Min } A = 4$.

Dấu "=" xảy ra khi chỉ khi $\sqrt{x} = \frac{A}{2} \Leftrightarrow x = 4$ (thỏa ĐK).

Câu 20

[Mức độ] Cho biểu thức $P = \frac{x\sqrt{x} + 26\sqrt{x} - 19}{x + 2\sqrt{x} - 3} - \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} + \frac{\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x} + 3}$, rút gọn P và tìm x để P đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

Điều kiện: $0 \leq x \neq 1$. Ta có:

$$\begin{aligned} P &= \frac{x\sqrt{x} + 26\sqrt{x} - 19}{x + 2\sqrt{x} - 3} - \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} + \frac{\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x} + 3} = \frac{x\sqrt{x} + 26\sqrt{x} - 19 - 2\sqrt{x}(\sqrt{x} + 3) + (\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} - 1)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 3)} \\ &= \frac{x\sqrt{x} + 26\sqrt{x} - 19 - 2x - 6\sqrt{x} + x - 4\sqrt{x} - 3}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 3)} = \frac{x\sqrt{x} - x + 16\sqrt{x} - 16}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 3)} = \frac{(\sqrt{x} - 1)(x + 16)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 3)} = \frac{x + 16}{\sqrt{x} + 3} \end{aligned}$$

Áp dụng BĐT Cauchy ta được: $P = \frac{x+16}{\sqrt{x}+3} = \sqrt{x} - 3 + \frac{25}{\sqrt{x}+3} = \sqrt{x} + 3 + \frac{25}{\sqrt{x}+3} - 6$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $P=4$ khi $\sqrt{x} + 3 = \frac{25}{\sqrt{x} + 3} \Leftrightarrow x = 4$

Câu 21

[Mức độ] Cho biểu thức $A = \frac{2\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 3} + \frac{\sqrt{x} + 3}{2 - \sqrt{x}} - \frac{10 - \sqrt{x}}{x - 5\sqrt{x} + 6}$

a. Rút gọn biểu thức A.

b. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức B biết rằng $B = \frac{x - 4\sqrt{x} + 20}{A(\sqrt{x} - 2)}$

Lời giải

a. Điều kiện: $x \geq 0, x \neq 4, x \neq 9$. Khi đó

$$\begin{aligned} A &= \frac{2\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 3} + \frac{\sqrt{x} + 3}{2 - \sqrt{x}} - \frac{10 - \sqrt{x}}{x - 5\sqrt{x} + 6} = \frac{2\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 3} - \frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} - 2} - \frac{10 - \sqrt{x}}{(\sqrt{x} - 3)(2 - \sqrt{x})} \\ &= \frac{(2\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 2) - (\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 3) - 10 + \sqrt{x}}{(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} - 2)} \end{aligned}$$

$$= \frac{x-2\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-2)} = \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-2)} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}$$

b. Biểu thức B xác định khi $x \geq 0$, $x \neq 4$, $x \neq 9$. Khi đó

$$B = \frac{x-4\sqrt{x}+20}{A(\sqrt{x}-2)} = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1} \cdot \frac{x-4\sqrt{x}+20}{\sqrt{x}-2} = \frac{x-4\sqrt{x}+20}{\sqrt{x}+1} = \sqrt{x}-5 + \frac{25}{\sqrt{x}+1} = \sqrt{x}+1 + \frac{25}{\sqrt{x}+1} - 6$$

Áp dụng BĐT AM-GM cho 2 số $\sqrt{x}+1$ và $\frac{25}{\sqrt{x}+1}$ ta được:

$$B \geq 2\sqrt{(\sqrt{x}+1)\frac{25}{\sqrt{x}+1}} - 6 = 2\sqrt{25} - 6 = 10 - 6 = 4$$

Dấu "=" xảy ra khi $\sqrt{x}+1 = \frac{25}{\sqrt{x}+1} \Leftrightarrow x=16$. Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức B là 4, đạt tại $x=16$

Câu 23

Tìm giá trị nhỏ nhất của $y = \frac{x+3\sqrt{x-1}+1}{x+4\sqrt{x-1}+2}$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } y &= \frac{x+3\sqrt{x-1}+1}{x+4\sqrt{x-1}+2} = \frac{x-1+\sqrt{x-1}+2\sqrt{x-1}+2}{x-1+\sqrt{x-1}+3\sqrt{x-1}+3} \\ &= \frac{(\sqrt{x-1}+1)(\sqrt{x-1}+2)}{(\sqrt{x-1}+1)(\sqrt{x-1}+3)} = \frac{\sqrt{x-1}+2}{\sqrt{x-1}+3} = 1 - \frac{1}{\sqrt{x-1}+3} \end{aligned}$$

$$\text{Mà } \sqrt{x-1} \geq 0 \text{ nên } \sqrt{x-1}+3 \geq 3 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x-1}+3} \leq \frac{1}{3} \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{\sqrt{x-1}+3} \geq \frac{2}{3}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=1$ Vậy giá trị nhỏ nhất của y là $\frac{2}{3}$ khi chỉ khi $x=1$

Câu 24

Cho $A = (x-x^2-1) \cdot \sqrt{\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 + 2\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 3}$, $x \neq 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của A.

