# SÖ DUNG CONG THÖC VE SO PHAN TÖ CUA TAP HÔP
# ÑE GIAI CAC BAI TOAN SUY LUAN

---------------------------------

**I) <u>Cac tính chat cô ban ve so phan tö cua tap hôp höu han</u>:**

*Tính chat 1: Neu A,B la hai tap hôp bat kì neu $A \cap B = \varnothing \Rightarrow |A \cup B| = |A| + |B|$

*Tính chat 2: Vôi hai tap hôp höu han , ta luon co: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

*Tính chat 3: Vôi A, B la cac tap hôp bat kì: $|A \cup B| \le |A| + |B|$. Dau "=" xay ra khi va chæ khi $A \cap B = \varnothing$.

*Tính chat 4: Vôi A,B, C la cac tap hôp bat kì , ta luon co: $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C|$

*Tính chat 5: Vôi A,B la hai tap hôp bat kì, ta co: Neu $A \subset B \Rightarrow |A \setminus B| = |A| - |B|$.

*Tính chat 6: Cho $A_1$, $A_2$, $A_3$,.., $A_n$ la cac tap hôp bat kì. Ta co:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{k=1}^{n}\left[(-1)^{k+1}.\sum_{1 \le l_1 \le l_2 \le \ldots \le l_k \le n}\left|\bigcap_{j=1}^{k} A_{l_j}\right|\right]$$

**II) <u>Mot so bai toan suy luan</u>:**

**<u>Bai 1:</u> Trong mot ñe thi co 3 cau ve 3 chu ñe : So hoc, Giai tích, Hình hoc. Trong so 60 thí sinh dö thi co 48 thí sinh giai ñöôc cau So hoc, 40 thí sinh giai ñöôc cau Giai tích, 32 thí sinh giai ñöôc cau Hình hoc. Co 57 thí sinh giai ñöôc cau So hoc hoac Giai tích, 50 thí sinh giai ñöôc cau Giai tích hoac Hình hoc, 25 thí sinh giai ñöôc ca hai cau So hoc va Hình hoc, 15 thí sinh giai ñöôc ca 3 cau. Hoi co bao nhieu thí sinh khong giai ñöôc cau nao?**

**<u>Giai:</u>** Goi T la tap hôp tat ca thí sinh. A,B,C la cac tap hôp thí sinh giai ñöôc cac cau So hoc, Giai tích, Hình hoc. Ta co: $|A \cap B| = |A| + |B| - |A \cup B|$=48+40-57=31

$|B \cap C| = |B| + |C| - |B \cup C|$=40+32-50=22

Do ño: $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C|$

= 48+40+32-31-22-25+15= 57

Vì $(A \cup B \cup C) \subset T$ nen ta co: $|T \setminus (A \cup B \cup C)| = |T| - |A \cup B \cup C|$=60-57=3.

Vay co tat ca 3 thí sinh khong giai ñöôc cau nao.

**<u>Bai 2:</u> Khi ñieu tra ket qua hoc tap cua mot hoc ô cac mon Toan, Lí, Hoa, ngöôi ta thay:**

**-Co 19 hoc sinh khong gioi mon nao.**

**-Co 18 hoc sinh gioi mon Toan, 13 hoc sinh gioi Hoa, 17 hoc sinh gioiu Lí.**

**-Co 10 hoc sinh gioi mon Toan va Lí, 9 hoc sinh gioi mon Lí va Hoa, 10 hoc sinh gioi Toan va Hoa.**

**Hoi co tat ca bao nhieu hoc sinh gioi ô ca 3 mon?**

**<u>Giai:</u>** Goi T la tap hôp tat ca cac hoc sinh cua lôp. A, B, C la tap hôp cac hoc sinh gioi ô mon Toan, Lí, Hoa. Ta co: So hoc sinh gioi ít nhat mot mon la:

