MỤC LỤC

▶BÀI ❹. KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ MỘT SỐ HÀM SỐ CƠ BẢN

Ⓐ. Tóm tắt kiến thức

❶. SƠ ĐỒ KHẢO SÁT HÀM SỐ

①. Tìm tập xác định của hàm số.

②. Khảo sát sự biến thiên của hàm số:

- Tính đạo hàm y'. Tìm các điểm tại đó y' bằng 0 hoặc đạo hàm không tồn tại.
- Xét dấu y' để chỉ ra các khoảng đơn điệu của hàm số.
- Tìm cực trị của hàm số.
- Tìm các giới hạn tại vô cực, giới hạn vô cực và tìm tiệm cận của đồ thị hàm số (nếu có).
- Lập bảng biến thiên của hàm số.

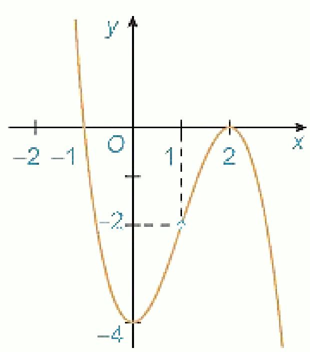
③. Vẽ đồ thị của hàm số dựa vào bảng biến thiên.

Chú ý: Khi vẽ đồ thị, nên xác định thêm một số điểm đặc biệt của đồ thị, chẳng hạn tìm giao điểm của đồ thị với các trục toạ độ (khi có và việc tìm

❷. KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ ĐA THỨC BẬC BA

Chú ý: Đồ thị của hàm số bậc ba $y=ax^3+bx^2+cx+d\,(a\neq 0)$:

- Có tâm đối xứng là điểm có hoành độ thoả mãn $y''=0$,
- hay $x=\dfrac{-b}{3a}$.
- Không có tiệm cận.



Hình 1.28

❸. KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ PHÂN THỨC HỮU TỈ

a) Hàm số phân thức $y=\frac{ax+b}{cx+d}(c\ne 0,ad-bc\ne 0)$

Chú ý: Đồ thị của hàm số phân thức $y=\frac{ax+b}{cx+d}(c\ne 0,ad-bc\ne 0)$:

- Nhận giao điểm của tiệm cận đứng và tiệm cận ngang làm tâm đối xứng;
- Nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận này làm các trục đối xứng.

b) Hàm số phân thức $y=\frac{ax^2+bx+c}{px+q}(a\ne 0,p\ne 0$, đa thức tử không chia hết cho đa thức mẫu]

Chú ý: Đồ thị của hàm số phân thức $y=\frac{ax^2+bx+c}{px+q}(a\ne 0,p\ne 0$, đa thức tử không chia hết cho đa thức mẫu):

- Nhận giao điểm của tiệm cận đứng và tiệm cận xiên làm tâm đối xứng;

Ⓑ. Phân dạng toán cơ bản

Dạng ❶: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số

☞Các ví dụ minh họa

Câu 1: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y=-x^3+3x^2-4$.

Lời giải

- Tập xác định của hàm số: R.
- Sự biến thiên:
- Ta có: $y'=-3x^2+6x$. Vậy $y'=0$ khi $x=0$ hoặc $x=2$.
- Trên khoảng $(0;2)$, $y'>0$ nên hàm số đồng biến. Trên các khoảng $(-\infty;0)$ và $(2;+\infty)$, $y'<0$ nên hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng đó.
- Hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$, giá trị cực tiểu $y_{CT}=-4$.
- Hàm số đạt cực đại tại $x=2$, giá trị cực đại $y_{CD}=0$.
- Giới hạn tại vô cực:

- $\lim ¿_{x \to -\infty} y = \lim ¿_{x \to -\infty} x^3\left(-1+\frac{3}{x}-\frac{4}{x^3}\right)=+\infty$; $\lim ¿_{x \to +\infty} y = \lim ¿_{x \to +\infty} x^3\left(-1+\frac{3}{x}-\frac{4}{x^3}\right)=-\infty ¿¿¿¿$.

- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

- Đồ thị

- Giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung là điểm $(0;-4)$.

- Ta có $y=0 \Leftrightarrow -x^3+3x^2-4=0 \Leftrightarrow -(x-2)^2(x+1)=0 \Leftrightarrow x=-1$ hoặc $x=2$.

- Do đó giao điểm của đồ thị hàm số với trục hoành là các điểm $(-1;0)$ và $(2;0)$.

- Đồ thị hàm số có tâm đối xứng là điểm $(1;-2)$.

Câu 2: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y=x^3-2x^2+2x-1$.

Lời giải

- Tập xác định của hàm số: R.

- Sự biến thiên:

- Ta có: $y'=3x^2-4x+2$. Vậy $y'>0$ với mọi $x \in R$.

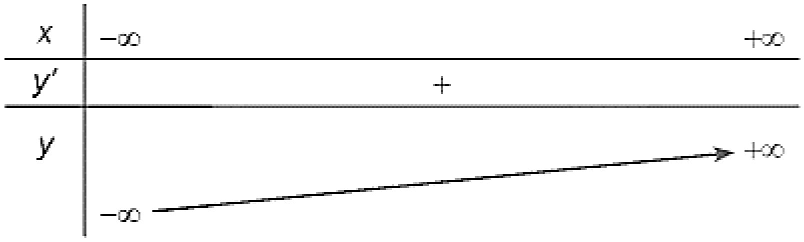
- Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

- Hàm số không có cực trị.

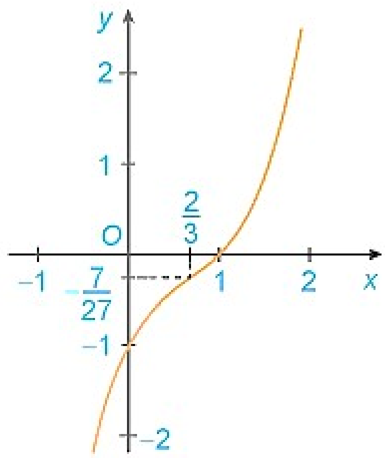
- Giới hạn tại vô cực: $\lim ¿_{x \to -\infty} y = \lim ¿_{x \to -\infty} x^3\left(1-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)=-\infty ¿¿$;

- $\lim\limits_{x \to +\infty} y = \lim\limits_{x \to +\infty} x^3\left(1-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)=+\infty$

- Bảng biến thiên:



- Đồ thị (H.1.29):



Hình 1.29

- Giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung là điểm $(0;-1)$.

- Ta có $y=0 \Leftrightarrow x^3-2x^2+2x-1=0$

  $\Leftrightarrow (x-1)(x^2-x+1)=0 \Leftrightarrow x=1.$

- Do đó giao điểm của đồ thị hàm số với trục hoành là điểm $(1;0)$.

- Đồ thị hàm số có tâm đối xứng là điểm $\left(\frac{2}{3};-\frac{7}{27}\right)$.

Câu 3: Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số $y=x^3-3x^2+2$.

Lời giải

- Tập xác định: R.

- Sự biến thiên:

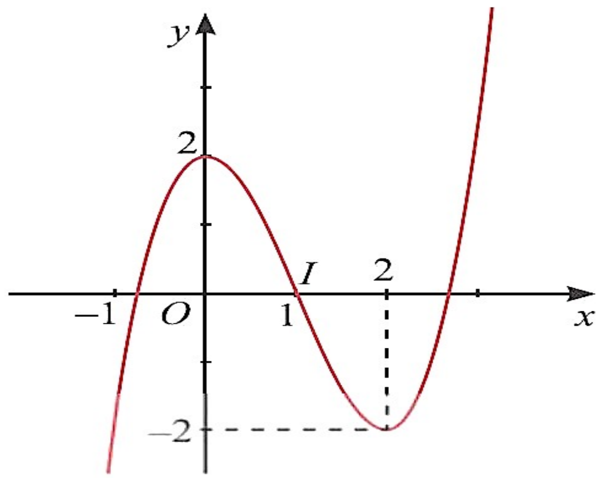
- Chiều biến thiên:

- Đạo hàm $y'=3x^2-6x$; $y'=0 \Leftrightarrow x=0$ hoặc $x=2$.

- Trên các khoảng $(-\infty;0)$ và $(2;+\infty)$, $y'>0$ nên hàm số đồng biến trên mỗi khoảng đó.
- Trên khoảng $(0;2)$, $y'<0$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng đó.
- Cực trị:
- Hàm số đạt cực đại tại $x=0$ và $y_{CD}=2$.
- Hàm số đạt cực tiểu tại $x=2$ và $y_{CT}=-2$.
- Các giới hạn tại vô cực:
- $\lim\limits_{x\to-\infty} y=\lim\limits_{x\to-\infty} x^3\left(1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^3}\right)=-\infty;\ \lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty} x^3\left(1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^3}\right)=+\infty$
- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

- Đồ thị:
- NKhi $x=0$ thì $y=2$ nên $(0;2)$ là giao điểm của đồ thị với trục Oy.
- Ta có $y=0 \Leftrightarrow x^3-3x^2+2=0$
- $\Leftrightarrow x=1$ hoặc $x=1-\sqrt{3}$ hoặc $x=1+\sqrt{3}$.
- Vậy đồ thị của hàm số giao với trục Ox tại ba điểm $(1;0)$, $(1+\sqrt{3};0)$,$(1-\sqrt{3};0)$.
- Điểm $(0;2)$ là điểm cực đại và điểm $(2;-2)$ là điểm cực tiểu của đồ thị hàm số.



Hình 1

- Đồ thị của hàm số đã cho được biểu diễn trên Hình 1.

- Đồ thị của hàm số có tâm đối xứng là điểm $I(1;0)$.

⬩Dạng ❷: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số phân thức hữu tỉ

☞Các ví dụ minh họa

Câu 1: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y=\frac{x+1}{x-2}$.

Lời giải

- Tập xác định của hàm số: $R \setminus \{2\}$.

- Sự biến thiên:

- Ta có: $y'=\frac{-3}{(x-2)^2}<0$ với mọi $x\neq 2$.

- Hàm số nghịch biến trên từng khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$.

- Hàm số không có cực trị.

- Tiệm cận: $\lim ¿_{x\to 2^{-¿}} y=\lim ¿_{x\to 2^{-¿}\frac{x+1}{x-2}=-\infty;\lim ¿_{x\to 2^{+¿}y=\lim ¿_{x\to 2^{+¿}\frac{x+1}{x-2}=+\infty¿}^{¿¿}}^{¿¿}¿$;

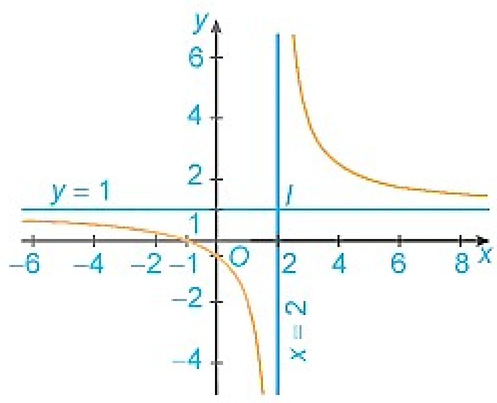
- $\lim_{x\to+\infty} y=\frac{\lim_{x\to+\infty} x+1}{x-2}=1;\ \lim_{x\to-\infty} y=\frac{\lim_{x\to-\infty} x+1}{x-2}=1$

- Do đó, đồ thị của hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x=2$, tiệm cận ngang là đường thẳng $y=1$.

- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y'		$-$	||	$-$	
y	1	↘ $-\infty$	||	$+\infty$ ↘	1

- Đồ thị (H.1.30):



Hình 1.30

- Giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung là điểm $\left(0;-\frac{1}{2}\right)$.

- Giao điểm của đồ thị hàm số với trục hoành là điểm $(-1;0)$.

- Đồ thị hàm số nhận giao điểm ¿$(2;1)$ của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng và nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận này làm trục đối xứng.

Câu 2: Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số $y=\frac{x^2-x-1}{x-2}$.

Lời giải

- Tập xác định của hàm số: $R\setminus\{2\}$.

- Sự biến thiên: Viết $y=x+1+\frac{1}{x-2}$.

- Ta có: $y'=1-\frac{1}{(x-2)^2}=\frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}$. Vậy $y'=0 \Leftrightarrow \frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}=0 \Leftrightarrow x=1$ hoặc $x=3$.

- Trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(3;+\infty)$, $y'>0$ nên hàm số đồng biến trên từng khoảng này.

- Trên các khoảng $(1;2)$ và $(2;3)$, $y'<0$ nên hàm số nghịch biến trên từng khoảng này.

- Hàm số đạt cực đại tại $x=1$ với $y_{C⊕}=1$; hàm số đạt cực tiểu tại $x=3$ với $y_{CT}=5$.

$$\lim \text{¿}_{x\to-\infty} y=\lim \text{¿}_{x\to-\infty}\frac{x^2-x-1}{x-2}=\lim \text{¿}_{x\to-\infty}\frac{x-1-\frac{1}{x}}{1-\frac{2}{x}}=-\infty;\text{¿¿¿}$$

$$\lim \text{¿}_{x\to+\infty} y=\lim \text{¿}_{x\to+\infty}\frac{x^2-x-1}{x-2}=\lim \text{¿}_{x\to+\infty}\frac{x-1-\frac{1}{x}}{1-\frac{2}{x}}=+\infty\text{¿¿¿}.$$

- Tiệm cận: $\lim \text{¿}_{x\to 2^{-\text{¿}}} y=\lim \text{¿}_{x\to 2^{-\text{¿}}\left(x+1+\frac{1}{x-2}\right)=-\infty;\lim \text{¿}_{x\to 2^{+\text{¿}}} y=\lim \text{¿}_{x\to 2^{+\text{¿}}\left(x+1+\frac{1}{x-2}\right)=+\infty\text{¿}}^{\text{¿¿}}\text{¿¿}}^{\text{¿¿}}\text{¿}$;

$$\lim_{x\to+\infty}[y-(x+1)]=\frac{\underset{x\to+\infty}{\lim}\ 1}{x-2}=0;\ \lim_{x\to-\infty}[y-(x+1)]=\frac{\underset{x\to-\infty}{\lim}\ 1}{x-2}=0$$

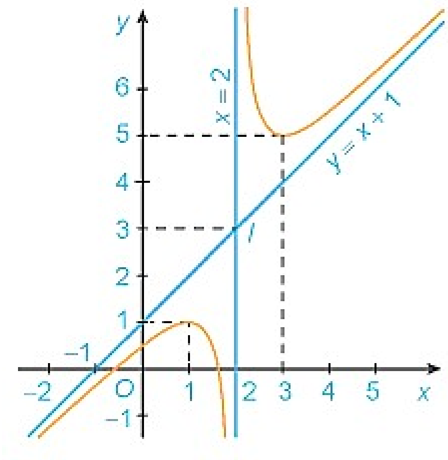
- Do đó, đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x=2$,

- tiệm cận xiên là đường thẳng $y=x+1$.

- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	1	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	5	↗	$+\infty$

- Đồ thị (H.1.31):



Hình 1.31

- Giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung là điểm $\left(0;\frac{1}{2}\right)$.

- Ta có $y=0 \Leftrightarrow \frac{x^2-x-1}{x-2}=0 \Leftrightarrow x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ hoặc $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Do đó giao điểm của đồ thị hàm số với trục hoành là các điểm $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2};0\right)$ và $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2};0\right)$.

- Đồ thị hàm số nhận giao điểm $I(2;3)$ của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng và nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận này làm các trục đối xứng.

Câu 3: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y=\frac{x^2+x-2}{x+1}$.

Lời giải

- Tập xác định của hàm số: $R \setminus \{-1\}$.

- Sự biến thiên:

- Viết $y=x-\frac{2}{x+1}$, ta có $y'=1+\frac{2}{(x+1)^2}>0$ với mọi $x\neq-1$.

- Hàm số đồng biến trên từng khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$.

- Hàm số không có cực trị.

• $\lim \text{¿}_{x\to-\infty} y = \lim \text{¿}_{x\to-\infty} \dfrac{x^2+x-2}{x+1} = \lim \text{¿}_{x\to-\infty} \dfrac{x+1-\dfrac{2}{x}}{1+\dfrac{1}{x}} = -\infty; \text{¿¿¿}$

• $\lim \text{¿}_{x\to+\infty} y = \lim \text{¿}_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+x-2}{x+1} = \lim \text{¿}_{x\to+\infty} \dfrac{x+1-\dfrac{2}{x}}{1+\dfrac{1}{x}} = +\infty \text{¿¿¿}.$

• Tiệm cận: $\lim \text{¿}_{x\to-1^{-\text{¿}}} y = \lim \text{¿}_{x\to--\text{¿}^{-\text{¿}}\left(x-\frac{2}{x+1}\right)=+\infty;\lim \text{¿}_{x\to-1^{+\text{¿}}} y=\lim \text{¿}_{x\to-1^{+\text{¿}}\left(x-\frac{2}{x+1}\right)=-\infty\text{¿}}^{\text{¿¿}}\text{¿¿¿}}^{\text{¿¿}}\text{¿};$

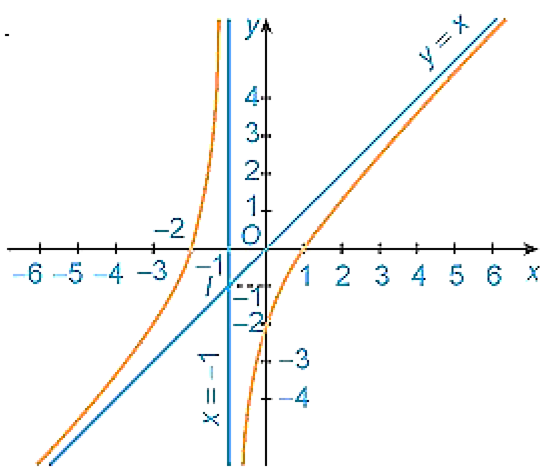
• $\lim\limits_{x\to+\infty}[y-x] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{-2}{x+1}\right) = 0;\ \lim\limits_{x\to-\infty}[y-x] = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{-2}{x+1}\right) = 0$

• Do đó, đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x=-1$, tiệm cận xiên là đường thẳng $y=x$.

• Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$+$	||	$+$	
y	$-\infty$ ↗	$+\infty$	||	$-\infty$ ↗	$+\infty$

• Đồ thị (H.1.32):



Hình 1.32

• Giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung là điểm $(0;-2)$.

- Ta có $y=0 \Leftrightarrow \frac{x^2+x-2}{x+1}=0 \Leftrightarrow x=-2$ hoặc $x=1$. Do đó giao điểm của đồ thị hàm số với trục hoành là các điểm $(-2;0)$ và $(1;0)$.

- Đồ thị hàm số nhận giao điểm ¿$(-1;-1)$ của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng và nhận hai đường phân giác của góc tạo bởi hai đường tiệm cận này làm các trục đối xứng.

•Dạng ❸: Ứng dụng thực tế

☞Các ví dụ minh họa

Câu 1: Giả sử số lượng của một quần thể nấm men tại môi trường nuôi cấy trong phòng thí nghiệm được mô hình hoá bằng hàm số $P(t)=\frac{a}{b+e^{-0,75t}}$, trong đó thời gian t được tính bằng giờ. Tại thời điểm ban đầu $t=0$, quần thể có 20 tế bào và tăng với tốc độ 12 tế bào/giờ. Tìm các giá trị của a và b. Theo mô hình này, điều gì xảy ra với quần thể nấm men về lâu dài?

Lời giải

- Ta có: $P'(t)=\frac{0,75a\,a^{-0,75t}}{\left(b+e^{-0,75t}\right)^2}, t\ge 0$.

- Theo đề bài, ta có: $P(0)=20$ và $P'(0)=12$.

- Do đó, ta có hệ phương trình: $\begin{cases}\frac{a}{b+1}=20\\ \frac{0,75a}{(b+1)^2}=12\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=20(b+1)\\ \frac{15}{b+1}=12.\end{cases}$

- Giải hệ phương trình này, ta được $a=25$ và $b=\frac{1}{4}$.

Câu 2: Giả sử chi phí $C(x)$ (nghìn đồng) để sản xuất x đơn vị của một loại hàng hoá nào đó được cho bởi hàm số $C(x)=30000+300x-2,5x^2+0,125x^3$.

a) Tìm hàm chi phí biên.

b) Tìm $C'(200)$ và giải thích ý nghĩa.

c) So sánh $C'(200)$ với chi phí sản xuất đơn vị hàng hoá thứ 201.

Lời giải

a) Hàm chi phí biên là $C'(x)=300-5x+0,375x^2$.

b) Ta có: $C'(200)=300-5\cdot 200+0,375\cdot 200^2=14300$.

- Chi phí biên tại $x=200$ là 14300 nghìn đồng, nghĩa là chi phí để sản xuất thêm một đơn vị hàng hoá tiếp theo (đơn vị hàng hoá thứ 201) là khoảng 14300 nghìn đồng.

c) Chi phí sản xuất đơn vị hàng hoá thứ 201 là

- $C(201)-C(200)=1004\ 372,625$ - $990000\ =\ 14\ 372,625$ \(nghìn đồng\).

- Giá trị này xấp xỉ với chi phí biên $C'(200)$ đã tính ở câu b.

Câu 3: Một nhà sản xuất cần làm những hộp đựng hình trụ có thể tích 1 lít. Tìm các kích thước của hộp đựng để chi phí vật liệu dùng để sản xuất là nhỏ nhất (kết quả được tính theo centimét và làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).

Lời giải

- Đổi 1 lít ¿ $1000\ cm^3$.

- Gọi $r(\ cm)$ là bán kính đáy của hình trụ, $h(\ cm)$ là chiều cao của hình trụ.

- Diện tích toàn phần của hình trụ là: $S=2\pi r^2+2\pi rh$.

- Do thể tích của hình trụ là $1000\ cm^3$ nên ta có: $1000=V=\pi r^2 h$, hay $h=\dfrac{1000}{\pi r^2}$.

- Do đó, diện tích toàn phần của hình trụ là: $S=2\pi r^2+\dfrac{2000}{r}, r>0$.

- Ta cần tìm r sao cho S đạt giá trị nhỏ nhất.

- Ta có:

$$S'=4\pi r-\frac{2000}{r^2}=\frac{4\pi r^3-2000}{r^2}; S'=0 \Leftrightarrow \pi r^3=500 \Leftrightarrow r=\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}.$$

- Bảng biến thiên:

r	0		$\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$		$+\infty$
$S'(r)$		$-$	0	$+$	
$S(r)$	$+\infty$	$\searrow$	$S\left(\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

- Khi đó: $h=\dfrac{1000}{\pi r^2}=\dfrac{1000}{\pi\sqrt[3]{\dfrac{250000}{\pi^2}}}=\dfrac{100}{\sqrt[3]{250\pi}}$.

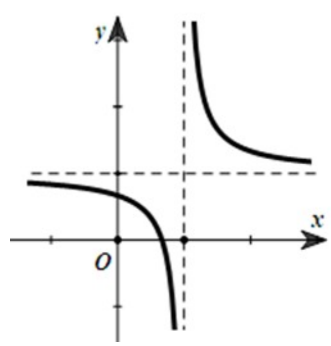
- Vậy cần sản xuất các hộp đựng hình trụ có bán kính đáy $r=\sqrt[3]{\dfrac{500}{\pi}}\approx 5,42\,(cm)$ và chiều cao

$h=\dfrac{100}{\sqrt[3]{250\pi}}\approx 10,84\,(cm)$.

©. Dạng toán rèn luyện

•Dạng ❶: Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 1: Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị như hình vẽ. Chọn mệnh đề đúng?



A. $ac>0$.   **B.** $cd>0$.   **C.** $ab>0$.   **D.** $ad>bc$.

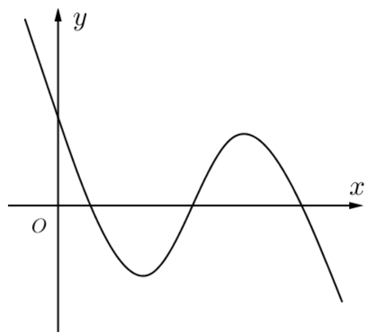
Lời giải

Chọn A

Ta có đồ thị hàm số có tiêm cận ngang là đường thẳng $y = \frac{a}{c}$

Mà tiệm cận ngang nằm phía trên trục hoành nên $\frac{a}{c} > 0 \Rightarrow ac > 0$.

Câu 2: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ. Mệnh đề nào sau đây đúng?



A. $a > 0,\ b > 0,\ c < 0,\ d > 0.$ **B.** $a < 0,\ b < 0,\ c < 0,\ d > 0.$

C. $a < 0,\ b > 0,\ c < 0,\ d > 0.$ **D.** $a < 0,\ b > 0,\ c > 0,\ d < 0.$

Lời giải

Chọn C

Vì đồ thị có phần đuôi hướng xuống nên $a < 0$.

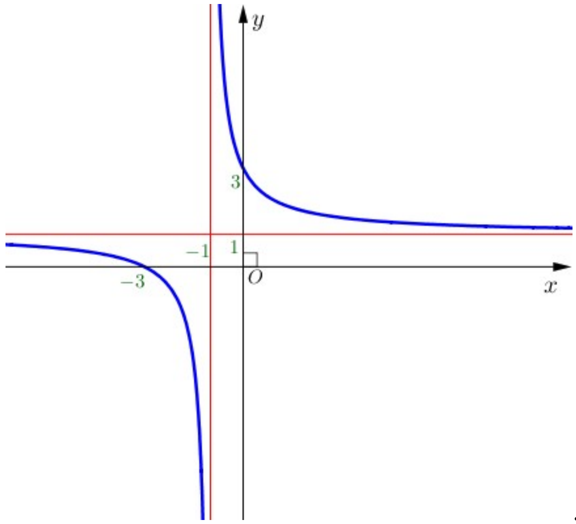
Đồ thị cắt trục tung tại điểm $(0;d)$ nằm phía trên Ox nên $d > 0$.

Dựa vào đồ thị, ta thấy hàm số có hai điểm cực trị $x_1,\ x_2$ với $0 < x_1 < x_2$ và $x_1,\ x_2$ là hai nghiệm của phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow 3ax^2 + 2bx + c = 0$.

Ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{-2b}{3a} > 0 \\ x_1x_2 = \dfrac{c}{3a} > 0 \end{cases}$

Từ đó suy ra $b > 0,\ c < 0$.

Câu 3: Cho hàm số $y = \dfrac{ax+b}{x+1}$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

A. $0<a<b$. **B.** $a<b<0$. **C.** $b<0<a$. **D.** $0<b<a$

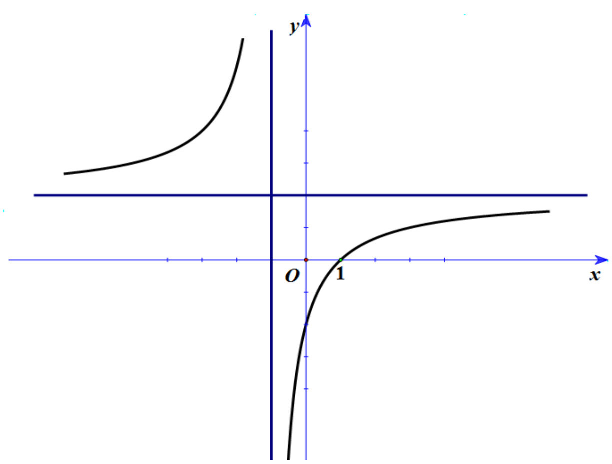
Lời giải

Chọn A

Tiệm cận ngang $y=a$, đồ thị cắt trục tung tại điểm có tọa độ $(0,b)$.

Từ đồ suy ra $a=1,b=3$. Vậy $0<a<b$.

Câu 4: Cho hàm số $y=\dfrac{ax-2}{x+b}$ có đồ thị như hình dưới.



Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $b<a<0$. **B.** $0<b<a$. **C.** $0<a<b$. **D.** $b<0<a$.

Lời giải

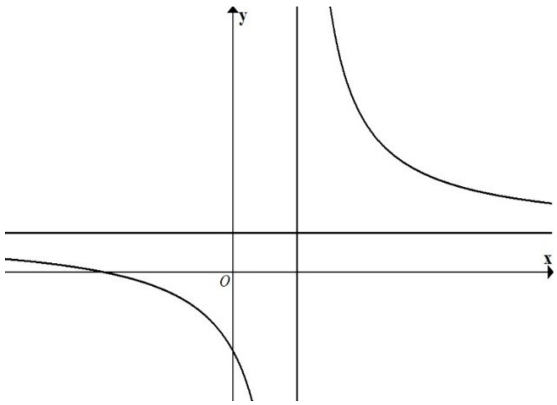
Chọn A

Quan sát đồ thị ta có tiệm cận ngang $y=a>0$ và đường tiệm cận đứng $x=-b>0 \Leftrightarrow b>0$.

Gọi A là giao điểm của đường tiệm cận đứng với Ox, B là giao điểm của đường tiệm cận ngang với Oy và I là giao điểm hai đường tiệm cận, khi đó ta thấy $IA > IB \Leftrightarrow a > b$.

Vậy $0 < b < a$.

Câu 5: Cho hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(d<0)$ có đồ thị như hình vẽ. Khẳng định nào dưới đây là đúng?



A. $a<0;b>0;c<0$. **B.** $a>0;b>0;c>0$. **C.** $a>0;b>0;c<0$. **D.** $a>0;b<0;c>0$.

Lời giải

Chọn C

Dựa vào đồ thị, ta nhận thấy:

+ Đồ thị cắt trục tung tại vị trí có tung độ âm, suy ra $\dfrac{b}{d}<0$, mà $d<0$ vậy $b>0$.

+ Đồ thị cắt trục hoành tại vị trí có hoành độ âm, suy ra $-\dfrac{b}{a}<0$, mà $b>0$ vậy $a>0$.

+ Đồ thị có đường tiệm cận ngang $y=\dfrac{a}{c}>0$, mà $a>0$ vậy $c>0$.

Câu 6: Đồ thị hàm số $y=(x-1)(x^2-4x+4)$ có bao nhiêu điểm chung với trục Ox?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=(x-1)(x^2-4x+4)$ và Ox:

$(x-1)(x^2-4x+4)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$

Vì phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=(x-1)(x^2-4x+4)$ và Ox có 2 nghiệm nên số điểm chung của đồ thị với trục Ox là 2.

Suy ra Chọn A

Câu 7: Đường thẳng $d: y = 3x + 1$ cắt đồ thị (C) của hàm số $y = \dfrac{2x^2 - 2x + 3}{x - 1}$ tại hai điểm phân biệt A, B. Tính độ dài AB.

A. $AB = 4\sqrt{15}$ **B.** $AB = 4\sqrt{2}$ **C.** $AB = 4\sqrt{10}$ **D.** $AB = 4\sqrt{6}$

Lời giải

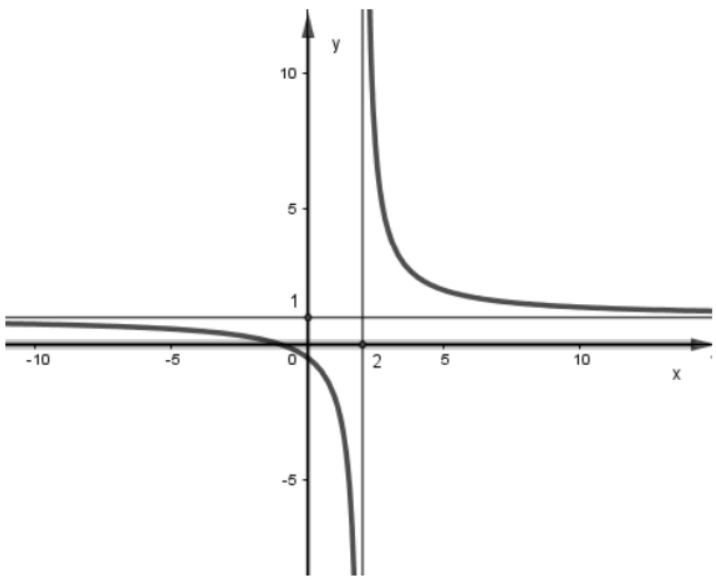
Chọn C

Xét phương trình hoành độ giao điểm:

$$\frac{2x^2 - 2x + 3}{x - 1} = 3x + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ 2x^2 - 2x + 3 = 3x^2 + x - 3x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x^2 - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \Rightarrow y = 7 \\ x = -2 \Rightarrow y = -5 \end{array}\right.$$

Gọi $A(2;7), B(-2;-5) \Rightarrow AB = \sqrt{4^2 + 12^2} = 4\sqrt{10}.$

Câu 8: Cho hàm số $y = \dfrac{ax + 1}{bx - 2}$ có đồ thị như hình vẽ. Tính $T = a + b$.



A. $T = 0$ **B.** $T = 2$ **C.** $T = -1$ **D.** $T = 3$

Lời giải

Chọn B

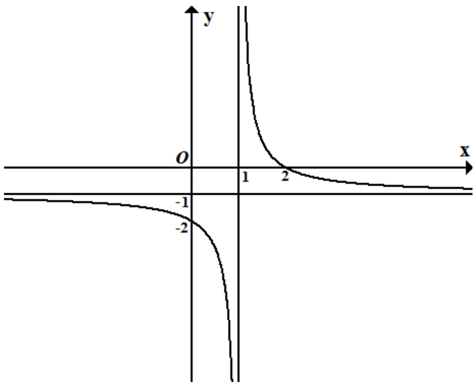
$y' = \dfrac{-2a - b}{(bx - 2)^2}$.

Dựa vào đồ thị hàm số $\Rightarrow$ hàm số nghịch biến trên tập xác định $\Rightarrow -2a - b < 0$ (*).

Đồ thị có hai đường tiệm cận: $x = 2$ và $y = 1$.

Khi đó $\begin{cases} \dfrac{a}{b}=1 \\ \dfrac{2}{b}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases}$ Thỏa mãn $(*)$. Vậy $T=2$.

Câu 9: Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{x+c}$ có đồ thị như hình bên với $a,b,c\in\mathbb{Z}$ Tính giá trị của biểu thức $T=a-3b+2c$?



A. $T=12$. **B.** $T=10$. **C.** $T=-9$. **D.** $T=-7$.

Lời giải

Chọn C

Đồ thị hàm số có $x=1$ là tiệm cận đứng nên $c=-1$.

Đồ thị hàm số có $y=-1$ là tiệm cận ngang nên $a=-1$.

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -2 nên $\dfrac{b}{c}=-2$ do đó $b=2$.

Vậy $T=a-3b+2c=-1-3.2+2(-1)=-9$.

Câu 10: Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=\dfrac{3x+1}{x-3}$ và đường thẳng $y=3$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $\dfrac{3x+1}{x-3}=3 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+1=3x-9 \\ x\neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow 1=-9\,(vl)$.

Vậy đồ thị hàm số $y=\dfrac{3x+1}{x-3}$ và đường thẳng $y=3$ không có điểm chung.

Câu 11: Đồ thị hàm số $y=x^3-3x-3$ cắt trục tung tại điểm có tung độ

A. $y=-1$. **B.** $y=1$. **C.** $y=-3$. **D.** $y=10$.

Lời giải

Chọn C

Cho $x=0 \Rightarrow y=-3$.

Suy ra đồ thị hàm số đã cho cắt trục tung tại điểm có tung độ $y=-3$.

Câu 12: Đồ thị của hai hàm số sau $y=x^3+2x^2+1$ và $y=x^2-x+2$ cắt nhau tại bao nhiêu điểm?

A. 1. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^3+2x^2+1$ và $y=x^2-x+2$ là số nghiệm của phương trình hoành độ giao điểm sau

$$x^3+2x^2+1=x^2-x+2 \Leftrightarrow x^3+x^2+x-1=0.$$

Xét hàm số $y=f(x)=x^3+x^2+x-1$.

