

1. MỞ ĐẦU

1.1 Lí do chọn đề tài

Khái niệm về hàm số đã xuất hiện từ rất sớm và ngày càng đóng vai trò quan trọng không chỉ ở môn Toán, học sinh được tiếp cận với khái niệm này trong chương trình phổ thông một cách bài bản thông qua SGK, các tài liệu liên quan. Liên hệ với khái niệm hàm là tư duy hàm, một loại hình tư duy được hàng loạt các công trình nghiên cứu đánh giá cao và kiến nghị phải được phát triển mạnh mẽ trong hoạt động giảng dạy các bộ môn trong nhà trường đặc biệt là môn toán. Ngày nay trong chương trình môn toán ở trường phổ thông khái niệm hàm đã, đang được thể hiện rõ vai trò chủ đạo của mình trong việc ứng dụng và xây dựng các khái niệm khác. Trong các kì thi học sinh giỏi các cấp của THPT, ngoài các câu hỏi liên quan trực tiếp đến hàm số ta thường thấy có những câu hỏi mà học sinh thường phải vận dụng tư duy hàm số như là một công cụ đắc lực để giải toán như: Giải phương trình, bất phương trình, tìm cực trị,..... Các câu hỏi này cũng thường gây khó khăn cho cả thầy và trò trong các giờ lên lớp. Trong các giờ giảng các em thường bị động trong nghe giảng và rất lúng túng vận dụng vào việc giải toán. Nguyên nhân là do các em chưa hiểu được bản chất của vấn đề, chưa có kỹ năng và kinh nghiệm trong việc vận dụng hàm số vào giải toán, các em luôn đặt ra câu hỏi “ Tại sao nghĩ và làm được như vậy?”. Để trả lời được câu hỏi đó trong các giờ dạy, việc bồi dưỡng năng lực tư duy hàm cho học sinh thông qua các bài toán là một điều rất cần thiết. Muốn làm tốt được điều đó người thầy không chỉ có phương pháp truyền thụ tốt mà còn phải có kiến thức vừa chuyên, vừa sâu, dẫn dắt học sinh tìm hiểu một cách logic bản chất của toán học. Từ đó giúp các em có sự say mê trong việc học môn Toán- môn học được coi là ông vua của các môn tự nhiên.

Mặc dù đã tham khảo một số lượng không ít các tài liệu hiện nay để vừa viết, vừa đi dạy trên lớp để kiểm nghiệm thực tế, song vì năng lực và thời gian có hạn, rất mong được sự đóng góp của các bạn đồng nghiệp và những người yêu thích môn toán để đề tài này có ý nghĩa thiết thực hơn trong nhà trường, góp phần nâng cao hơn nữa chất lượng giáo dục phổ thông, giúp các em có phương pháp - kỹ năng khi giải các bài toán liên quan đến hàm số. Với lí do đó, tôi xin giới thiệu đến các bạn đồng nghiệp đề tài : ***“Bồi dưỡng năng lực tư duy hàm cho học sinh thông qua các bài toán phương trình”*** làm đề tài sáng kiến kinh nghiệm trong năm học 2016 – 2017 nhằm đưa ra một giải pháp để góp phần nâng cao hiệu quả dạy và học, nhất là trong công tác bồi dưỡng học sinh giỏi

1.2. Mục đích nghiên cứu

Qua nhiều năm đứng trên bục giảng, khi dạy tới chuyên đề này, tôi luôn băn khoăn làm thế nào để cho giờ dạy của mình đạt kết quả cao nhất, các em chủ động trong việc chiếm lĩnh kiến thức. Thầy đóng vai trò là người điều khiển để các em tìm đến đích của lời giải. Chính vì lẽ đó tôi đã đầu tư thời gian nghiên cứu Chuyên đề này, một mặt là giúp học sinh hiểu được bản chất của vấn đề, các em không còn lúng túng trong việc giải các bài toán liên quan đến hàm số, hơn nữa tạo ra cho các

em hứng thú trong giải toán nói chung và liên quan đến hàm số nói riêng. Mặt khác sau khi nghiên cứu tôi sẽ có một phương pháp giảng dạy có hiệu quả cao trong các giờ lên lớp, trả lời thỏa đáng câu hỏi “Vì sao nghĩ và làm như vậy”.

1.3. Đối tượng nghiên cứu

Đề tài này nghiên cứu các mối liên hệ giữa ngôn ngữ hàm số trong các bài toán phương trình, bất phương trình, chỉ rõ được mối liên hệ đó để học sinh thấy được bản chất hàm số trong các bài toán mà thoát đầu có vẻ không liên quan gì đến hàm số. Tìm hiểu sự vận dụng của hàm số trong các bài toán đó, từ đó hình thành cho các em một lối tư duy logic, biện chứng giữa các khái niệm trong toán học.

1.4. Phương pháp nghiên cứu

Trong đề tài này, phương pháp nghiên cứu chủ yếu là nghiên cứu xây dựng cơ sở lý thuyết; áp dụng trong thực tế giảng dạy (PP điều tra khảo sát thực tế)

2. NỘI DUNG CỦA SÁNG KIẾN KINH NGHIỆM

2.1. Cơ sở lý luận của sáng kiến kinh nghiệm

Lý thuyết

▢ Nghiệm của phương trình $f(x) = g(x)$ là hoành độ giao điểm của đồ thị $y = f(x)$ với đồ thị $y = g(x)$.

▢ Nếu hàm số $y \geq 0, \forall x \in (a, b)$ mà $f(x)$ liên tục tại a và b thì $y \geq 0 \quad \forall x \in [a; b]$.

▢ Bất phương trình $f(x) \geq m$ đúng $\forall x \in I \Leftrightarrow \min f(x) \geq m \quad \forall x \in I$

▢ Bất phương trình $f(x) \leq m$ đúng $\forall x \in I \Leftrightarrow \max f(x) \leq m \quad \forall x \in I$

▢ BPT $f(x) \geq m$ có nghiệm $x \in I \Leftrightarrow \max f(x) \geq m \quad \forall x \in I$

▢ BPT $f(x) \leq m$ có nghiệm $x \in I \Leftrightarrow \max f(x) \leq m \quad \forall x \in I$

• Nếu hàm số $y=f(x)$ đơn điệu trên D thì phương trình $f(x)=k$ nếu có nghiệm $x=x_0$ thì $x=x_0$ là nghiệm duy nhất

• Nếu hàm số $y=f(x)$ đơn điệu trên D , $u(x), v(x)$ là các hàm số nhận giá trị thuộc D thì ta có $f[u(x)] = f[v(x)] \Leftrightarrow u(x) = v(x)$

• Nếu $f(x)$ là hàm số đồng biến (nghịch biến) thì $y = \sqrt[n]{f(x)}$ đồng biến (nghịch biến), $\frac{1}{f(x)}$ với $f(x) > 0$ là nghịch biến (đồng biến), $y=-f(x)$ nghịch biến (đồng biến)

• Tổng các hàm đồng biến (nghịch biến) trên D là đồng biến (nghịch biến) trên D

• Tích của hai hàm số dương đồng biến (nghịch biến) trên D là một hàm đồng biến (nghịch biến) trên D

• Phương trình $f(x) = m$ có nghiệm khi và chỉ khi m thuộc tập giá trị của hàm số $y = f(x)$ và số nghiệm phương trình là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ với đường thẳng $y = m$. Nếu trên tập D hàm số $y=f(x)$ đạt GTLN là l , GTNN là n thì phương trình $f(x)=m$ có nghiệm khi $n \leq m \leq l$

• Để sử dụng phương pháp hàm số vào giải phương trình, ta cần thực hiện :

- Tìm tập xác định của phương trình. Biến đổi phương trình (nếu cần) để đặt $f(x)$ bằng một biểu thức nào đó.

- Tính đạo hàm $f(x)$, rồi dựa vào tính đồng biến (nghịch biến) của hàm số để kết luận nghiệm của phương trình.

