

Bài 4. KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA MỘT SỐ HÀM SỐ CƠ BẢN

Môn học/Hoạt động giáo dục: Toán; Lớp: 12 - CTST

Thời gian thực hiện: (8 tiết).

I. MỤC TIÊU.

1. Kiến thức, kĩ năng: Học xong bài này, HS đạt các yêu cầu sau:

- Nhận biết được hình ảnh hình học của đường tiệm cận ngang, đường tiệm cận đứng, đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.
- Mô tả được sơ đồ tổng quát để khảo sát hàm số (tìm tập xác định, xét chiều biến thiên, tìm cực trị, tìm tiệm cận, lập bảng biến thiên, vẽ đồ thị).
- Khảo sát được tập xác định, chiều biến thiên, cực trị, tiệm cận, bảng biến thiên và vẽ đồ thị của các hàm số: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$); $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($c \neq 0, ad-bc \neq 0$),

$$y = \frac{ax^2+bx+c}{mx+n} \quad (a \neq 0, m \neq 0, \text{đa thức tử không chia hết cho đa thức mẫu}).$$

- Nhận biết được tính đối xứng (trục đối xứng, tâm đối xứng) của đồ thị các hàm số trên.

2. Năng lực:

+Năng lực chung:

- Năng lực tự chủ và tự học trong tìm tòi khám phá
- Năng lực giao tiếp và hợp tác trong trình bày, thảo luận và làm việc nhóm
- Năng lực giải quyết vấn đề và sáng tạo trong thực hành, vận dụng.

+Năng lực riêng:

- Rèn luyện năng lực giải quyết vấn đề toán học và mô hình hoá toán học thông qua các bài toán thực tiễn liên quan đến khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số.
- Bồi dưỡng năng lực sử dụng công cụ, phương tiện học toán thông qua việc lập bảng biến thiên, vẽ đồ thị và các đường tiệm cận của đồ thị hàm số.
- Góp phần phát triển các năng lực chung như năng lực giao tiếp và hợp tác (qua việc thực hiện hoạt động nhóm), năng lực thuyết trình, báo cáo (khi trình bày kết quả của nhóm), năng lực tự chủ và tự học, ...
- Giao tiếp toán học: đọc, hiểu thông tin toán học.
- Sử dụng công cụ, phương tiện học toán: sử dụng máy tính cầm tay, thước kẻ, ...

3. Phẩm chất:

- Có ý thức học tập, ý thức tìm tòi, khám phá và sáng tạo, có ý thức làm việc nhóm, tôn trọng ý kiến các thành viên khi hợp tác.
- Chăm chỉ tích cực xây dựng bài, có trách nhiệm, chủ động chiếm lĩnh kiến thức theo sự hướng dẫn của GV.

II. THIẾT BỊ DẠY HỌC VÀ HỌC LIỆU.

1. Đối với GV: SGK, Tài liệu giảng dạy, giáo án, đồ dùng dạy học.

2. Đối với HS: SGK, SBT, vở ghi, giấy nháp, đồ dùng học tập (bút, thước...), bảng nhóm, bút viết bảng nhóm.

III. TIẾN TRÌNH DẠY HỌC.

A. HOẠT ĐỘNG KHỞI ĐỘNG (MỞ ĐẦU)

a) *Mục tiêu:* Hoạt động đưa ra vấn đề thực tế về việc chi phí tiền xăng phụ thuộc vào tốc độ trung bình của xe khi chạy đường dài. Đồ thị được cho sẵn là một cách biểu diễn trực quan sự thay đổi chi phí này và gợi nhu cầu vẽ đồ thị hàm số khi biết công thức hàm số

b) *Nội dung:* HS đọc tình huống mở đầu, suy nghĩ trả lời câu hỏi.

c) *Sản phẩm:* HS đưa ra được nhận định ban đầu về câu hỏi mở đầu.

d) *Tổ chức thực hiện:*

Bước 1: Chuyển giao nhiệm vụ: GV đặt câu hỏi, HS trả lời, lớp nhận xét, GV sử dụng cơ hội để giới thiệu bài.

Bước 2: Thực hiện nhiệm vụ: HS quan sát và chú ý lắng nghe, thảo luận nhóm đôi hoàn thành yêu cầu.

Bước 3: Báo cáo, thảo luận: GV gọi một số HS trả lời, HS khác nhận xét, bổ sung.