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Ta có $y'=3x^2+2x+1=3\left(x+\dfrac{1}{3}\right)^2+\dfrac{2}{3}>0, \forall x\in\mathbb{R}$.

Do đó hàm số $y=x^3+x^2+x-1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$+\infty$
y'		$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, ta suy ra phương trình $f(x)=0$ có duy nhất một nghiệm.

Vậy đồ thị của hai hàm số $y=x^3+2x^2+1$ và $y=x^2-x+2$ cắt nhau tại một điểm.

Chú ý: Từ phương trình hoành độ giao điểm, ta có thể sử dụng máy tính bỏ túi để tính ngay số nghiệm của phương trình bậc ba.

Câu 13: Cho hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d: y=2x-3$. Đường thẳng d cắt (C) tại hai điểm phân biệt A và B. Tọa độ trung điểm của đoạn AB là:

A. $M\left(-\dfrac{3}{2};-6\right)$. **B.** $M\left(\dfrac{3}{4};-\dfrac{3}{2}\right)$. **C.** $M\left(\dfrac{3}{2};0\right)$. **D.** $M\left(\dfrac{3}{4};0\right)$.

Lời giải

Chọn B

Phương trình hoành độ giao điểm là: $\frac{2x-1}{x+1}=2x-3\ (1)$. Điều kiện $x\neq 1$.

Ta có $(1)\Leftrightarrow 2x-1=(x+1)(2x-3)\Leftrightarrow 2x^2-3x-2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=2\\ x=-\frac{1}{2}\end{array}\right.$.

Gọi M là trung điểm của đoạn AB.

Ta có $x_M=\frac{2+\left(-\frac{1}{2}\right)}{2}=\frac{3}{4}$; $y_M=2x_M-3=2.\frac{3}{4}-3=-\frac{3}{2}$.

Vậy tọa độ trung điểm của đoạn AB là: $M\left(\frac{3}{4};-\frac{3}{2}\right)$.

Câu 14: Số giao điểm đồ thị hàm số $y=x^4-x^2-2$ và đường thẳng $y=-2$ là:

A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^4-x^2-2$ và $y=-2$

Ta có phương trình hoành độ giao điểm:

$x^4-x^2-2=-2\Leftrightarrow x^4-x^2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\ x=\pm 1\end{array}\right.$

Vậy đồ thị hàm số $y=x^4-x^2-2$ và $y=-2$ cắt nhau tại 3 điểm.

Câu 15: Biết hai đồ thị hàm số $y=x^3+2x^2-3x+1$ và $y=2x^2-1$ cắt nhau tại hai điểm A,B. Tính độ dài đoạn AB.

A. $\sqrt{73}$. **B.** $\sqrt{37}$. **C.** $5\sqrt{3}$. **D.** $3\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn D

Gọi hàm số $y=x^3+2x^2-3x+1$ có đồ thị là (C_1), hàm số $y=2x^2-1$ có đồ thị là (C_2).

Hoành độ giao điểm của (C_1) và (C_2) là nghiệm của phương trình $x^3+2x^2-3x+1=2x^2-1\Leftrightarrow x^3-3x+2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\ x=-2\end{array}\right.$.

+) Với $x=1$ ta có $y=1$.

+) Với $x=-2$ ta có $y=7$.

Do đó (C_1) và (C_2) cắt nhau tại hai điểm $A(-1;1)$, $B(-2;7)$.

Ta có $AB=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(-2-1)^2+(7-1)^2}=3\sqrt{5}.$

Vậy độ dài đoạn AB bằng $3\sqrt{5}$.

Câu 16: Gọi M,N là giao điểm của đồ thị các hàm số $y=\dfrac{2x+2}{x-1}$ và $y=x+1$. Trung điểm I của đoạn MN có hoành độ là

A. -1. **B.** 1, 5. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

Phương trình hoành độ giao điểm của 2 đồ thị

$\dfrac{2x+2}{x-1}=x+1$ $(x\neq 1)$

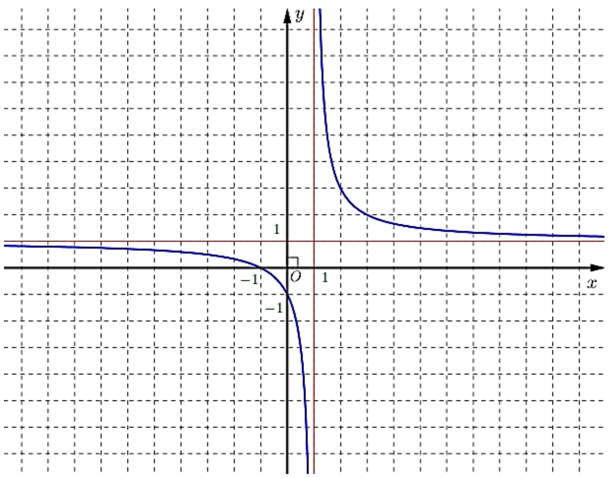
$\Leftrightarrow 2x+2=(x+1)(x-1)$

$\Leftrightarrow x^2-2x-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3\Rightarrow y=4 \\ x=-1\Rightarrow y=0 \end{array}\right.$.

Giao điểm của hai đồ thị là $M(3;4)$ và $N(-1;0)$.

Trung điểm I của MN là $I(1;2)$.

Câu 17: Đường cong trong hình bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



A. $y=\dfrac{x-1}{-x-1}$. **B.** $y=\dfrac{x+1}{x-1}$. **C.** $y=\dfrac{x+1}{-x+1}$. **D.** $y=\dfrac{x-1}{x+1}$

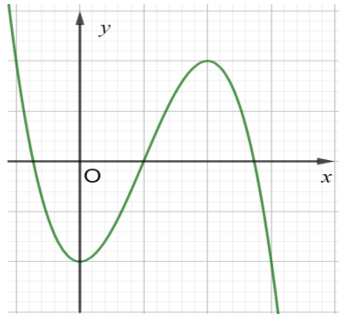
Lời giải

Chọn B

Vì đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=1$, tiệm cận ngang $y=1$ nên loại **Chọn B**, **C.**

Vì đồ thị của hàm nghịch biến nên ta loại **D** **c**họn **B.**

Câu 18: Đường cong trong hình bên dưới là đồ thị của hàm số nào trong bốn hàm số dưới đây?



A. $y=x^3-3x^2+2$. **B.** $y=-x^3+3x+2$. **C.** $y=-x^3+3x^2-2$. **D.** $y=x^3-3x+2$.

Lời giải

Chọn C

Dựa vào đồ thị hàm số đã cho ta có hàm số cần tìm là hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ với $a<0$ Do đó loại phương án A và **D**

Đồ thị hàm số đã cho cắt trục tung tại điểm có tung độ âm nên $d<0$. Do đó loại phương án **B**

Vậy chỉ có hàm số $y=-x^3+3x^2-2$ thoả yêu cầu bài toán.

Câu 19: Hàm số nào dưới đây có bảng biến thiên như hình bên dưới

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	
y	-1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	-1

A. $y=\dfrac{-x-3}{x-1}$. **B.** $y=\dfrac{-x-2}{x-1}$. **C.** $y=\dfrac{-x+3}{x-1}$. **D.** $y=\dfrac{x+3}{x-1}$.

Lời giải

Chọn C

+ Từ bảng biến thiên, ta nhận thấy hàm số cần tìm có $y'<0,\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$;

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=-1$; $\lim\limits_{x\to 1^+} y=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to 1^-} y=-\infty$.

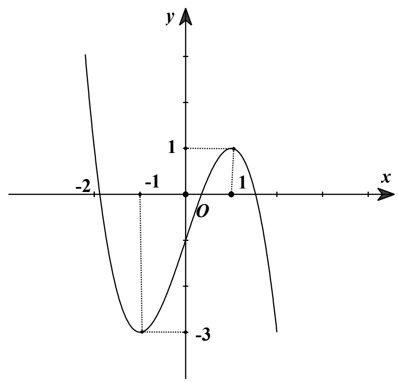
+ Hàm số $y=\dfrac{-x-3}{x-1}$ có $y'=\dfrac{4}{(x-1)^2}>0,\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$ nên loại phương án **A.**

+ Hàm số $y=\dfrac{-x-2}{x-1}$ có $y'=\dfrac{3}{(x-1)^2}>0,\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$ nên loại phương án **B**

+ Hàm số $y=\dfrac{x+3}{x-1}$ có $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=1$ nên loại phương án **D**

+ Hàm số $y=\dfrac{-x+3}{x-1}$ có $y'=\dfrac{-2}{(x-1)^2}<0,\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$; $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=-1$; $\lim\limits_{x\to1^+} y=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to1^-} y=-\infty$ nên chỉ có hàm số $y=\dfrac{-x+3}{x-1}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 20: Đường cong trong hình vẽ là đồ thị của hàm số nào sau đây



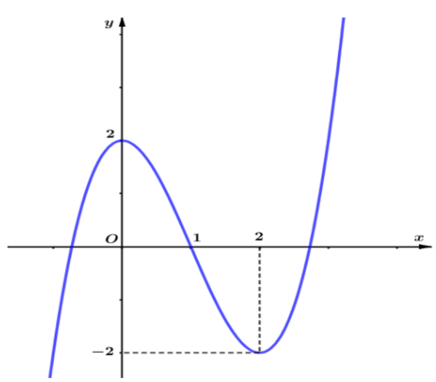
A. $y=x^3-3x-1$. **B.** $y=-x^3+3x-1$. **C.** $y=-x^4+x^2-1$. **D.** $y=-x^3+x-1$

Lời giải

Chọn B

Từ đồ thị ta có đồ thị đi qua 2 điểm $(1;1);(-1;-3)$ thay vào 4 đáp án ta được hàm số cần tìm là $y=-x^3+3x-1$.

Câu 21: Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào trong các hàm số dưới đây?



A. $y=-x^3+3x^2+2$. **B.** $y=x^3-3x^2+2$.

C. $y=x^3-3x+2$. **D.** $y=-x^4+2x^2-2$.

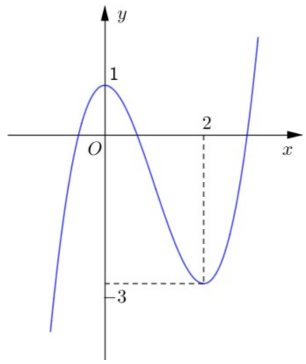
Lời giải

Chọn B

Đồ thị hàm số đi qua điểm $A(2;-2) \Rightarrow$ loại **A, C, D**

Vậy **Chọn B** đúng.

Câu 22: Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



A. $y=x^3+3x^2+1$. **B.** $y=x^3-3x^2$. **C.** $y=-x^3+3x^2+1$. **D.** $y=x^3-3x^2+1$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} y=+\infty; \lim\limits_{x\to-\infty} y=-\infty$.

Suy ra hệ số $a>0$ loại đáp án

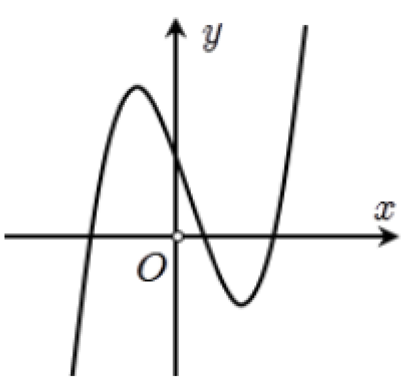
C. $y=-x^3+3x^2+1$.

Mặt khác $y(0)=1$ loại đáp án

B. $y=x^3-3x^2$.

Ta có $y(2)=-3$ loại đáp án $y=x^3+3x^2+1$.

Câu 23: Đường cong ở hình bên là đồ thị của hàm số nào?



A. $y=-x^2+x-1$. **B.** $y=-x^3+3x+1$. **C.** $y=x^4-x^2+1$. **D.** $y=x^3-3x+1$.

Lời giải

Chọn D

Dựa theo hình dáng đồ thị là hàm số bậc 3 có hệ số của x^3 dương nên ta chọn **D.**

Câu 24: Trong các hàm số sau, hàm số nào có đồ thị nhận trục tung làm trục đối xứng?

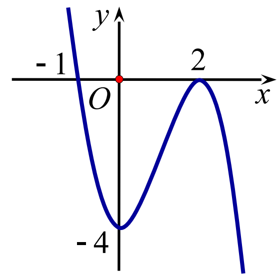
A. $y = x^4 + 3x^2 - 1$. **B.** $y = x^3 - 3x + 2$. **C.** $y = -x^3 + 3x^2 - 1$. **D.** $y = \dfrac{x-1}{x-3}$.

Lời giải

Chọn A

Đồ thị hàm đa thức bậc bốn trùng phương nhận trục tung làm trục đối xứng.

Câu 25: Đồ thị như hình vẽ là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



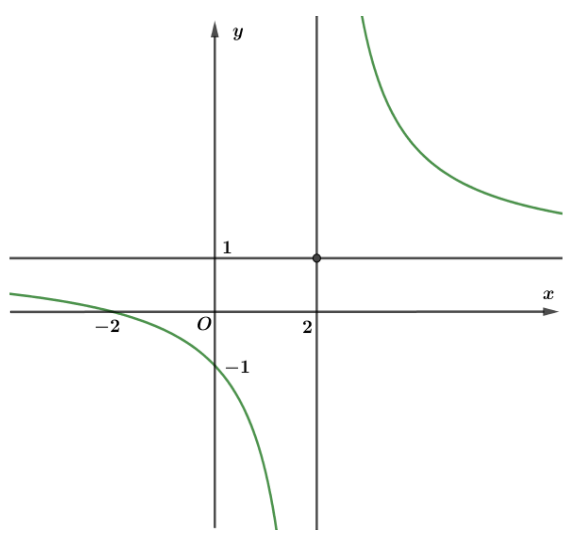
A. $y = x^3 - 3x^2 + 4$ **B.** $y = -x^3 + 3x^2 - 4$ **C.** $y = x^3 - 3x^2 - 4$ **D.** $y = -x^3 - 3x^2 - 4$

Lời giải

Chọn B

Dễ thấy $a > 0$ nên các phương án A và C bị loại. Do $-x^3 + 3x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -1 \end{array}\right.$ nên đồ thị cắt Ox tại hai điểm có hoành độ $\left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -1 \end{array}\right.$. **Chọn B**

Câu 26: Đồ thị sau đây là của hàm số nào?



A. $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$. **B.** $y=\dfrac{x+2}{x-2}$. **C.** $y=\dfrac{x+2}{x+1}$. **D.** $y=\dfrac{x-1}{x+1}$.

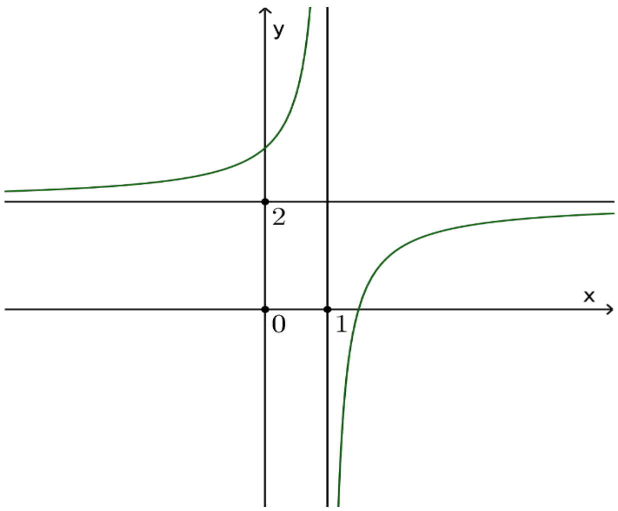
Lời giải

Chọn B

Dựa vào đồ thị hàm số, ta thấy đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=2$. Vậy hàm số cần tìm là $y=\dfrac{x+2}{x-2}$.

Câu 27: Đường cong ở hình bên là đồ thị của hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$, với a,b,c,d là các số thực. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $y'>0,\ \forall x\neq 2$. **B.** $y'>0,\ \forall x\neq 1$. **C.** $y'<0,\ \forall x\neq 2$. **D.** $y'<0,\ \forall x\neq 1$.



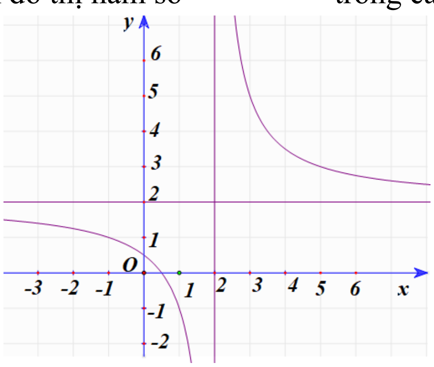
Lời giải

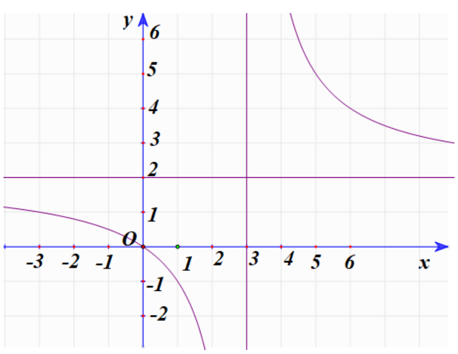
Chọn B

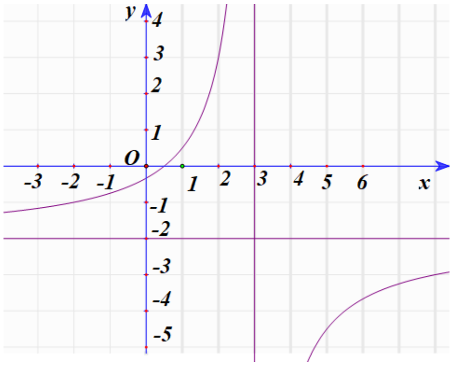
Dựa vào đồ thị hàm số, ta thấy rằng: Hàm số đã cho đồng biến trên mỗi khoảng xác định và đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng là $x=1$

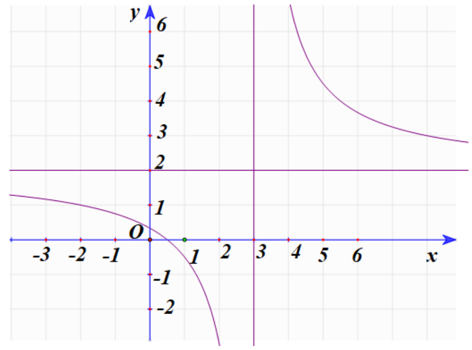
Suy ra $y'>0,\ \forall x\neq 1$.