• Để giải các bài toán Tìm giá trị của tham số để phương trình (hoặc bất phương trình) có nghiệm ta thực hiện các bước sau

- Biến đổi phương trình về dạng $f(x)=g(m)$
- Tìm tập xác định của hàm số $f(x)$
- Tính $f'(x)$
- Lập bảng biến thiên của hàm số trên miền D

Tìm $\text{Max } f(x)$, $\text{min } f(x)$ với x thuộc D

• Đối với những phương trình có những biểu thức phức tạp ,ta có thể đặt ẩn phụ thích hợp $t = \varphi(x)$, từ điều kiện ràng buộc của x ta tìm điều kiện của t (với bài toán chứa tham số ta cần đặt điều kiện nghiêm ngặt cho ẩn phụ,ta thường dùng là đánh giá bằng bất đẳng thức,hoặc đôi khi phải khảo sát hàm $t = \varphi(x)$) để có thể tìm được điều kiện chính xác của biến mới t). Sau đó đưa phương trình đã cho về phương trình theo t và lại sử dụng phương pháp hàm số như trên

2.2. Thực trạng vấn đề trước khi áp dụng sáng kiến kinh nghiệm

Trong một lớp các bài toán phương trình, bất phương trình, nếu học sinh không có được tư duy hay mối liên hệ thường xuyên với hàm số mà loay hoay tìm cách biến đổi hay đặt ẩn phụ thì sẽ dẫn tới bế tắc hoặc phải thực hiện một khối lượng công việc lớn mới đi đến đáp số được

Ví dụ 1: Giải phương trình : $\sqrt{5x^3 - 1} + \sqrt[3]{2x - 1} + x = 4$ (1) [1]

Nhận xét: Nếu đơn thuần không đặt trong mối liên hệ với hàm số, ta sẽ gặp khó khăn trong việc tìm cách biến đổi, đặt ẩn phụ... Nhưng ta hãy quan sát về trái của phương trình (1), ta thấy khi x tăng thì giá trị của biểu thức trong căn cũng tăng. Từ đó ta thấy về trái là hàm đồng biến, về phải bằng 4 là hàm hằng, đây là điều kiện thích hợp để sử dụng tính đơn điệu

Lg: Đk: $x \geq \frac{1}{\sqrt[3]{5}}$, Đặt $f(x) = \sqrt{5x^3 - 1} + \sqrt[3]{2x - 1} + x$

$$f'(x) = \frac{15x^2}{2\sqrt{5x^3 - 1}} + \frac{2}{3\sqrt[3]{(2x - 1)^2}} + 1 > 0 \quad \forall x \in \left(\frac{1}{\sqrt[3]{5}}; +\infty\right) \text{ nên hàm số đồng biến trên } \left[\frac{1}{\sqrt[3]{5}}; +\infty\right)$$

Mà $f(1)=4$ nên $x=1$ là nghiệm .

Ví dụ 2: Giải phương trình : $3x(2 + \sqrt{9x^2 + 3}) + (4x + 2)(1 + \sqrt{1 + x + x^2}) = 0$ (2) [4]

Lg:

Cách 1:

Ta viết lại phương trình dưới dạng $3x(2 + \sqrt{(3x)^2 + 3}) = -(2x + 1)(2 + \sqrt{-(2x + 1)^2} + 3)$

Nếu phương trình có nghiệm thì nghiệm thỏa mãn $3x.(2x+1) < 0$ hay $x \in \left(-\frac{1}{2}; 0\right)$

nhận thấy nếu $3x = -(2x+1) \Leftrightarrow x = -\frac{1}{5}$ thì hai vế của phương trình bằng nhau.

Trong mục 2.2: Ví dụ 1 được tham khảo từ TLTK số 1, Ví dụ 2 được tham khảo từ TLTK số 4

Vậy $x = -\frac{1}{5}$ là nghiệm của phương trình. Hơn nữa ta thấy nghiệm $x = -\frac{1}{5} \in \left(-\frac{1}{2}; 0\right)$

Ta chứng minh $x = -\frac{1}{5}$ là nghiệm duy nhất.

- với $-\frac{1}{2} < x < -\frac{1}{5} \Rightarrow 3x < -2x - 1 < 0 \Rightarrow (3x)^2 > (2x+1)^2$ nên ta có

$$2 + \sqrt{(3x)^2 + 3} > 2 + \sqrt{(2x+1)^2 + 3} \Rightarrow 3x(2 + \sqrt{(3x)^2 + 3}) > -(2x+1)(2 + \sqrt{-(2x+1)^2} + 3)$$

hay $3x(2 + \sqrt{(3x)^2 + 3}) + (2x+1)(2 + \sqrt{-(2x+1)^2} + 3) > 0$ suy ra phương trình vô

nghiệm trên khoảng $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{5}\right)$.

- với $-\frac{1}{5} < x < 0$ làm tương tự như trên ta thấy phương trình vô nghiệm trên

$\left(-\frac{1}{5}; 0\right)$ Vậy nghiệm của phương trình là $x = -\frac{1}{5}$

Cách giải trên sử dụng phương pháp đoán nghiệm và chứng minh nghiệm duy nhất

Ta xét cách giải khác sau bằng phương pháp hàm số

Cách 2:

Viết lại phương trình dưới dạng: $3x(2 + \sqrt{(3x)^2 + 3}) = -(2x+1)(2 + \sqrt{-(2x+1)^2} + 3)$

Xét hàm số $f(t) = t(2 + \sqrt{t^2 + 3})$, $f'(t) = 2 + \sqrt{t^2 + 3} + \frac{t^2}{\sqrt{t^2 + 3}} > 0 \Rightarrow$ hàm số luôn đồng biến

Do đó (2) $\Leftrightarrow f(3x) = f[-(2x+1)] \Leftrightarrow 3x = -(2x+1) \Leftrightarrow x = -\frac{1}{5}$

Bình luận :

Qua hai cách giải trên chắc ta thấy cách giải thứ hai hay và tự nhiên hơn rất nhiều so với cách giải đầu. Đây là bài toán khó đối với học sinh, các em rất khó khăn trong việc sử dụng các phương pháp khác để giải phương trình này. Vì vậy việc bồi dưỡng cho học sinh năng lực tư duy hàm cho học sinh là một việc làm rất cần thiết của người thầy. Từ đó hình thành ở học sinh tư duy linh hoạt trong giải toán, để học sinh có đủ sức tư duy trước các bài toán lạ.

2.3. Các sáng kiến kinh nghiệm hoặc các giải pháp đã sử dụng để giải quyết vấn đề

Tư duy hàm được dùng trong khá nhiều các dạng toán, trong khuôn khổ đề tài này ta sẽ xem xét tính ưu việt khi sử dụng tính chất của hàm số trong các bài toán

phương trình, bất phương trình chứa căn, mũ, logarit và một số phương trình bậc cao khác.

2.3.1: Phương trình chứa căn thức

Ví dụ 3 : Giải phương trình : $\sqrt{2x^3 + 3x^2 + 6x + 16} - \sqrt{4 - x} = 2\sqrt{3}$ [2]

Nhận xét : Bài toán này gây khó khăn cho ta từ bước đặt điều kiện

$$\text{Đk: } \begin{cases} 2x^3 + 3x^2 + 6x + 16 \geq 0 \\ 4 - x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+2)(2x^2 + x - 8) \geq 0 \\ 4 - x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 4$$

Đặt $f(x) = \sqrt{2x^3 + 3x^2 + 6x + 16} - \sqrt{4 - x}$, $f'(x) =$

$$\frac{3(x^2 + x + 1)}{\sqrt{2x^3 + 3x^2 + 6x + 16}} + \frac{1}{2\sqrt{4 - x}} > 0, \forall x \in (-2; 4)$$

Nên hàm số đồng biến, $f(1) = 2\sqrt{3}$ nên $x=1$ là nghiệm

Ví dụ 4 : Giải phương trình $x^5 + x^3 - \sqrt{1 - 3x} + 4 = 0$ [1]

Lg: Đặt $f(x) = x^5 + x^3 - \sqrt{1 - 3x} + 4, x \leq \frac{1}{3}$

$$\text{ta có } f'(x) = 5x^4 + 3x^2 + \frac{3}{2\sqrt{1 - 3x}} > 0 \forall x < \frac{1}{3}$$

Vậy $f(x)$ đồng biến với $x \leq \frac{1}{3}$, $f(-1) = 0$ nên $x = -1$ là nghiệm

Ví dụ 5 : Giải phương trình : $2x^3 - x^2 + \sqrt[3]{2x^3 - 3x + 1} = 3x + 1 + \sqrt[3]{x^2 + 2}$ [1]

Lg: Biến đổi (1) $\Leftrightarrow 2x^3 - 3x + 1 + \sqrt[3]{2x^3 - 3x + 1} = x^2 + 2 + \sqrt[3]{x^2 + 2}$ (*)

Xét hàm số $f(t) = t + \sqrt[3]{t}$ $f'(t) = 1 + \frac{1}{3\sqrt[3]{t^2}} > 1, \forall t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \Rightarrow$ hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$(*) \Leftrightarrow f(2x^3 - 3x + 1) = f(x^2 + 2) \Leftrightarrow 2x^3 - 3x + 1 = x^2 + 2 \Leftrightarrow (2x + 1)(x^2 - x - 1) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{ -\frac{1}{2}; \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \right\}$$

Ví dụ 6 : Giải phương trình $\sqrt[3]{x+2} - \sqrt[3]{2x^2+1} = \sqrt[3]{2x^2} - \sqrt[3]{x+1}$ [2]

Lg:

$$\text{Ta có } \sqrt[3]{x+2} - \sqrt[3]{2x^2+1} = \sqrt[3]{2x^2} - \sqrt[3]{x+1} \Leftrightarrow \sqrt[3]{x+2} + \sqrt[3]{x+1} = \sqrt[3]{2x^2+1} + \sqrt[3]{2x^2} (*)$$