Cần biết tập xác định, khoảng đơn điệu, cực trị, một số điểm đặc biệt, ... (HS không nhất thiết phải liệt kê được đầy đủ).

Bước 4: Kết luận, nhận định: GV ghi nhận câu trả lời của HS, trên cơ sở đó dẫn dắt HS vào tìm hiểu bài học mới:

B. HÌNH THÀNH KIẾN THỨC MỚI:

► Hoạt động 1: Sơ đồ khảo sát hàm số:

- a) Mục tiêu: Lập được bảng biến thiên của hàm số và sử dụng được bảng này để vẽ đồ thị hàm số.
b) Nội dung: HS thực hiện HĐKP1 để rút ra khái niệm đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.
c) Sản phẩm: Lời giải của các câu hỏi trong hoạt động và ví dụ.
d) Tổ chức thực hiện: HS hoạt động cá nhân, dưới sự hướng dẫn của GV.

HĐ CỦA GV VÀ HS	SẢN PHẨM DỰ KIẾN
Bước 1: Chuyển giao nhiệm vụ: - GV cho HS đọc yêu cầu và thực hiện HĐ1 trong 12 phút và chọn hai HS lên bảng trình bày. Sau đó GV cho HS khác nhận xét và chốt lại kết quả. - Sau khi HS thực hiện xong HĐ1, GV sẽ hướng dẫn HS khái quát lại sơ đồ khảo sát hàm số. GV viết bảng hoặc trình chiếu nội dung trong Khung kiến thức. - GV nêu Chú ý cho HS khi vẽ đồ thị hàm số. Bước 2: Thực hiện nhiệm vụ: - HĐ cá nhân: HS suy nghĩ, hoàn thành vào tập. Cả lớp chú ý thực hiện các yêu cầu của GV, chú ý bài làm các bạn và nhận xét. - GV: quan sát và trợ giúp HS. Bước 3: Báo cáo, thảo luận: - HS trả lời trình bày miệng/ trình bày bảng, cả lớp nhận xét, GV đánh giá, dẫn dắt, chốt lại kiến thức. + GV quan sát, nhận xét bài làm của HS và rút ra kinh nghiệm làm bài cho HS. Bước 4: Kết luận, nhận định: GV tổng quát, nhận xét quá trình hoạt động của các HS, cho HS nhắc lại Sơ đồ khảo sát hàm số.	1. Sơ đồ khảo sát hàm số: ①. Tìm tập xác định của hàm số ②. Xét sự biến thiên của hàm số Tìm đạo hàm y', xét dấu y', xác định khoảng đơn điệu, cực trị (nếu có) của hàm số. Tìm giới hạn tại vô cực, giới hạn vô cực của hàm số và các đường tiệm cận của đồ thị hàm số (nếu có). Lập bảng biến thiên của hàm số. ③. Vẽ đồ thị của hàm số Xác định các điểm cực trị (nếu có), giao điểm của đồ thị với các trục tọa độ (nếu có và dễ tìm), ... Vẽ các đường tiệm cận của đồ thị hàm số (nếu có). Vẽ đồ thị hàm số. Chú ý: Chỉ ra tâm đối xứng và trục đối xứng của đồ thị hàm số (nếu có).

► Hoạt động 2: Khảo sát hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$)

- a) Mục tiêu: Giúp HS củng cố kỹ năng khảo sát hàm số bậc 3
b) Nội dung: HS thực hiện HĐKP2.
c) Sản phẩm: Lời giải của các câu hỏi trong hoạt động và ví dụ.
d) Tổ chức thực hiện: HS hoạt động cá nhân, dưới sự hướng dẫn của GV.

HĐ CỦA GV VÀ HS	SẢN PHẨM DỰ KIẾN
Bước 1: Chuyển giao nhiệm vụ: GV cho HS hoạt động cá nhân trong 12 phút, GV có thể hướng dẫn HS (nếu cần), sau đó gọi một HS lên bảng; các HS khác theo dõi, nhận xét và góp ý; GV tổng kết. Ví dụ 1: GV cho HS hoạt động cá nhân trong 10 phút, sau đó gọi một HS lên bảng; các HS khác theo dõi, nhận xét và góp ý; GV tổng kết.	2. Khảo sát hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) HS thực hiện ví dụ 1 và ghi bài. Tập xác định: R. Sự biến thiên: Chiều biến thiên: Đạo hàm $y' = 3x^2 - 6x$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 2$. Trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$, $y' > 0$ nên hàm số đồng biến trên mỗi khoảng đó. Trên khoảng $(0; 2)$, $y' < 0$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng đó. Cực trị: Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và $y_{CD} = 2$. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$ và $y_{CT} = -2$.