Lời giải

$$\text{Dễ dàng chứng minh được: } \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 + 2\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 3 = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 + 2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 1 = \left(x^2 + \frac{1}{x^2} + 1\right)^2.$$

Vì $x \neq 0$ nên $x^2 + \frac{1}{x^2} + 1 > 0$. Vì thế

$$A = (x - x^2 - 1) : \sqrt{\left(x^2 + \frac{1}{x^2} + 1\right)^2} = -\frac{x^2(x^2 - x + 1)}{x^4 + x^2 + 1} = -\frac{x^2(x^2 - x + 1)}{(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)} = -\frac{x^2}{x^2 + x + 1}$$

Đặt $t = \frac{1}{x}$. Ta có $A = -\frac{1}{t^2 + t + 1} = -\frac{1}{\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} < 0$.

Vậy A nhỏ nhất khi $|A|$ lớn nhất hay $\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$ nhỏ nhất tức là $t = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -2$.

Khi đó $A = -\frac{4}{3}$.

Dạng 1.8iii : Sử dụng kỹ thuật tách

Câu 6

Xây dựng từ vào 10 Yên Bái 16 - 17

Tìm GTLN của: $P = \left(1 + \frac{a + \sqrt{a}}{\sqrt{a} + 1}\right) \left(1 + \frac{a - \sqrt{a}}{1 - \sqrt{a}}\right)$, với $a \geq 0; a \neq 1$.

Lời giải

Với $a \geq 0, a \neq 1$ ta có

$$P = \left[1 + \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a} + 1)}{\sqrt{a} + 1}\right] \left[1 + \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a} - 1)}{1 - \sqrt{a}}\right] = (1 + \sqrt{a})(1 - \sqrt{a}) = 1 - a$$

Do $a \geq 0$ nên $P \leq 1$.

Dấu "=" xảy ra khi $a = 0$.

Vậy GTLN của P là 1 khi $x = 0$.

Câu 7

□

Xây dựng từ vào 10 Bắc Ninh 15-16

Tìm GTLN của $A = \left(3 + \frac{a + \sqrt{a}}{\sqrt{a} + 1}\right) \left(3 - \frac{a - 5\sqrt{a}}{\sqrt{a} - 5}\right) + \sqrt{a}$ với $a \geq 0, a \neq 25$.

Lời giải

Với $a \geq 0, a \neq 25$.

$$A = \left(3 + \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a}+1)}{\sqrt{a}+1} \right) \left[3 - \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a}-5)}{\sqrt{a}-5} \right] + \sqrt{a} = (3+\sqrt{a})(3-\sqrt{a}) + \sqrt{a} = 9 - a + \sqrt{a} = -\left(\sqrt{a} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{37}{4}$$

. Suy ra $A \leq \frac{37}{4}$.

Dấu "=" xảy ra khi $a = \frac{1}{4}$.

Vậy GTLN của A là $\frac{37}{4}$ khi $a = \frac{1}{4}$.

Câu 11

Cho biểu thức:

$$P = \left(\sqrt{x} - \frac{x+2}{\sqrt{x}+1} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}-4}{1-x} \right), \text{ Với } x \geq 0, x \neq 1 \text{ và } x \neq 4.$$

a) Rút gọn P .

b) Tìm giá trị lớn nhất của $Q = P \cdot (2\sqrt{x} + x)$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{a) } P &= \left(\sqrt{x} - \frac{x+2}{\sqrt{x}+1} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}-4}{1-x} \right) \\ &= \left[\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1) - (x+2)}{\sqrt{x}+1} \right] : \left[\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} + \frac{\sqrt{x}-4}{x-1} \right] \\ &= \left[\frac{x + \sqrt{x} - x - 2}{\sqrt{x}+1} \right] : \left[\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}+1} + \frac{\sqrt{x}-4}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} \right] \\ &= \left(\frac{x + \sqrt{x} - x - 2}{\sqrt{x}+1} \right) : \left(\frac{x - \sqrt{x} + \sqrt{x} - 4}{\sqrt{x}+1} \right) \\ &= \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1} : \frac{x-4}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} \\ &= \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1} \cdot \frac{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} \\ &= \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1} \cdot \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} \\ &= \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) Ta có } Q &= P \cdot (2\sqrt{x} + x) = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2} \cdot (2\sqrt{x} + x) = \sqrt{x}(\sqrt{x}-1) \\ &= x - \sqrt{x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (\sqrt{x})^2 - 2 \cdot \sqrt{x} \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\
 &= \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \geq -\frac{1}{4}.
 \end{aligned}$$

Ta suy ra $Q_{\min} = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$.

Câu 25

Cho biểu thức: $A = \left(\frac{1}{x-\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}-1}\right) : \frac{\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)^2}$ (với $x > 0; x \neq 1$)

a. Rút gọn biểu thức A

b. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = A - 9\sqrt{x}$

Lời giải

a) Ta có:

$$\begin{aligned}
 A &= \left(\frac{1}{x-\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}-1}\right) : \frac{\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)^2} = \left(\frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} + \frac{1}{\sqrt{x}-1}\right) \cdot \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{\sqrt{x}+1} \\
 &= \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} \cdot \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{\sqrt{x}+1} = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} \\
 A &= \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} \text{ với } x > 0; x \neq 1
 \end{aligned}$$

b) với $x > 0; x \neq 1$ ta có $P = A - 9\sqrt{x} = \frac{-9x + \sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}}$

Đặt $\sqrt{x} = t > 0 \Rightarrow 9t^2 + (P-1)t + 1 = 0$.

