**Giải.**

a) $M=\left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}\right)⋅\frac{\sqrt{x}-2}{2}=\frac{(2\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}{2(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}$

$$=\frac{2(\sqrt{x}+1)}{2(\sqrt{x}+2)}=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2}$$

b) $M<\frac{2}{3}$ khi $M-\frac{2}{3}<0$ hay $\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2}-\frac{2}{3}<0$,

suy ra $\frac{3(\sqrt{x}+1)-2(\sqrt{x}+2)}{3(\sqrt{x}+2)}<0$ hay $\frac{\sqrt{x}-1}{3(\sqrt{x}+2)}<0$.

Mà $3(\sqrt{x}+2)>0$ với $x\geq 0$ nên (1) dẫn đến $\sqrt{x}-1<0$ hay $\sqrt{x}<1$ suy ra $x<1$. Kết hợp với điều kiện ta có $M<\frac{2}{3}$ khi $0\leq x<1$.

c) $M>\frac{3}{5}$ khi $M-\frac{3}{5}>0$ hay $\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2}-\frac{3}{5}>0$,

suy ra $\frac{5(\sqrt{x}+1)-3(\sqrt{x}+2)}{5(\sqrt{x}+2)}>0$ hay $\frac{2\sqrt{x}-1}{5(\sqrt{x}+2)}>0$.

Mà $5(\sqrt{x}+2)>0$ với $x\geq 0$ nên (2) dẫn đến $2\sqrt{x}-1>0$ hay $\sqrt{x}>\frac{1}{2}$ suy $rax>\frac{1}{4}$.

Kết hợp với điều kiện ta có $M>\frac{3}{5}$ khi $x>\frac{1}{4},x\ne 4$.

Bài 6. Cho biểu thức $M=\left(\frac{1}{\sqrt{x}-1}+\frac{\sqrt{x}}{x-1}\right):\frac{2\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}-2}$ với $x\geq 0,x\ne 1$.

a) Rút gọn biểu thức $M$.

b) Tìm giá trị lớn nhất của $M$.

c) Tìm các số nguyên $x$ để $M$ có giá trị nguyên.

**Giải.**

a) $M=\left(\frac{\sqrt{x}+1+\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}\right):\frac{2\sqrt{x}+1}{x-\sqrt{x}+2\sqrt{x}-2}$

$$\begin{matrix}& =\frac{2\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}:\frac{2\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)}\\& =\frac{(2\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)(2\sqrt{x}+1)}=\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1}\end{matrix}$$

b) $M=\frac{\sqrt{x}+1+1}{\sqrt{x}+1}=1+\frac{1}{\sqrt{x}+1}$. Vi $x\geq 0$ nên $\sqrt{x}\geq 0$ do đó $\sqrt{x}+1\geq 1$ suy ra $\frac{1}{\sqrt{x}+1}\leq 1$. Từ đó suy ra $M\leq 1+1=2$.

Dấu "=" xảy ra khi $x=0$. Vậy giá trị lớn nhất của $M$ bằng 2 khi $x=0$.

c) $M=1+\frac{1}{\sqrt{x}+1}$. M có giá trị nguyên khi $\sqrt{x}+1$ là ước của 1 .

Mà $\sqrt{x}+1>0$ nên $\sqrt{x}+1=1$ suy ra $x=0$ (thoả mãn điều kiện).

Vậy M có giá trị nguyên khi $x=0$.

Bài 7. Cho biểu thức $M=\left(\frac{2x+3\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+1}+\frac{1}{x-\sqrt{x}+1}-\frac{1}{\sqrt{x}+1}\right)⋅\frac{x-\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$ với $x>0$.

a) Rút gọn biểu thức M .

b) Chứng minh $M>\sqrt{M}$.

c) Tìm $x\in R$ để $M$ có giá trị nguyên.

Giải.

a) $M=\left(\frac{2x+3\sqrt{x}+\sqrt{x}+1-(x-\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)}\right)⋅\frac{x-\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$

$$=\frac{x+5\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)}⋅\frac{x-\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+5)}{(\sqrt{x}+1)\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}+1}.$$

b) Vì $x>0$ nên $\sqrt{x}+5>0,\sqrt{x}+1>0$ do đó $M>0,\sqrt{M}$ xác định.