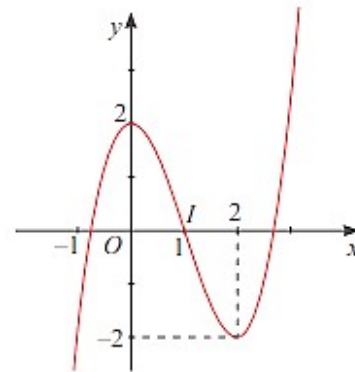
Các giới hạn tại vô cực:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^3} \right) = -\infty; \lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^3} \right) = +\infty$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y	$-\infty$		2		-2		$+\infty$

Đồ thị:



Hình 1

Khi $x=0$ thì $y=2$ nên $(0; 2)$ là giao điểm của đồ thị với trục Oy .

$$\text{Ta có } y=0 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x=1 \text{ hoặc } x=1-\sqrt{3} \text{ hoặc } x=1+\sqrt{3}.$$

Vậy đồ thị của hàm số giao với trục Ox tại ba điểm $(1; 0)$, $(1-\sqrt{3}; 0)$, $(1+\sqrt{3}; 0)$.

Điểm $(0; 2)$ là điểm cực đại và điểm $(2; -2)$ là điểm cực tiểu của đồ thị hàm số.

Đồ thị của hàm số đã cho được biểu diễn trên Hình 1.

Đồ thị của hàm số có tâm đối xứng là điểm $I(1; 0)$.

Chú ý: Đồ thị của hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) luôn nhận điểm $I(x_0; y_0)$ làm tâm đối xứng, trong đó x_0 là nghiệm của phương trình $y'' = 0$ và $y_0 = y(x_0)$.

Hs thực hiện ví dụ 2 và ghi bài.

Hs thực hiện thực hành 1 và ghi bài.

$$\text{a) } y = -2x^3 - 3x^2 + 1$$

Tập xác định: R .

Sự biến thiên:

Chiều biến thiên:

$$\text{Đạo hàm } y' = -6x^2 - 6x; y' = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ hoặc } x = 0.$$

Trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(0; +\infty)$, $y' < 0$ nên hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng đó.

Trên khoảng $(-1; 2)$, $y' > 0$ nên hàm số đồng biến trên khoảng đó.

Cực trị:

Hàm số đạt cực đại tại $x=0$ và $y_{Ce} = 1$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x=-1$ và $y_{CT} = 0$.

Các giới hạn tại vô cực:

Ví dụ 2

GV cho HS hoạt động theo cặp trong 5 phút, sau đó gọi một HS đứng tại chỗ trả lời; các HS khác theo dõi, nhận xét và góp ý; GV tổng kết.

Thực hành 1 trang 28 Toán 12 Tập 1:

Khảo sát và vẽ đồ thị của các hàm số sau:

$$\text{a) } y = -2x^3 - 3x^2 + 1;$$

$$\text{b) } y = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$$

GV chia lớp thành 4 nhóm thực hiện.

+ Nhóm 1, 2: làm ý a,

+ Nhóm 3, 4: làm ý b.

Các nhóm lên trình bày trước lớp, các nhóm khác theo dõi, nhận xét. GV tổng kết.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(-2 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3} \right) = +\infty; \lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left(-2 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3} \right) = -\infty$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$		
y'		-	0	+	0	-
y	$+\infty$		0		1	$-\infty$

Đồ thị:

Khi $x=0$ thì $y=1$ nên $(0;1)$ là giao điểm của đồ thị với trục Oy.

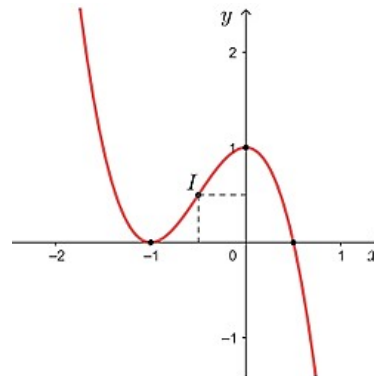
Ta có $y=0 \Leftrightarrow -2x^3 - 3x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ hoặc $x = \frac{1}{2}$

Vậy đồ thị của hàm số giao với trục Ox tại hai điểm

$(-1;0)$ và $(\frac{1}{2};0)$

Điểm $(0;1)$ là điểm cực đại và điểm $(-1;0)$ là điểm cực tiểu của đồ thị hàm số.