Xét hàm số $f(t) = \sqrt[3]{t} + \sqrt[3]{t+1}$ dễ thấy hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R} \setminus [0; -1]$

$$\text{nên } (*) \Leftrightarrow f(2x^2) = f(x+1) \Leftrightarrow 2x^2 = x+1 \Leftrightarrow x=1 \text{ hoặc } x = -\frac{1}{2}$$

Ví dụ 7 : Giải phương trình $\sqrt[3]{6x+1} = 8x^3 - 4x - 1$ [1]

$$\text{Lg: Phương trình } \Leftrightarrow \sqrt[3]{6x+1} = 8x^3 - 4x - 1 \Leftrightarrow 6x+1 + \sqrt[3]{6x+1} = (2x)^3 + 2x (*)$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t$ dễ thấy $f(t)$ đồng biến nên $(*) \Leftrightarrow f(\sqrt[3]{6x+1}) = f(2x)$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{6x+1} = 2x \Leftrightarrow 8x^3 = 6x+1 \Leftrightarrow 4x^3 - 3x = \frac{1}{2} \quad (1)$$

Nếu $|x| > 1$ thì $|4x^3 - 3x| = |x||4x^2 - 3| > \frac{1}{2}$ (1) vô nghiệm

Nếu $|x| \leq 1$ đặt $x = \cos t$ $t \in [0; \pi]$ phương trình trở thành $4\cos^3 t - 3\cos t = \frac{1}{2}$

Trong mục 2.3.1: Ví dụ 3,6 được trích từ TLTK số 2, Ví dụ 4,5,7 được trích từ TLTK số 1

$\Leftrightarrow \cos 3t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow t = \pm \frac{\pi}{9} + k \frac{2\pi}{3}$ chọn các nghiệm trong khoảng $t \in [0; \pi]$ ta có

nghiệm $t = \frac{\pi}{9}, t = \frac{5\pi}{9}, t = \frac{7\pi}{9}$ từ đó suy ra các nghiệm của phương trình.

Bình Luận:

Bài toán trên được giải dựa vào tính chất sau của hàm số : $f(t)$ đơn điệu thì $f(t_1) = f(t_2) \Leftrightarrow t_1 = t_2$. Tuy nhiên mỗi bài toán trước khi áp dụng được tính chất trên vào giải phương trình thì người giải toán cần phải biến đổi, lột bỏ được cái nguy trạng của bài toán, đưa về dạng thích hợp có lợi cho việc sử dụng công cụ giải toán. Ngoài ra, nhiều phương trình vô tỷ được giải nhờ vào việc đặt ẩn phụ thích hợp sau đó đưa về hệ phương trình, từ đó vận dụng hàm số để giải.

Ví dụ 8: Giải phương trình : $x^3 - 4x^2 - 5x + 6 = \sqrt[3]{7x^2 + 9x - 4}$ [4]

Lg:

Đặt $y = \sqrt[3]{7x^2 + 9x - 4}$

$$\text{Ta có } \begin{cases} x^3 - 4x^2 - 5x + 6 = y \\ 7x^2 + 9x - 4 = y^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 4x^2 - 5x + 6 = y \\ (x+1)^3 + x + 1 = y^3 + y \end{cases}$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t$, $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$ hàm số đồng biến nên ta có $y = x + 1$

$$\Leftrightarrow x^3 - 4x^2 - 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{ 5; \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \right\}$$

Một trong những ứng dụng mạnh và lý thú của hàm số là vận dụng vào việc tìm điều kiện của tham số để phương trình có nghiệm thỏa mãn điều kiện cho trước

Ví dụ 9: Tìm m để phương trình sau có nghiệm

$$x\sqrt{x} + \sqrt{x+12} = m(\sqrt{2017-x} + \sqrt{2016-x})$$

Lg: Đk : $0 \leq x \leq 2016$

Viết lại phương trình dưới dạng : $(x\sqrt{x} + \sqrt{x+12})(\sqrt{2017-x} - \sqrt{2016-x}) = m$

Xét hàm số $f(x) = (x\sqrt{x} + \sqrt{x+12})(\sqrt{2017-x} - \sqrt{2016-x})$

Ta có $h(x) = x\sqrt{x} + \sqrt{x+12} > 0$ và đồng biến trên $0 \leq x \leq 2016$

$$g(x) = \sqrt{2017-x} - \sqrt{2016-x}$$

$$\text{có } g'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{2017-x}} + \frac{1}{2\sqrt{2016-x}} = \frac{\sqrt{2017-x} - \sqrt{2016-x}}{2\sqrt{2017-x}\sqrt{2016-x}} > 0 \text{ với } 0 \leq x \leq 2016$$

nên hàm số đồng biến trên $0 \leq x \leq 2016$, hơn nữa $g(x) > 0$ với $0 \leq x \leq 2016$

vì vậy $f(x) = h(x)g(x)$ đồng biến trên $0 \leq x \leq 2016$, vì vậy phương trình có nghiệm khi $f(0) \leq m \leq f(2016) \Leftrightarrow \sqrt{12}(\sqrt{2017} - \sqrt{2016}) \leq m \leq 2016\sqrt{2016} + \sqrt{2028}$

Trong trang này: Ví dụ 8 được trích từ TLTK số 4, Ví dụ 9 là của tác giả

Ví dụ 10: Tìm m để phương trình $\sqrt{x^4 + 4x + m} + \sqrt[4]{x^4 + 4x + m} = 6$ (*) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 < -1 < x_2$ [2]

Lg:

Đặt $t = \sqrt[4]{x^4 + 4x + m} \geq 0$

(*) trở thành $t^2 + t - 6 = 0$ có nghiệm là $t = 2$

Với $t = 2 \Leftrightarrow x^4 + 4x + m = 16 \Leftrightarrow x^4 + 4x + m - 16 = 0$

Đặt $f(x) = x^4 + 4x + m - 16, f'(x) = 4(x^3 + 1), f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	$m-19$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình (*) có hai nghiệm thỏa mãn $x_1 < -1 < x_2$ khi $m - 19 < 0$ hay $m < 19$

Ví dụ 11: Tìm m để phương trình sau có đúng một nghiệm

$$\sqrt[4]{x^4 - 13x + m} + x - 1 = 0 \quad (*) \quad [1]$$

Lg:

$$(*) \Leftrightarrow \sqrt[4]{x^4 - 13x + m} = 1 - x \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ 4x^3 - 6x^2 - 9x - 1 = -m(1) \end{cases}$$

Yêu cầu bài toán trở thành tìm m để đường thẳng $y = -m$ cắt đồ thị hàm số $f(x) = 4x^3 - 6x^2 - 9x - 1$ tại một điểm $x \leq 1$

$$f'(x) = 12x^2 - 12x - 9 = 3(4x^2 - 4x - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ x = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	$-1/2$	1
$f(x)$	+	0	-
$f'(x)$	$-\infty$	$3/2$	-12

Từ bảng biến thiên ta có $\begin{cases} -m = \frac{3}{2} \\ -m < -12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -\frac{3}{2} \\ m > 12 \end{cases}$ Thỏa mãn yêu cầu bài toán

Trong mục 2.3.1: Ví dụ 10 được trích từ TLTK số 2, Ví dụ 11, 12 được trích từ TLTK số 1

2.3.2-Phương trình mũ

Ta xét 3 ví dụ sau tiếp cận theo phương pháp hàm số, mà theo suy nghĩ của tôi nếu tiếp cận theo hướng khác thì rất khó.

Ví dụ 12 : Giải phương trình sau $2^{\frac{1-x^2}{x^2}} - 2^{\frac{1-2x}{x^2}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{x}$ (1) [3]

Lg: Đk $x \neq 0$ Ta nhận thấy $\frac{1-x^2}{x^2} \cdot \frac{1-x^2}{x^2} = 1 - \frac{2}{x} = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{x}\right)$ từ đó ta có hướng biến

đổi phương trình như sau $2^{\frac{1-x^2}{x^2}} - 2^{\frac{1-2x}{x^2}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{x} \Leftrightarrow 2^{\frac{1-x^2}{x^2}} - 2^{\frac{1-2x}{x^2}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1-x^2}{x^2} - \frac{1-x^2}{x^2} \right)$

$$\Leftrightarrow 2^{\frac{1-x^2}{x^2}} + \frac{1}{2} \left(\frac{1-x^2}{x^2} \right) = 2^{\frac{1-2x}{x^2}} + \frac{1}{2} \left(\frac{1-2x}{x^2} \right) \quad (*)$$

xét hàm số $f(t) = 2^t + \frac{1}{2}t, f'(t) = 2^t \ln 2 + \frac{1}{2} > 0$. Hàm $f(t)$ đồng biến nên phương trình

$$(*) \Leftrightarrow f\left(\frac{1-x^2}{x^2}\right) = f\left(\frac{1-2x}{x^2}\right) \Leftrightarrow \frac{1-x^2}{x^2} = \frac{1-2x}{x^2} \Leftrightarrow x = 2 \text{ là nghiệm.}$$