Câu 28: Tìm đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x-3}$ trong các hàm dưới đây.

A. 

B. 

C. 

D. 

Lời giải

Chọn D

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x=3$, tiệm cận ngang là đường thẳng $y=2$ và đi qua điểm co tọa độ $\left(\frac{1}{2};0\right)$.

Câu 29: Biết hàm số $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ đạt cực trị tại điểm $x=1,\ f(1)=-3$ và đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 2. Phương trình $f(x)=2$ có bao nhiêu nghiệm.

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 2 suy ra $c=2$.

$f(1)=-3 \Rightarrow 1+a+b+c=-3 \Rightarrow a+b=-6\ (1)$.

Hàm số đạt cực trị tại $x=1 \Rightarrow f'(1)=0 \Rightarrow 3+2a+b=0 \Rightarrow 2a+b=-3\ (2)$.

Từ $(1),(2) \Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=-9 \end{cases} \Rightarrow f(x)=x^3+3x^2-9x+2$.

Phương trình $f(x)=2 \Leftrightarrow x^3+3x^2-9x+2=2 \Leftrightarrow x^3+3x^2-9x=0$ bấm máy suy ra phương trình có 3 nghiệm phân biệt.

Câu 30: Cho hàm số $y=-x^3+ax^2+bx+c$. Biết rằng đồ thị hàm số đi qua điểm $A(0;-1)$ và có điểm cực đại là $M(2;\ 3)$. Tính $Q=a+2b+c$.

A. $Q=2$. **B.** $Q=-4$. **C.** $Q=0$. **D.** $Q=1$.

Lời giải

Chọn A

Vì đồ thị hàm số đi qua điểm $A(0;-1)$ nên: $-1=-(0)^3+a(0)^2+b(0)+c \Leftrightarrow c=-1(1)$.

Vì điểm $M(2;\ 3)$ là điểm cực đại của đồ thị nên: $\begin{cases} y(2)=3 \\ y'(2)=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -(2)^3+a.(2)^2+2b+c=3 \\ -3.2^2+2a.2+b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a+2b+c=11\,(2) \\ 4a+b=12\,(3) \end{cases}$.

Từ,, suy ra: $a=3; b=0; c=-1$. Vậy $Q=a+2b+c=2$.

Câu 31: Với giá trị nào của m thì đồ thị hàm số: $y=\dfrac{2x^2+6mx+4}{mx+2}$ đi qua điểm $A(-1;4)$?

A. $m=-1$. **B.** $m=\dfrac{1}{2}$. **C.** $m=1$. **D.** $m=2$.

Lời giải

Chọn A

Đồ thị hàm số qua điểm $A(-1;4)$ nên ta có:

$4=\dfrac{2-6m+4}{-m+2} \Leftrightarrow 4(-m+2)=6-6m \Leftrightarrow 2m=-2 \Leftrightarrow m=-1.$

Câu 32: Tìm tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3+(2m+1)x^2+(1-5m)x+3m+2$ đi qua điểm $A(2;3)$.

A. $m=10$. **B.** $m=-10$. **C.** $m=13$. **D.** $m=-13$.

Lời giải

Chọn D

Để đồ thị hàm số $y=x^3+(2m+1)x^2+(1-5m)x+3m+2$ đi qua điểm $A(2;3)$

thì $3=2^3+(2m+1)2^2+(1-5m).2+3m+2$

$\Leftrightarrow m=-13$.

Câu 33: Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số $y=x^3-3x+m$ cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt.

A. $m=-2$. **B.** $m=\pm 2$. **C.** $m\in\{2;-2;0\}$. **D.** $m=2$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y'=3x^2-3$; $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \end{array}\right.$.

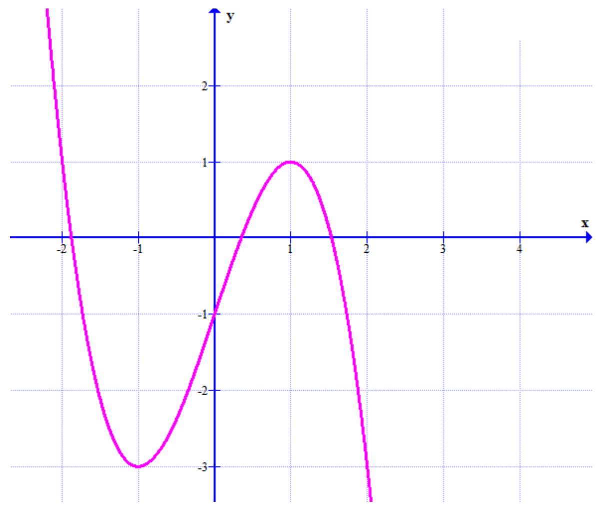
Bảng biến thiên của hàm số:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$m+2$	$\searrow$	$m-2$	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên thì đồ thị hàm số đã cho cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi $\left[\begin{array}{l} m+2=0 \\ m-2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-2 \\ m=2 \end{array}\right.$, suy ra đáp

B.

Câu 34: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ.



Phương trình $f(x)=m$ có ba nghiệm thực phân biệt khi và chỉ khi

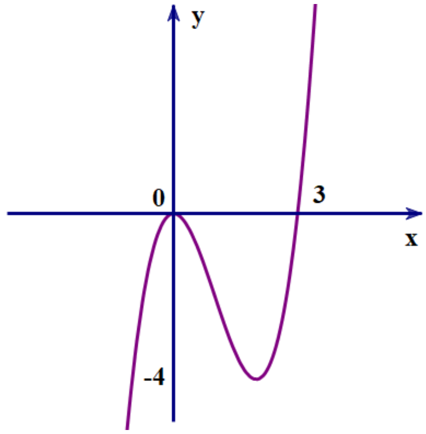
A. $m\in(-3;1)$. **B.** $m\in[-3;1]$. **C.** $m\in(-1;3)$. **D.** $m\in[-1;3]$.

Lời giải

Chọn A

Dựa vào đồ thị, phương trình $f(x)=m$ có ba nghiệm thực phân biệt khi và chỉ khi $m\in(-3;1)$.

Câu 35: Cho đồ thị $y=f(x)$. Tìm m để phương trình $f(x)+1=m$ có đúng 3 nghiệm?



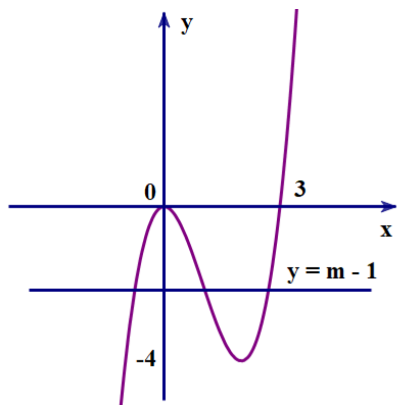
A. $-3<m<1$. **B.** $-4<m<0$. **C.** $-5<m<1$. **D.** $-4<m<1$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $f(x)+1=m \Leftrightarrow f(x)=m-1$.

Số nghiệm của phương trình $f(x)+1=m$ bằng số giao điểm của đồ thị $y=f(x)$ và đường thẳng $y=m-1$.



Dựa vào đồ thị, ta có ycbt $\Leftrightarrow -4<m-1<0 \Leftrightarrow -3<m<1$. Chọn đáp án

Câu 36: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có bảng biến thiên sau

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$+$	$\|\|$	$-$	
y	-5	$\nearrow$	2	$\searrow$	1

Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $f(x)=m$ có nghiệm duy nhất?

A. 7. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 8.

Lời giải

Chọn A

Phương trình có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow$ đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = m$ có đúng một giao điểm $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 2 \\ -5 < m \le 1 \end{array}\right.$

$m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{2; -4; -3; -2; -1; 0; 1\}$

Câu 37: Cho hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$ có đồ thị (C) và đường thẳng (d_m) có phương trình $y = mx + 2m + 2$. Tìm tất cả các giá trị của m để (d_m) cắt (C) tại hai điểm phân biệt.

A. $m < -\dfrac{4}{3}$ hoặc $m \ge 0$. **B.** $m < -\dfrac{4}{3}$ hoặc $m > 0$.

C. $-\dfrac{4}{3} < m < 0$. **D.** $m \le -\dfrac{4}{3}$ hoặc $m > 0$.

Lời giải

Chọn B

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (d_m): $\dfrac{2x+1}{x-1} = mx + 2m + 2$

$\Leftrightarrow \begin{cases} mx^2 + mx - 2m - 3 = 0 \quad (*) \\ x \ne 1 \end{cases}$.

Đường thẳng (d_m) cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình có hai nghiệm phân biệt và khác 1

$\Leftrightarrow \begin{cases} m \ne 0 \\ \Delta > 0 \\ m.1^2 + m.1 - 2m - 3 \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \ne 0 \\ 9m^2 + 12m > 0 \\ m \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -\dfrac{4}{3} \\ m > 0 \end{array}\right.$.

Câu 38: Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = (x-2)(x^2 + x + 2019)$ với trục hoành là:

A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số và trục hoành là:

$(x-2)(x^2 + x + 2019) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 2 = 0 \\ x^2 + x + 2019 = 0\ (vn) \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 2$.

Vậy số giao điểm của đồ thị và trục hoành là 1 giao điểm.

Câu 39: Tìm m để đường thẳng $y = mx + 1$ cắt đồ thị hàm số $y = \dfrac{x - 3}{x + 1}$ tại hai điểm phân biệt.

A. $(-\infty; 0] \cup [16; +\infty)$. **B.** $(-\infty; 0)$.

C. $(16; +\infty)$. **D.** $(-\infty; 0) \cup (16; +\infty)$.

Lời giải

Chọn D

Xét phương trình hoành độ giao điểm $\begin{cases} x \neq -1 \\ mx + 1 = \dfrac{x-3}{x+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ g(x) = mx^2 + mx + x + 1 - x + 3 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ g(x) = mx^2 + mx + 4 = 0 \end{cases}$

Để đường thẳng $y = mx + 1$ cắt đồ thị hàm số $y = \dfrac{x - 3}{x + 1}$ tại hai điểm phân biệt thì phương trình $g(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác -1

$\Rightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ g(-1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m^2 - 16m > 0 \\ 4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < 0 \\ m > 16 \end{array}\right. \Leftrightarrow m \in (-\infty; 0) \cup (16; +\infty)$.

Câu 40: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Số nghiệm của phương trình $f(x) - 2 = 0$ là

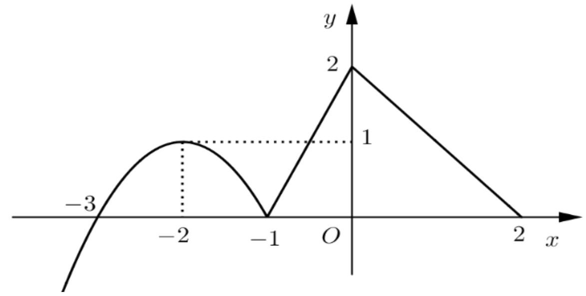
A. 0. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Số nghiệm của phương trình $f(x) - 2 = 0$ bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = 2$. Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy được số giao điểm là 4.

Câu 41: Hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Số nghiệm của phương trình $2f(x)-1=0$ là

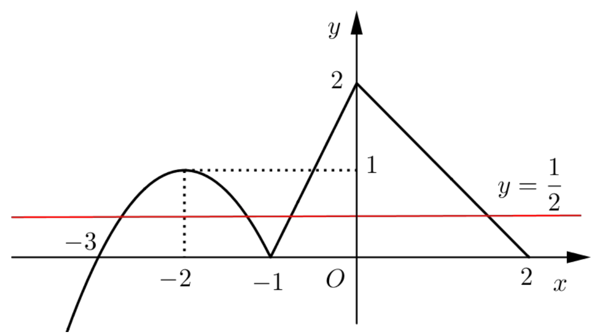
A. 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

$$2f(x)-1=0 \Leftrightarrow f(x)=\frac{1}{2} \quad (1)$$

Xét phương trình:



Số nghiệm của (1) chính là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ và đường thẳng $y=\frac{1}{2}$.

Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy, đồ thị hàm số $y=f(x)$ và đường thẳng $y=\frac{1}{2}$ cắt nhau tại 4 điểm phân biệt nên phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt.

Câu 42: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-1	↗	4	↘	$-\infty$

Đồ thị hàm số $y=f(x)$ và đường thẳng $y=0$ có bao nhiêu điểm chung.

A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

Dựa vào BBT Đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt đường thẳng $y = 0$ tại 3 điểm. Vậy đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = 0$ có 3 điểm chung.

Câu 43: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Số nghiệm của phương trình $f(x) + 2 = 0$ là

A. 0. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Số nghiệm của phương trình $f(x) + 2 = 0$ chính là số giao điểm của đường thẳng $y = -2$ với đồ thị hàm số $y = f(x)$. Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy đường thẳng $y = -2$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại 2 điểm phân biệt. Do đó số nghiệm của phương trình $f(x) + 2 = 0$ là 2.

Câu 44: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $2^{f(x)-1} = 4$ là

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Ta có $2^{f(x)-1} = 4 \Leftrightarrow f(x) - 1 = 2 \Leftrightarrow f(x) = 3$.

Số nghiệm của phương trình $f(x) = 3$ là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ với đường thẳng $y = 3$.

Từ bảng biến thiên ta có đường thẳng $y = 3$ cắt đồ thị $y = f(x)$ tại 1 điểm.

Vậy số nghiệm của phương trình $2^{f(x)-1}=4$ là 1.

Câu 45: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	
y	2	$\nearrow$	5	$\searrow$	-1	$\nearrow$	6

Khẳng định nào sau đây là khẳng định sai?

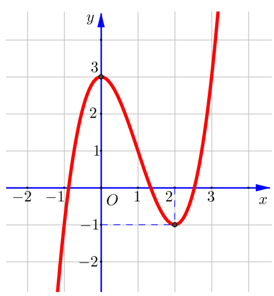
A. Tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $f(x)=m+1$ có nghiệm là $-2\le m<5$.
B. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $y=2$ và $y=6$.
C. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 6 và giá trị nhỏ nhất bằng -1.
D. Hàm số đã cho có đúng hai cực trị.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} y=6 \Rightarrow y=6$ không là giá trị lớn nhất của hàm số.

Câu 46: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



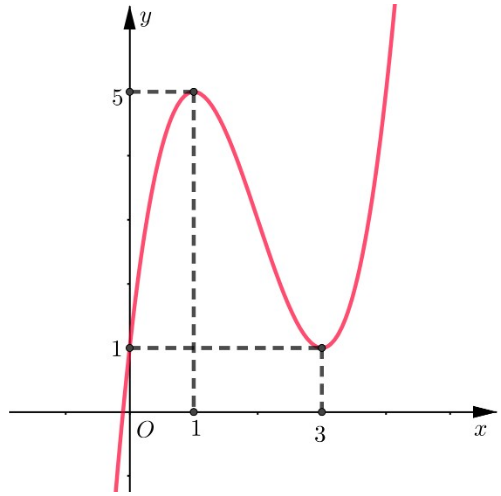
A. Điểm cực đại của hàm số là 3.
B. Giá trị cực đại của hàm số là 0.
C. Giá trị cực tiểu của hàm số bằng -1.
D. Điểm cực tiểu của hàm số là -1.

Lời giải

Chọn C

Từ đồ thị hàm số suy ra giá trị cực tiểu của hàm số bằng -1.

Câu 47: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị trong hình vẽ bên. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $|f(x)|=m$ có đúng hai nghiệm phân biệt.



A. $m>5$, $0<m<1$. **B.** $m<1$.

C. $m=1$, $m=5$. **D.** $1<m<5$.

Lời giải

Chọn A

Từ đồ thị (C) của hàm số $y=f(x)$ ta suy ra đồ thị (C') của hàm số $y=|f(x)|$ như sau:

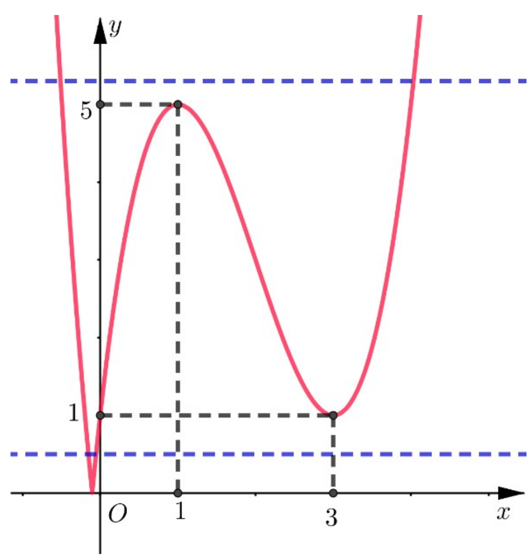
- Giữ nguyên phần đồ thị (C) ở phía trên trục hoành.

- Lấy đối xứng qua trục hoành phần đồ thị (C) ở phía dưới trục hoành.

Khi đó, đồ thị (C') là hợp của hai phần trên.

Ta có: $|f(x)|=m$ là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị (C') và đường thẳng $(d): y=m$.

Dựa vào đồ thị (C'), ta có phương trình $|f(x)|=m$ có đúng hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $\left[\begin{array}{l}0<m<1\\ m>5\end{array}\right.$.



Câu 48: Đồ thị hàm số nào dưới đây nằm phía dưới trục hoành.