Đồ thị của hàm số đã cho được biểu diễn như hình dưới đây.



Đồ thị của hàm số có tâm đối xứng là điểm $I \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right)$.

b) $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$

Tập xác định: R .

Sự biến thiên:

Chiều biến thiên:

Đạo hàm $y' = 3x^2 + 6x + 3 = 3(x+1)^2 \geq 0$ với mọi $x \in R$;
 $y' = 0 \Leftrightarrow x = -1$.

Do đó, hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

Hàm số đã cho không có cực trị.

Các giới hạn tại vô cực:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(1 + \frac{3}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3} \right) = -\infty; \lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left(1 + \frac{3}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3} \right) = +\infty$$

Bảng biến thiên:

Bước 2: Thực hiện nhiệm vụ:

- HĐ cá nhân: HS suy nghĩ, hoàn thành vào tập.

- HĐ cặp đôi, nhóm: các thành viên trao đổi, đóng góp ý kiến và thống nhất đáp án. Cả lớp chú ý thực hiện các yêu cầu của GV, chú ý bài làm các bạn và nhận xét.

- GV: quan sát và trợ giúp HS.

Bước 3: Báo cáo, thảo luận:

- HS trả lời trình bày miệng/ trình bày bảng, cả lớp nhận xét, GV đánh giá, dẫn dắt, chốt lại kiến thức.

+ Sau thời gian thảo luận, GV mời đại diện từng nhóm lên thực hiện bài giải của nhóm mình.

+ HS dưới lớp quan sát, thực hiện bài làm vào vở cá nhân.

+ GV quan sát, nhận xét bài làm của HS và rút ra kinh nghiệm làm bài cho HS.

Bước 4: Kết luận, nhận định: GV tổng quát, nhận xét quá trình hoạt động của các HS, cho HS nhắc lại củng cố kỹ năng khảo sát hàm số bậc 3

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'	+	0	+
y	$-\infty$	1	$+\infty$

Đồ thị:

Khi $x = 0$ thì $y = 2$ nên $(0; 2)$ là giao điểm của đồ thị với trục Oy.

Ta có $y = 0 \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$.

Vậy đồ thị của hàm số giao với trục Ox tại điểm $(-2; 0)$.

Đồ thị của hàm số đi qua các điểm $(-2; 0)$, $(-1; 1)$ và $(0; 2)$.

Đồ thị của hàm số đã cho được biểu diễn như hình dưới đây.

Đồ thị của hàm số có tâm đối xứng là điểm I $(-1; 1)$.

▶ **Hoạt động 3: Khảo sát hàm số** $y = \frac{ax+b}{cx+d} \quad (c \neq 0, ad - bc \neq 0)$

- a) Mục tiêu: Giúp HS củng cố kỹ năng khảo sát hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d} \quad (c \neq 0, ad - bc \neq 0)$
- b) Nội dung: HS thực hiện HĐ3
- c) Sản phẩm: Lời giải của các câu hỏi trong hoạt động và ví dụ, thực hành
- d) Tổ chức thực hiện: HS hoạt động cá nhân, dưới sự hướng dẫn của GV.

HĐ CỦA GV VÀ HS	SẢN PHẨM DỰ KIẾN
Bước 1: Chuyển giao nhiệm vụ: - GV cho HS thực hiện cá nhân thực hành 2, GV có thể hướng dẫn HS (nếu cần). GV gọi đại diện lên trình bày kết quả, các bạn còn lại lắng nghe, nhận xét, góp ý. Sau đó GV tổng kết. GV cho HS hoạt động cá nhân ví dụ 3 trong 10 phút, sau đó gọi một HS lên bảng; các HS khác theo dõi, nhận xét và góp ý; GV tổng	$y = \frac{ax+b}{cx+d} \quad (c \neq 0, ad - bc \neq 0)$ 3. Khảo sát hàm số Hs thực hiện ví dụ 3 và ghi bài. Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Sự biến thiên: Chiều biến thiên: Đạo hàm $y' = \frac{3}{(x+1)^2}$. Vì $y' > 0$ với mọi $x \neq -1$ nên hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$. Tiệm cận:

kết.

