

DẠNG 3**Thể tích khối chóp có cạnh bên vuông góc với đáy**

Câu 1: Tính thể tích V của khối tứ diện đều có cạnh bằng a .

- A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. B. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$. C. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. D. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{4}$.

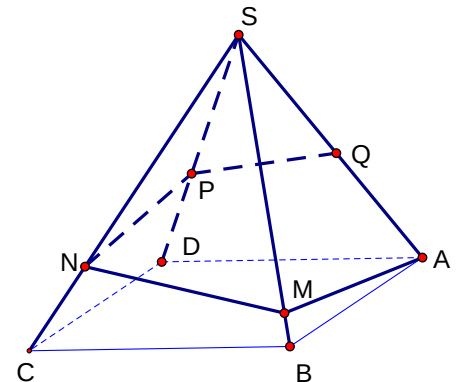
Câu 2: Cho khối chóp tam giác đều $S.ABCD$ có độ dài cạnh đáy bằng a , mặt phẳng chứa BC và vuông góc với SA cắt khối chóp theo một thiết diện có diện tích bằng $\frac{a^2}{4}$. Tính thể tích V của khối chóp đã cho.

- A. $V = \frac{\sqrt{2}a^2}{24}$. B. $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{12}$. C. $V = \frac{a^3}{36}$. D. $V = \frac{a^3}{72}$.

Câu 3: Cho khối chóp tứ giác đều $SABCD$ có cạnh đáy bằng a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB, SD . Mặt phẳng (AMN) cắt SC tại J . Diện tích tứ giác $AMJN$ bằng $\frac{a^2\sqrt{5}}{6}$. Tính thể tích của khối chóp $SABCD$.

- A. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$ B. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$ C. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$ D. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$

Câu 4: Bên cạnh con đường nước đi vào thành phố, người ta xây một ngọn tháp hình chóp tứ giác đều $SABCD$ có $SA = 600m$, $\angle ASB = 15^\circ$. Do sự cố đường dây điện tại điểm Q (trung điểm của SA) bị hỏng nên người ta tạo ra một con đường từ A đến Q gồm bốn đoạn AM, MN, NP, PQ (như hình vẽ). Để tiết kiệm chi phí, kỹ sư đã nghiên cứu và có được chiều dài con đường từ A đến Q nhỏ nhất. Tính tỉ số $k = \frac{AM + MN}{NP + PQ}$



- A. $k = 2$ B. $k = \frac{5}{3}$ C. $k = \frac{3}{2}$ D. $k = \frac{4}{3}$

Câu 5: Trong tất cả các khối chóp tam giác đều có diện tích toàn phần cho trước. Gọi a, b lần lượt là độ dài cạnh đáy và độ dài cạnh bên của khối chóp. Tính tỉ số $\frac{a}{b}$ khi thể tích của khối chóp đạt giá trị lớn nhất.

- A. $\frac{b}{a} = 1$ B. $\frac{b}{a} = \sqrt{2}$ C. $\frac{b}{a} = \sqrt{3}$ D. $\frac{b}{a} = 2$

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA = 1$, tất cả các cạnh còn lại bằng $\sqrt{3}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

- A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. B. $\frac{\sqrt{6}}{2}$. C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

- Câu 7:** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại A , $AB=1$, $AC=2$ và $SA=SB=SC=\sqrt{3}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.
- A. $\frac{\sqrt{7}}{6}$. B. $\frac{\sqrt{2}}{3}$. C. $\frac{\sqrt{17}}{6}$. D. $\frac{1}{6}$.
- Câu 8:** Cho hình chóp $S.ABC$ có $BAC=135^\circ$, $AB=AC=1$ và $SA=SB=SC=2$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.
- A. $\frac{\sqrt{6-2\sqrt{2}}}{4}$. B. $\frac{\sqrt{6-2\sqrt{2}}}{6}$. C. $\frac{\sqrt{6-2\sqrt{2}}}{12}$. D. $\frac{\sqrt{6-2\sqrt{2}}}{2}$.
- Câu 9:** Cho khối chóp $S.ABC$ có $SA=SB=AB=AC=a$, $SC=\frac{a\sqrt{6}}{3}$ và mặt phẳng (SBC) vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Tính thể tích của khối chóp đã cho.
- A. $\frac{a^3\sqrt{14}}{36}$. B. $\frac{a^3\sqrt{14}}{12}$. C. $\frac{a^3\sqrt{21}}{36}$. D. $\frac{a^3\sqrt{21}}{12}$.
- Câu 10:** Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang, $SA=SB=SC=AD=2a$, $AB=BC=CD=a$. Tính thể tích của khối chóp đã cho.
- A. $\frac{9a^3}{4}$. B. $\frac{a^3}{4}$. C. $\frac{3a^3}{4}$. D. $\frac{a^3}{12}$.
- Câu 11:** Trong các khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a , chiều cao bằng b thỏa mãn $4a+b=6\sqrt{2}$. Khối chóp có thể tích lớn nhất là.
- A. $\frac{4\sqrt{2}}{3}$. B. $\frac{8\sqrt{2}}{3}$. C. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. D. $\frac{\sqrt{2}}{3}$.
- Câu 12:** Cho khối chóp $S.ABCD$ có $SA=SB=SC=SD=\sqrt{3}a$ và $AB=BC=CD=a$, $AD=2a$. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng
- A. $\frac{\sqrt{6}a^3}{4}$. B. $\frac{3\sqrt{6}a^3}{4}$. C. $\frac{\sqrt{6}a^3}{2}$. D. $\frac{3\sqrt{6}a^3}{2}$.
- Câu 13:** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông, $SA=SB=SC=1$ và cùng tạo với đáy một góc α . Tính $\cos \alpha$ khi thể tích của khối chóp $S.ABC$ đạt giá trị lớn nhất.
- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. B. $\frac{\sqrt{6}}{3}$. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.
- Câu 14:** Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA=SB=SC=a\sqrt{3}$, $AB=AC=2a$, $BC=3a$. Tính thể tích của khối chóp $S.ABC$
- A. $\frac{\sqrt{5}a^3}{2}$. B. $\frac{\sqrt{35}a^3}{2}$. C. $\frac{\sqrt{35}a^3}{6}$. D. $\frac{2a^3\sqrt{5}}{7}$.
- Câu 15:** Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy ABC đều cạnh a , cạnh bên SA vuông góc với đáy (ABC) và góc giữa SB và mặt đáy bằng 30° . Tính thể tích V của khối chóp đã cho.
- A. $V=\frac{a^3}{4}$. B. $V=\frac{a^3}{12}$. C. $V=\frac{3a^3}{4}$. D. $V=\frac{9a^3}{4}$.
- Câu 16:** Cho khối chóp $S.ABCD$ có chiều cao SA bằng a . Mặt đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a , góc ABC bằng 60° . Tính thể tích của khối chóp $S.ABCD$ theo a .

$$\text{A. } V = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}. \quad \text{B. } V = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}. \quad \text{C. } V = \frac{a^3\sqrt{3}}{8}. \quad \text{D. } V = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}.$$

Câu 17: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông với $AC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, cạnh bên SB hợp với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc 60° . Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

$$\text{A. } V = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}. \quad \text{B. } V = \frac{3a^3\sqrt{3}}{24}. \quad \text{C. } V = \frac{a^3\sqrt{3}}{8}. \quad \text{D. } V = \frac{3a^3\sqrt{3}}{8}.$$

Câu 18: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B , $AB = 2a$, $BAC = 60^\circ$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và $SA = a\sqrt{3}$. Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABC$.

$$\text{A. } V = 2a^3. \quad \text{B. } V = 3a^3. \quad \text{C. } V = a^3. \quad \text{D. } V = 4a^3.$$

Câu 19: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B , $SA = a$, $BAC = 30^\circ$, $SCA = 45^\circ$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy. Thể tích khối chóp $S.ABC$ là V . Tỉ số $\frac{V}{a^3}$ gần giá trị nào nhất trong các giá trị sau?

$$\text{A. } 0,01. \quad \text{B. } 0,05. \quad \text{C. } 0,08. \quad \text{D. } 1.$$

Câu 20: Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB = 2a$, $AD = a$. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với đáy và góc giữa hai mặt phẳng (SAB) , (SBD) là 45° . Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là V . Tỉ số $\frac{V}{a^3}$ gần giá trị nào nhất trong các giá trị sau?

$$\text{A. } 0,25. \quad \text{B. } 0,5. \quad \text{C. } 0,75. \quad \text{D. } 1,5.$$

Câu 21: Cho hình chóp $S.ABC$ có cạnh bên SA vuông góc với đáy và $AB = a$; $AC = 2a$ và $BAC = 120^\circ$. Mặt phẳng (SBC) tạo với đáy một góc 60° . Tính thể tích khối chóp $S.ABC$

$$\text{A. } V = \frac{a^3\sqrt{21}}{14}. \quad \text{B. } V = \frac{a^3\sqrt{21}}{13}. \quad \text{C. } V = \frac{2a^3\sqrt{21}}{14}. \quad \text{D. } V = \frac{2a^3\sqrt{21}}{13}.$$

Câu 22: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật có $AB = 3a$; $AD = 4a$, $SA \perp (ABCD)$, SC tạo với đáy góc 45° . Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABCD$

$$\text{A. } V = 20a^3. \quad \text{B. } V = 20\sqrt{2}a^3. \quad \text{C. } V = 30a^3. \quad \text{D. } V = 30\sqrt{2}a^3.$$

Câu 23: Cho tứ diện $ABCD$ có $AD \perp (ABC)$ và $AB = 3a$; $BC = 4a$; $AC = 5a$; $AD = 6a$. Thể tích khối tứ diện $ABCD$ là

$$\text{A. } V = 6a^3. \quad \text{B. } V = 12a^3. \quad \text{C. } V = 18a^3. \quad \text{D. } V = 36a^3.$$

Câu 24: Cho khối tứ diện $SABC$ có $SA \perp (ABC)$. Hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) vuông góc với nhau; $SB = a\sqrt{3}$, $BSC = 45^\circ$, $ASB = 30^\circ$. Thể tích khối tứ diện $SABC$ là V . Tính tỉ số $\frac{a^3}{V}$.

$$\text{A. } \frac{8}{3}. \quad \text{B. } \frac{8\sqrt{3}}{3}. \quad \text{C. } \frac{2\sqrt{3}}{3}. \quad \text{D. } \frac{4}{3}.$$

Câu 25: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A, D ; $SD \perp (ABCD)$; $AB = AD = a$; $CD = 3a$; $SA = a\sqrt{3}$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

A. $V = \frac{2a^3}{3}$. B. $V = \frac{4a^3}{3}$. C. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$. D. $V = \frac{2a^3\sqrt{2}}{3}$.

Câu 26: Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với đáy, góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ là 30° . Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là V . Tính $\frac{3V}{a^3}$?

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{4}$. C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{6}$.

Câu 27: Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB = a, BC = a\sqrt{3}$. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với đáy, cạnh SC hợp với đáy một góc 60° . Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là?

A. $V = a^3$. B. $V = 2a^3$. C. $V = a^3\sqrt{3}$. D. $V = 2a^3\sqrt{3}$.

Câu 28: Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác ABC vuông tại $B, AB = a, ACB = 60^\circ$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và SB tạo với mặt đáy một góc bằng 45° . Thể tích khối chóp $S.ABC$ là?

A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. B. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{18}$. C. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{9}$. D. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Câu 29: Cho tứ $ABCD$ có ABC là tam giác đều cạnh a . AD vuông góc với mặt phẳng (ABC) , góc giữa BD và mặt phẳng (DAC) là 30° . Thể tích khối tứ diện $ABCD$ là V . Tính tỉ số $\frac{a^3\sqrt{6}}{V}$.