A. $y = x^4 + 5x^2 - 1$ **B.** $y = -x^3 - 7x^2 - x - 1$

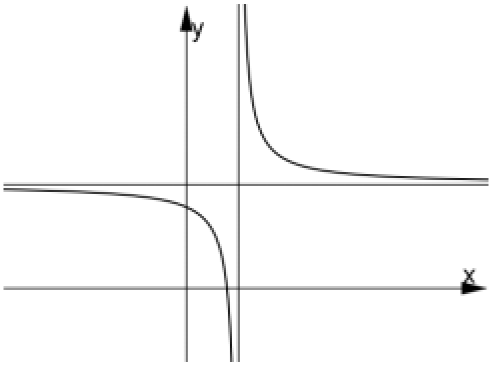
C. $y = -x^4 - 4x^2 + 1$ **D.** $y = -x^4 + 2x^2 - 2$

Lời giải

Chọn D

Ta có : $y = -x^4 + 2x^2 - 2 = -(x^2 - 1)^2 - 1 < 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ nên đồ thị nằm dưới trục hoành.

Câu 49: Cho hàm số $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$ có đồ thị như hình vẽ bên.



A. $ac > 0$. **B.** $cd < 0$. **C.** $bc < 0$. **D.** $ad > 0$.

Lời giải

Chọn D

Theo như đồ thị, ta có đường tiệm cận đứng là $x = -\dfrac{d}{c} > 0$

$\Rightarrow cd < 0$;

Đường tiệm cận ngang là $y = \dfrac{a}{c} > 0$ $\Rightarrow ac > 0$.

Ngoài ra đồ thị cắt trục Ox tại điểm có hoành độ $x = -\dfrac{b}{a} > 0 \Rightarrow ab < 0$ mà $ac > 0 \Rightarrow bc < 0$.

Từ, ta có $ad < 0$.

Câu 50: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a \neq 0)$ có đồ thị (C), tiếp tuyến của (C) có hệ số góc đạt giá trị bé nhất khi nào?

A. $a < 0$ và hoành độ tiếp điểm bằng $\dfrac{b}{3a}$ **B.** $a < 0$ và hoành độ tiếp điểm bằng $-\dfrac{b}{3a}$

C. $a > 0$ và hoành độ tiếp điểm bằng $-\dfrac{b}{3a}$ **D.** $a > 0$ và hoành độ tiếp điểm bằng $\dfrac{b}{3a}$

Lời giải

Chọn C

Tiếp tuyến của (C) có hệ số góc $y' = 3ax^2 + 2bx + c \Rightarrow y'' = 6ax + 2b$.

Tiếp tuyến của (C) có hệ số góc đạt giá trị bé nhất khi $3a > 0$ và hoành độ tiếp điểm là nghiệm của phương trình $y'' = 0 \Leftrightarrow a > 0$ và hoành độ tiếp điểm bằng $-\dfrac{b}{3a}$.

Câu 51: Đường thẳng $x + y = 2m$ là tiếp tuyến của đường cong $y = -x^3 + 2x + 4$ khi m bằng

A. -3 hoặc 1. **B.** 1 hoặc 3. **C.** -1 hoặc 3. **D.** -3 hoặc -1.

Lời giải

Chọn B

Đường thẳng $x + y = 2m$ là tiếp tuyến của đường cong $y = -x^3 + 2x + 4$ khi và chỉ khi hệ phương trình $\begin{cases} -x^3 + 2x + 4 = 2m - x \\ -3x^2 + 2 = -1 \end{cases}$ có nghiệm.

Ta có $\begin{cases} -x^3 + 2x + 4 = 2m - x \\ -3x^2 + 2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \end{array}\right. \\ -x^3 + 2x + 4 = 2m - x \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m = 3 \\ m = 1 \end{array}\right.$.

Câu 52: Cho hàm số $y = x^3 + 3mx^2 + (m+1)x + 1$ có đồ thị (C). Biết rằng khi $m = m_0$ thì tiếp tuyến với đồ thị (C) tại điểm có hoành độ bằng $x_0 = -1$ đi qua $A(1;3)$. Khẳng định nào sâu đây đúng?

A. $-1 < m_0 < 0$ **B.** $0 < m_0 < 1$ **C.** $1 < m_0 < 2$ **D.** $-2 < m_0 < -1$

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y' = 3x^2 + 6mx + m + 1$.

Với $x_0 = -1$ thì $y_0 = 2m - 1$, gọi $B(-1; 2m-1) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (-2; 2m-4)$.

Tiếp tuyến tại B đi qua A nên hệ số góc của tiếp tuyến là $k = -m + 2$.

Mặt khác: hệ số góc của tiếp tuyến là $k = y'(x_0)$.

Do đó ta có: $3(x_0)^2 + 6m_0x_0 + m_0 + 1 = -m_0 + 2$

$\Leftrightarrow 3 - 6m_0 + m_0 + 1 = -m_0 + 2 \Leftrightarrow -4m_0 = -2 \Leftrightarrow m_0 = \dfrac{1}{2}$.

Câu 53: Gọi (C_m) là đồ thị của hàm số $y = 2x^3 - 3(m+1)x^2 + mx + m + 1$ và (d) là tiếp tuyến của (C_m) tại điểm có hoành độ $x = -1$. Tìm m để (d) đi qua điểm $A(0;8)$.

A. $m=0$. **B.** $m=1$. **C.** $m=2$. **D.** $m=3$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y'=6x^2-6(m+1)x+m$, suy ra phương trình tiếp tuyến (d) là:

$y=y'(-1)(x+1)+y(-1)=(12+7m)(x+1)-3m-4\Leftrightarrow y=(12+7m)x+4m+8$.

$A(0;8)\in(d)\Leftrightarrow 8=4m+8\Leftrightarrow m=0$.

•Dạng ❷: Câu trắc nghiệm đúng, sai

Câu 1: Cho hàm số $y=f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ có đồ thị (C).

a) Đồ thị (C) luôn có tâm đối xứng.

b) Đồ thị (C) luôn có điểm cực trị.

c) Đồ thị (C) luôn cắt trục hoành.

d). $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

Lời giải

a) Đ **b) S** **c) Đ** **d) Đ**

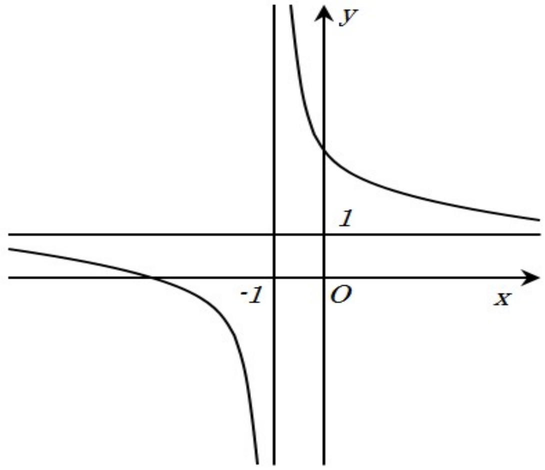
Xét hàm số $y=f(x)=x^3+ax^2+bx+c$

Ta có: $y'=3x^2+2ax+b=0$

Có: $\Delta'=a^2-3b$

Chọn $a=b=0$: Khi đó $\Delta'=0\Rightarrow y'\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}$. Khi đó hàm số không có cực trị.

Câu 2: Biết hàm số $y=\dfrac{x+a}{x+1}$ (a là số thực cho trước, $a\neq 1$) có đồ thị như hình vẽ sau:



Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) $y' < 0, \forall x \neq -1$

b) $y' > 0, \forall x \neq -1$

c) $y' < 0, \forall x \in \mathbb{R}$

d) $y' > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Lời giải

a) Đ **b) S** **c) S** **d) S**

Ta có tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ và hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định.

Vậy $y' < 0, \forall x \neq -1$.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ và có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Đồ thị hàm số không có điểm chung với trục hoành

b) Hàm số có hai điểm cực trị

c) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2;0)$

d) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng

Lời giải

a) Đ **b) Đ** **c) S** **d) Đ**

Hàm số không xác định tại $x=-1\in(-2;0)$ nên hàm số không nghịch biến trên $(-2;0)$.

Câu 4: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Hàm số đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

b) Hàm số không có giá trị lớn nhất.

c) Đồ thị hàm số không có đường tiệm cận.

d) Hàm số có hai điểm cực đại và một điểm cực tiểu.

Lời giải

a) Đ **b) Đ** **c) Đ** **d) S**

Từ bảng biến thiên ta có: hàm số có 2 điểm cực tiểu và 1 điểm cực đại.

Câu 5: Cho hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-2}$ Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=2$.

b) Hàm số có cực trị.

c) Đồ thị hàm số đi qua điểm $A(1;3)$.

d) Hàm số nghịch biến trên $(-\infty;2)\cup(2;+\infty)$.

Lời giải

a) Đ **b) S** **c) S** **d) S**

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Ta có $\lim\limits_{x \to 2^+} y = \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{2x+1}{x-2} = +\infty$ nên hàm số đã cho có tiệm cận đứng là $x = 2$.

Câu 6: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	||	$+$	
y	2	$\nearrow$	5	$\searrow$	-1	$\nearrow$	6

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a). Tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $f(x) = m+1$ có nghiệm là $-2 \le m < 5$

b) Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $y = 2$ và $y = 6$.

c) Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 6 và giá trị nhỏ nhất bằng -1.

d). Hàm số đã cho có đúng hai cực trị.

Lời giải

a) Đ **b) Đ** **c) S** **d) Đ**

Ta có $\lim\limits_{x \to +\infty} y = 6 \Rightarrow y = 6$ không là giá trị lớn nhất của hàm số.

Câu 7: Cho hàm số $y = x(1-x)(x^2+1)$ có đồ thị (C). Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) (C) cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt.

b) (C) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt.

c) (C) cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt.

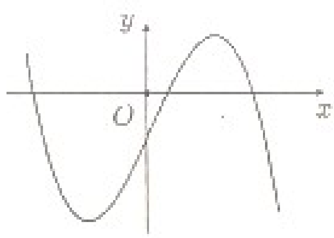
d) (C) cắt trục hoành tại 1 điểm.

Lời giải

a) Đ **b) S** **c) S** **d) S**

Ta có: $y = x(1 - x)(x^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right.$. Cả hai nghiệm đều là nghiệm bội lẻ nên đồ thị (C) cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt.

Câu 8: Cho hàm số $y = ax^3 + 3x + d, (a; d \in \mathbb{R})$ có đồ thị như hình vẽ.



Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) $a > 0, d > 0$

b) $a < 0, d > 0$

c) $a < 0, d < 0$

d) $a > 0, d < 0$

Lời giải

a) S **b) S** **c) Đ** **d) S**

Dựa vào đồ thị, ta có $a < 0, d < 0$.

Câu 9: Đồ thị hàm số $y = f(x) = 1 - \sqrt{x+1}$ cắt đường thẳng $x = 3$ tại điểm M. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) $OM = \sqrt{10}$

b) $OM = 1$

c) $OM = 2$

d) $OM = \sqrt{5}$

Lời giải

a) Đ **b) S** **c) S** **d) S**

Thay $x=3$ vào hàm số $y=f(x)=1-\sqrt{x+1}$, ta được: $y=f(3)=1-\sqrt{3+1}=-1$

Suy ra $M(3;-1)$

$\overrightarrow{OM}=(3;-1)\Rightarrow OM=\sqrt{10}$.

Câu 10: Cho (C_1) là đồ thị của hàm số $y=2x^3-3x+1$ và (C_2) là đồ thị của hàm số $y=x^3+x+1$. Gọi n là số điểm chung phân biệt của (C_1) và (C_2). Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) $n=0$

b) $n=1$

c) $n=2$

d) $n=3$

Lời giải

a) S **b) S** **c) S** **d) Đ**

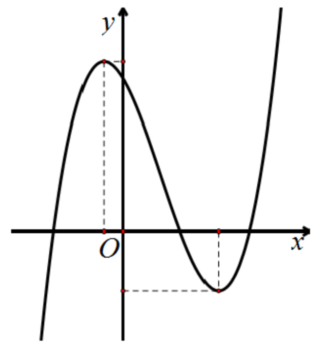
Xét phương trình hoành độ giao điểm của (C_1) và (C_2):

$$2x^3-3x+1=x^3+x+1\Leftrightarrow x^3-4x=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\\x=-2\end{array}\right.$$.

Vì phương trình có 3 nghiệm phân biệt nên (C_1) và (C_2) có 3 điểm chung phân biệt.

Vậy $n=3$.

Câu 11: Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ sau



Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) $a < 0, b < 0, c < 0, d > 0$

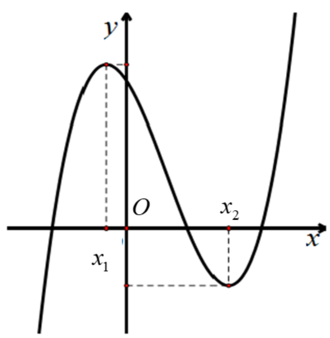
b) $a > 0, b < 0, c > 0, d < 0$

c) $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0$

d) $a > 0, b < 0, c > 0, d > 0$

Lời giải

a) S **b) S** **c) Đ** **d) S**



+ Ta có $\lim\limits_{x \to +\infty} y = +\infty \Rightarrow a > 0$.

+ Đồ thị hàm số cắt Oy tại điểm có tọa độ $(0; d)$ suy ra $d > 0$.

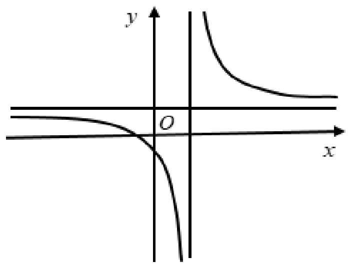
+ Ta có $y' = 3ax^2 + 2bx + c$.

Gọi x_1, x_2 là các điểm cực trị của hàm số.

Dựa vào đồ thị ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{2b}{3a} > 0 \\ x_1x_2 = \dfrac{c}{3a} < 0 \end{cases}$, mà $a > 0$, suy ra $b < 0$, $c < 0$.

Vậy $a > 0$, $b < 0$, $c < 0$, $d > 0$.

Câu 12: Cho hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị như sau.



Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) $ac > 0;\ bd > 0$

b) $ab < 0;\ cd < 0$

c) $bc > 0;\ ad < 0$

d) $ad > 0;\ bd < 0$

Lời giải

a) S **b) S** **c) Đ** **d) S**

Theo đồ thị:

Tiệm cận ngang: $y = \dfrac{a}{c} > 0$ $\Rightarrow ac > 0$. Do đó a, c cùng dấu

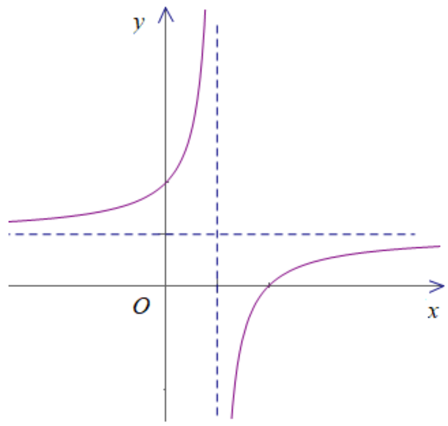
Tiệm cận đứng $x = -\dfrac{d}{c} > 0 \Rightarrow \dfrac{d}{c} < 0$ $\Rightarrow cd < 0$. Do đó c, d trái dấu

Cho $y = 0$ $\Rightarrow x = -\dfrac{b}{a} < 0 \Rightarrow \dfrac{b}{a} > 0$ $\Rightarrow ab > 0$. Do đó a, b cùng dấu

Từ và suy ra a, d trái dấu nên $ad < 0$.

Từ và suy ra b, c cùng dấu nên $bc > 0$.

Câu 13: Cho hàm số $y = \dfrac{x+a}{x-1}$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) $a > 1$

b) $a \le -3$

c) $a < -1$

d) $a \ge 1$

Lời giải

a) S **b) S** **c) Đ** **d) S**

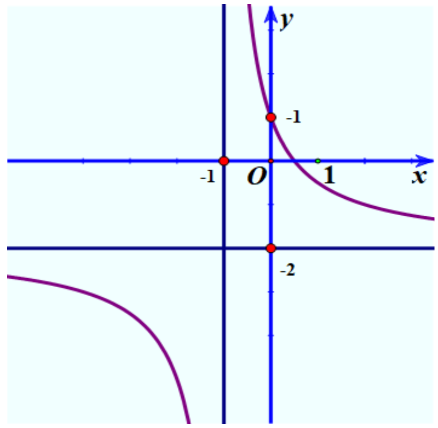
Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Ta có: $y' = \dfrac{-1-a}{(x-1)^2}$.

Từ hình vẽ ta thấy: $y' > 0, \forall x \ne 1 \Leftrightarrow -1-a > 0 \Leftrightarrow a < -1$.

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 2. Do đó $-a = 2 \Leftrightarrow a = -2$.

Câu 14: Cho hàm số $y = \dfrac{ax+b}{x+c}$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) $a=2, b=c=-1$

b) $a=b=2, c=-1$

c) $a=-2, b=-1, c=1$

d) $a=-2, b=c=1$

Lời giải

a) S **b) S** **c) S** **d) Đ**

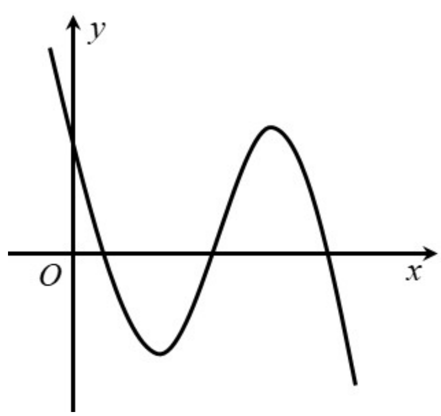
Đồ thị hàm số có:

Tiệm cận đứng: $x=-c=-1 \Leftrightarrow c=1$.

Tiệm cận ngang: $y=a=-2$.

Giao điểm với trục tung: $x=0 \Rightarrow y=\dfrac{b}{c}=1 \Leftrightarrow b=1$.