Do $a.c > 0$ nên phương trình có nghiệm $t > 0$ khi: $\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ t_1 + t_2 > 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (P-1)^2 - 36 \geq 0 \\ \frac{1-P}{9} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P \leq -5 \\ P \geq 7 \Leftrightarrow P \leq -5 \\ P < 1 \end{cases}$$

Vậy giá trị lớn nhất của $P = -5$ khi $x = \frac{1}{9}$.

Câu 28

Cho biểu thức $P = \left((2\sqrt{a} - \sqrt{b}) - \frac{2\sqrt{b}(2\sqrt{a} - \sqrt{b})}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \right) \left(\frac{3}{2\sqrt{a} - \sqrt{b}} + \frac{6\sqrt{b} + 4}{a - \sqrt{ab} + (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2} \right)$ với

$a, b \in \mathbb{Z}; 0 < a, b \leq 9$ và $a \neq b$.

Cho $n = \overline{ab}$ (n là số tự nhiên có hai chữ số). Tìm n để P lớn nhất.

Lời giải

Đặt $\sqrt{a} = x, \sqrt{b} = y$ điều kiện $0 < x, y \leq 3; x \neq y$. Ta có:

$$\begin{aligned} P &= \left((2x - y) - \frac{2y(2x - y)}{x + y} \right) \left(\frac{3}{2x - y} + \frac{6y + 4}{x^2 - xy + (x - y)^2} \right) \\ &= (2x - y) \left(1 - \frac{2y}{x + y} \right) \cdot \frac{3(x^2 - xy + x^2 - 2xy + y^2) + (6y + 4)(2x - y)}{(2x - y)(x^2 - xy + x^2 - 2xy + y^2)} \\ &= \frac{x - y}{x + y} \cdot \frac{6x^2 + 3xy - 3y^2 + 8x - 4y}{(x - y)(2x - y)} = \frac{3(2x - y)(x + y) + 4(2x - y)}{(x + y)(2x - y)} = \frac{3(x + y) + 4}{(x + y)} = \frac{3(\sqrt{a} + \sqrt{b}) + 4}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})} \end{aligned}$$

có: $P = 3 + \frac{4}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$, P lớn nhất khi và chỉ khi $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ nhỏ nhất, mặt khác $a, b \geq 1; a \neq b; a, b \in \mathbb{N}$

suy ra $\sqrt{a} + \sqrt{b} \geq 1 + \sqrt{2}$ khi đó $P \leq 3 + \frac{4}{1 + \sqrt{2}} = 4\sqrt{2} - 1$, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$a = 1; b = 2$ hoặc $a = 2; b = 1$ suy ra $n = 12$ hoặc $n = 21$.

Câu 38

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức sau $B = \frac{3x}{(x+1)^2}$ với x là số thực khác -1 .

Lời giải

$$B = \frac{3x}{(x+1)^2} = \frac{k(x+1)^2 + m(x+b)^2}{(x+1)^2} = \frac{(k+m)x^2 + (2k+2mb)x + k+mb^2}{(x+1)^2}$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} k+m=0 \\ 2k+2mb=3 \\ k+mb^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k+m=0 \\ -2m+2mb=3 \\ k-kb^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k+m=0 \\ -2m+2mb=3 \\ 1-b^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=-m=\frac{3}{4} \\ b=-1 \end{cases}$$

$$\text{Do đó } B = \frac{3}{4} - \frac{3(x-1)^2}{4(x+1)^2} \leq \frac{3}{4}.$$

$$\text{Khi } x=1 \text{ thì } B = \frac{3}{4}.$$

$$\text{Vậy Max } B = \frac{3}{4}.$$

Dạng 1.8.iv : Sử dụng bất đẳng thức.

Câu 1

Cho biểu thức: $A = \frac{x(\sqrt{x+4\sqrt{x-4}} + \sqrt{x-4\sqrt{x-4}})}{\sqrt{x^2-8x+16}}$, với $x > 4$. Tìm GTNN của biểu thức A .

Lời giải

a) Điều kiện để biểu thức A xác định là $x > 4$.

$$A = \frac{x(\sqrt{(\sqrt{x-4}+2)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-4}-2)^2})}{\sqrt{(x-4)^2}} = \frac{x(|\sqrt{x-4}+2| + |\sqrt{x-4}-2|)}{|x-4|} = \frac{x(\sqrt{x-4}+2 + |\sqrt{x-4}-2|)}{x-4}$$

+ Nếu $4 < x < 8$ thì $\sqrt{x-4}-2 < 0$ nên $A = \frac{x(\sqrt{x-4}+2+2-\sqrt{x-4})}{x-4} = \frac{4x}{x-4} = 4 + \frac{16}{x-4}$

Do $4 < x < 8$ nên $0 < x-4 < 4 \Rightarrow A > 8$.