Ví dụ 13 : Giải phương trình sau $2^{x^2+3\cos x} - 2^{x^2+4\cos^3 x} = 7\cos 3x$ [4]

Lg: Biến đổi phương trình như sau

$$\begin{aligned} 2^{x^2+3\cos x} - 2^{x^2+4\cos^3 x} &= 7\cos 3x \Leftrightarrow 2^{x^2+3\cos x} - 2^{x^2+4\cos^3 x} = 7(4\cos^3 x - 3\cos x) \\ \Leftrightarrow 2^{x^2+3\cos x} + 7(x^2 + 3\cos x) &= 2^{x^2+4\cos^3 x} + 7(x^2 + 4\cos^3 x) \quad (*) \end{aligned}$$

xét hàm số $f(t) = 2^t + 7t, t \in \mathbb{R}, f'(t) = 2^t \ln 2 + 7 > 0$ Hàm $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

$$(*) \Leftrightarrow f(x^2 + 3\cos x) = f(x^2 + 4\cos^3 x) \Leftrightarrow x^2 + 3\cos x = x^2 + 4\cos^3 x \Leftrightarrow \cos 3x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} = k2\pi$$

Ví dụ 14 : Giải phương trình sau : $713^{\frac{7+x^2}{x^2}} - 713^{\frac{47x+21}{x^3+3x^2}} = \frac{280-21x-7x^3}{x^2+3x}$ [4]

Lg: Đk $D = \mathbb{R} \setminus \{0; -3\}$

Biến đổi phương trình như sau :

$$713^{\frac{7+x^2}{x^2}} - 713^{\frac{47x+21}{x^3+3x^2}} = \frac{280-21x-7x^3}{x^2+3x} \Leftrightarrow 713^{\frac{7}{x^2}+1} - 713^{\frac{7}{x^2}+\frac{40}{x^2+3x}} = 7 \left(\frac{40}{x^2+3x} - 1 \right)$$

$$\Leftrightarrow 713^{\frac{7}{x^2}+1} + 7\left(\frac{7}{x^2}+1\right) = 713^{\frac{7}{x^2}+\frac{40}{x^2+3x}} + 7\left(\frac{7}{x^2}+\frac{40}{x^2+3x}\right) \quad (*)$$

Xét hàm số $f(t) = 713^t + 7t$, $f'(t) = 713^t \ln 713 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ nên hàm $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

$$(*) \Leftrightarrow f\left(\frac{7}{x^2}+1\right) = f\left(\frac{7}{x^2}+\frac{40}{x^2+3x}\right) \Leftrightarrow \frac{7}{x^2}+1 = \frac{7}{x^2}+\frac{40}{x^2+3x} \Leftrightarrow x^2+3x-40=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ x=-8 \end{cases}$$

Trong mục 2.3.2: Ví dụ 12 được trích từ TLTK số 3, Ví dụ 13, 14 được trích từ TLTK số 4
Bình Luận : Ba phương trình trên thuộc dạng phương trình

$$a^{h(x)+f(x)} - a^{h(x)+f(x)} = K[f(x) - g(x)]$$

$$h(x)a^{f(x)} + a^{h(x)+} = a^{f(x)+g(x)} + h(x)$$

• Để áp dụng được học sinh phải có kỹ năng biến đổi mỗi phương trình để đưa phương trình trên về một trong hai dạng trên. Sau đó xét hàm đặc trưng $f(t)$ chỉ ra được hàm $f(t)$ đơn điệu trên tập xác định, sử dụng tính chất: $f(t_1)=f(t_2)$ khi $t_1=t_2$

Ví dụ 15 : Giải phương trình : $x^{\log_2 9} = x^2 3^{\log_2 x} - x^{\log_2 3}$ [2]

Lg:

Biến đổi phương trình như sau $x^{\log_2 9} = x^2 3^{\log_2 x} - x^{\log_2 3} \Leftrightarrow 3^{\log_2 x} (3^{\log_2 x} - x^2 + 1) = 0 \quad (*)$

Do $3^{\log_2 x} > 0$ nên $(*) \Leftrightarrow 3^{\log_2 x} - x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow 3^{\log_2 x} - 2^{\log_2 x^2} + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow 3^{\log_2 x} - 4^{\log_2 x} + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^{\log_2 x} + \left(\frac{1}{4}\right)^{\log_2 x} - 1 = 0 \quad (*)$$

Xét hàm số $f(t) = \left(\frac{3}{4}\right)^t + \left(\frac{1}{4}\right)^t - 1$. dễ thấy hàm $f(t)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$

mà $f(1)=0$ suy ra $t=1$ là nghiệm duy nhất của phương trình từ đó suy ra

$(*) \Leftrightarrow \log_2 x = 1 \Leftrightarrow x = 2$ thỏa mãn điều kiện đề bài .

Bình Luận :

Một số phương trình mũ đôi khi việc tìm nghiệm trực tiếp là khó khăn .Ta chỉ ra phương trình có không quá n nghiệm và kết hợp với việc nhắm được n nghiệm từ đó kết luận về số nghiệm của phương trình .Ta xét bài toán sau

Ví dụ 16 : Giải phương trình $3^x + 5^x = 6x + 2$ [3]

Lg: Xét hàm số $f(x) = 3^x + 5^x - 6x - 2$

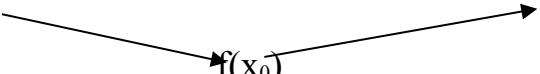
$$f'(x) = 3^x \ln 3 + 5^x \ln 5 - 6$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = 3^x \ln 3 + 5^x \ln 5 - 6 = 0$$

Nhận xét $g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. $g(0).g(1) < 0$ nên $g(x)=0$ có nghiệm x_0 trong $(0;1)$

$$f''(x) = 3^x (\ln 3)^2 + 5^x (\ln 5)^2 > 0$$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$			

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình $f(x)=0$ có không quá 2 nghiệm mà $f(0)=f(1)=0$. Vậy phương trình có 2 nghiệm $x=1; x=2$

Trong mục 2.3.2: Ví dụ 15 được trích từ TLTK số 2, Ví dụ 16 được trích từ TLTK số 3

Bình Luận:

• Ngoài cách giải trên, ta cũng có thể trình bày lời giải như sau

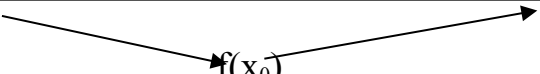
Xét hàm số $f(x) = 3^x + 5^x - 6x - 2$

$$f'(x) = 3^x \ln 3 + 5^x \ln 5 - 6$$

$$f''(x) = 3^x (\ln 3)^2 + 5^x (\ln 5)^2 > 0 \text{ với mọi } x \text{ nên } f'(x) \text{ đồng biến trên } \mathbb{R}$$

Lại có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = -6$ nên phương trình $f'(x) = 0$ có nghiệm duy nhất x_0 .

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$			

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình có nhiều nhất hai nghiệm, $f(0)=f(1)=0$ Vậy phương trình có 2 nghiệm $x=1; x=2$

Bằng cách khai thác trên ta có thể giải tương tự một số phương trình sau

$$1/ \quad 2^{x-1} - 2^{x^2-x} = (x-1)^2 \quad 2/ 253^{\frac{12-x^2}{x^2}} - 253^{\frac{12-8x}{x^2}} = \frac{1}{8} - \frac{1}{x}$$

$$3/ 2^{\sqrt{1-x^2}+4\sin^3 x} - 2^{\sqrt{1-x^2}+3\sin x} = 13\sin x \quad 4/ 2^{x^2+3\cos x} - 2^{x^2+4\cos^3 x} = 7\cos x$$

Bình Luận :

Khi áp dụng các tính chất về tính đơn điệu của hàm số do không nắm vững về kiến thức, học sinh thường mắc sai lầm trong giải toán nên thường có những kết luận nghiệm chưa chính xác. Ta lấy thêm một ví dụ mô tả điều đó :

Ví dụ 17 Giải phương trình : $3^x \cdot 2x = 3^x + 2x + 1$ (1) [2]

Sai lầm thường gặp của học sinh :

$$(1) \Leftrightarrow 3^x = \frac{2x+1}{2x-1} \text{ .Ta có } f(x) = 3^x \text{ đồng biến ,}$$

$$g(x) = \frac{2x+1}{2x-1}, g'(x) = -\frac{4}{(2x-1)^2} < 0 \text{ - nghịch biến}$$

$f(1)=g(1)$ nên $x=1$ là nghiệm duy nhất .

Nhận thấy $f(-1)=g(-1)$ vậy $x=-1$ cũng là nghiệm .Vậy đâu là sai lầm của lời giải ?