Câu 15: Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ



Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) $a<0,b>0,c>0,d>0$

b) $a>0,b>0,c<0,d>0$

c) $a<0,b<0,c<0,d>0$

d) $a<0,b>0,c<0,d>0$

Lời giải

a) S **b) S** **c) S** **d) Đ**

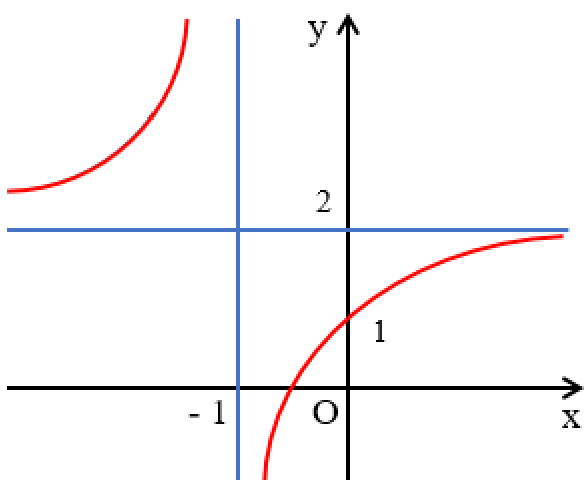
Do nhánh bên phải của đồ thị đi xuống nên $a<0$.

Đồ thị cắt trục tung ở phần dương nên $d>0$.

Đồ thị có 2 cực trị tại hai giá trị x dương nên phương trình $y'=0$ có 2 nghiệm dương phân biệt $\Rightarrow 3ax^2+2bx+c=0$ có 2 nghiệm dương phân biệt.

$$\Rightarrow \begin{cases}\Delta'>0\\ S>0\\ P>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2-3ac>0\\ -\dfrac{2b}{3a}>0\\ \dfrac{c}{3a}>0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b>0\\ c<0\end{cases}.$$

Câu 16: Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{x+1}$ có đồ thị như hình vẽ.



Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) $a<b$

b) $ab < 0$

c) $ab > 0$

d) $b < a < 0$

Lời giải

a) S **b) S** **c) Đ** **d) S**

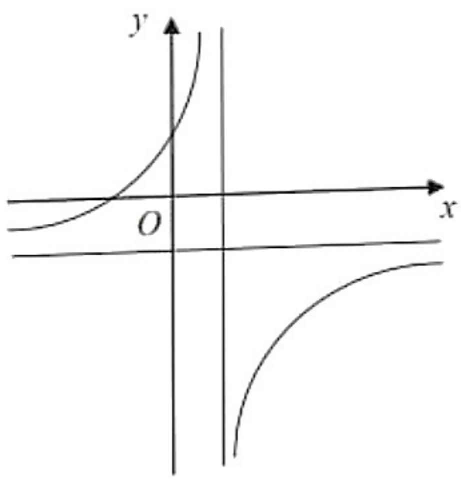
Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{ax+b}{x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a+\dfrac{b}{x}}{1+\dfrac{1}{x}}=a$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{ax+b}{x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{a+\dfrac{b}{x}}{1+\dfrac{1}{x}}=a$ nên $y=a$ là phương trình đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Dựa vào hình vẽ ta thấy đồ thị có phương trình đường tiệm cận ngang $y=2$ nên $a=2$.

Đồ thị đi qua điểm $(0;1)$ nên thay $x=0;\ y=1$ vào hàm số ta được: $1=\dfrac{a.0+b}{0+1}\Rightarrow b=1$

Vậy $ab=2>0$.

Câu 17: Cho hàm số $y=\dfrac{ax+4-b}{cx+b}$ có đồ thị là đường cong trong hình bên.



Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) $a<0, 0<b<4, c<0$

b) $a>0, b>0, c<0$

c) $a>0, b>4, c<0$

d) $a > 0, 0 < b < 4, c < 0$

Lời giải

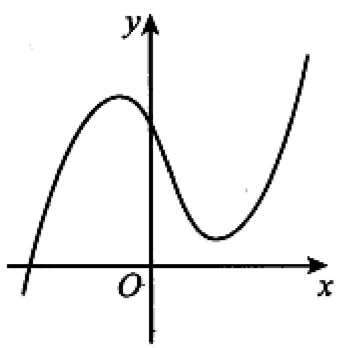
a) S **b) S** **c) S** **d) Đ**

Từ $y = \dfrac{ax + 4 - b}{cx + b}$ suy ra dồ thị hàm số có TCĐ: $x = -\dfrac{b}{c}$, TCN: $y = \dfrac{a}{c}$, giao điểm của đồ thị với trục tung và trục hoành lần lượt có tọa độ $\left(0; \dfrac{4-b}{b}\right); \left(\dfrac{b-4}{a}; 0\right)$.

Từ đồ thị ta thấy $\begin{cases} \dfrac{a}{c} < 0\,(1) \\ -\dfrac{b}{c} > 0\,(2) \\ \dfrac{4-b}{b} > 0\,(3). \end{cases}$

Từ ta có $0 < b < 4$, từ ta suy ra $c < 0$, từ suy ra $a > 0$.

Câu 18: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ.



Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) $a > 0, b > 0, c > 0, d > 0$

b) $a > 0, b > 0, c < 0, d > 0$

c) $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0$

d) $a > 0, b < 0, c < 0, d < 0$

Lời giải

a) S **b) S** **c) Đ** **d) S**

Dựa vào đồ thị hàm bậc ba ta nhận xét:

Nhánh cuối đồ thị hàm số đồng biến nên $a > 0$.

Đồ thị hàm số cắt Oy tại điểm có tung độ dương nên $d > 0$.

Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị nằm về 2 phía trục tung nên $ac < 0 \Rightarrow c < 0$.

Đồ thị hàm số có hoành độ điểm uốn dương nên $ab < 0 \Rightarrow b < 0$.

Câu 19: Cho hàm số $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(a,b,c,d \in \mathbb{R}, a < 0)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	||	$+$	
$f(x)$	2	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	2

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) $b > 0$, $c > 0$, $d > 0$

b) $b < 0$, $c > 0$, $d < 0$

c) $b < 0$, $c < 0$, $d < 0$

d) $b > 0$, $c < 0$, $d > 0$

Lời giải

a) S **b) S** **c) S** **d) Đ**

Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $f(x)$ là $y = 2 > 0$, suy ra $\dfrac{a}{c} > 0$. Mà $a < 0$ nên $c < 0$.

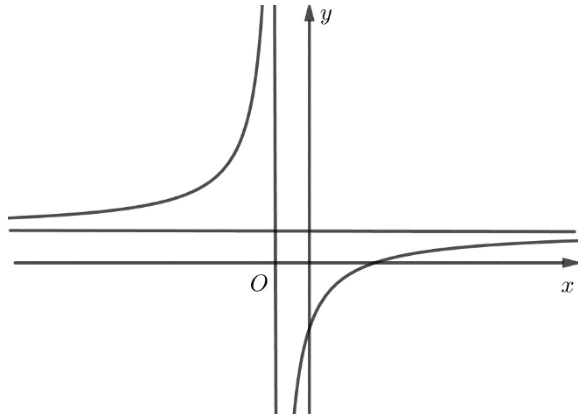
Tiệm cận đứng $x = 1 > 0$, suy ra $-\dfrac{d}{c} > 0$ hay $\dfrac{d}{c} < 0$. Mà $c < 0$ nên $d > 0$.

Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm có hoành độ $x > 1 > 0$ nên $-\dfrac{b}{a} > 0$ hay $\dfrac{b}{a} < 0$.

Do đó $b > 0$.

Vậy $b > 0$, $c < 0$, $d > 0$.

Câu 20: Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$



Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) $ad < 0$ và $ab < 0$.

b) $bd < 0$ và $ab > 0$.

c) $ad > 0$ và $ab < 0$.

d) $ad > 0$ và $bd > 0$.

Lời giải

a) S **b) S** **c) Đ** **d) S**

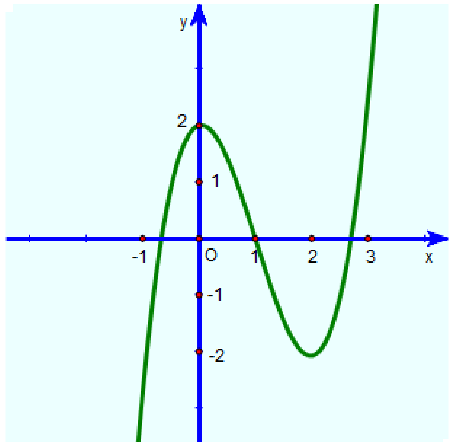
Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ âm nên $\frac{b}{d} < 0 \Rightarrow b,d$ trái dấu.

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = -\frac{d}{c} < 0 \Rightarrow c,d$ cùng dấu.

Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = \frac{a}{c} > 0 \Rightarrow a,c$ cùng dấu.

Suy ra b trái dấu với $a,c,d \Rightarrow ad > 0$ và $ab < 0$.

Câu 21: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Gọi m là số nghiệm của phương trình $f(f(x))=1$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) $m=6$.

b) $m=7$.

c) $m=5$.

d) $m=9$.

Lời giải

a) S **b) Đ** **c) S** **d) S**

Từ đồ thị hàm số và phương trình $f(x)=1$ có ba số thực a,b,c thỏa $-1<a<1<b<2<c$ sao cho $f(a)=f(b)=f(c)=1$. Do đó,

$$f(f(x))=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=a \\ f(x)=b \\ f(x)=c \end{array}\right.$$

Dựa vào đồ thị hàm số $y=f(x)$ ta có:

Do $-1<a<1$ nên đường thẳng $y=a$ cắt đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại 3 điểm phân biệt. Do đó, $f(x)=a$ có 3 nghiệm phân biệt.

Ta lại có, $1<b<2$ nên đường thẳng $y=b$ cắt đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại 3 điểm phân biệt khác. Do đó, $f(x)=b$ có 3 nghiệm phân biệt khác các nghiệm trên.

Ngoài ra, $2<c$ nên đường thẳng $y=b$ cắt đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại 1 điểm khác các điểm trên. Hay $f(x)=c$ có 1 nghiệm khác các nghiệm trên.

Từ đó, số nghiệm của phương trình $f(f(x))=1$ là $m=7$.

Câu 22: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $2f(x)+f(1-x)=x^3$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y=f(x+2)$ có tâm đối xứng $I(a;b)$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) $a=-\dfrac{5}{3}$

b) $a=-\dfrac{3}{2}$

c) $a=-\dfrac{5}{2}$

d) $a=-\dfrac{7}{3}$

Lời giải

a) Đ **b) S** **c) S** **d) S**

Xét: $2f(t)+f(1-t)=t^3\ (1)$

$t=x$ thay vào ta có: $2f(x)+f(1-x)=x^3$

$t=1-x$ thay vào ta có: $2f(1-x)+f(x)=(1-x)^3$

$\Rightarrow \begin{cases} 2f(x)+f(1-x)=x^3 \\ f(x)+2f(1-x)=(1-x)^3 \end{cases} \Rightarrow 3f(x)=2x^3-(1-x)^3 \Rightarrow y=f(x)=x^3-x^2+x-\dfrac{1}{3}$

Xét $y=f(x+2)=(x+2)^3-(x+2)^2+x+2-\dfrac{1}{3}=x^3+5x^2+9x+\dfrac{17}{3}$

$y'=3x^2+10x+9$,

$y''=6x+10$

$y''=0\Leftrightarrow x=-\dfrac{5}{3}$. Ta có $y=f(x+2)$ là hàm bậc 3 nên nhận điểm uốn $I(a;b)$ là tâm đối xứng

$\Rightarrow a=-\dfrac{5}{3}$.

Câu 23: Cho hàm số $y=\dfrac{2x}{x+2}$ có đồ thị (C) và điểm $M(x_0;y_0)\in(C)$ $(x_0\neq 0)$. Biết rằng khoảng cách từ $I(-2;2)$ đến tiếp tuyến của (C) tại M là lớn nhất, Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) $2x_0 + y_0 = 0$

b) $2x_0 + y_0 = 2$

c) $2x_0 + y_0 = -2$

d) $2x_0 + y_0 = -4$

Lời giải

a) S **b) S** **c) S** **d) Đ**

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M có dạng $d: y = y'(x_0).(x - x_0) + y_0$.

Ta có $M(x_0; y_0) \in (C) \Rightarrow y_0 = \dfrac{2x_0}{x_0 + 2}$

Lại có $y' = \dfrac{4}{(x+2)^2} \Rightarrow y'(x_0) = \dfrac{4}{(x_0+2)^2}$.

Do đó $d: y = \dfrac{4}{(x_0+2)^2}.(x - x_0) + \dfrac{2x_0}{x_0+2}$

$\Rightarrow d: y(x_0+2)^2 = 4x - 4x_0 + 2x_0(x_0+2) \Rightarrow d: 4x - (x_0+2)^2 y + 2x_0^2 = 0$

$\Rightarrow d(I;d) = \dfrac{\left|-8 - 2(x_0+2)^2 + 2x_0^2\right|}{\sqrt{4^2 + (x_0+2)^4}} = \dfrac{\left|-16 - 8x_0\right|}{\sqrt{(x_0+2)^4 + 16}} = \dfrac{8}{\sqrt{(x_0+2)^2 + \dfrac{16}{(x_0+2)^2}}}$.

Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có

$(x_0+2)^2 + \dfrac{16}{(x_0+2)^2} \geq 2\sqrt{(x_0+2)^2.\dfrac{16}{(x_0+2)^2}} = 8 > 0 \Rightarrow d(I;d) \leq 1$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow (x_0+2)^2 = \dfrac{16}{(x_0+2)^2} \Leftrightarrow (x_0+2)^2 = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 0 \\ x_0 = -4 \end{array}\right.$

Bài ra $x_0 \neq 0$ nên $x_0 = -4 \Rightarrow y_0 = 4 \Rightarrow 2x_0 + y_0 = -4$.

Câu 24: Cho hàm số $y = x^3 - \dfrac{9}{2}x^2 + 6x + m$ (m là tham số) có đồ thị (C). Biết rằng (C) cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ tương ứng là x_1, x_2, x_3 với $x_1 < x_2 < x_3$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) $1 < x_1 < 2 < x_2 < 3 < x_3$

b) $1 < x_1 < x_2 < 2 < x_3 < 3$

c) $0 < x_1 < 1 < x_2 < 2 < x_3 < 3$

d) $x_1 < 0 < x_2 < 1 < x_3 < 2$

Lời giải

a) S **b) S** **c) Đ** **d) S**

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Có $y' = 3x^2 - 9x + 6$, $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2 \end{array}\right.$.

Vì hàm số có $a = 1 > 0$ nên hàm số đạt cực đại tại $x = 1$, đạt cực tiểu $x = 2$ và $x_1 < 1 < x_2 < 2 < x_3$. (1)

Mặt khác (C) cắt Ox tại ba điểm phân biệt nên $\begin{cases} f(1) > 0 \\ f(2) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m + \dfrac{5}{2} > 0 \\ m + 2 < 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow m \in \left(-\dfrac{5}{2}; -2\right)$

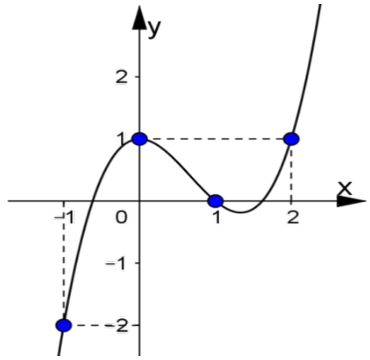
Đặt $f(x) = x^3 - \dfrac{9}{2}x^2 + 6x + m$. Hàm số này liên tục trên các khoảng $(0;1)$ và $(2;3)$. Ta có:

$f(0) = m < 0$, $f(1) > 0$ nên $f(0).f(1) < 0$. Suy ra phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trên khoảng $(0;1)$. (2)

$f(2) < 0$, $f(3) = m + \dfrac{9}{2} > 0$ nên $f(2).f(3) < 0$. Suy ra phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trên khoảng $(2;3)$. (3).

Từ (1), (2), (3) ta suy ra $0 < x_1 < 1 < x_2 < 2 < x_3 < 3$.

Câu 25: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên R. Hàm $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) $f(-3)<f(-2)$

b) Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$.

c) $f(0)<f(1)$.

d) Hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại $x=0$.

Lời giải

a) S **b) S** **c) Đ** **d) S**

Từ đồ thị hàm số $f'(x)$ ta có $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=x_1 \\ x=1 \\ x=x_2 \end{array}\right.$ với $-1<x_1<1<x_2<2$.

Từ đó suy ra bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ là:

x	$-\infty$	-1	x_1	0	1		x_2	2	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	↘		CT	↗	CĐ	↘	CT	↗	

a) Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;x_1)$, $-3<-2<x_1 \Rightarrow f(-3)>f(-2)$.**Chọn S**

b) Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;x_1)$, $(-\infty;-1)\subset(-\infty;x_1) \Rightarrow$ hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$.**Chọn S**

c) Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(x_1;1)$, $x_1<0<1 \Rightarrow f(0)<f(1)$. **Chọn Đ**

d) Qua $x=0$ đạo hàm $f'(x)$ không đổi dấu nên $x=0$ không là điểm cực trị.**Chọn S**

•Dạng ❸: Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	-2	$\nearrow$	5	$\searrow$	$-\infty$

Số nghiệm thực của phương trình $2f(x)-7=0$ là

Trả lời: 4.

Lời giải

Số nghiệm thực của phương trình $2f(x)-7=0$ chính là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ và đường thẳng $y=\frac{7}{2}$.

Đường thẳng $y=\frac{7}{2}$ cắt đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại 4 điểm phân biệt.

Câu 2: Đồ thị hàm số $y=(x-1)(x^2-4x+4)$ có bao nhiêu điểm chung với trục Ox ?

Trả lời: 2.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=(x-1)(x^2-4x+4)$ và Ox :

$$(x-1)(x^2-4x+4)=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$$

Vì phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=(x-1)(x^2-4x+4)$ và Ox có 2 nghiệm nên số điểm chung của đồ thị với trục Ox là 2.