Xét $M-1=\frac{\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}+1}-1=\frac{\sqrt{x}+5-(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}+1}=\frac{4}{\sqrt{x}+1}$.

Do $\sqrt{x}+1>0$ nên $\frac{4}{\sqrt{x}+1}>0$ hay $M-1>0$, suy ra $M>1$ nên $\sqrt{M}>1$.

Ta có $M-\sqrt{M}=\sqrt{M}(\sqrt{M}-1)>0$ nên $M>\sqrt{M}$.

c) Ta có $M=\frac{\sqrt{x}+1+4}{\sqrt{x}+1}=1+\frac{4}{\sqrt{x}+1}$. Mà $\frac{4}{\sqrt{x}+1}>0$ nên $M>1$.

Vì $\sqrt{x}>0$ nên $\sqrt{x}+1>1$ do đó $\frac{4}{\sqrt{x}+1}<4$ suy ra $M<5$.

Vậy $1<M<5$. Để $M$ nhận giá trị nguyên thì $M\in \{2;3;4\}$.

* $M=\frac{\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}+1}=2$ hay $2(\sqrt{x}+1)=\sqrt{x}+5$ suy ra $\sqrt{x}=3$ hay $x=9$ (thoả mãn điều kiện).
* $M=\frac{\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}+1}=3$ hay $3(\sqrt{x}+1)=\sqrt{x}+5$ suy ra $2\sqrt{x}=2$.

Do đó $\sqrt{x}=1$ hay $x=1$ (thoả mãn điều kiện).

* $M=\frac{\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}+1}=4$ hay $4(\sqrt{x}+1)=\sqrt{x}+5$ suy ra $3\sqrt{x}=1$.

Do đó $\sqrt{x}=\frac{1}{3}$ hay $x=\frac{1}{9}$ (thoả mãn điều kiện).

Vậy $x\in \left\{1;9;\frac{1}{9}\right\}$.

Bài 8. Cho biểu thức $M=\frac{x+\sqrt[3]{x}-2}{x-1}-\frac{1}{\sqrt[3]{x^{2}}+\sqrt[3]{x}+1}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}-1}$ với $x\ne 1$.

a) Rút gọn biểu thức M .

b) Tìm x để $M=\frac{1}{2}$.

**Giải.**

a) Đặt $a=\sqrt[3]{x}$, khi đó $a^{3}=x$ và $a\ne 1$. Ta có

$$\begin{matrix}&M=\frac{a^{3}+a-2}{a^{3}-1}-\frac{1}{a^{2}+a+1}+\frac{1}{a-1}\\& =\frac{a^{3}+a-2-a+1+a^{2}+a+1}{(a-1)\left(a^{2}+a+1\right)}=\frac{a^{3}+a^{2}+a}{(a-1)\left(a^{2}+a+1\right)}=\frac{a\left(a^{2}+a+1\right)}{(a-1)\left(a^{2}+a+1\right)}=\frac{a}{a-1}.\end{matrix}$$

Suy ra $M=\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}-1}$.

b) $M=\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}-1}=\frac{1}{2}$ hay $2\sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{x}-1$ suy ra $\sqrt[3]{x}=-1$.

Do đó $x=-1$ (thoả mãn điều kiện). Vậy $x=-1$.

**3. Bài tập tự luyện**

Bài 1. Rút gọn biểu thức $M=\frac{\sqrt{4x^{2}-4x+1}}{1-2x}$ với $x\ne \frac{1}{2}$.

Bài 2. Tính:

a) $a=\sqrt{8+2\sqrt{7}}-\sqrt{8-2\sqrt{7}}$;

b) $b=\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}+\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$;

c) $c=\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+…+\frac{1}{\sqrt{100}+\sqrt{99}}$.

Bài 3. Cho biểu thức $P=\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right)⋅\frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ với $x>0$.

a) Rút gọn biểu thức $P$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của $P$.