A. 1. B. 3. C. 4. D. 12.

Câu 30: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh 20cm . SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 30\text{cm}$. Gọi B', D' là hình chiếu của A lên SB, SD . Mặt phẳng $(AB'D')$ cắt SC tại C' . Thể tích khối chóp $S.AB'C'D'$ là

A. $1466(\text{cm}^3)$. B. $1500(\text{cm}^3)$. C. $1400(\text{cm}^3)$. D. $1540(\text{cm}^3)$.

Câu 31: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A . $BC = a\sqrt{2}$. SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Mặt bên (SBC) tạo với đáy một góc 45° . Thể tích khối chóp $S.ABC$ là V .

Tính tỷ số $\frac{6V}{a^3}$?

A. $\frac{\sqrt{3}}{4}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{6}$. C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. D. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Câu 32: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng 3, góc giữa (SBC) và mặt phẳng đáy bằng α . Tính $\cos\alpha$ khi khối chóp có thể tích nhỏ nhất.

A. $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$ B. $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$. C. $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. D. $\cos\alpha = \frac{1}{3}$.

Câu 33: Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại $B, AB = 8, BC = 6$. Biết $SA = 6$ và vuông góc với mặt phẳng đáy (ABC) . Một điểm trong M của khối chóp cách đều tất cả các mặt của khối chóp một đoạn bằng h . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $h = \frac{4}{3}$.

B. $h = \frac{4}{9}$.

C. $h = \frac{2}{3}$.

D. $h = \frac{2}{9}$.

Câu 34: Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $AB = 8$, $BC = 6$. Biết $SA = 6$ và vuông góc với mặt phẳng đáy (ABC) . Một điểm M thuộc phần không gian bên trong của hình chóp và cách đều tất cả các mặt của khối chóp. Tính thể tích khối tứ diện $M.ABC$.

A. $V = 24$.

B. $V = \frac{64}{3}$.

C. $V = \frac{32}{3}$.

D. $V = 12$.

Câu 35: Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại A , $AB = 2a$, SA vuông góc với đáy, khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $\frac{4a}{3}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

A. $V = \frac{8a^3}{3}$.

B. $V = \frac{9a^3}{8}$.

C. $V = 8a^3$.

D. $V = \frac{27a^3}{8}$.

Câu 36: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác cân tại A , $AB = 2a$, $BAC = 45^\circ$, SA vuông góc với đáy, khoảng cách giữa hai đường thẳng SB , AC bằng $\frac{4a}{3}$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{3}$.

B. $V = \sqrt{2}a^3$.

C. $V = 4\sqrt{2}a^3$.

D. $V = \frac{4\sqrt{2}a^3}{3}$.

Câu 37: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác cân tại A , $BAC = \alpha$ ($30^\circ < \alpha < 90^\circ$), $AB = 6$, SA vuông góc với đáy, khoảng cách giữa hai đường thẳng SB , AC bằng 3. Tính $\cos \alpha$ khi khối chóp $S.ABC$ có thể tích nhỏ nhất.

A. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

B. $\cos \alpha = \frac{1}{2}$.

C. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

D. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 38: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, $AB = 1$, cạnh bên $SA = 1$ và vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$. Ký hiệu M là điểm di động trên đoạn CD và N là điểm di động trên đoạn CB sao cho $MAN = 45^\circ$. Thể tích nhỏ nhất của khối chóp $S.AMN$ là?

A. $\frac{\sqrt{2}+1}{9}$.

B. $\frac{\sqrt{2}-1}{3}$.

C. $\frac{\sqrt{2}+1}{6}$.

D. $\frac{\sqrt{2}-1}{9}$.

Câu 39: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, $AB = 1$, cạnh bên $SA = 1$ và vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$. Ký hiệu M là điểm di động trên đoạn CD và N là điểm di động trên đoạn CB sao cho $MAN = 30^\circ$. Thể tích nhỏ nhất của khối chóp $S.AMN$ là?

A. $\frac{1}{9}$.

B. $\frac{1}{3}$.

C. $\frac{2}{27}$.

D. $\frac{4}{27}$.

Câu 40: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, $AB = 1$, cạnh bên $SA = 1$ và vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$. Ký hiệu M là điểm di động trên đoạn CD và N là điểm di động trên đoạn CB sao cho $MAN = 60^\circ$. Thể tích nhỏ nhất của khối chóp $S.AMN$ là?

A. $\frac{2-\sqrt{3}}{3}$.

B. $\frac{2+\sqrt{3}}{9}$.

C. $\frac{2\sqrt{3}-3}{3}$.

D. $\frac{2\sqrt{3}-3}{9}$.

Câu 41: Cho tam giác ABC vuông cân tại B , $AC = 2$. Trên đường thẳng đi qua A vuông góc với mặt phẳng (ABC) lấy các điểm M, N khác phía với mặt phẳng (ABC) sao cho $AM \cdot AN = 1$. Tìm thể tích nhỏ nhất của khối tứ diện $MNBC$.

A. $\frac{1}{3}$.

B. $\frac{1}{6}$.

C. $\frac{1}{12}$.

D. $\frac{2}{3}$.

Câu 42: Cho hình chóp $S.ABC$ có SA, SB, SC đôi một vuông góc, I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC . Mặt phẳng (P) thay đổi qua I cắt các tia SA, SB, SC lần lượt tại A', B', C' . Biết $SA = SB = \sqrt{2}, SC = \sqrt{7}$. Hỏi thể tích của khối chóp $S.A'B'C'$ có giá trị nhỏ nhất là?

A. $\frac{243\sqrt{7}}{256}$.

B. $\frac{\sqrt{7}}{3}$.

C. $\frac{81\sqrt{7}}{256}$.

D. $\frac{27\sqrt{7}}{256}$.

Câu 43: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại $C, SA = AB = 2a$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy (ABC) . Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SB và SC . Tìm thể tích lớn nhất $V_{\max}$ của khối chóp $S.AHK$.

A. $V_{\max} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$.

B. $V_{\max} = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

C. $V_{\max} = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

D. $V_{\max} = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

Câu 44: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại $B, AB = 2a, SA$ vuông góc với đáy. Gọi M là trung điểm cạnh AB , mặt phẳng (P) qua SM song song với BC cắt AC tại N . Tính thể tích V của khối chóp $S.BCMN$ biết góc giữa (SBC) và đáy bằng 60° .

A. $V = \frac{4\sqrt{3}a^3}{3}$.

B. $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{3}$.

C. $V = \sqrt{3}a^3$.

D. $V = \frac{2\sqrt{3}a^3}{3}$.

Câu 45: Trong mặt phẳng (P) cho nửa đường tròn đường kính $AB = 2R$ và điểm C thuộc nửa đường tròn sao cho $\angle ABC = 30^\circ$. Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (P) tại A lấy điểm S sao cho góc giữa hai mặt phẳng $(SAB), (SBC)$ bằng 60° . Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V = \frac{\sqrt{6}R^3}{12}$.

B. $V = \frac{\sqrt{2}R^3}{6}$.

C. $V = \frac{\sqrt{6}R^3}{4}$.

D. $V = \frac{\sqrt{2}R^3}{2}$.

Câu 46: Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác cân tại A, SA vuông góc với đáy, độ dài đường trung tuyến $AD = a$, cạnh bên SB tạo với đáy một góc α và tạo với mặt phẳng (SAD) góc (β) . Tính thể tích V của khối chóp đã cho.

A. $V = \frac{a^3 \sin \alpha \sin \beta}{3(\cos^2 \alpha - \sin^2 \beta)}$.

B. $V = \frac{a^3 \sin \alpha \sin \beta}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \beta}$.

C. $V = \frac{a^3 \sin \alpha \sin \beta}{3(\cos^2 \beta - \sin^2 \alpha)}$.

D. $V = \frac{a^3 \sin \alpha \sin \beta}{\cos^2 \beta - \sin^2 \alpha}$.

Câu 47: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng 2, $SA = 2$ vuông góc với đáy. Gọi M, N là hai điểm lần lượt trên AB, AD sao cho $(SMC), (SNC)$ vuông góc với nhau. Tính tổng $T = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AN^2}$ khi khối chóp $S.AMCN$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $\frac{5}{4}$.

B. 2.

C. $\frac{2+\sqrt{3}}{4}$.

D. $\frac{13}{9}$.

Câu 48: Trong mặt phẳng (P) cho $\triangle XYZ$ cố định; Trên đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (P) tại điểm X và về 2 phía của (P) ta lấy 2 điểm A, B thay đổi sao cho hai mặt phẳng (AYZ) và

(BYZ) luôn vuông góc với nhau. Hỏi vị trí của A, B thỏa mãn điều kiện nào sau đây thì thể tích $ABYZ$ là nhỏ nhất

- A. $XB = 2XA$. B. $XA = 2XB$. C. $XA \cdot XB = YZ^2$. D. $XA = XB$.

Câu 49: Cho khối tứ diện $ABCD$ có $AB = 2$, $AC = 3$, $AD = BC = 4$, $BD = 2\sqrt{5}$, $CD = 5$. Tính thể tích V của khối tứ diện $ABCD$.

- A. $V = \sqrt{15}$. B. $V = \frac{\sqrt{15}}{2}$. C. $V = \frac{3\sqrt{5}}{2}$. D. $V = \frac{9\sqrt{5}}{2}$.

Câu 50: Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a . Trên đường thẳng Δ qua A vuông góc với mặt phẳng (ABC) lấy hai điểm M, N nằm khác phía với mặt phẳng (ABC) sao cho hai mặt phẳng (MBC) và (NBC) vuông góc với nhau. Thể tích khối tứ diện $MNBC$ có giá trị nhỏ nhất bằng.

- A. $\frac{a^3}{4}$. B. $\frac{3a^3}{8}$. C. $\frac{3a^3}{4}$. D. $\frac{a^3}{8}$.

Câu 51: Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = a$, $AD = b$. Trên hai đường thẳng Ax, Cy cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ lần lượt lấy hai điểm M, N sao cho hai mặt phẳng (BDM) và (BDN) vuông góc với nhau. Thể tích khối tứ diện $BDMN$ có giá trị nhỏ nhất bằng

- A. $\frac{a^2b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$. B. $\frac{4a^2b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$. C. $\frac{4a^2b^2}{3\sqrt{a^2+b^2}}$. D. $\frac{a^2b^2}{3\sqrt{a^2+b^2}}$.

Câu 52: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành, $AB = 2a$, $BC = a$, $\angle ABC = 120^\circ$ và SD vuông góc với đáy. Sin góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAB) bằng $\frac{1}{4}$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng

- A. a^3 . B. $\frac{a^3}{2}$. C. $3a^3$. D. $\frac{3a^3}{2}$.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.B	2.A	3.B	4.A	5.A	6.D	7.A	8.B	9.A	10.C
11.A	12.A	13.B	14.D	15.B	16.A	17.B	18.A	19.C	20.C
21.A	22.A	23.B	24.A	25.D	26.A	27.B	28.B	29.D	30.A
31.C	32.A	33.A	34.C	35.A	36.D	37.D	38.B	39.A	40.C
41.D	42.C	43.A	44.C	45.A	46.A	47.A	48.D	49.A	50.A
51.D	52.A								

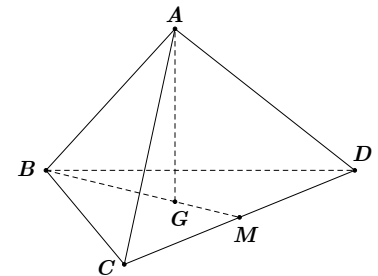
HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Chọn B

Cách tự luận. Gọi G là trọng tâm của $\triangle BCD$.

$$BG = \frac{2}{3}BM = \frac{a\sqrt{3}}{3}, \quad AG = \sqrt{AB^2 - BG^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3}S_{BCD} \cdot AG = \frac{1}{3} \left(\frac{a^2\sqrt{3}}{4} \right) \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}.$$



Cách trắc nghiệm. Ta nhớ trực tiếp kết quả “Tứ diện đều có $V = (\text{cạnh})^3 \frac{\sqrt{2}}{12}$ ”.