$|A \cup B \cup C| = |T| - |T \setminus (A \cup B \cup C)|$=45-19=26

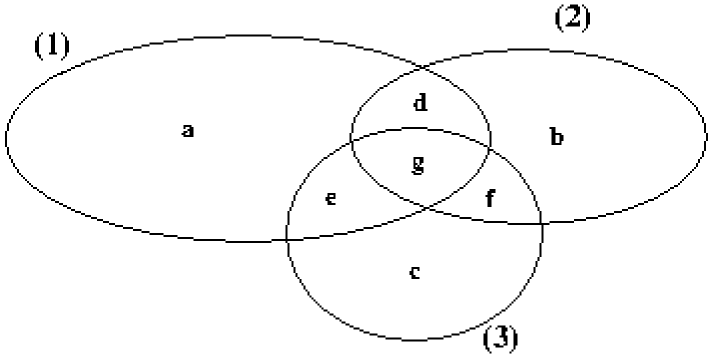
Suy ra: $|A \cap B \cap C| = -(|A| + |B| + |C|) + |A \cap B| + |B \cap C| + |C \cap A| + |A \cap B \cap C|$=

26-18-17-13+10+9+10= 7.

Do ño, so hoc sinh gioi ô ca 3 mon la 7.

**<u>Bai 3:</u> Trong mot kì thi Toan, ngöôi ta cho 3 bai 1,2,3. Trong ño: 25 thí sinh giai ñöôc ít nhat mot bai. Trong cac thí sinh giai ñöôc 1 bai thì so thí sinh giai ñöôc bai 2 gap ñoi so thí sinh giai ñöôc bai 3. So thí sinh chæ giai ñöôc bai 1 nhieu hôn so thí sinh khac cung giai ñöôc bai 1 la 1 ngöôi. Hoi so thí sinh chæ giai ñöôc bai 2 la bao nhieu neu trong so thí sinh chæ giai ñöôc 1 bai thì mot nöa la khong giai ñöôc bai 1?**

**<u>Giai:</u>**Bieu ño Ven:




Tren bieu ño Ven, ta ñat cac ñöông cong khep kín (1), (2),(3) lan löôut la cac vung chöa cac hoc sinh giai ñöôc cac bai toan so 1,2,3. Kí hieu a, b, c, d, e, f, g la phan chung va rieng giöa cac vung nhö hình ve. Theo ñe bai ta co:

b+f=2(c+f) (1)

a=d+e+g+1 (2)

a+b+c+d+e+f=25 (3)

a+b+c=2(c+b+f) (4)

Ta can tính b: Tö cac he thöc tren, ta co: 4b+c=26 va $b \geq 2c$ .Giai he PT tìm nghiem nguyen tren, suy ra b=6.

Vay co tat ca 6 thí sinh chæ giai ñöôc ñung mot bai 2.

**<u>Bai 4:</u> Tìm hieu ket qua hoc tap ô mot lôp hoc, ngöôi ta nhan thay rang:**

**-Hôn 2/3 so hoc sinh ñat ñiem gioi ô mon Toan cung ñong thôi ñat ñiem gioi ô mon Vat lí.**

**-Hôn 2/3 so hoc sinh ñat ñiem gioi ô mon Vat lí cung ñong thôi ñat ñiem gioi ô mon Van.**

**-Hôn 2/3 so hoc sinh ñat ñiem gioi ô mon Van cung ñong thôi ñat ñiem gioi ô mon Lòch sö.**

**-Hôn 2/3 so hoc sinh ñat ñiem gioi ô mon Lòch sö cung ñong thôi ñat ñiem gioi ô mon Toan.**

**Chöng minh rang: trong lôp hoc noi tren, co ít nhat mot hoc sinh ñat ñiem gioi ô ca 4 mon Toan, Vat lí, Van va Lòch sö.**

(Ñe thi HSG cap Quoc gia THPT 2005)

**<u>Giai:</u>** Goi T, L, V, S la tap hôp cac hoc sinh ñat ñiem gioi ô cac mon Toan, Lí, Van, Sö.

Ñat $T_1 = T \cap L, L_1 = L \cap V, S_1 = V \cap S \Rightarrow \left|T_1 \cap L_1 \cap S_1\right| = \left|T \cap L \cap V \cap S\right|$. Theo gia thiet thì:

$|T_1| > \frac{2}{3}|T|, |L_1| > \frac{2}{3}|L|, |S_1| > \frac{2}{3}|S|$. Gia sö T la tap hôp co nhieu phan tö nhat trong 4 tap hôp T, L, V, S. Ta co:

$$|T_1 \cap L_1| = |T_1| + |L_1| - |T_1 \cup L_1| > \frac{2}{3}|T| + \frac{2}{3}|L| - |L| = \frac{2}{3}|T| - \frac{1}{3}|L| = \frac{1}{3}|T| - \frac{1}{3}(|T| - |L|) \geq \frac{1}{3}|T|$$

$$\Rightarrow |T_1 \cap L_1 \cap S_1| = |T_1 \cap L_1| + |S_1| - |(T_1 \cap L_1) \cup S_1| > \frac{1}{3}|T| + \frac{2}{3}|S| - |S| \geq \frac{1}{3}(|T| - |L|) \geq 0$$

Tö ñay suy tap hôp $T \cap L \cap V \cap S$ co ít nhat 1 phan tö hay lôp hoc co ít nhat 1 hoc sinh ñat ñiem gioi ô ca 4 mon Toan, Lí, Van, Sö. (ñpcm).

***Cach khac:** Ñe ñôn gian ta kí hieu AB la hoc sinh ñat ñiem gioi ô 2 mon A va B.

Theo gia thiet ta co: so hoc sinh ñat ñiem gioi Toan va Lí nhieu hôn 2/3 so hoc sinh gioi Toan, suy ra: so hoc sinh gioi Toan va Lí nhieu hôn 2 lan so hoc sinh ñat ñiem gioi ô mon Toan nhöng khong ñat ñiem gioi ô mon Lí. Do ño:

TL+TLV+TLS+TLVS > 2 (T+TV+TS+TVS)

Töông tö:

LV+LVS+LVT+LVTS > 2 (L+LT+LS+LVS)
VS+VST+VSL+VSTL > 2 (V+VT+VL+VTL)
ST+STL+STV+STVL > 2 (S+SV+SL+SVL)

Cong töng vei cac BÑT trein, suy ra: 4TLVS > 2(T+L+V+S)+3(TL+LV+VS+ST)>0. Ta coi ñpcm.

**<u>Bai 5:</u> Cho n, k la cac soi nguyein döông thoa ñieu kiein n > $k^2$-k+1 va n tap hôip $A_1$, $A_2$, $A_3$,...$A_n$ trong ñoi : $\left|A_i\right| = k, \left|A_i \cup A_i\right| = 2k-1, \forall i \neq j$. Hay tính: $\left|A_i \cap A_j\right|, \left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right|$.**

**<u>Giai:</u>** Töi gia thiet suy ra: $\left|A_i \cap A_j\right| = \left|A_i\right| + \left|A_j\right| - \left|A_i \cup A_j\right| = 2k - (2k-1) = 1$.

Ñieu nay coi nghóa la bat kì 2 tap hôip nao coi trong n tap hôip ña cho ñeu coi chung ñuing 1 phan töi. Goi a la mot phan töi cua tap hôip $A_1$. Do n > $k^2$-k+1 nein coi ít nhat k tap hôip cung chöia a. Khoing mat tính tong quat, gia söi ñoi la $A_2$, $A_3$, $A_4$,.... $A_{k+1}$ .Gia söi ton tai m>k+1 sao cho $A_m$ khoing coi chöia phan töi a. Do: $\left|A_m \cap A_i\right| = 1, \forall i = \overline{1, k+1} \Rightarrow \exists b_i : \left\{b_i\right\} = A_m \cap A_i$.

Ta thay rang: $b_i \neq b_j, i \neq j$ vì neiu ngöôic lai hai tap hôip $A_i$,$A_j$ cung chöia $b_i$ va a. Ñay la ñieu mau thuain.