Khi hướng dẫn học sinh sử dụng các tính chất của hàm số người thầy cần nhấn mạnh cho học sinh thấy rõ : Nếu $f(x)$ đồng biến trên D , $g(x)$ nghịch biến trên D thì phương trình $f(x)=g(x)$ có nhiều nhất một nghiệm .Đối chiếu với lời giải trên ta thấy $f(x)$ và $g(x)$ có tập xác định hoàn toàn khác nhau, vì vậy khi áp dụng dẫn đến sai lầm

|

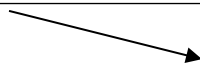
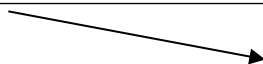
Trong trang này: Đoạn: “ Xét hàm số $f(x) = 3^x + 5^x - 6x - 2 \dots x = 1; x = 2$ ” là lời giải tác giả.
Ví dụ 17 được trích từ TLTK số 2.

Lời giải đúng như sau :

Hàm số $f(x)=3^x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

Hàm số $g(x)=\frac{2x+1}{2x-1}$ nghịch biến trên $\mathbb{R} \setminus \{1/2\}$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$1/2$	$+\infty$
$g'(x)$	-		-
$g(x)$			

Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy đồ thị của hàm $g(x)$ cắt đồ thị hàm $g(x)$ tại không quá hai điểm .Nên phương trình $f(x)=g(x)$ có không quá hai nghiệm,mà $f(1)=g(1)$, $f(-1)=g(-1)$.Nên phương trình có hai nghiệm

Bình Luận :

Một trong những ứng dụng nữa của hàm số trong phương trình đó là chứng minh một phương trình mũ có nghiệm thỏa mãn điều kiện cho trước .

Ví dụ 18 : Chứng minh rằng phương trình $x^{x+1}=(x+1)^x$ có duy nhất một nghiệm dương [4]

Lg: Đk: $x > 0$,Lấy loga nêpe hai vế ta có

$$x^{x+1}=(x+1)^x \Leftrightarrow (x+1)\ln x = x\ln(x+1) \Leftrightarrow (x+1)\ln x - x\ln(x+1) = 0$$

Xét hàm số $f(x)=(x+1)\ln x - x\ln(x+1)$ ($x > 0$)

$$f'(x) = \ln x + \frac{x+1}{x} - \ln(x+1) - \frac{x}{x+1} = \ln \frac{x}{x+1} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} = -\ln \frac{x+1}{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = -\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}$$

Xét hàm số : $f(t) = \ln(1+t) - t$, $t > 0$. $f'(t) = \frac{1}{1+t} - 1 < 0 \forall t > 0 \Rightarrow f(t)$ nghịch

biến với $t > 0$ $f(t) > f(0) = 0$ hay $\ln(1+t) < t$.

Áp dụng với $t = \frac{1}{x}$ khi đó ta có $-\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x} > 0$ nên

$$f'(x) = -\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} > 0$$

suy ra hàm $f(x)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$. Từ đó suy ra phương trình $f(x) = 0$ có nhiều nhất một nghiệm dương.

lại có $f(2) = \ln 8/9 < 0$, và $f(3) = \ln 81/64 > 0$ nên $f(2).f(3) < 0$

từ đó suy ra phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm dương duy nhất thuộc khoảng $(2; 3)$.

Ví dụ 19 : Tìm nghiệm dương của phương trình :

$$x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{1+\frac{1}{x}} - x^3 \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{1+\frac{1}{x^2}} = 1 - x \quad [4]$$

Lg: Biến đổi phương trình như sau

$$x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{1+\frac{1}{x}} - x^3 \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{1+\frac{1}{x^2}} = 1 - x \Leftrightarrow (x+1) \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - x(x^2+1) \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = 1 - x$$

$$(x+1) \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - 1 = x \left[(x^2+1) \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) - 1 \right] \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$$

$$x \left[(x+1) \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - 1 \right] = x^2 \left[(x^2+1) \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) - 1 \right] \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \quad (\text{vì } x > 0) \quad (*)$$

$$\text{Đặt } f(t) = t \left[(t+1) \ln\left(1 + \frac{1}{t}\right) - 1 \right], \quad t > 0$$

$$\text{Ta có } f'(t) = (2t+1) \ln\left(1 + \frac{1}{t}\right) - 2 = (2t+1) \left[\ln\left(1 + \frac{1}{t}\right) - \frac{2}{2t+1} \right]$$

$$\text{Lại đặt } g(t) = \left[\ln\left(1 + \frac{1}{t}\right) - \frac{2}{2t+1} \right]$$

$$g'(t) = -\frac{1}{t(t+1)} + \frac{4}{(2t+1)^2} = -\frac{1}{t(t+1)(2t+1)} < 0 \quad \text{với } t > 0.$$

Do đó hàm $g(t)$ nghịch biến trên $(0; +\infty)$, mà $\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = 0$

suy ra $g(t) > 0$ với mọi $t > 0 \Rightarrow f'(t) = (2t+1)g(t) > 0 \forall t > 0 \Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$

$$(*) \Leftrightarrow f(x) = f(x^2) \Leftrightarrow x = x^2 \Leftrightarrow x = 1 \quad (\text{vì } x > 0)$$

Ví dụ 20 : Chứng minh rằng nếu n là số tự nhiên chẵn và $a > 3$ thì phương trình $(n+1)x^{n+2} - 3(n+2)x^{n+1} + a^{n+2} = 0$ vô nghiệm [4]

Lg: Xét hàm số $f(x) = (n+1)x^{n+2} - 3(n+2)x^{n+1} + a^{n+2}$, $D = \mathbb{R}$

$$f'(x) = (n+1)(n+2)x^{n+1} - 3(n+1)(n+2)x^n = (n+1)(n+2)(x-3)x^n$$

Do n chẵn nên dấu của $f'(x)$ chỉ phụ thuộc vào $x-3$

Ta có bảng biến thiên sau

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$			

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $f(x) \geq f(3) = a^{n+2} - 3^{n+2} > 0$ do $a > 3$
 $\Rightarrow$ Đồ thị hàm số không cắt trục hoành $\Rightarrow$ phương trình vô nghiệm .

Trong trang 11, 12 của SK: Ví dụ 18, 19, 20 được trích từ TLTK số 4

Bình Luận :

- Qua ba bài toán trên ta thấy được tính độc đáo và thế mạnh của phương pháp tư duy hàm trong việc giải phương trình .Từ đó học sinh thấy được vai trò và tính ưu việt của việc sử dụng phương pháp hàm số trong giải phương trình nói riêng và trong giải toán nói chung
- Cũng như trong giải phương trình vô tỷ, Việc sử dụng phương pháp hàm số tham gia vào giải các bài toán chứa tham số trong phương trình mũ là một việc cần thiết. Ta xét một số bài toán sau :

Ví dụ 21: Tùy theo m hãy biện luận số nghiệm của phương trình sau

$$5^{x^2+2mx+2} - 5^{2x^2+4mx+m+2} = x^2 + 2mx + m \quad [2]$$

Lg: Nhận xét $(2x^2+4mx+m+2) - (x^2+2mx+2) = x^2 + 2mx + m$. (*)
 biến đổi phương trình

$$5^{x^2+2mx+2} - 5^{2x^2+4mx+m+2} = x^2 + 2mx + m$$

$$\Leftrightarrow 5^{x^2+2mx+2} - 5^{2x^2+4mx+m+2} = (2x^2 + 4mx + m + 2) - (x^2 + 2mx + 2)$$

Xét hàm số $f(t) = 5^t + t$, $f'(t) = 5^t \ln 5 + 1 > 0$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến .

$$(*) \Leftrightarrow f(2x^2+4mx+m+2) = f(x^2+2mx+2) \Leftrightarrow 2x^2+4mx+m+2 = x^2+2mx+2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2mx + m = 0 \quad (1)$$

Bài toán quy về Biện luận theo m số nghiệm của phương trình (1) thật đơn giản

Nhận xét :

Đây là bài toán và những lời giải hay , phát huy được sự sáng tạo và tư duy linh hoạt, khả năng quan sát của học sinh .