+ Nếu $x \geq 8$ thì $\sqrt{x-4}-2 \geq 0$ nên

$$A = \frac{x(\sqrt{x-4}+2+\sqrt{x-4}-2)}{x-4} = \frac{2x\sqrt{x-4}}{x-4} = \frac{2x}{\sqrt{x-4}} = 2\sqrt{x-4} + \frac{8}{\sqrt{x-4}} \geq 2\sqrt{16} = 8$$

(Theo bất đẳng thức Cauchy). Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $2\sqrt{x-4} = \frac{8}{\sqrt{x-4}} \Leftrightarrow x-4 = 4 \Leftrightarrow x = 8$.

Vậy GTNN của A bằng 8 khi $x = 8$.

Câu 2

Cho biểu thức: $A = \left(\frac{1}{x-\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}-1} \right) : \frac{\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)^2}$ (với $x > 0; x \neq 1$)

a. Rút gọn biểu thức A

b. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = A - 9\sqrt{x}$ (Trích đề vào 10 Điện Biên)

Lời giải

a. Với $x > 0; x \neq 1$ ta có:

$$A = \left(\frac{1}{x-\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}-1} \right) : \frac{\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)^2} = \left(\frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)^2} \right)$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} \cdot \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{\sqrt{x}+1} = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$$

$$b. P = A - 9\sqrt{x} \Leftrightarrow P = \left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} \right) - 9\sqrt{x} \Leftrightarrow P = \frac{-9x+\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow P = -\left(9\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} - 1 \right)$$

Áp dụng BĐT cauchy cho 2 số dương ta có: $9\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \geq 2\sqrt{9\sqrt{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}} = 6$

Vậy $\text{Max}P = -5$ dấu "=" xảy ra tại $x = \frac{1}{9}$.

Câu 3

a) Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-c^2} + c\sqrt{1-a^2} = \frac{3}{2}$.

Chứng minh rằng: $a^2 + b^2 + c^2 = \frac{3}{2}$.

b) Tìm các số thực x, y, z thỏa mãn điều kiện: $x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{2-z^2} + z\sqrt{3-x^2} = 3$. (Trích đề thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên Toán- Trường chuyên ĐHSPT Hà Nội 2014)

Lời giải

a) Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số không âm ta có

$$a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-c^2} + c\sqrt{1-a^2} \leq \frac{a^2+1-b^2}{2} + \frac{b^2+1-c^2}{2} + \frac{c^2+1-a^2}{2} = \frac{3}{2}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} a = \sqrt{1-b^2} \\ b = \sqrt{1-c^2} \\ c = \sqrt{1-a^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 1-b^2 \\ b^2 = 1-c^2 \\ c^2 = 1-a^2 \end{cases} \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = \frac{3}{2}$ (đpcm).

b) Ta viết lại giả thiết thành: $2x\sqrt{1-y^2} + 2y\sqrt{2-z^2} + 2z\sqrt{3-x^2} = 6$.

Áp dụng bất đẳng thức : $2ab \leq a^2 + b^2$ ta có:
 $2x\sqrt{1-y^2} + 2y\sqrt{2-z^2} + 2z\sqrt{3-x^2} \leq x^2 + 1 - y^2 + y^2 + 2 - z^2 + z^2 + 3 - x^2 = 6$. Suy ra $VT \leq VP$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} x = \sqrt{1-y^2} \\ y = \sqrt{2-z^2} \\ z = \sqrt{3-x^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x, y, z \geq 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \\ y^2 + z^2 = 2 \\ z^2 + x^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 3; x, y, z \geq 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \\ y^2 + z^2 = 2 \\ z^2 + x^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1; y = 0; z = \sqrt{2}$$

Dạng 1.8.v :

Câu 22

[Mức độ] Cho biểu thức $A = \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{xy}+1} + \frac{\sqrt{xy}+\sqrt{x}}{1-\sqrt{xy}} + 1 \right) : \left(1 - \frac{\sqrt{xy}+\sqrt{x}}{\sqrt{xy}-1} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{xy}+1} \right)$

1. Rút gọn biểu thức A.
2. Cho $\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} = 6$. Tìm giá trị nhỏ nhất của A.

Lời giải

1. Điều kiện: $x \geq 0, xy \geq 0, xy \neq 1$

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{xy}+1} + \frac{\sqrt{xy}+\sqrt{x}}{1-\sqrt{xy}} + 1 \right) : \left(1 - \frac{\sqrt{xy}+\sqrt{x}}{\sqrt{xy}-1} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{xy}+1} \right) \\ &= \frac{(\sqrt{x}+1)(1-\sqrt{xy}) + (\sqrt{xy}+\sqrt{x})(\sqrt{xy}+1) + (\sqrt{xy}+1)(\sqrt{xy}-1)}{(\sqrt{xy}+1)(1-\sqrt{xy})} \\ &\quad \frac{(\sqrt{xy}-1)(\sqrt{xy}+1) - (\sqrt{xy}+\sqrt{x})(\sqrt{xy}+1) - (\sqrt{x}+1)(\sqrt{xy}-1)}{(\sqrt{xy}+1)(1-\sqrt{xy})} \\ &= \frac{(\sqrt{x}+1)(1-\sqrt{xy}) + (\sqrt{xy}+1)(\sqrt{xy}+\sqrt{x}+1-\sqrt{xy})}{(\sqrt{xy}+1)(1-\sqrt{xy}+\sqrt{xy}+\sqrt{x}) + (\sqrt{x}+1)(\sqrt{xy}-1)} = \frac{(\sqrt{x}+1)(1-\sqrt{xy}+\sqrt{xy}+1)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{xy}+1+\sqrt{xy}-1)} = \frac{2}{2\sqrt{xy}} = \frac{1}{\sqrt{xy}}. \end{aligned}$$