Bài 4. Cho biểu thức $Q=\left(\frac{x+\sqrt{x}-1}{x\sqrt{x}-1}-\frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1}\right):\frac{1}{\sqrt{x}-1}$ với $x\geq 0,x\ne 1$.

a) Rút gọn biểu thức Q .

b) Chứng minh $Q<\frac{1}{3}$.

c) Tìm $x$ để $Q=\frac{1}{2\sqrt{x}+1}$.

Bài 5. Cho biểu thức $P=\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}-\frac{x+\sqrt{x}}{x-1}\right):\left(-\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\right)$ với $x>0,x\ne 1$.

a) Rút gọn biểu thức $P$.

b) Tìm x đê $\frac{1}{P}\geq \frac{\sqrt{x}+9}{8}$.

Bài 6. Cho $\left(x+\sqrt{x^{2}+9}\right)\left(y+\sqrt{y^{2}+9}\right)=9$. Tính giá trị của biểu thức $M=x+y$.

Bài 7. Tìm $x$ sao cho $x+6\sqrt{x+8}+4\sqrt{6-2x}=27$.

Bài 8. Tìm $x$ sao cho $\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}=x^{2}-6x+11$.

**Hướng dẫn - Lời giải - Đáp số**

Bài 1. $M=\frac{\sqrt{(2x-1)^{2}}}{1-2x}=\frac{|2x-1|}{1-2x};x\ne \frac{1}{2}$.

* Nếu $x>\frac{1}{2}$ thì $M=\frac{2x-1}{1-2x}=-1$.
* Nếu $x<\frac{1}{2}$ thì $M=\frac{1-2x}{1-2x}=1$.

Bài 2. a) $a=\sqrt{7+2\sqrt{7}+1}-\sqrt{7-2\sqrt{7}+1}=\sqrt{(\sqrt{7}+1)^{2}}-\sqrt{(\sqrt{7}-1)^{2}}$

$$=|\sqrt{7}+1|-|\sqrt{7}-1|=\sqrt{7}+1-(\sqrt{7}-1)=2.$$

b) Đặt $x=\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}};y=\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$ thì $x^{3}+y^{3}=14,xy=-1$.

Có $b=x+y$ nên $b^{3}=x^{3}+y^{3}+3xy(x+y)=14-3b$.

Do đó $b^{3}+3 b-14=0$ hay $b^{3}-8+3 b-6=0$.

Suy ra $(b-2)\left(b^{2}+2b+4\right)+3(b-2)=0$, do đó $(b-2)\left(b^{2}+2b+7\right)=0$.

Mà $b^{2}+2 b+7=(b+1)^{2}+6>0$ nên $b-2=0$ hay $b=2$.

c) $c=\frac{\sqrt{2}-1}{2-1}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2}+…+\frac{\sqrt{100}-\sqrt{99}}{100-99}$

$$\begin{matrix}& =\sqrt{2}-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}+…+\sqrt{100}-\sqrt{99}\\& =-1+\sqrt{100}=9.\end{matrix}$$

Bài 3. a) $P=\frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}(x>0)$.

b) $P=\sqrt{x}+1+\frac{1}{\sqrt{x}}$.

Theo bất đẳng thức Cauchy: $\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\geq 2\sqrt{\sqrt{x}⋅\frac{1}{\sqrt{x}}}=2$.

Do đó $P\geq 3$. Dấu " $=$ " xảy ra khi $\sqrt{x}=\frac{1}{\sqrt{x}}$ hay $x=1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 3 khi $x=1$.

Bài 4. a) $Q=\frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}$ với $x\geq 0,x\ne 1$.

b) Xét $\frac{1}{3}-Q=\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}=\frac{x+\sqrt{x}+1-3\sqrt{x}}{3(x+\sqrt{x}+1)}$

$$=\frac{x-2\sqrt{x}+1}{3(x+\sqrt{x}+1)}=\frac{(\sqrt{x}-1)^{2}}{3(x+\sqrt{x}+1)}.$$

Với $x\geq 0$, ta có $3(x+\sqrt{x}+1)>0$. Mà $x\ne 1$ nên $\sqrt{x}-1\ne 0$, do đó $(\sqrt{x}-1)^{2}>0$. Suy ra $\frac{1}{3}-Q>0$ hay $Q<\frac{1}{3}$.

c) $Q=\frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}=\frac{1}{2\sqrt{x}+1}$ hay $\sqrt{x}(2\sqrt{x}+1)=x+\sqrt{x}+1$.