Câu 3: Cho hàm số $y=\frac{x^3}{3}+x^2-2x+1$ có đồ thị. Phương trình tiếp tuyến của tại điểm $M\left(1;\frac{1}{3}\right)$ là

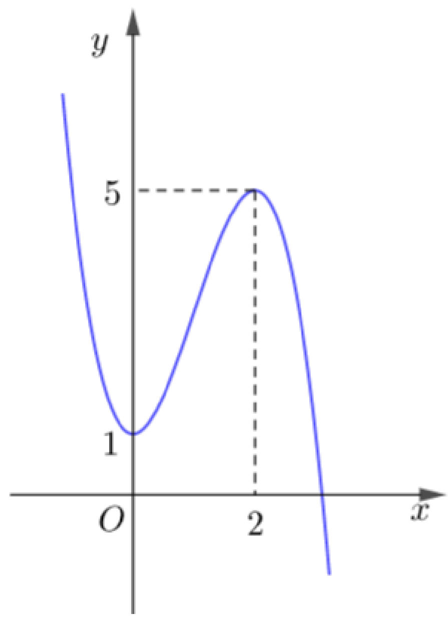
Trả lời: $y=x-\frac{2}{3}$

Lời giải

Ta có $y'=x^2+2x-2$ suy ra $y'(1)=1$. Phương trình tiếp tuyến tại $M\left(1;\frac{1}{3}\right)$ là

$y=1(x-1)+\frac{1}{3}=x-\frac{2}{3}$.

Câu 4: Cho hàm bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị trong hình bên. Số nghiệm của phương trình $f(x)=2$ là

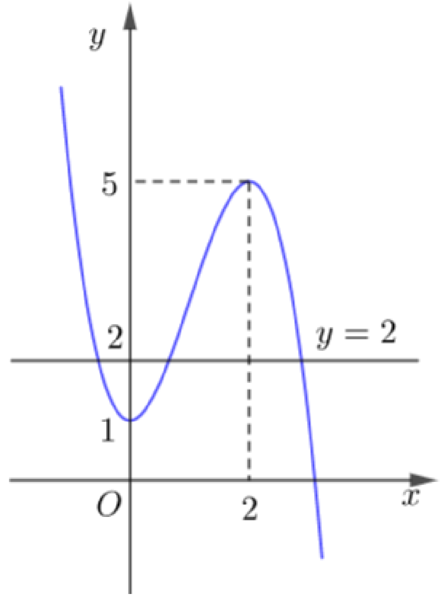


Trả lời: 3.

Lời giải

Ta có: số nghiệm của phương trình $f(x)=2$ bằng số giao điểm giữa đồ thị hàm số $y=f(x)$ và đường thẳng $y=2$.

Dựa vào hình vẽ, hai đồ thị cắt nhau tại 3 điểm phân biệt.



Vậy phương trình $f(x)=2$ có 3 nghiệm.

Câu 5: Số giao điểm của hai đồ thị hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ bằng số nghiệm của phương trình.

Trả lời: $f(x)-g(x)=0$.

Lời giải

Số giao điểm của hai đồ thị hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ bằng số nghiệm của phương trình hoành độ giao điểm $f(x)=g(x)\Leftrightarrow f(x)-g(x)=0$.

Câu 6: Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^4-5x^2+4$ với trục hoành là.

Trả lời: 4.

Lời giải

Xét phương trình $x^4-5x^2+4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2=1\\x^2=4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm1\\x=\pm2\end{array}\right.$

Vậy số giao điểm là 4.

Câu 7: Đồ thị hàm số $y=x^4-3x^2-2$ cắt trục hoành tại bao nhiêu điểm?

Trả lời: 2.

Lời giải

Xét phương trình tương giao:

$x^4 - 3x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = \dfrac{3+\sqrt{17}}{2} > 0 \\ x^2 = \dfrac{3-\sqrt{17}}{2} < 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\dfrac{3+\sqrt{17}}{2}}$.

Từ đó suy ra đồ thị hàm số $y = x^4 - 3x^2 - 2$ cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt.

Câu 8: Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = \dfrac{3x+1}{x-3}$ và đường thẳng $y = 3$ là

Trả lời: 0.

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $\dfrac{3x+1}{x-3} = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+1 = 3x-9 \\ x \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow 1 = -9\,(vl)$.

Vậy đồ thị hàm số $y = \dfrac{3x+1}{x-3}$ và đường thẳng $y = 3$ không có điểm chung.

Câu 9: Đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x - 3$ cắt trục tung tại điểm có tung độ

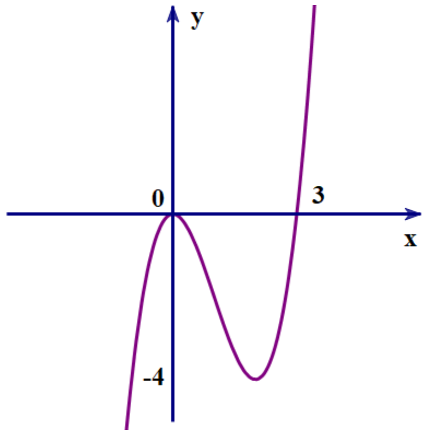
Trả lời: $y = -3$.

Lời giải

Cho $x = 0 \Rightarrow y = -3$.

Suy ra đồ thị hàm số đã cho cắt trục tung tại điểm có tung độ $y = -3$.

Câu 10: Cho đồ thị $y = f(x)$. Tìm m để phương trình $f(x) + 1 = m$ có đúng 3 nghiệm?

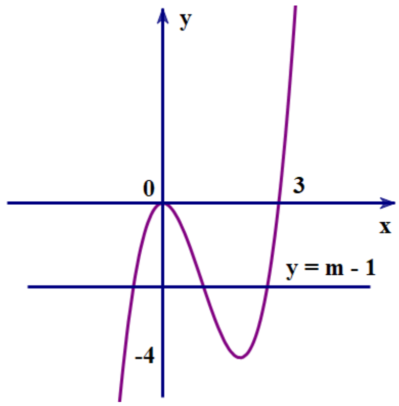


Trả lời: $-3 < m < 1$.

Lời giải

Ta có: $f(x)+1=m \Leftrightarrow f(x)=m-1$.

Số nghiệm của phương trình $f(x)+1=m$ bằng số giao điểm của đồ thị $y=f(x)$ và đường thẳng $y=m-1$.



Dựa vào đồ thị, ta có ycbt $\Leftrightarrow -4<m-1<0 \Leftrightarrow -3<m<1$. Chọn đáp án

Câu 11: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có bảng biến thiên sau

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$+$	$\|$	$-$	
y	-5	$\nearrow$	2	$\searrow$	1

Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $f(x)=m$ có nghiệm duy nhất?

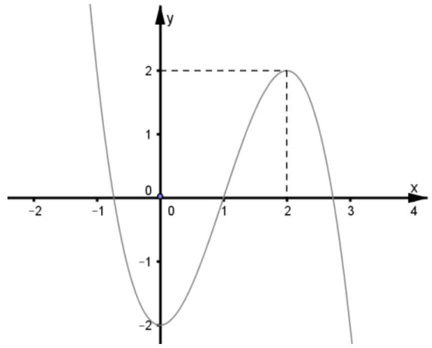
Trả lời: 7.

Lời giải

Phương trình có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow$ đồ thị hàm số $y=f(x)$ và đường thẳng $y=m$ có đúng một giao điểm $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=2 \\ -5<m\le 1 \end{array}\right.$

$m\in\mathbb{Z} \Rightarrow m\in\{2;-4;-3;-2;-1;0;1\}$

Câu 12: Cho hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ bên. Tìm m để phương trình $f(x)=m$ có 3 nghiệm phân biệt.



.

Trả lời: $-2 < m < 2$.

Lời giải

Phương trình $f(x) = m$ là phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị.

+ $y = f(x)$ như hình vẽ trên.

+ $y = m$ là đường thẳng song song hay trùng với trục Ox.

Để phương trình $f(x) = m$ có 3 nghiệm phân biệt thì hai đồ thị $y = f(x)$, $y = m$ phải cắt nhau tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow -2 < m < 2$.

Câu 13: Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 2x^2 + 3x - 1$ tại điểm có hoành độ $x = -1$ có hệ số góc k bằng

Trả lời: 10.

Lời giải

TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 3x^2 - 4x + 3$.

Hệ số góc của tiếp tuyến là $k = y'(-1) = 3.(-1)^2 - 4.(-1) + 3 = 10$.

Câu 14: Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 3}$ có đồ thị (C). Có bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị (C) đi qua điểm $A(4;1)$?

Trả lời: 2.

Lời giải

+) Tập xác định của hàm số $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

$$y'=\frac{(2x-1)(x-3)-(x^2-x-2)}{(x-3)^2}=\frac{x^2-6x+5}{(x-3)^2}.$$

+) Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $M(x_0;y_0)$:

$$y=y'(x_0)(x-x_0)+y(x_0)\Leftrightarrow y=\frac{x_0^2-6x_0+5}{(x_0-3)^2}.(x-x_0)+\frac{x_0^2-x_0-2}{x_0-3}.$$

+) Tiếp tuyến của đồ thị (C) đi qua điểm $A(4;1)$ nên ta có:

$$\frac{x_0^2-6x_0+5}{(x_0-3)^2}.(4-x_0)+\frac{x_0^2-x_0-2}{x_0-3}=1$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x_0^2-6x_0+5)(4-x_0)+(x_0-3)(x_0^2-x_0-2)}{(x_0-3)^2}=1$$

$$\Leftrightarrow 4x_0^2-x_0^3-24x_0+6x_0^2+20-5x_0+x_0^3-x_0^2-2x_0-3x_0^2+3x_0+6=(x_0-3)^2$$

$$\Leftrightarrow 5x_0^2-22x_0+17=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x_0=1\\ x_0=\dfrac{17}{5}\end{array}\right..$$

+) Với $x_0=1$, ta có $y_0=1$. Phương trình tiếp tuyến của (C) tại $M_1(1;1)$ là:

$$y=y'(1)(x-1)+1\Leftrightarrow y=1.$$

+) Với $x_0=\frac{17}{5}$, ta có $y_0=\frac{77}{5}$. Phương trình tiếp tuyến của (C) tại $M_2\left(\frac{17}{5};\frac{77}{5}\right)$ là:

$$y=y'\left(\frac{17}{5}\right)\left(x-\frac{17}{5}\right)+\frac{77}{5}\Leftrightarrow y=-24\left(x-\frac{17}{5}\right)+\frac{77}{5}\Leftrightarrow y=-24x+97.$$

Vậy có 2 tiếp tuyến của đồ thị (C) đi qua điểm $A(4;1)$.

Câu 15: Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^3$ tại điểm có hoành độ 0 là đường thẳng

Trả lời: $y=0$.

Lời giải

Ta có $y(0)=0$;

$y' = 3x^2 \Rightarrow y'(0) = 0$

Phương trình tiếp tuyến là: $y = 0(x-0) + 0 \Leftrightarrow y = 0$.

Câu 16: Đường thẳng $d: y = 3x+1$ cắt đồ thị (C) của hàm số $y = \dfrac{2x^2 - 2x + 3}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt A, B. Tính độ dài AB.

Trả lời: $AB = 4\sqrt{10}$

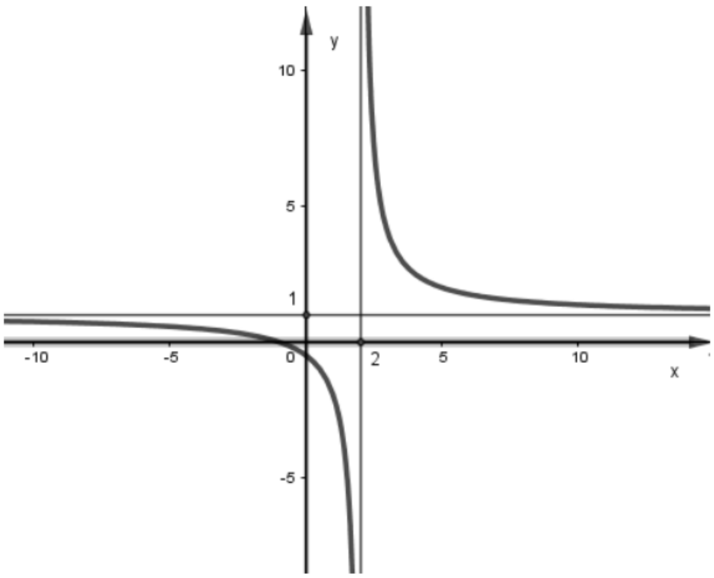
Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm:

$$\frac{2x^2-2x+3}{x-1} = 3x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ 2x^2 - 2x + 3 = 3x^2 + x - 3x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x^2 - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \Rightarrow y = 7 \\ x = -2 \Rightarrow y = -5 \end{array}\right.$$

Gọi $A(2;7), B(-2;-5) \Rightarrow AB = \sqrt{4^2 + 12^2} = 4\sqrt{10}.$

Câu 17: Cho hàm số $y = \dfrac{ax+1}{bx-2}$ có đồ thị như hình vẽ. Tính $T = a + b$.



Trả lời: $T = 2$

Lời giải

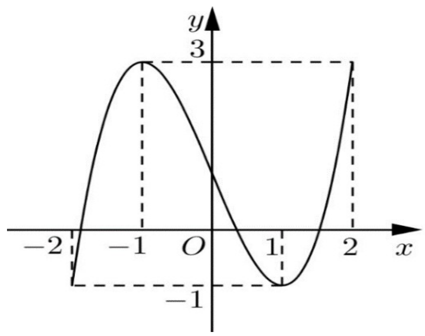
$y' = \dfrac{-2a-b}{(bx-2)^2}$.

Dựa vào đồ thị hàm số $\Rightarrow$ hàm số nghịch biến trên tập xác định $\Rightarrow -2a-b<0$ $(*)$.

Đồ thị có hai đường tiệm cận: $x=2$ và $y=1$.

Khi đó $\begin{cases}\dfrac{a}{b}=1\\ \dfrac{2}{b}=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\ b=1\end{cases}$ Thỏa mãn $(*)$. Vậy $T=2$.

Câu 18: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[-2;2]$ và có đồ thị như hình vẽ bên.



Số nghiệm thực của phương trình $3f(x)-4=0$ trên đoạn $[-2;2]$ là

Trả lời: 3.

Lời giải

Ta có $3f(x)-4=0\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{4}{3}$. Dựa vào đồ thị, ta thấy đường thẳng $y=\dfrac{4}{3}$ cắt $y=f(x)$ tại 3 điểm phân biệt nên phương trình đã cho có 3 nghiệm phân biệt.

Câu 19: Tìm điều kiện của m để đường thẳng $y=mx+1$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-3}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt.

Trả lời: $(-\infty;0)\cup(16;+\infty)$

Lời giải

Hoành độ giao điểm là nghiệm của phương trình: $\dfrac{x-3}{x+1}=mx+1$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x-3=(mx+1)(x+1)\\ x\neq-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}mx^2+mx+4=0 \quad (*)\\ x\neq-1\end{cases}$

Để đường thẳng $y=mx+1$ cắt đồ thị hàm số $y=\frac{x-3}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt thì phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt khác -1 hay $\begin{cases}\Delta>0\\ m(-1)^2+m(-1)+4\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-16m>0\\ 4\neq 0\end{cases}$

$\Leftrightarrow m\in(-\infty;0)\cup(16;+\infty)$.

Câu 20: Cho hàm số $y=\frac{2x-1}{x+1}$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d: y=2x-3$. Đường thẳng d cắt (C) tại hai điểm phân biệt A và B. Tọa độ trung điểm của đoạn AB là:

Trả lời: $M\left(\frac{3}{4};-\frac{3}{2}\right)$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm là: $\frac{2x-1}{x+1}=2x-3$ (1). Điều kiện $x\neq 1$.

Ta có $(1)\Leftrightarrow 2x-1=(x+1)(2x-3)\Leftrightarrow 2x^2-3x-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\ x=-\frac{1}{2}\end{array}\right.$.

Gọi M là trung điểm của đoạn AB.

Ta có $x_M=\frac{2+\left(-\frac{1}{2}\right)}{2}=\frac{3}{4}$; $y_M=2x_M-3=2.\frac{3}{4}-3=-\frac{3}{2}$.

Vậy tọa độ trung điểm của đoạn AB là: $M\left(\frac{3}{4};-\frac{3}{2}\right)$.

Câu 21: Số giao điểm đồ thị hàm số $y=x^4-x^2-2$ và đường thẳng $y=-2$ là:

Trả lời: 3.

Lời giải

Hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^4-x^2-2$ và $y=-2$

Ta có phương trình hoành độ giao điểm:

$x^4-x^2-2=-2\Leftrightarrow x^4-x^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=\pm 1\end{array}\right.$

Vậy đồ thị hàm số $y=x^4-x^2-2$ và $y=-2$ cắt nhau tại 3 điểm.

Câu 22: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình vẽ. Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho phương trình $f(x)=2m-4$ có đúng 3 nghiệm thực phân biệt.

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	||	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	2 || $+\infty$	↘	-4	↗	$+\infty$

Trả lời: $(0;3)$.

Lời giải

Số nghiệm của phương trình $f(x)=2m-4$ chính là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ và đường thẳng $y=2m-4$. Do đó cho phương trình $f(x)=2m-4$ có đúng 3 nghiệm thực phân biệt khi và chỉ khi đường thẳng $y=2m-4$ cắt đồ thị hàm số tại 3 điểm phân biệt.

Quan sát bảng biến thiên ta thấy đồ thị hàm số $y=f(x)$ và đường thẳng $y=2m-4$ cắt nhau tại 3 điểm phân biệt khi và chỉ khi $-4<2m-4<2 \Leftrightarrow 0<m<3$.

Câu 23: Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y=-2x+m$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-2}$ tại hai điểm phân biệt là.