Theo BĐT Cauchy, ta có: $6 = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} \geq 2\sqrt{\frac{1}{\sqrt{xy}}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{xy}} \leq 9$.

Dấu = xảy ra khi và chỉ khi $\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{y}} = 3 \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{9}$.

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức A là 9, đạt được khi $x = y = \frac{1}{9}$.

Câu 26

Cho biểu thức

$$A = \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{xy}+1} + \frac{\sqrt{xy}+\sqrt{x}}{1-\sqrt{xy}} + 1 \right) : \left(1 - \frac{\sqrt{xy}+\sqrt{x}}{\sqrt{xy}-1} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{xy}+1} \right)$$

Cho $\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} = 6$. Tìm giá trị lớn nhất của A.

Lời giải

Điều kiện: $\sqrt{xy} \neq 1$.

$$A = \frac{(\sqrt{x}+1)(1-\sqrt{xy}) + (\sqrt{xy}+\sqrt{x})(\sqrt{xy}+1) + (\sqrt{xy}+1)(1-\sqrt{xy})}{(\sqrt{xy}+1)(1-\sqrt{xy})}$$

$$\begin{aligned} & \frac{(\sqrt{xy}+1)(1-\sqrt{xy})+(\sqrt{xy}+\sqrt{x})(\sqrt{xy}+1)-(\sqrt{x}+1)(1-\sqrt{xy})}{(\sqrt{xy}+1)(1-\sqrt{xy})} = \\ & = \frac{(\sqrt{x}+1)(1-\sqrt{xy})+(\sqrt{xy}+\sqrt{x})(\sqrt{xy}+1)+(\sqrt{xy}+1)(1-\sqrt{xy})}{(\sqrt{xy}+1)(1-\sqrt{xy})+(\sqrt{xy}+\sqrt{x})(\sqrt{xy}+1)-(\sqrt{x}+1)(1-\sqrt{xy})} = \\ & = \frac{1+\sqrt{x}}{x\sqrt{y}+\sqrt{xy}} = \frac{1}{\sqrt{xy}}. \end{aligned}$$

Theo Côsi, ta có: $6 = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} \geq 2\sqrt{\frac{1}{\sqrt{xy}}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{xy}} \leq 9$.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{y}} \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{9}$.

Vậy: $\max A = 9$, đạt được khi: $x = y = \frac{1}{9}$.

Câu 27

Cho biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{ab}-b} + \frac{2\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{ab}-a} \right) : \left(\frac{1}{b\sqrt{a}} - \frac{1}{a\sqrt{b}} \right)$ với $a > 0, b > 0$ và $a \neq b$

Tìm giá trị lớn nhất của P nếu $a^2 + 4b^2 = 8$

Lời giải

Ta có:

$$P = \left[\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}(\sqrt{a}-\sqrt{b})} + \frac{2\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}(\sqrt{a}-\sqrt{b})} \right] : \left(\frac{1}{\sqrt{ab}\cdot\sqrt{b}} - \frac{1}{\sqrt{ab}\cdot\sqrt{a}} \right) = \frac{a-(2\sqrt{a}-\sqrt{b})\sqrt{b}}{\sqrt{ab}(\sqrt{a}-\sqrt{b})} \cdot \frac{ab}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$$

$$\text{Hay } P = \frac{ab(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{\sqrt{ab}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2} = \sqrt{ab}$$

Theo bất đẳng thức AM-GM ta có: $a^2 + 4b^2 \geq 2\sqrt{a^2 \cdot 4b^2} = 4ab \Rightarrow 4ab \leq 8 \Rightarrow ab \leq 2$. Vậy $P \leq \sqrt{2}$, Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a^2 = 4b^2 = 4 \Leftrightarrow a = 2, b = 1$

Vậy GTLN của P là $\sqrt{2}$

Dạng 1.9: Bài toán mới lạ

Câu 4

Cho biểu thức $B = \left(\frac{6}{a-1} + \frac{10-2\sqrt{a}}{a\sqrt{a}-a-\sqrt{a}+1} \right) \cdot \frac{(\sqrt{a}-1)^2}{4\sqrt{a}}$ (với $a > 0; a \neq 1$).

a) Rút gọn biểu thức B.

b) Đặt $C = B \cdot (a - \sqrt{a} + 1)$. So sánh C và 1.