Chuyển vế, rút gọn ta được $x=1$ (không thoả mãn điều kiện).

Vậy không có giá trị nào của x để $Q=\frac{1}{2\sqrt{x}+1}$.

Bài 5. a) $P=\frac{\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}}$ với $x\geq 0,x\ne 1$.

b) $\frac{1}{P}=\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\geq \frac{\sqrt{x}+9}{8}$ dẫn đến $\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}-\frac{\sqrt{x}+9}{8}\geq 0$

hay $\frac{16\sqrt{x}-(x+10\sqrt{x}+9)}{8(\sqrt{x}+1)}\geq 0$.

Với $x>0$ ta có $8(\sqrt{x}+1)>0$ nên từ (1) suy ra $16\sqrt{x}-x-10\sqrt{x}-9\geq 0$.

Do đó $-x+6\sqrt{x}-9\geq 0$ suy ra $x-6\sqrt{x}+9\leq 0$ hay $(\sqrt{x}-3)^{2}\leq 0$.

Mặt khác, với $x>0$ ta luôn có $(\sqrt{x}-3)^{2}\geq 0$.

Khi đó $(\sqrt{x}-3)^{2}=0$, suy ra $\sqrt{x}=3$, do đó $x=9$.

Bài 6. Ta có $\left(\sqrt{x^{2}+9}+x\right)\left(\sqrt{x^{2}+9}-x\right)=x^{2}+9-x^{2}=9$.

$\left(\sqrt{y^{2}+9}+y\right)\left(\sqrt{y^{2}+9}-y\right)=y^{2}+9-y^{2}=9$.

Do đó: $\sqrt{x^{2}+9}+x=\sqrt{y^{2}+9}-y$,

$$\begin{array}{c}\sqrt{y^{2}+9}+y=\sqrt{x^{2}+9}-x\#(1)\end{array}$$

Cộng từng vế (1) và (2) ta được:

$\sqrt{x^{2}+9}+x+\sqrt{y^{2}+9}+y=\sqrt{x^{2}+9}-x+\sqrt{y^{2}+9}-y$.

Suy ra $x+y=-x-y$ hay $2x+2y=0$. Vậy $x+y=0$.

Bài 7. Điều kiện xác định: $-8\leq x\leq 3$.

Phương trình đã cho có dạng: $-x-6\sqrt{x+8}-4\sqrt{6-2x}+27=0$

hay $(x+8-6\sqrt{x+8}+9)+(6-2x-4\sqrt{6-2x}+4)=0$,

suy ra $(\sqrt{x+8}-3)^{2}+(\sqrt{6-2x}-2)^{2}=0$.

Vì $a^{2}\geq 0$ với mọi $a$, dấu " "=" xảy ra khi $a=0$ nên

$\left\{\begin{matrix}\sqrt{x+8}-3=0\\\sqrt{6-2x}-2=0\end{matrix}\right.$ hay $\left\{\begin{matrix}\sqrt{x+8}=3\\\sqrt{6-2x}=2\end{matrix}\right.$. Giải hệ phương trình ta được $x=1$.

Bài 8. Điều kiện xác định: $2\leq x\leq 4$.

Phương trình đã cho có dạng: $2x^{2}-12x+22-2\sqrt{x-2}-2\sqrt{4-x}=0$

hay $2\left(x^{2}-6x+9\right)+(x-2-2\sqrt{x-2}+1)+(4-x-2\sqrt{4-x}+1)=0$.

Suy ra $2(x-3)^{2}+(\sqrt{x-2}-1)^{2}+(\sqrt{4-x}-1)^{2}=0$.

Lập luận tương tự Bài 7 ta tìm được $x=3$.