Töi ñoi suy ra: $A_m$ chöia ít nhat k+1 phan töi khac nhau, ñay cung la ñieu mau thuain. Vay ñieu gia söi ôi trein la sai, suy ra tat ca cac tap hôip ñeu chung nhau ñuing 1 phan töi. Ta ñat:

$$B_i = A_i \setminus \{a\} \Rightarrow \begin{cases} B_i \cap B_j = \varnothing, \forall i \neq j \\ \left|B_i\right| = k-1, i = \overline{1,n} \end{cases} \Rightarrow \left|\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right| = n(k-1) \Rightarrow \left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = n(k-1)+1$$

**<u>Bai 6:</u> Goi A la tap hôip cac soi nguyein döông khoing vöôit qua 2008. Hoi B la tap hôip con cua tap hôip A va chöia cac soi khoing chia heit cho 2, 3, 5, 7 coi bao nhieu phan töi ?**

**<u>Giai:</u>** Goi C, D, E, F la cac tap con cua A va chöia cac phan töi chia heit cho 2,3,5,7.

Roi rang: $B = A/(C \cup D \cup E \cup F) \Rightarrow \left|B\right| = \left|A\right| - \left|C \cup D \cup E \cup F\right|$.

Ta coi: C chöia cac soi nguyein döông khoing vöôit qua 2008, chia heit cho 2 , nghóa la C chöia cac phan töi coi dang 2k, trong ñoi $1 \le k \le \left[\frac{2008}{2}\right]$, k nguyein döông. Suy ra: $\left|C\right| = \left[\frac{2008}{2}\right] = 1004$. Töông töi: $\left|D\right| = \left[\frac{2008}{3}\right] = 669, \left|E\right| = \left[\frac{2008}{5}\right] = 401, \left|F\right| = \left[\frac{2008}{7}\right] = 286$

Ta sei tính soi phan töi cua cac tap hôip chia heit ñuing trong soi ña cho. Ta coi:

$C \cap D$ la tap hôip cac soi nguyein döông khoing vöôit qua 2008, chia heit ñoing thôi cho 2 va 3, töic la chia heit cho 6, suy ra: $\left|C \cap D\right| = \left[\frac{2008}{6}\right] = 334$. Töông töi:$\left|C \cap E\right| = \left[\frac{2008}{10}\right] = 200$,

$$\left|C \cap F\right| = \left[\frac{2008}{14}\right] = 143, \left|D \cap E\right| = \left[\frac{2008}{15}\right] = 133, \left|D \cap F\right| = \left[\frac{2008}{21}\right] = 95, \left|E \cap F\right| = \left[\frac{2008}{35}\right] = 57$$

Tiep theo, ta lai tính soi phan töi cua cac tap hôip la tap con cua A chia heit cho ñuing 3 trong 4 soi ña cho. Cung töông töi:

$$\left|C \cap D \cap E\right| = \left[\frac{2008}{30}\right] = 66, \left|C \cap D \cap F\right| = \left[\frac{2008}{42}\right] = 47 \; \left|C \cap E \cap F\right| = \left[\frac{2008}{70}\right] = 28, \left|D \cap E \cap F\right| = \left[\frac{2008}{105}\right] = 19$$

Cuoi cung soi phan töi cua tap con ca A va chia heit cho 2,3,5,7 la :$\left|C \cap D \cap E \cap F\right| = \left[\frac{2008}{210}\right] = 9$

Suy ra: $$\begin{aligned} &\left|C \cup D \cup E \cup F\right| = \left|C\right| + \left|D\right| + \left|E\right| + \left|F\right| - \left(\left|C \cap D\right| + \left|C \cap E\right| + \left|C \cap F\right| + \left|D \cap E\right| + \left|D \cap F\right| + \left|E \cap F\right|\right) + \\ &+\left(\left|C \cap D \cap E\right| + \left|C \cap D \cap F\right| + \left|C \cap E \cap F\right| + \left|D \cap E \cap F\right|\right) - \left|C \cap D \cap E \cap F\right| \end{aligned}$$

=(1004+669+401+286)-(334+200+143+133+95+57)+(66+47+28+19)-9=1549.

Suy ra: $|B| = |A| - |C \cup D \cup E \cup F| = 2008 - 1549 = 459$ . Vaày soá phaàn töû cuûa taäp hôïp B laø 459.