Câu 2: Chọn A

Gọi M là trung điểm của BC . Gọi O là trọng tâm của $\triangle ABC$

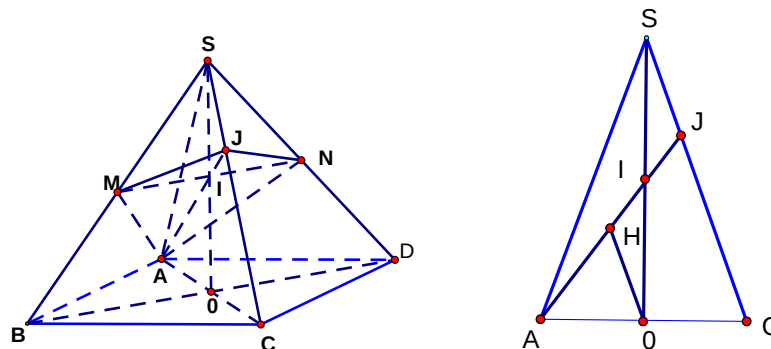
Gọi I là hình chiếu vuông góc của M lên SA . Ta có: $MI \perp SA$ và $BC \perp SA$

$$\text{Suy ra } SA \perp (IBC). \text{ Mặt khác } S_{IBC} = \frac{a^2}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{2}MI \cdot BC = \frac{a^2}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{2}MI \cdot a = \frac{a^2}{4} \Leftrightarrow MI = \frac{a}{2}$$

$$\text{Ta có } AI = \sqrt{AM^2 - MI^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}; \quad \tan MAI = \frac{MI}{AI} = \frac{SO}{AO} \Leftrightarrow SO = \frac{MI \cdot AO}{AI} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$$

$$\text{Vậy } V_{SABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{6} = \frac{a^3\sqrt{2}}{24}.$$

Câu 3:



Giả sử: độ dài cạnh bên là x

Ta có: I là trung điểm của S0 nên $\frac{JS}{JC} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{JS}{SC} = \frac{1}{3}$. Dựng OH // SC

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \frac{AO}{AC} = \frac{OH}{JC} \\ \frac{IS}{IO} = \frac{SJ}{OH} \end{cases} \Rightarrow \frac{AO}{AC} \cdot \frac{IS}{IO} = \frac{OH}{JC} \cdot \frac{SJ}{OH} = \frac{SJ}{JC} \Rightarrow \frac{SJ}{JC} = \frac{1}{2} \Rightarrow JC = \frac{2x}{3}$$

$$\text{Xét } \triangle AIC : AJ^2 = AC^2 + CJ^2 - 2AI \cdot JC \cdot \cos C = 2a^2 + \frac{4x^2}{9} - 2 \cdot a\sqrt{2} \cdot \frac{2x}{3} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{x} = \frac{2a^2}{3} + \frac{4x^2}{9} \quad (1)$$

$$S_{AMJN} = \frac{1}{2} AJ \cdot MN = \frac{\sqrt{5}a^2}{6} \Leftrightarrow \frac{1}{2} AJ \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{5}a^2}{6} \Leftrightarrow AJ = \frac{a\sqrt{10}}{3} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1), (2) suy ra: } x = a \cdot SO = \sqrt{x^2 - \frac{a^2}{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \text{ nên } V = \frac{1}{3} S_0 \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot a^2 = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}.$$

Câu 4: Chọn A

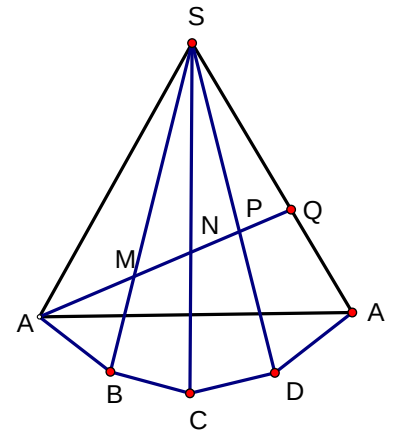
Cắt ngọn tháp và trải đều trên mặt phẳng như hình vẽ

Do $ASB = 15^\circ$ nên khi trải ra ta thu được tam giác đều SAA

Để $AM + MN + NP + PQ$ ngắn nhất thì A, M, N, P, Q thẳng hàng

Khi đó: $N = SC \cap AQ$ là giao 2 đường trung tuyến nên N là

trọng tâm tam giác SAA. Do đó: $k = \frac{AM + MN}{NP + PQ} = \frac{AN}{NQ} = 2$



Câu 5: Chọn A

Đường cao mặt bên: $h = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}$. Diện tích toàn phần:

$$S_{tp} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 3 \cdot \frac{1}{2} a \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a^2\sqrt{3} + 3a\sqrt{4b^2 - a^2}}{4} \Rightarrow b^2 = \frac{\left(\frac{4S - \sqrt{3}a^2}{3a}\right)^2 + a^2}{4}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}a^2}{4} \cdot \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a^2}{12} \sqrt{3 \cdot \frac{\left(\frac{4S - \sqrt{3}a^2}{3a}\right)^2 + a^2}{4} - a^2} = \frac{a\sqrt{S(2S - \sqrt{3}a^2)}}{6\sqrt{6}}$$

$$V^2 = \frac{a^2 S (2S - \sqrt{3}a^2)}{216} = \frac{\sqrt{3}a^2 (2S - \sqrt{3}a^2) S}{216\sqrt{3}} \leq \frac{S}{216\sqrt{3}} \left(\frac{\sqrt{3}a^2 + 2S - \sqrt{3}a^2}{2} \right)^2 = \frac{S^2}{216\sqrt{3}}$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra: } \sqrt{3}a^2 = 2S - \sqrt{3}a^2 \Leftrightarrow S = \sqrt{3}a \Rightarrow b = a \Rightarrow \frac{b}{a} = 1$$

Câu 6: Chọn D

Gọi O là giao của AC và BD .

Ta có $\triangle SBD = \triangle CBD$ nên $SO = CO$.

Trong tam giác $\triangle SAC$ có $SO = CO = \frac{1}{2}AC$ nên tam giác $\triangle SAC$ vuông tại A .

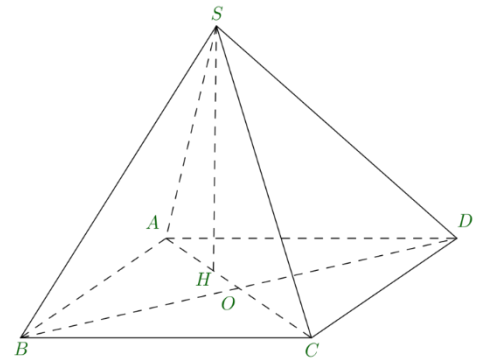
Suy ra $AC = \sqrt{SA^2 + SC^2} = 2$.

Diện tích đáy $S_{ABCD} = 2S_{\triangle ABC} = 2 \cdot \frac{1}{2}BO \cdot AC = 2\sqrt{2}$.

Do $SD = SB = SC = \sqrt{3}$ nên hình chiếu vuông góc H của S trên $(ABCD)$ thuộc cạnh AC .

Vì SH là đường cao của tam giác $\triangle SAC$ nên $SH = \frac{SA \cdot SC}{\sqrt{SA^2 + SC^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Vậy $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SH \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2\sqrt{2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.



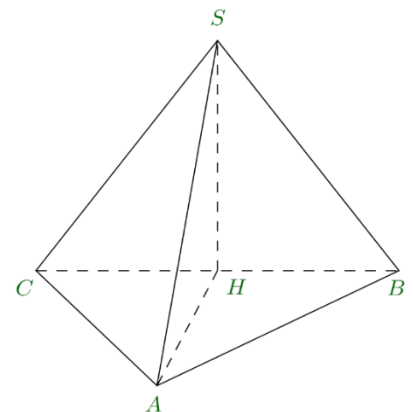
Câu 7: Chọn A

Trong tam giác $\triangle ABC$ có $BC = \sqrt{AC^2 + AB^2} = \sqrt{5}$.

Do $SA = SB = SC = \sqrt{3}$ nên hình chiếu vuông góc H của S trên (ABC) trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Khi đó H là trung điểm của BC .

Trong tam giác $\triangle SHB$ có $SH = \sqrt{SB^2 - HB^2} = \sqrt{3 - \frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{2}$.

Vậy $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SH \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{7}}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 = \frac{\sqrt{7}}{6}$.



Câu 8: Chọn B

Ta có diện tích đáy $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot AC \cdot \sin BAC = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

Trong tam giác $\triangle ABC$ có

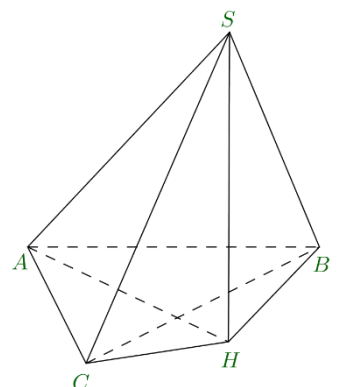
$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos BAC} = \sqrt{2 + \sqrt{2}}.$$

Gọi H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $\triangle ABC$ khi đó

$$R = \frac{BC}{2 \sin A} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\sqrt{2} + 1}.$$

Do $SA = SB = SC = \sqrt{3}$ nên hình chiếu vuông góc của S trên (ABC) trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp H của tam giác ABC .

Trong tam giác $\triangle SBH$ có $SH = \sqrt{SB^2 - HB^2} = \sqrt{4 - (\sqrt{2} + 1)} = \sqrt{3 - \sqrt{2}}$.