**Chủ đê 3**

**PHƯƠNG TRìNH, BẤT PHƯƠNG TRİNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH**

**1. Kiến thức cần nhớ**

* Cho phương trình $ax^{2}+bx+c=0,a\ne 0$ (1) có $Δ=b^{2}-4a$; với $b=2 b^{'}$ ta có $Δ^{'}=b^{'2}-ac$.
* Nếu $Δ<0\left(Δ^{'}<0\right)$ thì phương trình (1) vô nghiệm.
* Nếu $Δ=0\left(Δ^{'}=0\right)$ thì phương trình (1) có nghiệm kép $x\_{1}=x\_{2}=-\frac{b}{2a}\left(x\_{1}=x\_{2}=-\frac{b^{'}}{a}\right)$.
* Nếu $Δ>0\left(Δ^{'}>0\right)$ thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $x\_{1,2}=\frac{-b\pm \sqrt{Δ}}{2a}$ $\left(x\_{1,2}=\frac{-b^{'}\pm \sqrt{Δ^{'}}}{a}\right)$.
* Định lí Viète: Nếu phương trình $a^{2}+bx+c=0,a\ne 0$ có hai nghiệm $x\_{1},x\_{2}$ thì $\left\{\begin{matrix}x\_{1}+x\_{2}=\frac{-b}{a}\\x\_{1}x\_{2}=\frac{c}{a}\end{matrix}\right.$.
* Nếu có hai số $u$ và $v$ sao cho $\left\{\begin{matrix}u+v=S\\uv=P\end{matrix}\left(S^{2}-4P\geq 0\right)\right.$ thì hai số $u$ và v là nghiệm của phương trình: $x^{2}-Sx+P=0$.
* Phương trình $ax^{2}+bx+c=0,a\ne 0$ :
* Nếu $a+b+c=0$ thì phương trình có hai nghiệm $x\_{1}=1,x\_{2}=\frac{c}{a}$.
* Nếu $a-b+c=0$ thì phương trình có hai nghiệm $x\_{1}=-1,x\_{2}=-\frac{c}{a}$.

**2. Bài tập minh hoạ**

Bài 1. Giải các phương trình sau:

a) $2x^{2}-5x+2=0$;

b) $x^{2}-2\sqrt{2}x+1=0$;

c) $(\sqrt{2}+1)x^{2}+2\sqrt{2}x+(\sqrt{2}-1)=0$.

**Giải.**

a) Có $Δ=(-5)^{2}-4⋅2⋅2=9,\sqrt{Δ}=3$.

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $x\_{1}=\frac{5-3}{4}=\frac{1}{2};x\_{2}=\frac{5+3}{4}=2$.

b) Có $Δ^{'}=(-\sqrt{2})^{2}-1⋅1=1,\sqrt{Δ^{'}}=1$. Phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt

$$x\_{1}=\frac{\sqrt{2}-1}{1}=\sqrt{2}-1;x\_{2}=\frac{\sqrt{2}+1}{1}=\sqrt{2}+1.$$

c) Phương trình (3) là phương trình bậc hai có $\sqrt{2}+1+2\sqrt{2}+\sqrt{2}-1=0$ do đó phương trình (3) có hai nghiệm phân biệt $x\_{1}=-1;x\_{2}=\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$.

Bài 2. Một cửa hàng bán một loại ti vi với giá một chiếc là x (triệu đồng), $x\geq 10$ và nhận thấy doanh thu của loại ti vi này được tính theo công thức $S=x(20-x)$ (triệu đồng). Hãy tính giá tiền của một chiếc ti vi nếu doanh thu từ việc bán loại ti vi này của cửa hàng là 96 triệu đồng.

**Giải.**

Doanh thu từ việc bán loại ti vi này của cửa hàng là 96 triệu đồng nên ta có $x(20-x)=96$ hay $x^{2}-20x+96=0$.

Giải phương trình này được $x\_{1}=8;x\_{2}=12$.

Do $x\geq 10$ nên $x\_{2}=12$ thoả mãn điều kiện bài toán.

Vậy giá của một chiếc ti vi là 12 triệu đồng

Bài 3. Cho phương trình $x^{2}-2x-1=0$. (1) Gọi $x\_{1},x\_{2}$ là hai nghiệm phương trình (1). Không giải phương trình, hãy tính giá trị của các tổng sau:

a) $M=x\_{1}^{2}+x\_{2}^{2}$;

b) $N=x\_{1}^{3}+x\_{2}^{3}$;

c) $K=x\_{1}^{5}+x\_{2}^{5}$.