Qua caùc baøi toaùn treân, ta thaáy raèng coâng thöùc veà soá phaàn töû cuûa moät soá taäp hôïp tuy ñôn giaûn nhöng coù nhieàu öùng duïng trong giaûi caùc baøi toaùn suy luaän phöùc taïp. Haõy söû duïng nhöõng ñieàu ñaõ hoïc ñöôïc töø caùc baøi toaùn treân ñeå giaûi caùc baøi taäp sau:

**III)Baøi taäp aùp duïng:**

**Baøi 1: Moät lôùp hoïc coù 42 hoïc sinh, trong ñoù coù 26 hoïc sinh gioûi Toaùn, 24 hoïc sinh gioûi Hoùa, 21 hoïc sinh gioûi Sinh, 35 hoïc sinh gioûi Toaùn hoaëc Sinh, 35 hoïc sinh gioûi Toaùn hoaëc Hoùa, 32 hoïc sinh gioûi caû Hoùa hoaëc Sinh, 11 hoïc sinh gioûi caû 3 moân. Hoûi:**

**-Coù bao nhieâu hoïc sinh chæ gioûi ñuùng moät moân?**

**-Coù bao nhieâu hoïc sinh khoâng gioûi moân naøo?**

**Baøi 2: Trong kì thi tuyeån sinh vaøo moät tröôøng Ñaïi hoïc, ngöôøi ta thaáy: coù 58 thí sinh ñöôïc ñieåm 10 ôû moân Toaùn, 47 thí sinh ñaït ñieåm 10 ôû moân Lí, 42 thí sinh ñaït ñieåm 10 ôû moân Hoùa, 87 thí sinh ñaït ñieåm 10 ôû moân Toaùn vaø Lí, 76 thí sinh ñaït ñieåm 10 ôû moân Lí vaø Hoùa, 82 thí sinh ñaït ñieåm 10 ôû moân Toaùn vaø Hoùa, coù 5 thí sinh ñaït ñieåm 10 ôû caû 3 moân Toaùn, Lí, Hoùa. Hoûi:**

- **Coù bao nhieâu thí sinh ñaït ít nhaát moät ñieåm 10?**
- **Coù bao nhieâu thí sinh ñaït ñuùng 1 ñieåm 10?**

**Baøi 3: Hoûi töø caùc soá1,2,3,4,5 coù theå laäp ñöôïc bao nhieâu soá thoûa maõn moät trong 2 ñieàu kieän:**
**a/ Trong moãi soá, moãi chöõ soá coù maët ñuùng 2 laàn?(duøng kieán thöùc veà taäp hôïp, khoâng neân söû duïng hoaùn vò laëp do khoâng coù trong chöông trình).**
**b/ Trong moãi soá, hai chöõ soá gioáng nhau khoâng ñöùng caïnh nhau?**

**(Ñeà thi HSG caáp Quoác gia 2004)**

**Baøi 4: Cho 167 taäp hôïp $A_1$, $A_2$, $A_3$,...$A_{167}$ thoûa maõn caùc ñieàu kieän sau :**

**(1)** $\sum_{i=1}^{167} |A_i| = 2004$

**(2)** $|A_j| = |A_i| . |A_i \cap A_j|, \forall i, j \in \{1, 2, 3, ...167\}, i \neq j$

**Tính** $\left| \bigcup_{i=1}^{167} A_i \right|$ **(Taïp chí Toaùn hoïc Tuoåi treû thaùng 9/2006).**

***Gôïi yù: chöùng minh raèng taát caû caùc taäp hôïp coù chung vôùi nhau ñuùng moät phaàn töû.**

**Baøi 5: Coù bao nhieâu soá nguyeân döông töø 1 ñeán 250 khoâng chia heát ñoàng thôøi cho ñuùng hai trong ba soá 2, 3, 5, 7? ÑS: 123.**

**Baøi 6: Cho A laø taäp hôïp caùc soá nguyeân döông khoâng vöôït quaù 250. Tìm soá nguyeân döông k lôùn nhaát sao cho khi choïn 5 phaàn töû baát kì trong k phaàn töû laáy töø taäp hôïp A thì cuõng coù ít nhaát 2 soá khoâng nguyeân toá cuøng nhau (k > 5).**

**(Ñeà thi IMO 1991)**

-----------------------------