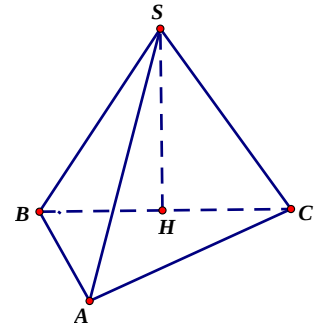


$$\text{Vậy } V_{S.ABC} = \frac{1}{3} SH \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3-\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6-2\sqrt{2}}}{6}.$$

Câu 9: Chọn A

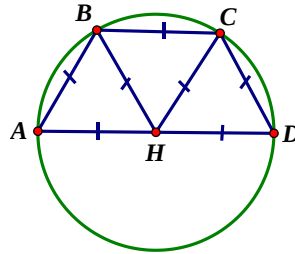
Gọi H là trung điểm của BC ta có: $AH \perp BC \Rightarrow AH \perp (ABC)$

Do $AS = AB = AC = a$ nên là H tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác SBC . Do đó $\triangle SBC$ vuông tại S và



$$BC = \sqrt{SB^2 + SC^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a\sqrt{6}}{3}\right)^2} = \frac{a\sqrt{15}}{3} \Rightarrow AH = \sqrt{a^2 - \frac{5a^2}{12}} = a\sqrt{\frac{7}{12}}$$

$$\text{Suy ra } V = \frac{1}{6} \cdot a \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} \cdot a\sqrt{\frac{7}{12}} = \frac{a^3\sqrt{14}}{36}.$$

Câu 10: Chọn C

Do $SA = SB = SC = 2a$ suy ra hình chiếu vuông góc H của S lên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng Với giả thiết $ABCD$ là hình thang và $AB = BC = CD = a, AD = 2a$ thì tứ giác $ABCD$ là hình thang cân và nội tiếp đường tròn tâm H có bán kính $R = a$.

$$\text{Do đó chiều cao của khối chóp } h = \sqrt{4a^2 - a^2} = a\sqrt{3}, S_d = \frac{3\sqrt{3}a^2}{4} \Rightarrow V = \frac{3a^2}{4}.$$

Câu 11: Chọn A

$$\text{Ta có: } S = a^2, h = b = 6\sqrt{2} - 4a \Rightarrow V = \frac{1}{3} S \cdot h = \frac{a^2(6\sqrt{2} - 4a)}{3}.$$

$$\text{Theo bất đẳng thức cô si ta có: } V = \frac{2}{3} \cdot a \cdot a \cdot (3\sqrt{2} - 2a) \leq \frac{2}{3} \left(\frac{a + a + 3\sqrt{2} - 2a}{3} \right)^3 = \frac{4\sqrt{2}}{3}.$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi: } a = 3\sqrt{2} - 2a \Leftrightarrow a = \sqrt{2} \Rightarrow b = 2\sqrt{2}.$$

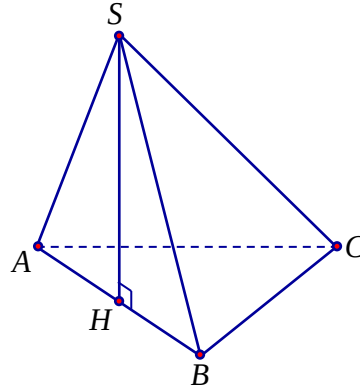
Câu 12: Chọn A

$SA = SB = SC = SD = \sqrt{3}a$ nên tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) bán kính R .

Do $AB = BC = CD = a, AD = 2a$ nên $ABCD$ là nửa lục giác đều. Suy ra $R = a$.

$$h^2 = SA^2 - R^2 = 2a^2 \Rightarrow h = a\sqrt{2}. S_{ABCD} = \frac{3\sqrt{3}a^2}{4} \text{ suy ra } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} h \cdot S_{ABCD} = \frac{a^3\sqrt{6}}{4}$$

Câu 13: Chọn B



Giả sử đáy là tam giác vuông tại C. $SA = SB = SC = 1$ nên hình chiếu vuông góc của S lên (ABC) là trung điểm của AB.

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SH.S_{ABC} \leq \frac{1}{3}SH.HA^2 = \frac{1}{3\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2SH^2.SA^2.SA^2}.$$

$$\text{Ta có: } 2SH^2 + AH^2 + AH^2 = 2SH^2 + 2HA^2 = 2SA^2 = 2$$

$$\text{Vậy } 2SH^2.SA^2.SA^2 \text{ đạt GTLN khi } 2SH^2 = HA^2 = HA^2 = \frac{2}{3}$$

Vậy $V_{S.ABC}$ đạt GTLN khi tam giác ABC vuông cân và

$$HA^2 = \frac{2}{3} \Rightarrow \cos \alpha = \cos SAH = \frac{AH}{SA} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

Câu 14: Chọn D

Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp mặt đáy (ABC) .

$SA = SB = SC$ nên $SO \perp (ABC)$.

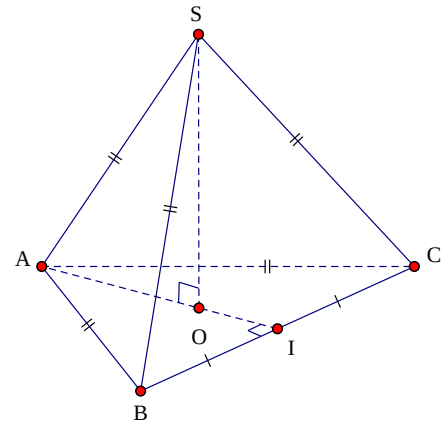
$$AI = \sqrt{(2a)^2 - \left(\frac{3a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{7}}{2}.$$

$$AO = R = \frac{AC^2}{2AI} = \frac{4a^2}{a\sqrt{7}} = \frac{4}{\sqrt{7}}a$$

$$\Rightarrow SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{3a^2 - \frac{16}{7}a^2} = \frac{\sqrt{35}}{7}a.$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AI.BC = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{\sqrt{7}} \cdot 3a^2 = \frac{6a^2}{\sqrt{7}}.$$

$$\text{Vậy thể tích khối chóp cần tìm là: } V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SO.S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{35}}{7} \cdot \frac{6a^2}{\sqrt{7}} = \frac{2a^3\sqrt{5}}{7}.$$

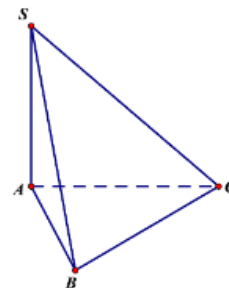


Câu 15: Chọn B

$$(SB, (ABC)) = (SB, AB) = SBA = 30^\circ.$$

$$\Rightarrow SA = AB \cdot \tan 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle ABC} \cdot SA = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{a^3}{12}$$

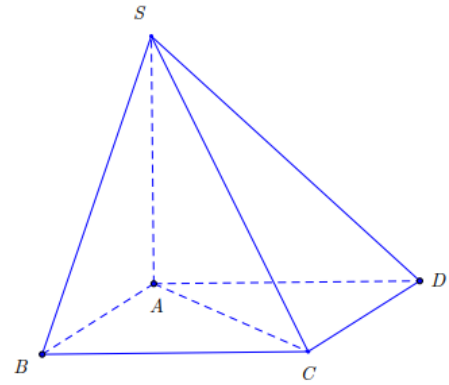
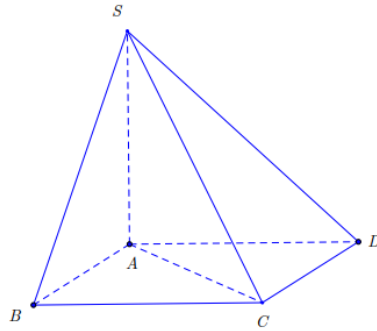


Câu 16: Chọn A

Vì đáy $ABCD$ là hình thoi có

$$\angle ABC = 60^\circ \Rightarrow S_{ABCD} = 2 \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2}.$$

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot SA = \frac{1}{3} \left(2 \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \right) \cdot a = \frac{a^3 \sqrt{3}}{6}.$$

**Câu 17: Chọn B**

Vì $ABCD$ là hình vuông với $AC = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow AB = \frac{a}{2} \Rightarrow S_{ABCD} = \frac{a^2}{4}.$

$$(\angle(SB, (ABCD))) = (\angle(SB, AB)) = \angle SBA = 60^\circ \Rightarrow SA = AB \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

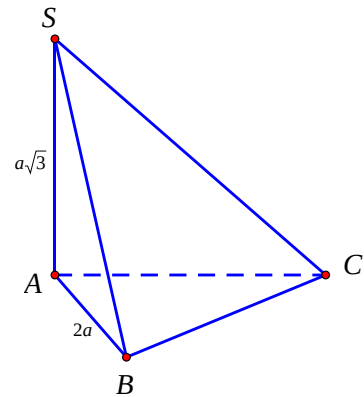
$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot SA = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{4} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3 \sqrt{3}}{24}.$$

Câu 18: Chọn A

$\triangle ABC$ vuông tại B : $BC = AB \cdot \tan 60^\circ = 2a\sqrt{3}$

$$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC = 2a^2 \sqrt{3}.$$

Vậy $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot a\sqrt{3} \cdot 2a^2 \sqrt{3} = 2a^3.$

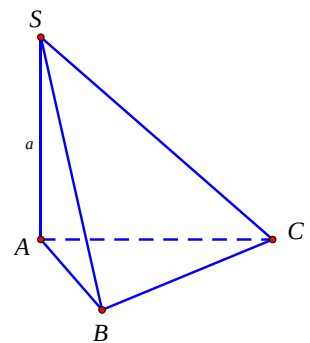
**Câu 19: Chọn C**

$\triangle SAC$ vuông cân tại A : $AC = SA = a$

$\triangle ABC$ vuông tại B và $\angle BAC = 30^\circ$

$$\begin{cases} BC = \frac{1}{2} AC = \frac{a}{2} \\ AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC = \frac{a^2 \sqrt{3}}{8}.$$

Suy ra $V = V_{S.ABC} = \frac{1}{3} SA \cdot S_{ABC} = \frac{a^3 \sqrt{3}}{24}.$ Vậy $\frac{V}{a^3} = \frac{\sqrt{3}}{24} \approx 0,072.$

**Câu 20: Chọn C**

Câu 23: Chọn B

$$\text{Ta có: } \triangle ABC \text{ vuông tại } B \Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC = 6a^2.$$

$$\Rightarrow V_{SABC} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot AD = \frac{1}{3} \cdot 6a^2 \cdot 6a = 12a^3.$$

Câu 24: Chọn A

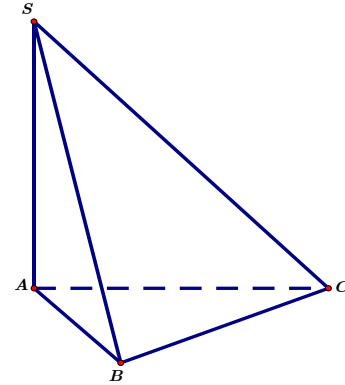
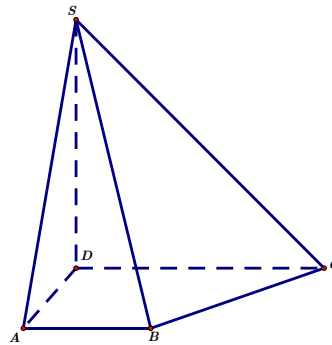
Ta có: $\triangle SBC$ vuông tại B ; $\triangle ABC$ vuông tại B .

$$SA = SB \cdot \cos ASB = \frac{3a}{2}$$

$$AB = SB \cdot \sin 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}; BC = SB = a\sqrt{3}.$$

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot SA = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot SA$$

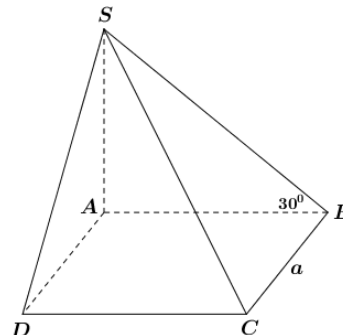
$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot a\sqrt{3} \cdot \frac{3a}{2} = \frac{3a^3}{8} \Rightarrow \frac{a^3}{V} = \frac{8}{3}.$$

**Câu 25: Chọn D**

$$\text{Ta có: } \Rightarrow V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SD = \frac{1}{3} \cdot \frac{(AB+CD) \cdot AD}{2} \cdot SD = \frac{1}{3} \cdot \frac{(a+3a) \cdot a}{2} \cdot a\sqrt{3} = \frac{2a^3\sqrt{3}}{3}.$$

Câu 26: Chọn A

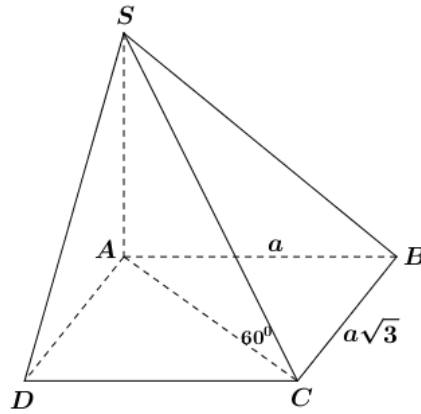
Ta có góc tạo bởi (SBC) và $(ABCD)$ là $SBA = 30^\circ$.



$$\text{Xét tam giác } SAB \text{ vuông tại } A \text{ ta có } SA = AB \tan SBA = a \tan 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SA = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{a^3\sqrt{3}}{9} = V \Rightarrow \frac{3V}{a^3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Câu 27: Chọn B



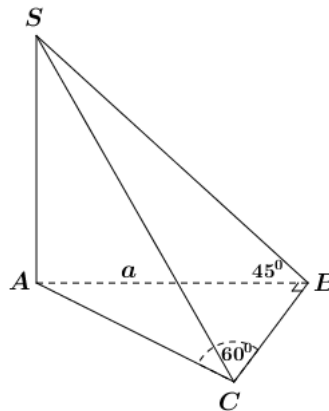
Xét tam giác ABC vuông tại B ta có $AC^2 = AB^2 + BC^2 = a^2 + 3a^2 = 4a^2 \Rightarrow AC = 2a$.