2.3.3 Phương trình logarit:

Cũng như đối với phương trình mũ ,phương trình logarit cũng có nhiều cách giải như: Đưa về cùng cơ số ,đặt ẩn phụ ,mũ hoá ,đánh giá song trong bài viết này tôi chỉ trao đổi về vấn đề hướng dẫn học sinh vận dụng tư duy hàm trong việc giải phương trình logarit. Chủ yếu vận dụng giải hai phương trình logarit cơ bản sau:

a. Phương trình dạng $\log_a f(x) = \log_b g(x) \quad (1)$

+ Nếu $a=b$, (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a \neq 1 \\ f(x) = g(x) \end{cases}$ (dạng này khá quen đối với học sinh)

+ Nếu $a \neq b$ ta chia làm hai trường hợp như sau

- $(a-1)(b-1) < 0$. Ta dùng phương pháp đoán nghiệm và chứng minh nghiệm duy nhất áp vào phương pháp hàm số
- $(a-1)(b-1) > 0$. Dùng phương pháp mũ hoá bằng cách đặt $t = \log_a f(x) = \log_b g(x)$
 $\Rightarrow \begin{cases} f(x) = a^t \\ g(x) = b^t \end{cases}$ Dẫn đến phương trình $f(t) = A^t + B^t = 1$

Trong trang này : Ví dụ 21 được trích từ TLTK số 2

Ví dụ 22: Giải phương trình $3\log_3(x+2) = 2\log_2(x+1)$ [2]

Lg:

Đk: $x > -1$

$$\text{Đặt } 2\log_2(x+1) = 6t \Rightarrow \begin{cases} x+2 = 3^{2t} \\ x+1 = 2^{3t} \end{cases} \Rightarrow 1 + 2^{3t} = 3^{2t} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{9}\right)^t + \left(\frac{8}{9}\right)^t = 1$$

Xét hàm số $f(t) = \left(\frac{1}{9}\right)^t + \left(\frac{8}{9}\right)^t$ nhận thấy $f(t)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$

mà $f(1) = 1$ nên $t = 1$ là nghiệm. Từ đó ta có $x = 7$ là nghiệm duy nhất

Ví dụ 23 : Giải phương trình $2\log_6(\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}) = \log_4 x$ (*) [2]

$$(*) \Leftrightarrow \log_6(\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}) = \frac{1}{2}\log_4 x \Leftrightarrow \log_6(\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}) = \log_4 \sqrt{x}$$

$$\text{Đặt } t = \log_6(\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}) = \log_4 \sqrt{x} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt[4]{x} = 6^t & (1) \\ \sqrt{x} = 4^t & (2) \end{cases}$$

$$\text{Thế (2) vào (1) ta có } 4^t + 2^t = 6^t \Leftrightarrow \left(\frac{4}{6}\right)^t + \left(\frac{2}{6}\right)^t = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^t + \left(\frac{1}{3}\right)^t = 1$$

Xét hàm số $f(t) = \left(\frac{2}{3}\right)^t + \left(\frac{1}{3}\right)^t$ nhận thấy $f(t)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$

mà $f(1) = 1$ nên $t = 1$ là nghiệm, thay vào (2) ta có $x = 16$

Bình Luận:

Đối với các phương trình dạng $m\log_a f(x) = n\log_b g(x)$

Gọi K là bội số chung nhỏ nhất của m và n . Đặt $m\log_a f(x) = n\log_b g(x) = kt$

ta đưa phương trình đã cho về hệ phương trình đối với x, t từ đó rút x từ hai phương trình ta được phương trình dạng $A^t + B^t = 1$

Để luyện tập, ta có thể giải các phương trình sau

$$\begin{array}{ll} 1/\log_2(1 + \sqrt{x}) = \log_3(x) & 2/\log_2(x^2 - 1) = \log_{\frac{1}{2}} \frac{4x - 11}{8} \\ 3/\log_5(x + 2) = \log_3(x) & 4/\log_7(x + 2) = \log_5(x) \\ 5/2 \log_6(\sqrt[4]{x} + \sqrt[8]{x}) = \log_4(\sqrt{x}) & 6/\log_3(2 + \sqrt{x}) = \log_7(x) \quad [2] \end{array}$$

Trong trang này : Ví dụ 22, 23 và các bài tập 1, 2... 6 được trích từ TLTK số 2

b. Phương trình dạng $\log_a \frac{f(x)}{g(x)} = k[g(x) - f(x)]$

Ví dụ 24 : Giải phương trình $\log_2(1 + x - \sqrt{x}) = (1 - x)\sqrt{3x}$ [4]

Lg: Tập xác định $x \geq 0$

Biến đổi phương trình như sau

$$\begin{aligned} \log_2(1 + x - \sqrt{x}) &= (1 - x)\sqrt{3x} \Leftrightarrow \log_2 \frac{1 + \sqrt{x^3}}{1 + \sqrt{x}} = \sqrt{3}\sqrt{x} - \sqrt{3}\sqrt{x^3} \\ \Leftrightarrow \log_2(1 + \sqrt{x^3}) - \log_2(1 + \sqrt{x}) &= \sqrt{3}(1 + \sqrt{x}) - \sqrt{3}(1 + \sqrt{x^3}) \\ \Leftrightarrow \log_2(1 + \sqrt{x^3}) + \sqrt{3}(1 + \sqrt{x^3}) &= \log_2(1 + \sqrt{x}) + \sqrt{3}(1 + \sqrt{x}) (*) \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = \log_2 t + \sqrt{3}t$ với $t > 0$ $f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$

$$(*) \Leftrightarrow f(1 + \sqrt{x^3}) = f(1 + \sqrt{x}) \Leftrightarrow 1 + \sqrt{x^3} = 1 + \sqrt{x} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

Bình Luận :

Việc chuyển phương trình ban đầu về phương trình (*) là không đơn giản. Học sinh phải có tư duy và kỹ năng biến đổi. Vì vậy bồi dưỡng năng lực tư duy hàm là một việc làm rất cần thiết của người thầy.

Ví dụ 25 : Giải phương trình: $\log_3 \frac{x^2 + x + 3}{2x^2 + 4x + 5} = 7x^2 + 21x + 14$ [4]

Lg:

Nhận xét $x^2 + x + 3 > 0$ $2x^2 + 4x + 5 > 0$

Viết lại phương trình dưới dạng

$$\log_3(x^2 + x + 3) - \log_3(2x^2 + 4x + 5) = 7(2x^2 + 4x + 5) - 7(x^2 + x + 3)$$

$$\Leftrightarrow \log_3(x^2 + x + 3) + 7(x^2 + x + 3) = \log_3(2x^2 + 4x + 5) + 7(2x^2 + 4x + 5) (*)$$

Xét hàm số $f(t) = \log_3 t + 7t$ $t > 0$, $f(t)$ đồng biến trên tập xác định

$$(*) \Leftrightarrow f(x^2 + x + 3) = f(2x^2 + 4x + 5) \Leftrightarrow x^2 + x + 3 = 2x^2 + 4x + 5 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = -1 \end{cases}$$

Các bài tập tương tự để học sinh vận dụng phương pháp hàm số

$$1/\log_3 \frac{x^4 + 14x^2 + 7x + 1}{13x^2 + 13x + 9} = x^4 + x^2 - 6x - 8 \quad 2/\log_3 \frac{x^2 + x + 3}{2x^2 + 4x + 5} = x^2 + 3x + 2$$

$$3/\ln(x^2 - 2x - 3) + 2x = \ln(x^2 + 4x + 3) + 6 \quad 4/\log_3 \frac{x^2 - x + 2}{2x^2 - 4x + 4} = x^2 - 3x + 2 \quad [4]$$

Trong trang này : Ví dụ 24, 25 và các bài tập 1, 2, 3, 4 được trích từ TLTK số 4

c. Phương trình dạng $a^{\alpha x + \beta} = p \log_a(\lambda x + \mu) + qx + r$

Ví dụ 26 : Giải phương trình: $7^x = 2\log_7(6x + 1)^3$ [4]

Lg: Đk $x > -\frac{1}{6}$. Đặt $y = \log_7(6x + 1)^3 \Leftrightarrow 7^y = 6x + 1$

ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} 7^x = 6y + 1 \\ 7^y = 6x + 1 \end{cases}$$

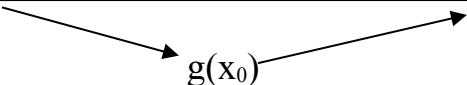
Trừ theo vế các phương trình ta có $7^x + 6x = 7^y + y$ (*)

Xét hàm số $f(t) = 7^t + t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên (*) ta có $x = y$ thay vào phương trình

(1) ta có $7^x - 6x - 1 = 0$, Xét hàm số $g(t) = 7^t - 6t - 1$,

(2) $g'(t) = 7^t \ln 7 - 6, g'(t) = 0 \Leftrightarrow x = x_0 = \log_7 6 - \log_7(\ln 7)$

Ta có bảng biến thiên

x	-1/6	x_0	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$			

Dựa vào đồ thị ta thấy phương trình $g(x) = 0$ có không quá 2 nghiệm mà $g(0) = g(1) = 0$ nên $x = 0, x = 1$ là hai nghiệm của phương trình

Bình luận

• Đây là dạng phương trình khó đối với học sinh. Để giải phương trình trên ta phải đặt thêm một ẩn phụ để đưa về hệ phương trình, sau đó dùng tính đơn điệu của hàm số đưa phương trình đã cho về phương trình mũ. Tuy nhiên phương trình mũ sau đó

cũng không hề dễ giải. Vì thế phải dùng hàm số để chứng minh phương trình không có quá hai nghiệm, kết hợp với việc nhẩm được hai nghiệm để suy ra kết quả.

• Nếu không đưa về hệ như trên ta có thể biến đổi phương trình như sau

$$7^x = 2\log_7(6x+1)^3 \Leftrightarrow 7^x + 6\log_7 7^x = 6\log_7(6x+1) + (6x+1)(*)$$

xét hàm số $f(t) = t + 6\log_7 t \quad (t > 0)$ dễ thấy hàm $f(t)$ đồng biến trên tập xác định

$(*) \Leftrightarrow f(7^x) = f(6x+1) \Leftrightarrow 7^x - 6x - 1 = 0$ quay tiếp về cách giải như trên.