Lời giải

a) Với $a > 0; a \neq 1$, ta có:

$$B = \left[\frac{6}{a-1} + \frac{10-2\sqrt{a}}{(a-1)(\sqrt{a}-1)} \right] \cdot \frac{(\sqrt{a}-1)^2}{4\sqrt{a}} = \frac{4\sqrt{a}+4}{(a-1)(\sqrt{a}-1)} \cdot \frac{(\sqrt{a}-1)^2}{4\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}}$$

Vậy $B = \frac{1}{\sqrt{a}}$ với $a > 0; a \neq 1$

b) Với $a > 0; a \neq 1$, ta có:

$$C-1 = \frac{a-\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}} - 1 = \frac{(\sqrt{a}-1)^2}{\sqrt{a}} > 0. \text{ Vậy } C > 1 \text{ Với } a > 0; a \neq 1$$

Câu 29

Cho $A = \left[\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} \right) \cdot \frac{2}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right] : \frac{\sqrt{x^3} + y\sqrt{x} + x\sqrt{y} + \sqrt{y^3}}{\sqrt{x^3y} + \sqrt{xy^3}}$ với $x > 0, y > 0$.

Biết $x, y = 16$. Tìm các giá trị của x, y để A có giá trị nhỏ nhất, tìm giá trị nhỏ nhất đó.

Lời giải

$$\begin{aligned} A &= \left[\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} \right) \cdot \frac{2}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right] : \frac{\sqrt{x^3} + y\sqrt{x} + x\sqrt{y} + \sqrt{y^3}}{\sqrt{x^3y} + \sqrt{xy^3}} \\ &= \left[\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x}\sqrt{y}} \cdot \frac{2}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} + \frac{x+y}{x \cdot y} \right] : \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y}) \cdot (x - \sqrt{xy} + y) + \sqrt{xy} \cdot (\sqrt{x} + \sqrt{y})}{\sqrt{xy} \cdot (\sqrt{x} + \sqrt{y})} \\ &= \left(\frac{2}{\sqrt{xy}} + \frac{x+y}{x \cdot y} \right) : \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x+y)}{\sqrt{xy} \cdot (x+y)} = \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2}{xy} \cdot \frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{xy}}. \end{aligned}$$

Ta có:

$$\begin{aligned} (\sqrt{\sqrt{x}} - \sqrt{\sqrt{y}})^2 &\geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} + \sqrt{y} - 2\sqrt{\sqrt{xy}} \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} + \sqrt{y} \geq 2\sqrt{\sqrt{xy}} \\ \Rightarrow A = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{xy}} &\geq \frac{2\sqrt{\sqrt{xy}}}{\sqrt{xy}} = \frac{2\sqrt{\sqrt{16}}}{\sqrt{16}} = 1 \text{ (do } xy = 16) \Rightarrow \min A = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = \sqrt{y} \\ xy = 16 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 4. \end{aligned}$$

Câu 30

Cho $B = \left(\sqrt{a} + \frac{b-\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \right) : \left(\frac{\sqrt{ab}}{b-\sqrt{ab}} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}+\sqrt{a}} \right)$ với $a \geq 0, b > 0, b \neq a$.

Biết $a+b=4$. Tìm các giá trị của a, b để B có giá trị lớn nhất, tìm giá trị lớn nhất đó.

Lời giải

Ta có:

$$B = \frac{a+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} : \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}-\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}+\sqrt{a}} \right) = \frac{a+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} : \frac{a+b}{(\sqrt{b}-\sqrt{a})(\sqrt{b}+\sqrt{a})} = \frac{a+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \cdot \frac{b-a}{a+b}$$

$$= \sqrt{b} - \sqrt{a}.$$

$$\text{Do } \begin{cases} a \geq 0, b > 0, b \neq a \\ a+b=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \geq 0 \\ b \leq 4 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{b} - \sqrt{a} \leq \sqrt{4} - \sqrt{0} = 2$$

$$\Rightarrow \max B = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 4 \\ a = 0 \end{cases}$$

Câu 31

Cho biểu thức: $A = (4x^5 + 4x^4 - 5x^3 + 5x - 2)^2 + 2019$. Tính giá trị của B khi $x = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}}$.

Lời giải

$$\text{Ta có } x = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{(\sqrt{2}-1)^2}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}} = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2x+1 = \sqrt{2} \Rightarrow (2x+1)^2 = 2 \Leftrightarrow 4x^2 + 4x - 1 = 0$$

$$\text{Ta có } 4x^5 + 4x^4 - 5x^3 + 5x - 2 = 4x^5 + 4x^4 - x^3 - 4x^3 - 4x^2 + x + 4x^2 + 4x - 2$$

$$= x^3(4x^2 + 4x - 1) - x(4x^2 + 4x - 1) + 4x^2 + 4x - 2$$

$$\text{Do } 4x^2 + 4x - 1 = 0 \Rightarrow 4x^5 + 4x^4 - 5x^3 + 5x - 2 = x^3 \cdot 0 - x \cdot 0 + 0 - 1 = -1$$

$$\Rightarrow A = (-1)^2 + 2019 = 2020$$

Câu 32

Cho $A = \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$ ($n \in \mathbb{N}, n \geq 2$).

a) Rút gọn biểu thức.

b) Chứng minh rằng $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2020}} > 2(\sqrt{2021} - 1)$.