Ta có

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-1}{x+1} = 2; \lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x+1}$$

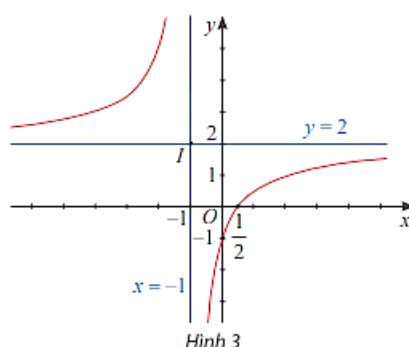
. Suy ra đường thẳng $y=2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Ta có $\lim_{x \rightarrow -1^-} y = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2x-1}{x+1} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -1^+} y = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2x-1}{x+1} = -\infty$. Suy ra đường thẳng $x=-1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		+		+	
y					
			$+\infty$		2
			$-\infty$		

Đồ thị:



Hình 3

Đồ thị của hàm số giao với trục Ox tại điểm $\left(\frac{1}{2}; 0\right)$, giao với trục Oy tại điểm $(0; -1)$.

Đồ thị của hàm số được biểu diễn trên Hình 3.

Tâm đối xứng của đồ thị hàm số là điểm $I(-1; 2)$. Các trục đối xứng của đồ thị hàm số là hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận $x=-1$ và $y=2$.

Chú ý: Đồ thị của hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($c \neq 0, ad-bc \neq 0$):

a) Nhận giao điểm của tiệm cận đứng và tiệm cận ngang làm tâm đối xứng;

b) Nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi tiệm cận đứng và tiệm cận ngang làm trục đối xứng.

Hs thực hiện ví dụ 4 và ghi bài.

Ví dụ 4

GV cho HS hoạt động theo cặp trong 5 phút, sau đó gọi một HS đứng tại chỗ trả lời; các HS khác theo dõi, nhận xét và góp ý; GV tổng kết.

Thực hành 2 trang 30: Khảo sát và vẽ đồ thị của các hàm số sau:)

a) $y = \frac{x+1}{x-1}$;

b) $y = \frac{2x}{3x-1}$;

c) $y = \frac{5+x}{2-x}$.

GV chia lớp thành 4 nhóm thực hiện.

+ Nhóm 1, 2: làm ý a,

Hs thực hiện thực hành 2 và ghi bài.

a) $y = \frac{x+1}{x-1}$

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Sự biến thiên:

Chiều biến thiên:

+ Nhóm 3, 4: làm ý b, c
 Các nhóm lên trình bày trước lớp,
 các nhóm khác theo dõi, nhận xét.
 GV tổng kết.

Đạo hàm $y' = \frac{-2}{(x-1)^2}$. Vì $y' < 0$ với mọi $x \neq 1$ nên hàm số
 nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

Tìm cận:

Ta có

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{x-1} = 1; \lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x-1} = 1$$

. Suy ra đường thẳng $y=1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Ta có $\lim_{x \rightarrow 1^-} y = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+1}{x-1} = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 1^+} y = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+1}{x-1} = +\infty$. Suy ra đường
 thẳng $x=1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

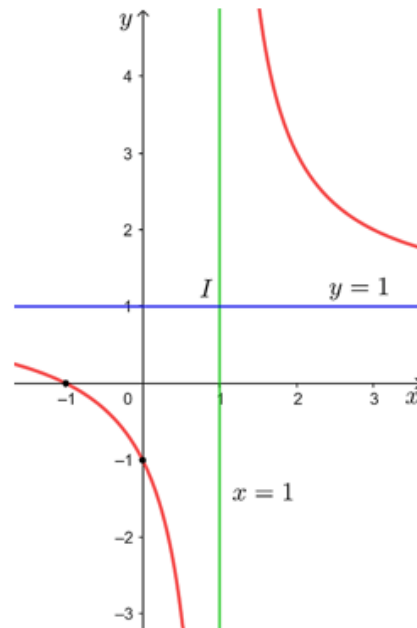
Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y'		-	-
y	1	$+\infty$	1

Đồ thị:

Đồ thị hàm số giao với trục Ox tại điểm $(-1; 0)$, giao
 với trục Oy tại điểm $(0; -1)$.

Đồ thị của hàm số đã cho được biểu diễn như hình
 dưới đây.



Tâm đối xứng của đồ thị hàm số là điểm $I(1; 1)$. Các trục đối
 xứng của đồ thị hàm số là hai đường phân giác của các góc
 tạo bởi hai đường tiệm cận $x=1$ và $y=1$.

b) $y = \frac{2x}{3x-1}$

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{3} \right\}$.