Góc tạo bởi SC và đáy là góc $SCA = 60^\circ$.

Xét tam giác SAC vuông tại A có $SA = AC \tan SCA = 2a \tan 60^\circ = 2a\sqrt{3}$

$$\Rightarrow V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SA = \frac{1}{3} a \cdot a\sqrt{3} \cdot 2a\sqrt{3} = 2a^3.$$

Câu 28: Chọn B



Xét tam giác ABC vuông tại B ta có $BC = AB \cot BCA = a \cot 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

$$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{a^2\sqrt{3}}{6}$$

Do tam giác SAB vuông cân tại A suy ra $SA = AB = a$

$$\Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot SA = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{6} \cdot a = \frac{a^3\sqrt{3}}{18}.$$

Câu 29: Chọn D

Gọi H là trung điểm của AC $BH \perp AC; BH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Mà: $\left. \begin{array}{l} BH \perp AC \\ BH \perp AD \end{array} \right\} \Rightarrow BH \perp (ACD) \Rightarrow$ Hình chiếu của B xuống (DAC) là H .

Ta có: $BD \cap (DAC) = D \Rightarrow (BD; (DAC)) = (BD; DH) = BDH = 30^\circ$.

Xét tam giác BHD có: $\tan 30^\circ = \frac{BH}{HD} \Rightarrow HD = \frac{BH}{\tan 30^\circ} = \frac{3a}{2}$.

Xét tam giác DAH có: $DA^2 = DH^2 - AH^2 = \frac{9a^2}{4} - \frac{a^2}{4} = 2a^2 \Rightarrow DA = a\sqrt{2}$.

Thể tích khối tứ diện V_{ABCD} là: $V_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot a\sqrt{2} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{6}}{12}$. Tỷ số $\frac{a^3\sqrt{6}}{V} = \frac{a^3\sqrt{6}}{\frac{a^3\sqrt{6}}{12}} = 12$.

Câu 30: Chọn A

Gọi O là giao điểm của AC và BD . Ta có: $SC \subset (SAC)$.

Xét hai mặt phẳng (SAC) và $(AB'D')$ có: A là điểm chung thứ nhất.

Trong (SBD) có: $SO \cap B'D' = I$. Vậy $(SAC) \cap (AB'D') = AI \Rightarrow SC \cap (AB'D') = AI \cap SC = C'$.

Thể tích khối chóp $SABCD$: $V_{SABCD} = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot 30 \cdot 20^3 = 4000 (\text{cm}^3)$.

Ta có: $\frac{SC'}{SC} = \frac{SA^2}{SC^2} = \frac{SA^2}{SA^2 + AC^2} = \frac{30^2}{30^2 + 20^2 + 20^2} = \frac{9}{17}$.

$\frac{SD'}{SD} = \frac{SA^2}{SD^2} = \frac{SA^2}{SA^2 + AD^2} = \frac{30^2}{30^2 + 20^2} = \frac{9}{13}$.

$\frac{V_{SAB'C'D'}}{V_{SABCD}} = \frac{2V_{SAC'D'}}{2V_{SACD}} = \frac{SA}{SA} \cdot \frac{SC'}{SC} \cdot \frac{SD'}{SD} \Rightarrow V_{SAB'C'D'} = \frac{9}{17} \cdot \frac{9}{13} \cdot V_{SABCD} = \frac{81}{221} \cdot 4000 \approx 1466 (\text{cm}^3)$.

Câu 31: Chọn C

Gọi M là trung điểm của $BC \Rightarrow AM = \frac{1}{2} BC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

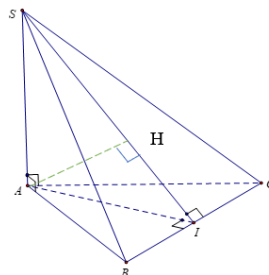
$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AM \cdot BC = \frac{1}{4} \cdot BC^2 = \frac{a^2}{2}$.

Ta có: $\left. \begin{array}{l} (SBC) \cap (ABCD) = BC \\ AM \perp BC \\ SA \perp (ABCD) \end{array} \right\} \Rightarrow (SBC; (ABCD)) = SMA = 45^\circ$.

Xét tam giác SAM có: $SA = AM \cdot \tan SMA = AM = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Thể tích của khối chóp là: $V_{SABC} = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$. Tỷ số: $\frac{6V}{a^3} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 32: Chọn A



Gọi I là trung điểm BC . Vì chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều và cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy nên $(SAI) \perp (SBC)$ theo giao tuyến SI . Kẻ $AH \perp SI \Rightarrow AH \perp (SBC)$.

$$\Rightarrow d(A, (SBC)) = AH = 3. \text{ Giả sử } AB = 2x \Rightarrow AI = x\sqrt{3}. \text{ Trong tam giác vuông } \triangle SAI \text{ có}$$

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AI^2} \Leftrightarrow \frac{1}{SA^2} = \frac{1}{9} - \frac{1}{3x^2} \Rightarrow SA = \frac{3x}{\sqrt{x^2 - 3}} \quad (\text{Điều kiện } x \in (\sqrt{3}; +\infty))$$

$$\Rightarrow V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SA \cdot S_{ABC} = \frac{x^3 \sqrt{3}}{\sqrt{x^2 - 3}}$$

$$\text{Xét hàm } f(x) = \frac{x^3}{\sqrt{x^2 - 3}} / (0; 3) \text{ có } f'(x) = \frac{3x^2 \sqrt{x^2 - 3} - \frac{x^4}{\sqrt{x^2 - 3}}}{x^2 - 3} = \frac{x^2(2x^2 - 9)}{(\sqrt{x^2 - 3})^3}$$

$$\Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{3}{\sqrt{2}} \\ x = -\frac{3}{\sqrt{2}} \end{cases}. \text{ Lập bảng biến thiên suy ra GTNN của hàm số đạt tại } x = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$\text{Khi đó ta có } \cos \alpha = \frac{IH}{AI} = \frac{\sqrt{AI^2 - AH^2}}{AI} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Câu 33: Chọn A

Vì M điểm trong của khối chóp cách đều tất cả các mặt của khối chóp một đoạn bằng h nên M là tâm mặt cầu nội tiếp hình chóp, bán kính mặt cầu là $r = h$.

Mặt khác mặt cầu bán kính r nội tiếp hình chóp thì thể tích khối chóp là:

$$V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot r \text{ trong đó } S \text{ là tổng diện tích tất cả các mặt của hình chóp.}$$

$$\text{Ta có } AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10;$$

$$SB = \sqrt{AB^2 + SB^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$$

$$\text{Vì } \begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB$$

$$S = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle SAB} + S_{\triangle SBC} + S_{\triangle SAC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC + \frac{1}{2} \cdot SA \cdot AB + \frac{1}{2} \cdot SB \cdot BC + \frac{1}{2} \cdot SA \cdot AC = 108$$

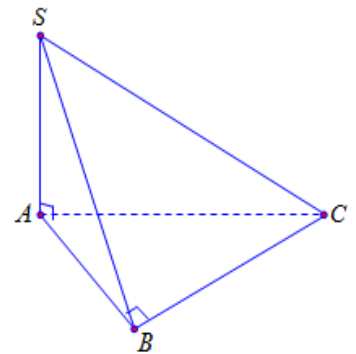
$$V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot r = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot 24 = 48 \Rightarrow r = h = \frac{3V}{S} = \frac{3 \cdot 48}{108} = \frac{4}{3}.$$

Câu 34: Chọn C

Vì điểm M thuộc phần không gian bên trong của hình chóp và cách đều tất cả các mặt của khối chóp nên M là tâm mặt cầu nội tiếp hình chóp, bán kính mặt cầu là r .

$$\text{Theo câu 31 ta có } r = h = \frac{4}{3}.$$

$$\Rightarrow V_{M.ABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle ABC} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6 \cdot \frac{4}{3} = \frac{32}{3}.$$



Câu 35: Chọn A

Vì $\triangle ABC$ là tam giác vuông cân tại $A, AB = 2a$, nên
 $BC = 2\sqrt{2}a$

Gọi I là trung điểm BC suy ra $AI = \frac{1}{2}BC = a\sqrt{2}$.

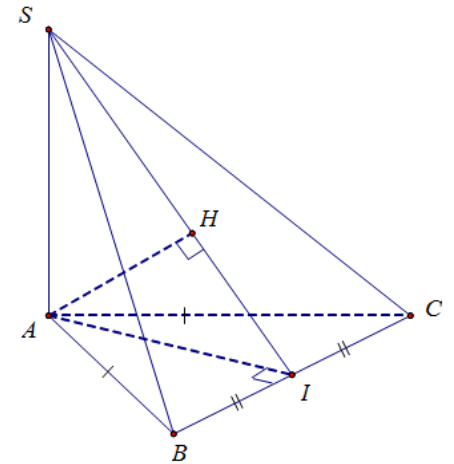
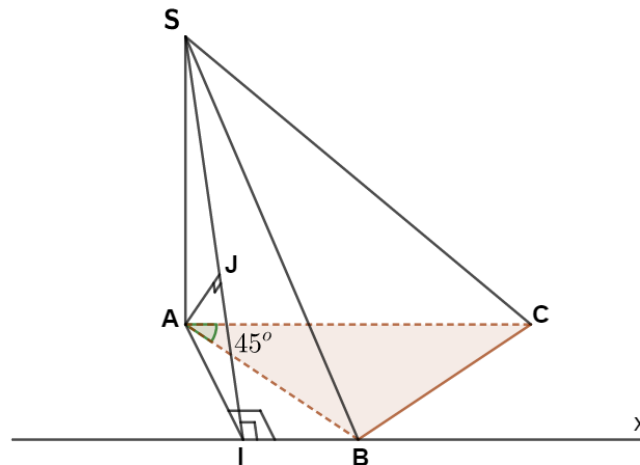
Khi đó $\begin{cases} BC \perp AI \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAI)$.

Gọi H là hình chiếu của A lên SI suy ra AH là khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) .