Lời giải

$$\text{a) Ta có: } \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}} = \sqrt{k+1} - \sqrt{k}$$

$$\text{Áp dụng: } \frac{1}{1+\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1; \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \sqrt{3} - \sqrt{2}; \dots; \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}.$$

$$\text{Vậy } A = \sqrt{2} - 1 + \sqrt{3} - \sqrt{2} + \dots + \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \sqrt{n+1} - 1.$$

$$\text{b) Đặt } B = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2020}}.$$

Ta có $B = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{2\sqrt{2020}}\right)$.

Nhận xét: $\frac{1}{2} = \frac{1}{1+1} > \frac{1}{1+\sqrt{2}}$; $\frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{2}} > \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$; ...; $\frac{1}{2\sqrt{2020}} > \frac{1}{\sqrt{2020}+\sqrt{2021}}$.

Suy ra $\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{2\sqrt{2020}} > \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2020}+\sqrt{2021}}$

Áp dụng câu a) ta có: Vậy $B > 2(\sqrt{2021}-1)$.

Câu 33

Chứng minh rằng $\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}} + \sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}} + \dots + \sqrt{1+\frac{1}{2017^2}+\frac{1}{2018^2}} < 2018$.

Lời giải

Đặt $S = \sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}} + \sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}} + \dots + \sqrt{1+\frac{1}{2017^2}+\frac{1}{2018^2}}$.

Ta có $\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}} = \sqrt{1+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)^2 + \frac{2}{n(n+1)}} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$

$= \sqrt{\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)^2} = 1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$.

Áp dụng đẳng thức trên ta được $S = \left(1+\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right) + \left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \dots + \left(1+\frac{1}{2017}-\frac{1}{2018}\right)$
 $= 2018 - \frac{1}{2018} < 2018$. (điều phải chứng minh)

Câu 36

Cho a, b, c khác không và thỏa mãn:

$$\begin{cases} a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b) + 2abc = 0 \\ a^{2019} + b^{2019} + c^{2019} = 1 \end{cases}$$

Hãy tính giá trị của biểu thức $B = \frac{1}{a^{2019}} + \frac{1}{b^{2019}} + \frac{1}{c^{2019}}$.

Lời giải

Ta có:

$$\begin{aligned}
& a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b) + 2abc = 0 \\
& \Leftrightarrow a^2b + a^2c + b^2c + b^2a + c^2a + c^2b + 2abc = 0 \\
& \Leftrightarrow (a^2b + b^2a) + (c^2a + c^2b) + (2abc + b^2c + a^2c) = 0 \\
& \Leftrightarrow ab(a+b) + c^2(a+b) + c(a+b)^2 = 0 \\
& \Leftrightarrow (a+b)(ab + c^2 + ac + bc) = 0 \\
& \Leftrightarrow (a+b).(a+c).(b+c) = 0
\end{aligned}$$

*TH1: nếu $a+b=0$.

Ta có $\begin{cases} a = -b \\ a^{2019} + b^{2019} + c^{2019} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -b \\ c = 1 \end{cases}$ ta có $B = \frac{1}{a^{2019}} + \frac{1}{b^{2019}} + \frac{1}{c^{2019}} = 1$

Các trường hợp còn lại xét tương tự

Vậy $B = \frac{1}{a^{2019}} + \frac{1}{b^{2019}} + \frac{1}{c^{2019}} = 1$.

Câu 37

Cho a là một số thực lớn hơn 1 và n là số tự nhiên. Hãy thu gọn biểu thức sau:

$$M = (a+1)(a^2+1)(a^4+1)\dots(a^{2^{n-1}}+1)(a^{2^n}+1).$$

Lời giải

$$\begin{aligned}
\frac{M-1}{a^{2^{n+1}}-1} &= \frac{(a+1)(a^2+1)(a^4+1)\dots(a^{2^{n-1}}+1)(a^{2^n}+1)}{a^{2^{n+1}}-1} \\
&= \frac{(a+1)(a^2+1)(a^4+1)\dots(a^{2^{n-1}}+1)}{a^{2^n}-1} \\
&= \frac{(a+1)(a^2+1)(a^4+1)\dots(a^{2^{n-2}}+1)}{a^{2^{n-1}}-1} \\
&= \frac{(a+1)(a^2+1)(a^{2^2}+1)}{a^{2^3}-1} \\
&= \frac{(a+1)(a^2+1)}{a^{2^2}-1} \\
&= \frac{a+1}{a^2-1} \\
&= \frac{1}{a-1} \\
\Rightarrow M-1 &= \frac{a^{2^{n+1}}-1}{a-1} \Rightarrow M = \frac{a^{2^{n+1}}-1}{a-1} + 1 = \frac{a^{2^{n+1}}+a-2}{a-1}.
\end{aligned}$$

Câu 39

Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc vào b :

$$M = \frac{2a(a+2b+\sqrt{a^2+4ab})\sqrt{b+\sqrt{a^2+3b}\sqrt{4a^2+12ab+9b^2}}}{(a+\sqrt{a^2+4ab})\cdot(a+4b+\sqrt{a^2+4ab})} \quad (a, b > 0).$$