Trả lời: $\left(-\infty;5-2\sqrt{6}\right)\cup\left(5+2\sqrt{6};+\infty\right)$

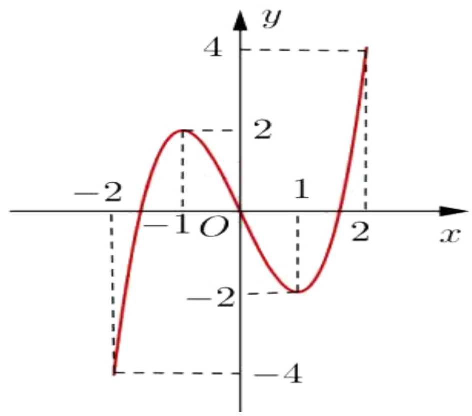
Lời giải

Xét phương trình: $-2x+m=\dfrac{x+1}{x-2} \Leftrightarrow 2x^2-(3+m)x+2m+1=0$ với $x\neq 2$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ phương trình có hai nghiệm phân biệt khác 2

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta=m^2-10m+1>0\\ 2.2^2-(3+m).2+2m+1\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow m\in\left(-\infty;5-2\sqrt{6}\right)\cup\left(5+2\sqrt{6};+\infty\right).$$

Câu 24: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[-2;2]$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên dưới. Xác định giá trị của tham số *m* để phương trình $|f(x)|=m$ có số nghiệm thực nhiều nhất.

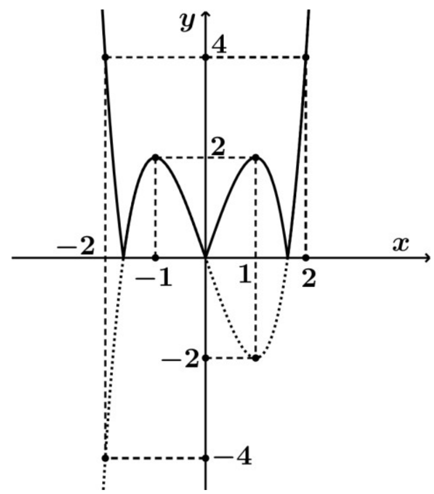


Trả lời:6.

Lời giải

Chọn B

Dựa vào đồ thị ta có đồ thị của hàm số $y=|f(x)|$ là:



Từ đồ thị ta thấy rằng, với m thỏa $0<m<2$ thì phương trình $|f(x)|=m$ có số nghiệm nhiều nhất là 6.

Câu 25: Sau đây là bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$:

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $2\left|f(x)\right|-3=0$ là

Trả lời: 4 .

Lời giải

Ta có: $2\left|f(x)\right|-3=0 \Leftrightarrow \left|f(x)\right|=\dfrac{3}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=\dfrac{3}{2} \\ f(x)=-\dfrac{3}{2} \end{array}\right.$.

Dựa vào BBT suy ra:

Với $f(x)=\dfrac{3}{2} \Rightarrow$ Phương trình có 3 nghiệm phân biệt.

Với $f(x)=-\dfrac{3}{2} \Rightarrow$ Phương trình có 1 nghiệm phân biệt.

Nên $2\left|f(x)\right|-3=0$ có 4 nghiệm phân biệt.

Câu 26: Cho hàm số $y=x^3+3x^2-m$. Tìm các giá trị của m để đồ thị hàm số $f(x)$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt?

Trả lời: $m\in(0;4)$

Lời giải

Ta có $y'=3x^2+6x$; $y'=0 \Leftrightarrow x=0$ hoặc $x=-2$.

Hàm số có 3 nghiệm phân biệt khi $Y_{CD}\cdot y_{CT}<0 \Leftrightarrow y(0)\cdot y(-2)<0 \Leftrightarrow -m\cdot(4-m)<0 \Leftrightarrow 0<m<4.$

Câu 27: Biết đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+1}{1-x}$ và đường thẳng $y=-x+2$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt A và B, tìm tung độ trung điểm I của đoạn thẳng AB.

Trả lời: $y_I = 0$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm: $\dfrac{x+1}{1-x} = -x+2 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 1 = 0$.

Gọi $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ là giao điểm của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x+1}{1-x}$ và đường thẳng $y = -x+2$.

Ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ y_1 + y_2 = -(x_1 + x_2) + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ y_1 + y_2 = 0 \end{cases}$.

I là trung điểm của đoạn thẳng AB nên $y_I = \dfrac{y_1 + y_2}{2} = 0$.

Câu 28: Trong 20 phút theo dõi, lưu lượng nước của một con sông được tính theo công thức $Q(t) = \dfrac{-1}{5}t^3 + 5t^2 + 100$, trong đó Q được tính theo $m^3/¿$ phút, t tính theo phút, $0 \le t \le 20$ (Nguồn: A. Bigalke et al., Mathematik, Grundkurs ma-1, Cornelsen 2016). Khi lưu lượng nước của con sông lên đến 550 $m^3/¿$ phút thì cảnh báo lũ được đưa ra.

Trong thời gian theo dõi, lưu lượng nước của con sông lớn nhất là bao nhiêu? Cảnh báo lũ được đưa ra vào thời điểm nào?

Trả lời: tại thời điểm $t \in [15; 5+5\sqrt{7}]$ phút thì cảnh báo lũ được đưa ra.

Lời giải

Xét hàm số $Q(t) = \dfrac{-1}{5}t^3 + 5t^2 + 100$ với $t \in [0; 20]$.

Ta có $Q(t) = \dfrac{-3}{5}t^2 + 10t$;

$Q'(t) = 0 \Leftrightarrow -\dfrac{3}{5}t^2 + 10t = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{50}{3}$ hoăčt ¿0.

Bảng biến thiên của hàm số trên đoạn [0; 20] như sau:

t	0		$\frac{50}{3}$		20
Q'(t)		+	0	–	
Q(t)			$\frac{15200}{27}$		
	100				500

Từ bảng biến thiên suy ra $\underset{[0;20]}{max}\, Q(t)=\frac{15200}{27}$ tại $t=\frac{50}{3}$, tức là lưu lượng nước của con sông lớn nhất là $\frac{15200}{27}$ $m^3/$¿ phút tại thời điểm $t=\frac{50}{3}$ phút.

Cảnh báo lũ được đưa ra khi lưu lượng nước của con sông lên đến 550 $m^3/$¿ phút, tức là $Q(t)\ge 550 \Leftrightarrow$ $\frac{-1}{5}t^3+5t^2+100\ge 550 \Leftrightarrow -\frac{1}{5}t^3+5t^2+450\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t\le 5-5\sqrt{7} \\ 15\le t\le 5+5\sqrt{7} \end{array}\right.$.

Lại có $t\in[0;20]$ nên $15\le t\le 5+5\sqrt{7}$.

Vậy tại thời điểm $t\in[15;5+5\sqrt{7}]$ phút thì cảnh báo lũ được đưa ra.

Câu 29: Khi một vật lạ mắc kẹt trong khí quản khiến ta phải ho, cơ hoành đẩy lên trên gây ra tăng áp lực trong phổi, theo đó cuống họng co thắt làm hẹp khí quản khiến không khí đi qua mạnh hơn. Đối với một lượng không khí bị đẩy ra trong một khoảng thời gian cố định, khí quản càng nhỏ thì luồng không khí càng đẩy ra nhanh hơn. Vận tốc luồng khí thoát ra càng cao, lực tác động lên vật lạ càng lớn. Qua nghiên cứu một số trường hợp, người ta nhận thấy vận tốc v của luồng khí liên hệ với bán kính x của khí quản theo công thức:

$v(x)=k(x_0-x)x^2$ với $\frac{1}{2}x_0\le x\le x_0$. Trong đó k là hằng số $(k>0)$ và x_0 là bán kính khí quản ở trạng thái bình thường. Tìm x theo x_0 để vận tốc của luồng khí một cơn ho trong trường hợp này là lớn nhất.

Trả lời: $x=\frac{2}{3}x_0$.

Lời giải

Xét hàm số $f(x)=(x_0-x)x^2$ với x_0 cố định và $\frac{1}{2}x_0\le x\le x_0$.

Do k là hằng số nên vận tốc của luồng khí một cơn ho lớn nhất khi $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất.

Ta có $f(x) = -x^3 + x_0 x^2$;

$f'(x) = -3x^2 + 2x_0 x$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoăc $x = \frac{2}{3}x_0$.

Bảng biến thiên:

x	$\frac{1}{2}x_0$		$\frac{2}{3}x_0$		x_0
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$f\left(\frac{1}{2}x_0\right)$	$\nearrow$	$f\left(\frac{2}{3}x_0\right)$	$\searrow$	$f(x_0)$

Dựa vào bảng biến thiên, ta có $max_{\left[\frac{1}{2}x_0 x_0\right]} f(x) = f\left(\frac{2}{3}x_0\right)$.

Vậy vận tốc của luồng khí một cơn ho lớn nhất khi $x = \frac{2}{3}x_0$.

Câu 30: Anh Nam có một mảnh đất rộng và muốn dành ra một khu đất hình chữ nhật có diện tích 200 m^2 để trồng vài loại cây mới. Anh dự kiến rào quanh ba cạnh của khu đất hình chữ nhật này bằng lưới thép, cạnh còn lại (chiều dài) sẽ tận dụng bức tường có sẵn (Hình 1.36). Do điều kiện địa lí, chiều rộng khu đất không vượt quá 15 m, hỏi chiều rộng của khu đất này bằng bao nhiêu để tổng chiều dài lưới thép cần dùng là ngắn nhất (nghĩa là chi phí rào lưới thép thấp nhất)?

Hình 1.36

Trả lời: 20m

Lời giải

Gọi $x(\ m)$ là chiều rộng của khu đất hình chữ nhật cần rào.

Theo đề bài, ta có $0<x\le 15$.

Diện tích khu đất này là $200(\ m^2)$ nên chiều dài của khu đất là $\frac{200}{x}(\ m)$.

Tổng chiều dài lưới thép rào quanh khu đất là $L(x)=2x+\frac{200}{x}(\ m)$.

Xét hàm số: $L(x)=2x+\frac{200}{x}$, với $x\in(0;15¿$.

Ta có: $L'(x)=2-\frac{200}{x^2}=\frac{2x^2-200}{x^2}$;

$L'(x)=0 \Leftrightarrow x=10(\text{ do } x>0)$.

Ta có: $\lim ¿_{x\to 0^{+¿}} L(x)=\lim ¿_{x\to 0^{+¿}}\left(2x+\frac{200}{x}\right)=+\infty ¿ ¿¿ ¿$;

$L(10)=40$

$L(15)=\frac{130}{3}$.

Bảng biến thiên:

x	0		10		15
$L'(x)$		$-$	0	$+$	
$L(x)$	$+\infty$	↘	40	↗	$\frac{130}{3}$

Dựa vào bảng biến thiên, chiều dài lưới thép ngắn nhất là $40\ m$ khi chiều rộng khu đất này là $x=10(\ m)$ (và chiều dài là $\frac{200}{10}=20(\ m)$.

Câu 31: Giả sử số lượng của một quần thể nấm men tại môi trường nuôi cấy trong phòng thí nghiệm được mô hình hoá bằng hàm số $P(t)=\frac{a}{b+e^{-0,75t}}$, trong đó thời gian t được tính bằng giờ. Tại thời điểm ban đầu

$t=0$, quần thể có 20 tế bào và tăng với tốc độ 12 tế bào/giờ. Tìm các giá trị của a và b. Theo mô hình này, điều gì xảy ra với quần thể nấm men về lâu dài?

Trả lời: 100 tế bào.

Lời giải

Ta có: $P'(t)=\frac{0,75aa^{-0,75t}}{\left(b+e^{-0,75t}\right)^2}, t\geq 0$.

Theo đề bài, ta có: $P(0)=20$ và $P'(0)=12$. Do đó, ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases}\frac{a}{b+1}=20\\ \frac{0,75a}{(b+1)^2}=12\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=20(b+1)\\ \frac{15}{b+1}=12.\end{cases}$$

Giải hệ phương trình này, ta được $a=25$ và $b=\frac{1}{4}$.

Khi đó, $P'(t)=\frac{18,75e^{-0,75t}}{\left(\frac{1}{4}+e^{-0,75t}\right)^2}>0, \forall t\geq 0$, tức là số lượng quần thể nấm men luôn tăng.

Tuy nhiên, do $\lim ¿_{t\to+\infty}P(t)=\lim ¿_{t\to+\infty}\frac{25}{\frac{1}{4}+e^{-0,75t}}=100¿¿$ nên số lượng quần thể nấm men tăng nhưng không vượt quá 100 tế bào.

Câu 32: Một nhà sản xuất cần làm những hộp đựng hình trụ có thể tích 1 lít. Tìm các kích thước của hộp đựng để chi phí vật liệu dùng để sản xuất là nhỏ nhất (kết quả được tính theo centimét và làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).

Trả lời: $10,84(\ cm)$

Lời giải

Đổi 1 lít ¿ $1000\ cm^3$.

Gọi $r(\ cm)$ là bán kính đáy của hình trụ, $h(\ cm)$ là chiều cao của hình trụ.

Diện tích toàn phần của hình trụ là: $S=2\pi r^2+2\pi rh$.

Do thể tích của hình trụ là $1000\ cm^3$ nên ta có: $1000=V=\pi r^2 h$, hay $h=\dfrac{1000}{\pi r^2}$.

Do đó, diện tích toàn phần của hình trụ là: $S=2\pi r^2+\dfrac{2000}{r}, r>0$.

Ta cần tìm r sao cho S đạt giá trị nhỏ nhất. Ta có:

$$S'=4\pi r-\frac{2000}{r^2}=\frac{4\pi r^3-2000}{r^2}; S'=0\Leftrightarrow \pi r^3=500\Leftrightarrow r=\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}.$$

Bảng biến thiên:

r	0		$\sqrt[3]{\dfrac{500}{\pi}}$		$+\infty$
$S'(r)$		$-$	0	$+$	
$S(r)$	$+\infty$	$\searrow$	$S\left(\sqrt[3]{\dfrac{500}{\pi}}\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

Khi đó: $h=\dfrac{1000}{\pi r^2}=\dfrac{1000}{\pi\sqrt[3]{\dfrac{250000}{\pi^2}}}=\dfrac{100}{\sqrt[3]{250\pi}}$.

Vậy cần sản xuất các hộp đựng hình trụ có bán kính đáy $r=\sqrt[3]{\dfrac{500}{\pi}}\approx 5,42\ (cm)$ và chiều cao $h=\dfrac{100}{\sqrt[3]{250\pi}}\approx 10,84\ (cm)$.

Câu 33: Có bao nhiêu giá trị của m để đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x}{1-x}$ cắt đường thẳng $y=x-m$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho góc giữa hai đường thẳng OA và OB bằng 60° (O là gốc tọa độ)?

Trả lời: 2.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị:

$\dfrac{x}{1-x}=x-m\Leftrightarrow x^2-mx+m=0\ (*)$ ($x=1$ không là nghiệm của phương trình)

Hai đồ thị cắt nhau tại hai điểm phân biệt A, B khi: $\Delta = m^2 - 4m > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 4 \\ m < 0 \end{array}\right.$

Gọi x_1, x_2 lần lượt là nghiệm của $(*)$ thỏa $x_1 + x_2 = m, x_1x_2 = m$,

khi đó $A(x_1; x_1 - m), B(x_2; x_2 - m)$.

Theo đề bài ta có: $\cos(OA, OB) = \dfrac{|x_1x_2 + (x_1 - m)(x_2 - m)|}{\sqrt{x_1^2 + (x_1 - m)^2}.\sqrt{x_2^2 + (x_2 - m)^2}} = \dfrac{|2x_1x_2|}{x_1^2 + x_2^2} = \dfrac{|2m|}{m^2 - 2m}$.

Khi đó $\cos(60^\circ) = \dfrac{|2m|}{m^2 - 2m} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{2}{m-2} = \dfrac{1}{2}, m > 0 \\ \dfrac{2}{m-2} = -\dfrac{1}{2}, m < 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 6 \\ m = -2 \end{array}\right.$.

Vậy có 2 giá trị m để hai đồ thị cắt tại hai điểm phân biệt A, B sao cho góc giữa hai đường thẳng OA và OB bằng 60°.

Câu 34: Một đường thẳng cắt đồ thị hàm số $y = 3x^4 - 4x^2$ tại bốn điểm phân biệt có hoành độ $0; 1; a; b$. Tính $S = ab - a - b$.

Trả lời: $S = \dfrac{2}{3}$.

Lời giải

Đường thẳng d cắt đồ thị (C) của hàm số $y = f(x) = 3x^4 - 4x^2$ lần lượt tại các điểm A, B có hoành độ $0; 1$ nên:

$\begin{cases} y_A = f(0) = 0 \\ y_B = f(1) = -1 \end{cases} \Rightarrow A(0;0), B(1;-1).$

Suy ra phương trình đường thẳng d là: $y = -x$.

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (C): $3x^4 - 4x^2 = -x$

$\Leftrightarrow 3x^4 - 4x^2 + x = 0$

$\Leftrightarrow x(3x^3 - 4x + 1) = 0$

$\Leftrightarrow x(x-1)(3x^2 + 3x - 1) = 0$.

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x-1=0 \\ 3x^2+3x-1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=\dfrac{-3-\sqrt{21}}{6} \\ x=\dfrac{-3+\sqrt{21}}{6} \end{array}\right.$$

Từ đó suy ra $a=\dfrac{-3-\sqrt{21}}{6}; b=\dfrac{-3+\sqrt{21}}{6} \Rightarrow S=ab-a-b=\dfrac{2}{3}$.

Nhận xét: Do biểu thức S đối xứng nên ta có thể áp dụng Định lí Viet để tính nhanh hơn

Cụ thể: Vì a, b là nghiệm của phương trình $3x^2+3x-1=0$ nên $ab=-\dfrac{1}{3}; a+b=-1$.

Từ đó suy ra $S=ab-a-b=ab-(a+b)=-\dfrac{1}{3}-(-1)=\dfrac{2}{3}$.