$\Rightarrow AH = \frac{4a}{3}$. Ta có

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AI^2} + \frac{1}{SA^2} \Rightarrow SA = \sqrt{\frac{AI^2 \cdot AH^2}{AI^2 - AH^2}} = 4a.$$

$$\text{Mặt khác } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot AC = \frac{1}{2}2a \cdot 2a = 2a^2. \Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle ABC} \cdot SA = \frac{1}{3} \cdot 2a^2 \cdot 4a = \frac{8a^3}{3}.$$

**Câu 36: Chọn D**

Kẻ $Bx \parallel AC \Rightarrow d(AC, SB) = d(AC, (SBx)) = d(A, (SBx))$.

Dựng $AI \perp Bx$ tại I , $AJ \perp SI$ tại $J \Rightarrow d(AC, SB) = d(A, (SBx)) = AJ = \frac{4a}{3}$.

Tam giác AIB vuông cân tại $I \Rightarrow AI = \frac{AB}{\sqrt{2}} = a\sqrt{2}$.

Tam giác SAI vuông tại $A \Rightarrow \frac{1}{AJ^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AI^2} \Rightarrow SA = \frac{AI \cdot AJ}{\sqrt{AI^2 - AJ^2}} = 4a$.

Diện tích tam giác ABC là $S = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot 2a \cdot \sin 45^\circ = a^2\sqrt{2}$.

$\Rightarrow$ Thể tích V của khối chóp $S.ABC$ là $V = \frac{1}{3} \cdot a^2\sqrt{2} \cdot 4a = \frac{4a^3\sqrt{2}}{3}$.

Câu 37: Chọn D

Kẻ $Bx \parallel AC \Rightarrow d(AC, SB) = d(AC, (SBx)) = d(A, (SBx))$.

Dựng $AH \perp Bx$ tại H , $AI \perp SH$ tại I

$$\Rightarrow d(AC, SB) = d(A, (SBx)) = AI = 3.$$

Tam giác AHB vuông tại H

$$\Rightarrow AH = AB \cdot \sin \alpha = 6 \cdot \sin \alpha.$$

Tam giác SAH vuông tại A

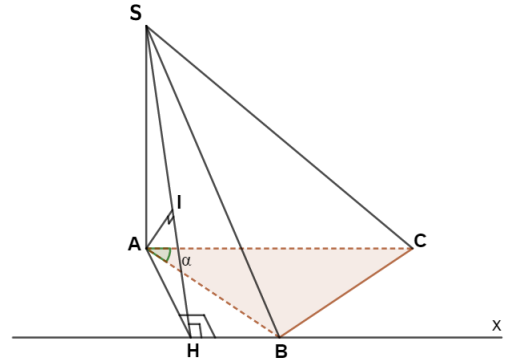
$$\Rightarrow \frac{1}{SA^2} = \frac{1}{AI^2} - \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{9} - \frac{1}{36 \sin^2 \alpha} = \frac{4 \sin^2 \alpha - 1}{36 \sin^2 \alpha}$$

$$\Rightarrow SA = \frac{6 \sin \alpha}{\sqrt{4 \sin^2 \alpha - 1}}.$$

$$\text{Thể tích khối chóp } V = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{6 \sin \alpha}{\sqrt{4 \sin^2 \alpha - 1}} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \sin \alpha = \frac{36 \sin^2 \alpha}{\sqrt{4 \sin^2 \alpha - 1}}.$$

$$\text{Ta có } V = \frac{36 \sin^2 \alpha}{\sqrt{4 \sin^2 \alpha - 1}} = \frac{9(4 \sin^2 \alpha - 1) + 9}{\sqrt{4 \sin^2 \alpha - 1}} = 9 \left[\sqrt{4 \sin^2 \alpha - 1} + \frac{1}{\sqrt{4 \sin^2 \alpha - 1}} \right] \geq 18.$$

$$\Rightarrow \min V = 18 \text{ xảy ra khi } 4 \sin^2 \alpha - 1 = 1 \Leftrightarrow \sin^2 \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$



Câu 38: Chọn B

Thể tích khối chóp $S.AMN$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ Diện tích tam giác AMN nhỏ nhất.

Gọi $DM = x$, $BN = y$ ($0 < x, y < 1$).

$$\text{Khi đó ta có } \begin{cases} \tan \alpha = \tan \angle DAM = x \\ \tan \beta = \tan \angle BAN = y \end{cases}$$

$$\Rightarrow \tan(\alpha + \beta) = \tan 45^\circ = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta} \Leftrightarrow 1 = \frac{x + y}{1 - xy}$$

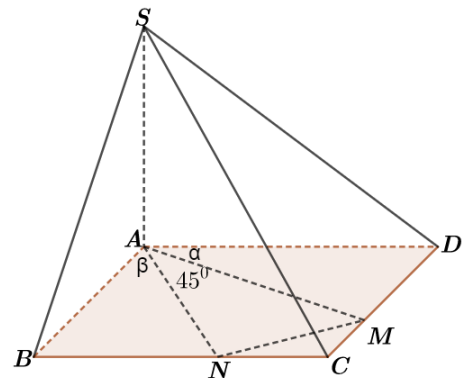
$$\Rightarrow x + y = 1 - xy \geq 2\sqrt{xy} \quad (1).$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{xy} \quad (0 < t < 1). \quad (1) \Rightarrow t^2 + 2t - 1 \leq 0 \Leftrightarrow -\sqrt{2} - 1 \leq t \leq \sqrt{2} - 1.$$

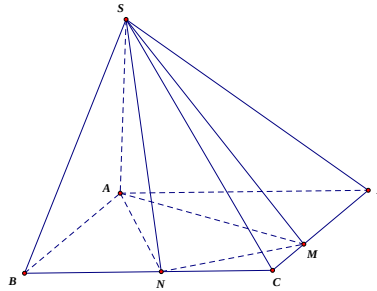
$$\text{Kết hợp điều kiện } \Rightarrow 0 \leq t \leq \sqrt{2} - 1 \Rightarrow 0 \leq xy \leq 3 - 2\sqrt{2}.$$

$$S_{AMN} = S_{ABCD} - (S_{ADM} + S_{ABN} + S_{CMN}) = 1 - \left[\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}(1-x)(1-y) \right] = \frac{1}{2}(1-xy) \geq \sqrt{2} - 1.$$

$$\text{Vậy } V_{S.AMN} = \frac{1}{3} S_{AMN} \cdot SA = \frac{1}{3} \cdot S_{AMN} \geq \frac{\sqrt{2} - 1}{3} \Rightarrow \min V = \frac{\sqrt{2} - 1}{3}.$$



Câu 39: Chọn A



Đặt $DM = x, BN = y$ với $0 < x, y < 1$. Khi đó $AM = \sqrt{x^2 + 1}, AN = \sqrt{y^2 + 1}$.

$$\text{Ta có } V_{S.AMN} = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{\Delta AMN} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot AM \cdot AN \cdot \sin 30^\circ = \frac{1}{12} \cdot AM \cdot AN.$$

$$\text{Ta có } \tan 60^\circ = \tan(DAM + BAN) = \frac{\tan DAM + \tan BAN}{1 - \tan DAM \cdot \tan BAN} = \frac{x + y}{1 - xy}$$

$$\text{Suy ra } \sqrt{3}(1-xy) = x+y \Leftrightarrow y(1+\sqrt{3}x) = \sqrt{3}-x \Leftrightarrow y = \frac{\sqrt{3}-x}{1+\sqrt{3}x}.$$

$$\text{Do đó } AN = \sqrt{y^2 + 1} = \sqrt{\frac{3 - 2\sqrt{3}x + x^2 + 1 + 2\sqrt{3}x + 3x^2}{(1 + \sqrt{3}x)^2}} = \frac{2\sqrt{x^2 + 1}}{1 + \sqrt{3}x}.$$

$$\text{Suy ra } V_{S.AMN} = \frac{1}{12}.AM.AN = \frac{x^2+1}{6(1+\sqrt{3}x)} = f(x).$$

$$f'(x) = \frac{1}{6} \cdot \frac{2x \cdot (1 + \sqrt{3}x) - \sqrt{3}(x^2 + 1)}{(1 + \sqrt{3}x)^2} = \frac{\sqrt{3}x^2 + 2x - \sqrt{3}}{6(1 + \sqrt{3}x)^2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ (TM)} \\ x = -\sqrt{3} \text{ (L)} \end{cases}$$

Suy ra $\min_{(0;1)} f(x) = f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{9}$.

Câu 40: Chọn C

Đặt $DM = x, BN = y$ với $0 < x, y < 1$.

Khi đó $AM = \sqrt{x^2 + 1}$, $AN = \sqrt{y^2 + 1}$.

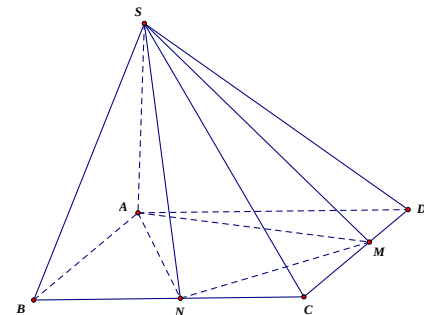
Ta có

$$V_{S,AMN} = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{\Delta AMN} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot AM \cdot AN \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{12} \cdot AM \cdot AN.$$

$$\text{Ta có } \tan 30^\circ = \tan(DAM + BAN) = \frac{\tan DAM + \tan BAN}{1 - \tan DAM \cdot \tan BAN} = \frac{x + y}{1 - xy}$$

Suy ra $1 - xy = \sqrt{3}(x + y) \Leftrightarrow y = \frac{1 - \sqrt{3}x}{x + \sqrt{3}}$. Do đó $AN = \sqrt{y^2 + 1} = \frac{2\sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{3} + x}$.

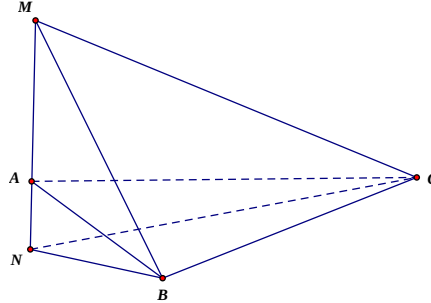
$$\text{Suy ra } V_{S,AMN} = \frac{\sqrt{3}}{12}.AM.AN = \frac{\sqrt{3}(x^2+1)}{6(\sqrt{3}+x)} = f(x).$$



$$f'(x) = \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot \frac{2x(\sqrt{3}+x) - (x^2+1)}{(\sqrt{3}+x)^2} = \frac{x^2+2\sqrt{3}x-1}{6(1+\sqrt{3}x)^2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -\sqrt{3}+2(TM) \\ x = -\sqrt{3}-2(L) \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } \min_{(0;1)} f(x) = f(-\sqrt{3}+2) = \frac{2\sqrt{3}-3}{3}.$$

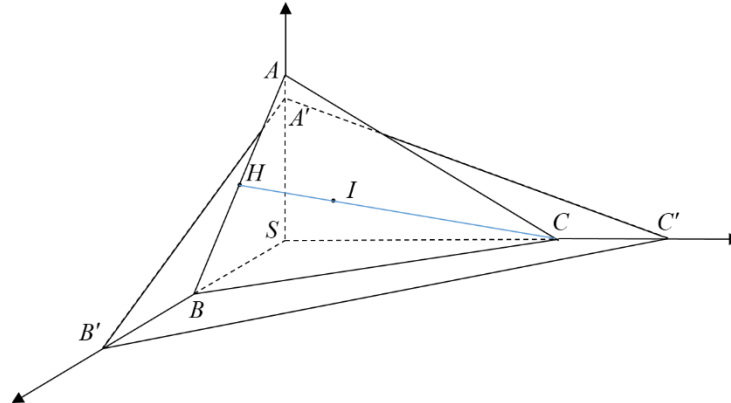
Câu 41: Chọn D



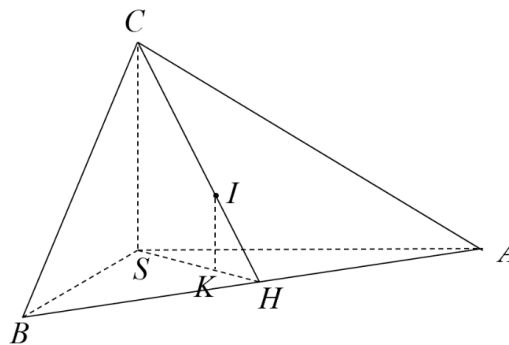
Ta có tam giác ABC vuông cân tại B , $AC = 2$ nên $AB = BC = \sqrt{2}$.

$$\begin{aligned} V_{MNBC} &= V_{M.ABC} + V_{N.ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot (AM \cdot AB \cdot BC + AN \cdot AB \cdot BC) = \frac{1}{3} (AM + AN) \\ &\geq \frac{2}{3} \sqrt{AM \cdot AN} = \frac{2}{3}, \text{ dấu bằng khi } AM = AN = 1. \end{aligned}$$

Câu 42: Chọn C



Gọi $SA' = a$, $SB' = b$, $SC' = c$. Ta thấy $V_{S.A'B'C'} = \frac{1}{6} abc$.