Lời giải

$$\begin{aligned} M &= \frac{(2a^2+4ab+2a\sqrt{a^2+4ab})\sqrt{b+\sqrt{a^2+3b}\sqrt{(2a+3b)^2}}}{(a+\sqrt{a^2+4ab})\cdot(a+4b+\sqrt{a^2+4ab})} \\ &= \frac{(a^2+4ab+2a\sqrt{a^2+4ab}+a^2)\sqrt{b+\sqrt{a^2+3b}(2a+3b)}}{(a+\sqrt{a^2+4ab})\cdot(a+4b+\sqrt{a^2+4ab})} \\ &= \frac{(a+\sqrt{a^2+4ab})^2\sqrt{b+\sqrt{a^2+6ab+9b^2}}}{(a+\sqrt{a^2+4ab})\cdot(a+4b+\sqrt{a}\sqrt{a+4b})} \\ &= \frac{(a+\sqrt{a^2+4ab})\sqrt{b+\sqrt{(a+3b)^2}}}{\sqrt{a+4b}(\sqrt{a+4b}+\sqrt{a})} \\ &= \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a}+\sqrt{a+4b})\sqrt{b+a+3b}}{\sqrt{a+4b}(\sqrt{a+4b}+\sqrt{a})} = \sqrt{a}. \text{ Vậy } M \text{ không phụ thuộc } b. \end{aligned}$$

Câu 40

Cho $M = \frac{x\sqrt{x}+1}{x-\sqrt{x}} - \frac{x\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}}$

1. Tìm điều kiện để M có nghĩa.
2. Rút gọn M (với điều kiện M có nghĩa)
3. Cho $N = \frac{1}{18}\left(6x + \frac{6}{x} + x^3 + \frac{1}{x^3}\right)$. Tìm tất cả các giá trị của x để $M = N$

Lời giải

1. Để M có nghĩa, ta có:
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x - \sqrt{x} \neq 0 \\ x + \sqrt{x} \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x}(\sqrt{x}-1) \neq 0 \\ \sqrt{x}(\sqrt{x}+1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

2. Với $x > 0, \neq 1$ ta có:

$$\begin{aligned} M &= \frac{(x\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}) - (x\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x})}{x^2-x} \\ &= \frac{x^2\sqrt{x}+x^2-x-\sqrt{x}-x^2\sqrt{x}+x^2-x+\sqrt{x}}{x^2-x} \\ &= \frac{2x^2-2x}{x^2-x} \\ &= \frac{2(x^2-x)}{x^2-x} = 2. \text{ Vậy } M = 2 \end{aligned}$$

3. Với $x > 0, \neq 1$ ta có: $2 = \frac{1}{18} \left(6\left(x + \frac{1}{x}\right) + x^3 + \frac{1}{x^3} \right)$ (1)

Đặt $x + \frac{1}{x} = y > 2$ (vì $x > 0, \neq 1$)

$$\text{Ta có } y^3 = x^3 + \frac{1}{x^3} + 3x^2 \cdot \frac{1}{x} + 3x \cdot \frac{1}{x^2} = x^3 + \frac{1}{x^3} + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) \Rightarrow x^3 + \frac{1}{x^3} = y^3 - 3y$$

Do đó, từ (1) ta có: $36 = 6y + y^3 - 3y \Leftrightarrow y^3 + 3y - 36 = 0$

$$\Leftrightarrow 0 = (y^3 - 3^3) + (3y - 9) = (y-3)(y^2 + 3y + 9) + 3(y-3) = (y-3)(y^2 + 3y + 12)$$

$$\Leftrightarrow y = 3 > 2 \text{ (vì } y^2 + 3y + 12 = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{39}{4} > 0)$$

$$\text{Với } y = 3, \text{ ta có } x + \frac{1}{x} = 3 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 = 0 \text{ (}\Delta = 9 - 4 = 5 > 0\text{)}$$

$$\Leftrightarrow x_1 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}, \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \text{ (tmdk).}$$

$$\text{Vậy với } x_1 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}, x_2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \text{ thì } M = N.$$

Câu 41

Cho $0 < a < b < c < d$. Chứng minh rằng:

$$(b+c) \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) < \frac{(a+d)^2}{ad} \quad (a, b > 0).$$

Lời giải

$$\text{Bđt } \Leftrightarrow \frac{b}{c} + \frac{c}{b} < \frac{a}{d} + \frac{d}{a}$$

$$\Leftrightarrow ad(b^2 + c^2) < (a^2 + d^2)bc$$

$$\Leftrightarrow adb^2 + adc^2 < a^2bc + d^2bc$$

$$\Leftrightarrow adb^2 - a^2bc + adc^2 - d^2bc < 0$$

$$\Leftrightarrow (bd - ac)(ab - cd) < 0 \quad (1)$$

Ta có

$$\left. \begin{array}{l} 0 < a < b \\ 0 < c < d \end{array} \right\} \Rightarrow ac < bd \Rightarrow bd - ac > 0$$

$$\left. \begin{array}{l} 0 < a < c \\ 0 < b < d \end{array} \right\} \Rightarrow ab < cd \Rightarrow ab - cd < 0.$$

Vậy (1) đúng.