**Giải.**

Có $Δ^{'}=(-1)^{2}-1⋅(-1)=2>0$ nên phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $x\_{1},x\_{2}$. Theo định lí Viète ta có $\left\{\begin{matrix}x\_{1}+x\_{2}=2\\x\_{1}x\_{2}=-1\end{matrix}\right.$.

a) $M=x\_{1}^{2}+x\_{2}^{2}=\left(x\_{1}+x\_{2}\right)^{2}-2x\_{1}x\_{2}=2^{2}-2⋅(-1)=6$.

b) $N=x\_{1}^{3}+x\_{2}^{3}=\left(x\_{1}+x\_{2}\right)^{3}-3x\_{1}x\_{2}\left(x\_{1}+x\_{2}\right)=2^{3}-3⋅(-1)⋅2=14$.

c) Có $\left(x\_{1}^{2}+x\_{2}^{2}\right)\left(x\_{1}^{3}+x\_{2}^{3}\right)=6⋅14$

$$\begin{matrix}&x\_{1}^{5}+x\_{2}^{5}+x\_{1}^{2}x\_{2}^{3}+x\_{2}^{3}x\_{2}^{2}=84\\&x\_{1}^{5}+x\_{2}^{5}+x\_{1}^{2}x\_{2}^{2}\left(x\_{1}+x\_{2}\right)=84\\&x\_{1}^{5}+x\_{2}^{5}+(-1)^{2}⋅2=84\\&x\_{1}^{5}+x\_{2}^{5}=82.\end{matrix}$$

Vậy $K=82$.

Bài 4. Cho phương trình $x^{2}-mx+2m-4=0$.

Biết rằng phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt thoả mãn điều kiện $x\_{2}=2x\_{1}$.

Tính giá trị của tổng $S=x\_{1}^{2}x\_{2}+x\_{2}^{2}x\_{1}$.

**Giải.**

Có $Δ=m^{2}-8m+16=(m-4)^{2}$. Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khi $(m-4)^{2}>0$ suy ra $m\ne 4$.

Theo định lí Viète ta có $\left\{\begin{matrix}x\_{1}+x\_{2}=m  (a) \\x\_{1}x\_{2}=2m-4 (b) \end{matrix}\right.$.

Do $x\_{2}=2x\_{1}$ nên từ (a) suy ra $x\_{1}+2x\_{1}=3x\_{1}=m$.

Do đó $x\_{1}=\frac{m}{3}$ suy ra $x\_{2}=\frac{2 m}{3}$.

Thay vào (b) ta được $\frac{m}{3}⋅\frac{2 m}{3}=2 m-4$ hay $2 m^{2}=18 m-36$.

Giải phương trình $2 m^{2}-18 m+36=0$ tìm được $m\_{1}=3;m\_{2}=6$ (thoả mãn điều kiện).

Có $S=x\_{1}^{2}x\_{2}+x\_{2}^{2}x\_{1}=x\_{1}x\_{2}\left(x\_{1}+x\_{2}\right)=m(2m-4)$.

* Với $m=3$ thì $S=3⋅2=6$.
* Với $m=6$ thì $S=6⋅8=48$.

Bài 5. Giải các phương trình sau:

a) $x^{3}-2x^{2}-x+2=0$;

b) $\frac{5x-14}{x^{2}-4}+\frac{1}{x-2}+\frac{x}{x+2}=0$.

**Giải.**

a) Phương trình (1) có dạng $x^{2}(x-2)-(x-2)=0$ hay $(x-2)\left(x^{2}-1\right)=0$.

* $x-2=0$ suy $rax=2$.
* $x^{2}-1=0$ hay $(x-1)(x+1)=0$ suy $rax=1,x=-1$.