Xét tứ diện $SABC$ như hình vẽ. Gọi H là trung điểm của AB . Ta thấy $CA = CB = 3$, $AB = 2$ và $CH = \sqrt{CB^2 - BH^2} = \sqrt{3^2 - 1} = 2\sqrt{2}$. Vậy tam giác ABC là tam giác cân tại C , suy ra điểm I thuộc vào đường cao CH của tam giác CAB , đồng thời $S_{ABC} = \frac{1}{2} CH \cdot AB = 2\sqrt{2}$.

Gọi r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC ($r = IH$). Ta có

$$IH = r = \frac{S_{ABC}}{p_{ABC}} = \frac{2\sqrt{2}}{(3+3+2)/2} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \text{ Từ đây } \frac{IK}{SC} = \frac{IH}{CH} \Rightarrow IK = \frac{SC \cdot IH}{CH} = \frac{\sqrt{7} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

Gọi x, y, z lần lượt là khoảng cách từ I đến các mặt phẳng $(SAB), (SBC), (SAC)$. Dễ thấy

$$y = z, x = IK = \frac{\sqrt{7}}{4}. \text{ Đồng thời}$$

$$V_{S.ABC} = V_{I.SAB} + V_{I.SAC} + V_{I.SBC} \Leftrightarrow \frac{1}{6} \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{7} = \frac{1}{3} x \cdot S_{SAB} + \frac{1}{3} y \cdot S_{SBC} + \frac{1}{3} z \cdot S_{SCA}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{7}}{3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{7}}{4} \cdot 1 + \frac{1}{3} y \cdot \frac{\sqrt{14}}{2} + \frac{1}{3} z \cdot \frac{\sqrt{14}}{2} \Leftrightarrow y = z = \frac{3\sqrt{2}}{8}$$

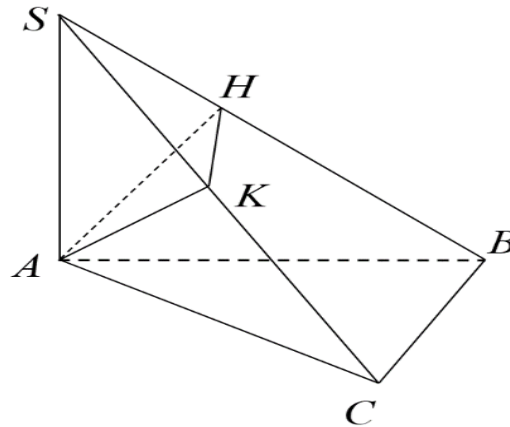
Xét tứ diện $S.A'B'C'$, ta thấy $V_{S.A'B'C'} = V_{I.SA'B'} + V_{I.SA'C'} + V_{I.SB'C'}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{6} abc = \frac{1}{3} x \cdot \frac{1}{2} ab + \frac{1}{3} y \cdot \frac{1}{2} bc + \frac{1}{3} z \cdot \frac{1}{2} ca \Leftrightarrow \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

Theo bất đẳng thức Cauchy cho 3 số, ta có

$$1 = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \geq 3\sqrt[3]{\frac{xyz}{abc}} \Rightarrow abc \geq 27xyz = \frac{243\sqrt{7}}{128}. \text{ Từ đó } V_{S.A'B'C'} = \frac{1}{6} abc \geq \frac{81\sqrt{7}}{256}$$

Câu 43: Chọn A



Ta chứng minh được $BC \perp (SAC)$, từ đó $\begin{cases} AK \perp SC \\ AK \perp BC \end{cases} \Rightarrow AK \perp (SBC) \Rightarrow AK \perp KH$.

$$\text{Đồng thời } \begin{cases} AH \perp SB \\ AK \perp SB \end{cases} \text{ (do } AK \perp (SBC)) \Rightarrow SB \perp (AHK)$$

Vậy ta nhận thấy hình chóp $S.AHK$ có $SH \perp (AHK)$ và tam giác AHK vuông tại K .

Gọi độ dài đoạn $AC = x$ (với $0 < x < 2a$ vì tam giác ABC vuông tại C với $AB = 2a$). Xét tam giác vuông cân SAB ta có đường cao $AH = SH = a\sqrt{2}$.

Trong tam giác vuông SAC ta có $\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 + 4a^2}{4a^2x^2}$. Khi đó

$$AK = \frac{2ax}{\sqrt{4a^2 + x^2}}. \text{ Suy ra } HK = \sqrt{AH^2 - AK^2} = \sqrt{2a^2 - \frac{4a^2x^2}{4a^2 + x^2}} = a\sqrt{\frac{2(4a^2 - x^2)}{4a^2 + x^2}}$$

Vậy thể tích

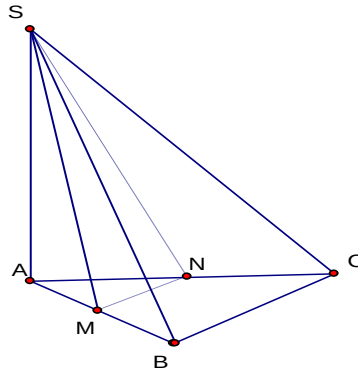
$$V_{S.AHK} = \frac{1}{3}SH.S_{AHK} = \frac{1}{3}SH.\frac{1}{2}AK.KH = \frac{1}{6}a\sqrt{2}.\frac{2ax}{\sqrt{4a^2+x^2}}.a\sqrt{\frac{2(4a^2-x^2)}{4a^2+x^2}} = \frac{\sqrt{2}}{3}a^3\frac{(\sqrt{2}x)\sqrt{4a^2-x^2}}{4a^2+x^2}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho $\sqrt{2}x$ và $\sqrt{4a^2-x^2}$ ta có

$$(\sqrt{2}x)\sqrt{4a^2-x^2} \leq \frac{(\sqrt{2}x)^2 + \sqrt{4a^2-x^2}^2}{2} = \frac{4a^2+x^2}{2}$$

$$\text{Từ đó suy ra } V_{S.AHK} = \frac{\sqrt{2}}{3}a^3\frac{(\sqrt{2}x)\sqrt{4a^2-x^2}}{4a^2+x^2} \leq \frac{\sqrt{2}}{3}a^3\frac{4a^2+x^2}{2(4a^2+x^2)} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}.$$

Câu 44: Chọn C



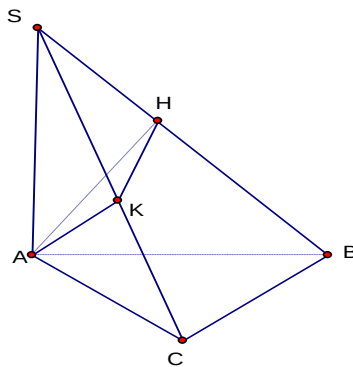
Ta có tam giác ABC vuông tại B nên $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.BC = \frac{1}{2}.2a.2a = 2a^2$.

Mặt khác theo giả thiết ta có $((SBC), (ABC)) = (SB, AB) = SBA = 60^\circ$. Do đó

$$SA = AB.\tan 60^\circ = 2a\sqrt{3}. \text{ Nên } V_{S.ABC} = \frac{1}{3}.SA.S_{ABC} = \frac{4\sqrt{3}a^3}{3}.$$

$$\text{Ta có } V_{S.BCMN} = \frac{3}{4}V_{S.ABC} = \sqrt{3}a^3.$$

Câu 45: Chọn A



Kẻ $AH \perp SB, (H \in SB), AK \perp SC (K \in SC) \Rightarrow SB \perp (AHK) \Rightarrow AHK = 60^\circ$.

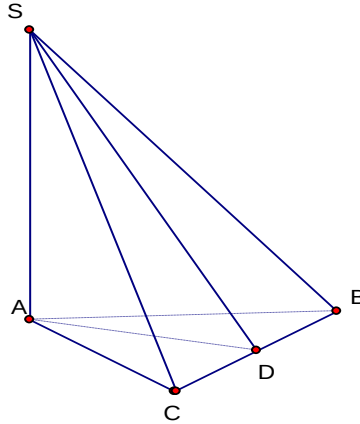
Ta có $AC = AB\sin \alpha = 2R\sin \alpha, BC = AB\cos \alpha = 2R\cos \alpha \Rightarrow S_{ABC} = 2R^2\sin \alpha \cos \alpha$.

$$\text{Ta lại có } \frac{AK}{AH} = \sin AHK = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 2AK = \sqrt{3}AH \Rightarrow \frac{3}{AK^2} = \frac{4}{AH^2}$$

$$\Rightarrow 3\left(\frac{1}{SA^2} + \frac{1}{4R^2\sin^2 \alpha}\right) = 4\left(\frac{1}{SA^2} + \frac{1}{4R^2}\right) \Rightarrow SA = \frac{2R\sin \alpha}{\sqrt{3-4\sin^2 \alpha}}.$$

$$\text{Do đó } V_{S.ABC} = \frac{1}{3} SA \cdot S_{ABC} = \frac{4R^3 \sin^2 \alpha \cos \alpha}{3\sqrt{3-4\sin^2 \alpha}} = \frac{R^3 \sqrt{6}}{12}.$$

Câu 46: Chọn A



Ta có $(SB, (ABC)) = SBA = \alpha$.

Mặt khác ta có $\begin{cases} BD \perp AD \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAD) \Rightarrow (SB, (SAD)) = BSD = \beta$.

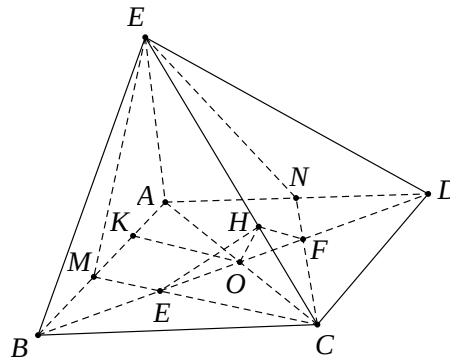
Giả sử $BD = x (x > 0)$. Khi đó ta có $\sin \beta = \frac{x}{SB} \Rightarrow SB = \frac{x}{\sin \beta}$.