• Đối với phương trình $7^x - 6x - 1 = 0$ thay vì khảo sát hàm số $g(x)$ như trên chúng ta cũng có thể giải bằng bất đẳng thức Becnuly như sau

$$\text{Ta có } 7^x \geq (7-1)x + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ x \geq 1 \end{cases}$$

$$7^x \leq (7-1)x + 1 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1$$

$$\text{Nên phương trình } 7^x - 6x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

Trong trang này: Ví dụ 26 được trích từ TLTK số 4

Nhận xét: Cũng giống như phương trình mũ, việc giải một số phương trình logarit đôi khi phải sử dụng đến đạo hàm cấp hai để biết được số nghiệm tối đa có thể có trong phương trình, sau đó nhẩm nghiệm để suy ra kết quả. Ta xét thêm ví dụ sau

Ví dụ 27: Giải phương trình $\log_2 [3\log_2(3x-1) - 1] = x \quad [2]$

$$\text{Lg: Đk } x > \frac{\sqrt[3]{2} + 1}{3}$$

$$\text{Đặt } y = \log_2(3x-1) \text{ ta có hệ phương trình } \begin{cases} y = \log_2(3x-1) \\ x = \log_2(3y-1) \end{cases}$$

dẫn đến phương trình sau: $\log_2(3x-1) + x = \log_2(3y-1) + y \quad (*)$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = \log_2(3t-1) + t \quad \text{với } t \in \left(\frac{\sqrt[3]{2} + 1}{3}; +\infty \right).$$

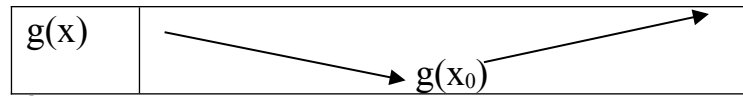
$$f'(t) = \frac{1}{(3t-1)\ln 2} > 0 \quad \forall t \text{ thỏa } t \in \left(\frac{\sqrt[3]{2} + 1}{3}; +\infty \right). \quad (*) \Leftrightarrow x = y \Leftrightarrow 2^x - 3x + 1 = 0$$

$$\text{Đặt } g(x) = 2^x - 3x + 1, \quad g'(x) = 2^x \ln 2 - 3, \quad g'(x) = 0 \text{ khi } x = x_0 = \log_2 \frac{3}{\ln 2}$$

$g''(x) = 2^x \ln^2 2 > 0$ suy ra $g'(x)$ đồng biến.

Ta có bảng biến thiên sau

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+



Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình $g(x)=0$ có không quá hai nghiệm mà $g(1) = g(3)=0$ nên $x=1, x=3$ là hai nghiệm .

Bình Luận:

Việc sử dụng tính đơn điệu của hàm số đôi khi thường kết hợp với việc đánh giá bằng các bất đẳng thức .Ta xét phương trình sau

Ví dụ 28: Giải phương trình: $\log_3(\sqrt{x^2 - 3x + 2} + 2) + \left(\frac{1}{5}\right)^{3x - x^2 - 1} = 2$ (1) [3]

Giải: Điều kiện: $x^2 - 3x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x \geq 2 \end{cases}$

Đặt $u = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$, điều kiện $u \geq 0$ suy ra: $x^2 - 3x + 2 = u^2 \Leftrightarrow 3x - x^2 - 1 = 1 - u^2$

Khi đó (1) có dạng: $\log_3(u + 2) + \left(\frac{1}{5}\right)^{1 - u^2} = 2$

Xét hàm số: $f(x) = \log_3(x + 2) + \left(\frac{1}{5}\right)^{1 - x^2} = \log_3(x + 2) + \frac{1}{5} \cdot 5x^2$

+ Miền xác định $D = [0; +\infty)$

+ Đạo hàm: $f' = \frac{1}{(x + 2)\ln 3} + \frac{1}{5} \cdot 2x \cdot 5x^2 \cdot \ln 3 > 0, \forall x \in D$. Suy ra hàm số tăng trên D

Mặt khác $f(1) = \log_3(1 + 2) + \frac{1}{7} \cdot 5 = 2$.

Do đó, phương trình (2) được viết dưới dạng:

$$f(u) = f(1) \Leftrightarrow u = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 3x + 2} = 1 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Vậy phương trình có hai nghiệm $x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$

Ví dụ 29 : Giải phương trình: $\log_{\sqrt[3]{5}}(x^2 - 2x - 3) = 2\log_2(x^2 - 2x - 4)$ [3]

Lg: Điều kiện: $\begin{cases} x^2 - 2x - 3 > 0 \\ x^2 - 2x - 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 - \sqrt{5} \\ x > 1 + \sqrt{5} \end{cases}$. Viết lại phương trình dưới dạng:

$$\log_{\sqrt[3]{5}}(x^2 - 2x - 3) = \log_2(x^2 - 2x - 4) \Leftrightarrow \log_5(x^2 - 2x - 3) = \log_4(x^2 - 2x - 4) \quad (1)$$

Đặt $t = x^2 - 2x - 4$ khi đó (1) $\Leftrightarrow \log_5(t + 1) = \log_4 t$ (2)

Đặt $y = \log_4 t \Rightarrow t = 4^y$ phương trình (2) được chuyển thành hệ:

$$\begin{cases} t=4^y \\ t+1=5^y \end{cases} \Rightarrow 4^y + 1 = 5^y \Leftrightarrow \left(\frac{4}{5}\right)^y + \left(\frac{1}{5}\right)^y = 1 \quad (3)$$

Hàm số $f(y) = \left(\frac{4}{5}\right)^y + \left(\frac{1}{5}\right)^y$ là hàm nghịch biến. Ta có:

+ Với $y=1$, $f(1)=1$ do đó $y=1$ là nghiệm của phương trình (3)

Vậy $y=1$ là nghiệm duy nhất của phương trình (3)

$$\text{Suy ra: } y=1 \Leftrightarrow t=4 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 4 = 4 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ x=-2 \end{cases}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x=4$; $x=-2$

Ví dụ 30: Chứng minh rằng phương trình sau có nghiệm duy nhất

$$x^5 - x^2 - 2x - 1 = 0$$

Nhận xét: Đây là một phương trình mà khi giải nó cần có sự có mặt của tư duy hàm số. Sau đây là một vài cách người thầy giúp học sinh tiếp cận lời giải.

Cách 1: Biến đổi phương trình về dạng $x^3 = \left(\frac{x+1}{x}\right)^2 \Leftrightarrow x^3 = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2$ (*)

Nhận xét nếu $x=x_0$ là nghiệm của phương trình thì $x_0 > 0$. Vì vậy trong phương trình (*) ta chỉ xét $x > 0$

Trong trang 17, 18: Ví dụ 27 được trích từ TLTK số 3 Ví dụ 28, 29 được trích từ TLTK số 3

Mặt khác $f(x)=x^3$ là hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$,

$g(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2$ nghịch biến trên $(0; +\infty)$ nên phương trình (*) có nhiều nhất một

nghiệm. Hàm $h(x) = x^5 - x^2 - 2x - 1$ liên tục trên $\mathbb{R}$, $h(1)=-3$; $h(2)=23$

nên $h(1).h(2) < 0$. Theo định lý hàm số liên tục thì $h(x)=0$ có nghiệm thuộc

khoảng $(1; 2)$. Kết hợp với điều kiện trên ta có phương trình có nghiệm duy nhất.

Cách 2: Biến đổi phương trình như sau $x^5 = (x+1)^2$

từ phương trình ta thấy nếu phương trình có nghiệm x thì $x > 0$

• $0 \leq x < 1 \Rightarrow x^5 < 1, (x+1)^2 \geq 1$ nên phương trình vô nghiệm

• $x \geq 1$ xét hàm số $h(x) = x^5 - x^2 - 2x - 1$,

có $h'(x) = 5x^4 - 2x - 2 = 2x(x^3 - 1) + 2(x^4 - 1) + x^4 > 0$ với mọi $x \geq 1$ nên $h(x)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$, $h(x)=0$ có nhiều nhất một nghiệm.

Lại có $h(x) = x^5 - x^2 - 2x - 1$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên liên tục trên $[1; 2]$ mà $h(1)=-3$,

$h(2)=23$, nên $h(1).h(2) < 0$. Theo định lý hàm số liên tục thì $h(x)=0$ có nghiệm thuộc khoảng $(1; 2)$. Kết hợp với điều kiện ta có phương trình có nghiệm duy nhất

Cách 3: Biến đổi phương trình $x^5 = (x+1)^2$

Ta có $(x+1)^2 \geq 0 \Rightarrow x^5 \geq 0 \Rightarrow (x+1)^2 \geq 1 \Rightarrow x^5 \geq 1 \Rightarrow x \geq 1$ sau đó lại xét hàm số $h(x) = x^5 - x^2 - 2x - 1$ như trên.