Vậy $x\in \{-1;1;2\}$.

b) Điều kiện xác định: $x\ne \pm 2$. Phương trình (2) có dạng

$$\frac{5x-14+x+2+x(x-2)}{x^{2}-4}=0 hay \frac{x^{2}+4x-12}{x^{2}-4}=0$$

Khử mẫu ta được

$x^{2}+4x-12=0$ có $Δ^{'}=2^{2}-(-12)=16,\sqrt{Δ^{'}}=4$. Phương trình có hai nghiệm phân biệt $x\_{1}=2,x\_{2}=-6$.

Kết hợp với điều kiện xác định: phương trình có một nghiệm $x=-6$.

Bài 6. Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{x^{2}-2x+9}=2x-1$;

b) $\sqrt{5x+7}-\sqrt{x+3}=\sqrt{3x+1}$.

**Giải.**

a) Phương trình (1) dẫn đến $\left\{\begin{matrix}2x-1\geq 0\\x^{2}-2x+9=(2x-1)^{2}\end{matrix}\right.$

* Từ (a) suy ra $2x\geq 1$ hay $x\geq \frac{1}{2}$.
* Từ (b) suy ra $3x^{2}-2x-8=0$ có $Δ^{'}=(-1)^{2}-3⋅(-8)=25,\sqrt{Δ^{'}}=5$.

Phương trình có hai nghiệm $x\_{1}=\frac{1-5}{3}=-\frac{4}{3};x\_{2}=\frac{1+5}{3}=2$.

Kết hợp với ( a ), phương trình có nghiệm $x=2$.

b) Điều kiện xác định $x\geq -\frac{1}{3}$.

Phương trình (2) có dạng $\sqrt{5x+7}=\sqrt{x+3}+\sqrt{3x+1}$.

Bình phương hai vế ta được $5x+7=x+3+3x+1+2\sqrt{(x+3)(3x+1)}$

hay $2\sqrt{3x^{2}+10x+3}=x+3$.

Với điều kiện $x\geq -\frac{1}{3}$, bình phương hai vế phương trình ( 2 ) ta có:

$4\left(3x^{2}+10x+3\right)=x^{2}+6x+9$ hay $11x^{2}+33x+x+3=0$.

Suy ra $(x+3)(11x+1)=0$. Phương trình này có hai nghiệm $x\_{1}=-3;x\_{2}=-\frac{1}{11}$.

Kết hợp với điều kiện xác định, phương trình (2) có một nghiệm $x=-\frac{1}{11}$.

Bài 7. Giải các hệ phương trình sau:

a) $\left\{\begin{matrix}\frac{3}{x-1}+\frac{2}{y+1}=5\\\frac{2}{x-1}-\frac{1}{y+1}=1\end{matrix}\right.$;

b) $\left\{\begin{matrix}(x+1)(y+2)=xy+5\\(x+2)(y+2)=xy+8\end{matrix}\right.$;

c) $\left\{\begin{matrix}\sqrt{x}+\frac{2}{\sqrt{y}}=4\\2\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{y}}=3\end{matrix}\right.$.

**Giải.**

a) Điều kiện xác định: $x\ne 1,y\ne -1$.

Đặt $\frac{1}{x-1}=a,\frac{1}{y+1}=b$ ta có hệ phương trình $\left\{\begin{matrix}3a+2b=5\\2a-b=1\end{matrix}\right.$.

Giải hệ phương trình này tìm được $a=1, b=1$.

Suy ra $\left\{\begin{matrix}\frac{1}{x-1}=1\\\frac{1}{y+1}=1\end{matrix}\right.$ hay $\left\{\begin{matrix}x-1=1\\y+1=1\end{matrix}\right.$ do đó $\left\{\begin{matrix}x=2\\y=0\end{matrix}\right.$ (thoả mãn điều kiện).

Hệ phương trình có nghiệm $(x;y)=(2;0)$.

b) Hệ phương trình có dạng $\left\{\begin{matrix}xy+2x+y+2=xy+5\\xy+2x+2y+4=xy+8\end{matrix}\right.$ hay $\left\{\begin{matrix}2x+y=3\\2x+2y=4\end{matrix}\right.$.

Giải hệ này tìm được $\left\{\begin{matrix}x=1\\y=1\end{matrix}\right.$. Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x;y)=(1;1)$.