Mặt khác ta có $\cos \alpha = \frac{AB}{SB} \Rightarrow AB = \frac{x \cos \alpha}{\sin \beta}, SA = \frac{x \sin \alpha}{\sin \beta}$.

Ta lại có $AB = \sqrt{x^2 + a^2} \Leftrightarrow x^2 \left(\frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \beta} - 1 \right) = a^2 \Leftrightarrow x = \frac{a \sin \beta}{\sqrt{\cos^2 \alpha - \sin^2 \beta}}$.

Do đó $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} SA \cdot AD \cdot BD = \frac{1}{3} \frac{x \sin \alpha}{\sin \beta} \cdot a \cdot \frac{a \sin \beta}{\sqrt{\cos^2 \alpha - \sin^2 \beta}} = \frac{a^3 \sin \alpha \sin \beta}{3(\cos^2 \alpha - \sin^2 \beta)}$.

Câu 47: Chọn A



Đặt $AM = x$, $AN = y$. Gọi $O = AC \cap DB$; $E = BD \cap CM$; $F = BD \cap CN$.

H là hình chiếu vuông góc của O trên SC , khi đó: $\triangle CHO$ đồng dạng $\triangle CAS$

$$\Rightarrow \frac{HO}{SA} = \frac{CO}{SC} \Rightarrow HO = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Ta có: $\begin{cases} BD \perp SA \\ BD \perp AC \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC)$

$$\text{Lại có: } \begin{cases} SC \perp OH \\ SC \perp BD \end{cases} \Rightarrow SC \perp (HBD) \Rightarrow \begin{cases} SC \perp HE \\ SC \perp HF \end{cases}.$$

Do đó góc giữa (SCM) và (SCN) bằng góc giữa HE và HF . Suy ra $HE \perp HF$.

$$\text{Mặt khác } S_{AMCN} = S_{\triangle ACN} + S_{\triangle ACM} = \frac{1}{2}CB.AM + \frac{1}{2}CD.AN = x + y$$

$$\Rightarrow V_{S.AMCN} = \frac{1}{3}SA.S_{AMCN} = \frac{2}{3}(x + y).$$

Ta có: $x > 0$, $y > 0$ và nếu $x \neq 2$, $y \neq 2$ thì gọi K là trung điểm của AM , khi

$$\text{đó } KO // MC \text{ nên } \frac{OE}{EB} = \frac{KM}{MB} = \frac{x}{4-2x} \Rightarrow \frac{OE}{x} = \frac{EB}{4-2x} = \frac{OB}{4-x} \Rightarrow OE = \frac{x\sqrt{2}}{4-x}.$$

$$\text{Tương tự: } OF = \frac{y\sqrt{2}}{4-y}. \text{ Mà } OE.OF = OH^2 \Rightarrow \frac{2xy}{(4-x)(4-y)} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow (x+2)(y+2) = 12$$

Nếu $x = 2$ hoặc $y = 2$ thì ta cũng có $OE.OF = OH^2 \Leftrightarrow (x+2)(y+2) = 12$.

$$\text{Tóm lại: } (x+2)(y+2) = 12 \Leftrightarrow y = \frac{8-2x}{x+2}, \text{ do } y \leq 2 \text{ nên } \frac{8-2x}{x+2} \leq 2 \Leftrightarrow x \geq 1.$$

$$\text{Do đó } V_{S.AMCD} = \frac{1}{3}SA.S_{AMCN} = \frac{2}{3}(x+y) = \frac{2}{3}\left(x + \frac{8-2x}{x+2}\right) = \frac{2}{3} \frac{x^2+8}{x+2}.$$

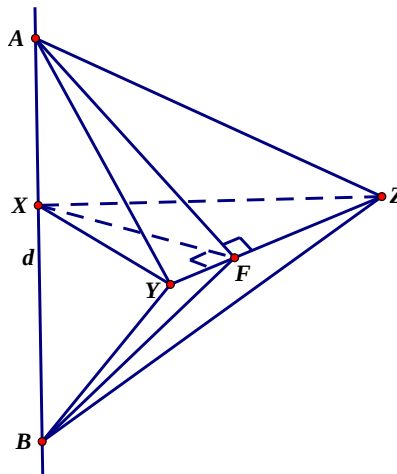
$$\text{Xét } f(x) = \frac{2}{3} \frac{x^2+8}{x+2} \text{ với } x \in [1;2], f'(x) = \frac{2}{3} \left(\frac{x^2+4x-8}{(x+2)^2} \right).$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = -2 + 2\sqrt{3}; x = -2 - 2\sqrt{3} \text{ (loại)}.$$

$$\text{Lập BBT ta suy ra } \max_{[0;2]} f(x) = f(1) = f(2) = 2.$$

$$\text{Vậy } \max V_{S.AMCN} = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ x=2 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow T = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AN^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{5}{4}.$$

Câu 48: Chọn D



$$\text{Thể tích khối tứ diện } ABYZ \text{ là } V = \frac{1}{3}AB.S_{\triangle XYZ}.$$

Do diện tích tam giác XYZ không đổi nên thể tích tứ diện $ABYZ$ là nhỏ nhất khi AB ngắn nhất.

Dựng $XF \perp YZ$, do $YZ \perp AB$ nên $YZ \perp (ABF)$, suy ra

$$\left((AYZ), (BYZ) \right) = (FA, FB) = AFB = 90^\circ.$$

Xét tam giác vuông ABF có FX là đường cao không đổi (Do XF là đường cao của $\triangle XYZ$ cố định) nên $XF^2 = XA.XB$ không đổi.

Có $AB = XA + XB \geq 2\sqrt{XA.XB} = 2XF$ không đổi. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $XA = XB$.

Vậy thể tích khối tứ diện $ABYZ$ nhỏ nhất khi X là trung điểm AB hay $XA = XB$

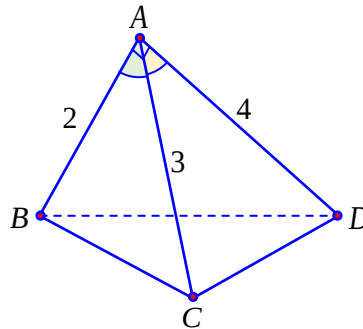
Câu 49: Chọn A

Do $AB^2 + AD^2 = BD^2 \Rightarrow \triangle ABD$ vuông tại A ; $AC^2 + AD^2 = CD^2 \Rightarrow \triangle ACD$ vuông tại A .

$$\text{Lại có } \cos BAC = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2.AB.AC} = \frac{2^2 + 3^2 - 4^2}{2.2.3} = -\frac{1}{4}$$

Sử dụng công thức giải nhanh: Cho chóp $S.ABC$ có $SA = a$, $SB = b$, $SC = c$ và $ASB = \alpha$, $BSC = \beta$, $ASC = \gamma$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ là:

$$V_{S.ABC} = \frac{abc}{6} \sqrt{1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma + 2\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma}.$$



Áp dụng: Thể tích khối tứ diện $ABCD$ là

$$V_{ABCD} = \frac{2.3.4}{6} \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^2 - \cos^2 90^\circ - \cos^2 90^\circ + 2 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot \cos 90^\circ \cdot \cos 90^\circ} = \sqrt{15}.$$

Câu 50: Chọn A

$$\text{Ta có: } V_{MNBC} = \frac{1}{3} \cdot MN \cdot S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}a^2}{12} \cdot MN$$

$$\text{Gọi } D \text{ là trung điểm cạnh } BC \text{ ta có } \begin{cases} BC \perp AD \\ BC \perp MN \end{cases} \Rightarrow BC \perp (MDN) \Rightarrow \begin{cases} BC \perp DM \\ BC \perp DN \end{cases}$$

$$\text{Do đó } \left((MBC), (NBC) \right) = (DM, DN) = 90^\circ \Leftrightarrow DM \perp DN \Leftrightarrow AM \cdot AN = AD^2 = \frac{3a^2}{4}$$

Khi đó theo bất đẳng thức AM – GM ta có:

$$MN = AM + AN \geq 2\sqrt{AM \cdot AN} = \sqrt{3}a$$

$$\text{Vì vậy } V_{MNBC} \geq \frac{\sqrt{3}a^2}{12} \cdot MN = \frac{\sqrt{3}a^2}{12} \cdot \sqrt{3}a = \frac{a^3}{4}$$

Câu 51: Chọn D

Ta có :

$$V_{BDMN} = \frac{2S_{MBD} \times S_{NBD} \times \sin((MBD), (NBD))}{3BD} = \frac{2S_{MBD} \times S_{NBD}}{3\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Trong đó $BD = \sqrt{a^2 + b^2}$

Và $\sin((MBD), (NBD)) = \sin 90^\circ = 1$

Đặt $AM = x, CN = y$

Ta có $((MBD), (ABCD)) + ((NBD), (ABCD)) + ((MBD), (NBD)) = 180^\circ$

Do đó $((MBD), (ABCD)) + ((NBD), (ABCD)) = 90^\circ$

$\Leftrightarrow \sin((MBD), (ABCD)) = \cos((NBD), (ABCD))$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a - \left(\frac{S_{ABD}}{S_{MBD}}\right)^2} = \frac{S_{ABD}}{S_{NBD}} \Leftrightarrow \frac{1}{S_{MBD}^2} + \frac{1}{S_{NBD}^2} = \frac{1}{S_{ABD}^2} = \frac{4}{a^2 b^2}$$

Theo định lý diện tích hình chiếu ta có $\cos((MBD), (ABCD)) = \frac{S_{ABD}}{S_{MBD}}$ và

$\cos((NBD), (ABCD)) = \frac{S_{ABD}}{S_{NBD}}$. Theo BĐT AM- GM ta có:

$$\frac{4}{a^2 b^2} = \frac{1}{S_{MBD}^2} + \frac{1}{S_{NBD}^2} \geq 2\sqrt{\frac{1}{S_{MBD}^2} \cdot \frac{1}{S_{NBD}^2}} = \frac{2}{S_{MBD} \cdot S_{NBD}} \Rightarrow S_{MBD} \cdot S_{NBD} \geq \frac{1}{2} a^2 b^2 \quad . \quad \text{Vậy}$$

$$V_{BDMN} \geq \frac{a^2 b^2}{3\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Câu 52: Chọn A

Đặt $SD = h$, ta có

$$BD = \sqrt{AD^2 + AB^2 - 2AB \cdot AD \cdot \cos 60^\circ} = \sqrt{3}a$$

$$\text{Suy ra } SB = \sqrt{SD^2 + BD^2} = \sqrt{h^2 + 3a^2}$$

Ta có $d(B; (SAC)) = d(D; (SAC))$

và

$$\frac{1}{d^2(D; (SAC))} = \frac{1}{SD^2} + \frac{1}{d^2(D; AC)} = \frac{1}{h^2} + \frac{AC^2}{4S_{DAC}^2} = \frac{1}{h^2} + \frac{7}{3a^2}$$

$$\Rightarrow d(D; (SAC)) = \frac{\sqrt{3}ah}{\sqrt{3a^2 + 7h^2}} \quad (\text{Do } AC^2 = 7a^2; S_{DAC} = \frac{1}{2}a \cdot 2a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2})$$

$$\text{Do đó } \sin(SB; (SAC)) = \frac{d(B; (SAC))}{SB} = \frac{\sqrt{3}ah}{\sqrt{h^2 + 3a^2}} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow h = a\sqrt{3}$$

$$\text{Vậy } V_{S.ABCD} = a^3$$