2.4. Hiệu quả của sáng kiến kinh nghiệm đối với hoạt động giáo dục, với bản thân, đồng nghiệp và nhà trường.

Để thấy rõ hơn hiệu quả của việc bồi dưỡng năng lực tư duy cho học sinh, tôi làm một thực nghiệm để có căn cứ đánh giá

2.4.1. Mục đích thực nghiệm

Thực nghiệm để bước đầu đánh giá tính hiệu quả của việc bồi dưỡng năng lực tư duy cho học sinh.

Có những điều chỉnh phù hợp trong cách tổ chức cho học sinh chiếm lĩnh tri thức tùy theo trình độ của học sinh

2.4.2. Nội dung thực nghiệm

Kiểm tra trước và sau khi dạy ôn nội dung này đối với nhóm học sinh ôn thi HSG lớp 12, chấm và đánh giá từng bài để biết được khả năng tư duy của các em trước và sau khi học bài này

2.4.3 Phương pháp thực nghiệm

Trong nhóm học sinh ôn thi HSG 12 trường THPT Triệu Sơn 6, trước thực nghiệm kiểm tra 1 bài 60 phút để đánh giá chất lượng và làm cơ sở phân loại HS.

Trong trang 18, 19 : Ví dụ 30 được trích từ TLTK số 4 trong đó cách giải 1 là của tác giả

Kết quả:

stt	Số bài KT	Khá - giỏi		Trung bình		Yếu - kém	
		SL	TL %	SL	TL %	SL	TL %
1	10	2	20	5	50	3	30

Ngay sau khi thực nghiệm kiểm tra một bài 90 phút để đánh giá khả năng nắm vững kiến thức của học sinh. Sau đó tôi tiến hành chấm bài kiểm tra trên thang điểm 10 và so sánh kết quả thu được với trước thực nghiệm

stt	Số bài KT	Khá - giỏi		Trung bình		Yếu - kém	
		SL	TL %	SL	TL %	SL	TL %
1	10	5	50	3	30	2	20

- Tỷ lệ HS đạt điểm từ trung bình trở lên ở bài kiểm tra sau thực nghiệm cao hơn trước thực nghiệm, điều này chứng tỏ: HS trung bình được làm việc với những bài tập vừa sức sẽ nắm bắt được kiến thức cơ bản tốt hơn, có khả năng vận dụng được kiến thức để làm những bài tập ở mức độ vận dụng thấp.

- Tỷ lệ HS đạt điểm giỏi ở bài kiểm tra sau TN cao hơn so trước thực nghiệm. Điều này cho thấy, HS khá giỏi phát huy được năng lực tư duy sáng tạo khi được giao những nhiệm vụ phù hợp với năng lực của mình.

Qua theo dõi, tôi thấy rằng: Không khí học tập của nhóm sôi nổi, tích cực hơn, có tinh thần hợp tác; HS tự phấn khởi, tin hơn trong học tập. Trình độ của HS dần được nâng lên, nhất là HS khá giỏi, các em chiếm lĩnh kiến thức khá tốt

3. KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ

3.1. Kết luận

Đề tài đã giải quyết được một số vấn đề :

- + Hệ thống hoá một số vấn đề lí luận về tư duy hàm, làm rõ được tính ưu việt của việc vận dụng tính chất hàm để giải các bài toán phương trình, trang bị cho học sinh một số kĩ năng tư duy logic,
- + Đã nêu được thực trạng việc dạy và học môn Toán ở trường THPT nói chung và trường THPT Triệu Sơn 6 nói riêng hiện nay.
- + Đã đề xuất và xây dựng được hệ thống bài tập vận dụng tính chất hàm số trong các bài toán phương trình, phần nào rèn luyện cho học sinh kĩ năng liên hệ giữa các bài toán về phương trình, bất phương trình và các tính chất của hàm số
- + Kết quả thực nghiệm cho thấy hiệu quả của việc bồi dưỡng năng lực tư duy hàm cho học sinh, không chỉ trang bị cho các em một số kiến thức toán học, mà còn bồi dưỡng cho các em năng lực, phẩm chất của con người trong thời đại ngày nay, đó cũng là một trong các mục tiêu giáo dục hiện nay.

3.2. Kiến nghị.

3.2.1. Kiến nghị đối với Bộ và Sở giáo dục

- Cần hỗ trợ, tạo điều kiện hơn nữa về cơ sở vật chất, các phương tiện dạy học như: các loại máy chiếu, các phòng chức năng, đồ dùng dạy học, các tư liệu tham khảo. Để tạo điều kiện cho giáo viên có thể thực hiện đổi mới phương pháp dạy học theo hướng tích cực phát huy tối đa tính tự học của học sinh
- Tổ chức các lớp chuyên đề tập huấn cho giáo viên để tìm tòi so sánh các phương pháp mới trong giảng dạy, cách tiếp cận vấn đề giữa chương trình cũ và chương trình mới từ đó giáo viên có thể vận dụng phù hợp với đối tượng học sinh.

3.2.2. Đối với các trường phổ thông.

- Không ngừng yêu cầu giáo viên tự học, tự bồi dưỡng để nâng cao năng lực chuyên môn, kiên trì, tích cực đổi mới phương pháp trong giảng dạy nhằm phát huy tốt năng lực học của trò và dạy của thầy.

XÁC NHẬN CỦA HIỆU TRƯỞNG

Thanh Hóa, ngày 15 tháng 05 năm 2017

Tôi xin cam đoan đây là SKKN của mình viết,
không sao chép sáng kiến của người khác.

Dương Đình Dũng

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO THANH HÓA
TRƯỜNG THPT TRIỆU SƠN 6

SÁNG KIẾN KINH NGHIỆM

BỒI DƯỠNG NĂNG LỰC TƯ DUY HÀM CHO HỌC SINH
THÔNG QUA CÁC BÀI TOÁN PHƯƠNG TRÌNH

Người thực hiện : Dương Đình Dũng
Chức vụ : Giáo viên
SKKN thuộc lĩnh vực môn : Toán

THANH HÓA NĂM 2017

MỤC LỤC SÁNG KIẾN KINH NGHIỆM

Mục	Nội dung	Trang
1	MỞ ĐẦU	1
1.1	Lí do chọn đề tài	1
1.2	Mục đích nghiên cứu	2
1.3	Đối tượng nghiên cứu	2
1.4	Phương pháp nghiên cứu	2
2	NỘI DUNG CỦA SÁNG KIẾN KINH NGHIỆM	2
2.1	Cơ sở lí luận của sáng kiến kinh nghiệm	2
2.2	Thực trạng vấn đề trước khi áp dụng sáng kiến kinh nghiệm	3
2.3	Các sáng kiến kinh nghiệm hoặc các giải pháp đã sử dụng để giải quyết vấn đề	4
2.3.1	Phương trình chứa căn thức	4

2.3.2	Phương trình mũ	8
2.3.3	Phương trình logarit	13
2.4	Hiệu quả của sáng kiến kinh nghiệm đối với hoạt động giáo dục, với bản thân, đồng nghiệp và nhà trường.	19
3	KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ	20
3.1	Kết luận	20
3.2	Kiến nghị	20

Mẫu 1 (2)

DANH MỤC
SÁNG KIẾN KINH NGHIỆM ĐÃ ĐƯỢC HỘI ĐỒNG SÁNG KIẾN KINH
NGHIỆM NGÀNH GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO HUYỆN, TỈNH VÀ CÁC CẤP
CAO HƠN XẾP LOẠI TỪ C TRỞ LÊN

Họ và tên tác giả: Dương Đình Dũng

Chức vụ và đơn vị công tác: Giáo viên trường THPT Triệu Sơn 6

TT	Tên đề tài SKKN	Cấp đánh giá xếp loại (Ngành GD cấp huyện/tỉnh; Tỉnh...)	Kết quả đánh giá xếp loại (A, B, hoặc C)	Năm học đánh giá xếp loại
1.	Nâng cao hiệu quả dạy học hình học không gian thông qua sử dụng phép tương tự	Ngành Giáo dục cấp tỉnh	B	2010-2011

	hoá trong việc dạy học chương “Véc tơ trong không gian và quan hệ vuông góc - lớp 11 - chương trình chuẩn			
2.	Nâng cao hiệu quả dạy và học bài “Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng” Hình học 11 THPT bằng phương pháp dạy học phân hoá	Ngành Giáo dục cấp tỉnh	C	2012- 2013

* Liệt kê tên đề tài theo thứ tự năm học, kể từ khi tác giả được tuyển dụng vào
Ngành cho đến thời điểm hiện tại.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Các phương pháp giải phương trình, bất phương trình, hệ phương trình vô
tỷ – Lê Hồng Đức - Nhà xuất bản Giáo dục, 2010.
2. Mạng internet: <http://toancapba.net>
3. Đề thi tuyển sinh đại học, cao đẳng các khối A, B môn Toán từ năm 2005
đến năm 2012
4. Tạp chí Toán học tuổi trẻ.