Sự biến thiên:

Chiều biến thiên:

Đạo hàm $y' = \frac{-2}{(3x-1)^2}$. Vì $y' < 0$ với mọi $x \neq \frac{1}{3}$ nên hàm số

nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty; \frac{1}{3})$ và $(\frac{1}{3}; +\infty)$.

Bước 2: Thực hiện nhiệm vụ:

- HĐ cá nhân: HS suy nghĩ, hoàn thành vào tập.

- HĐ cặp đôi, nhóm: các thành viên trao đổi, đóng góp ý kiến và thống nhất đáp án.

Cả lớp chú ý thực hiện các yêu cầu của GV, chú ý bài làm các bạn và nhận xét.

- GV: quan sát và trợ giúp HS.

Bước 3: Báo cáo, thảo luận:

- HS trả lời trình bày miệng/ trình bày bảng, cả lớp nhận xét, GV đánh giá, dẫn dắt, chốt lại kiến thức.

+ Sau thời gian thảo luận, GV mời đại diện từng nhóm lên thực hiện bài giải của nhóm mình.

+ HS dưới lớp quan sát, thực hiện bài làm vào vở cá nhân.

+ GV quan sát, nhận xét bài làm của HS và rút ra kinh nghiệm làm bài cho HS.

Bước 4: Kết luận, nhận định: GV tổng quát, nhận xét quá trình hoạt động của các HS, cho HS nhắc lại công thức khảo sát của hàm số

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} \quad (c \neq 0, ad - bc \neq 0)$$

Tìm cận:

Ta có

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{3x-1} = \frac{2}{3}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

. Suy ra đường thẳng $y = \frac{2}{3}$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Ta có $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}^-} y = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}^-} \frac{2x}{3x-1} = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}^+} y = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}^+} \frac{2x}{3x-1} = +\infty$. Suy ra đường

thẳng $x = \frac{1}{3}$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

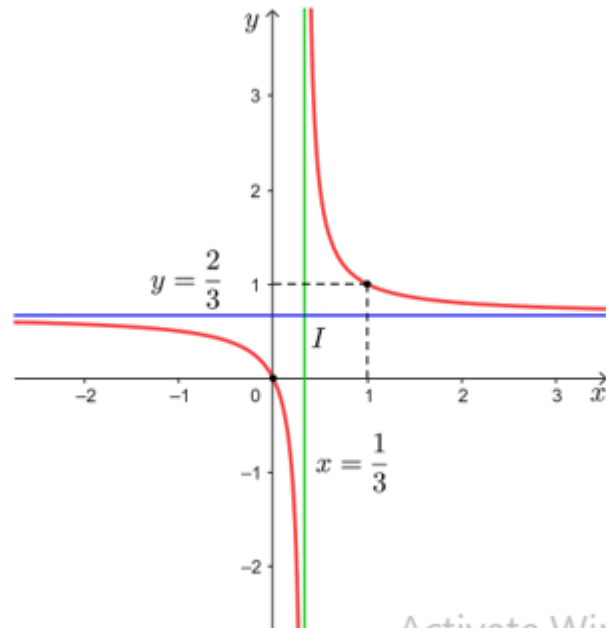
Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
y'			
		-	-
y	$\frac{2}{3}$		$\frac{2}{3}$
		$-\infty$	$+\infty$

Đồ thị:

Đồ thị hàm số đi qua gốc tọa độ $O(0; 0)$ và điểm $(1; 1)$.

Đồ thị của hàm số đã cho được biểu diễn như hình dưới đây.



Tâm đối xứng của đồ thị hàm số là điểm $I \left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3} \right)$. Các trục đối xứng của đồ thị hàm số là hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận $x = \frac{1}{3}$ và $y = \frac{2}{3}$.

c) $y = \frac{5+x}{2-x}$

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Sự biến thiên:

Chiều biến thiên:

Đạo hàm $y' = \frac{7}{(2-x)^2}$. Vì $y' > 0$ với mọi $x \neq 2$ nên hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$.

Tiệm cận:

Ta có

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5+x}{2-x} = -1; \lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5+x}{2-x} = -1$$

Suy ra đường thẳng $y = -1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Ta có $\lim_{x \rightarrow 2^-} y = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{5+x}{2-x} = +\infty; \lim_{x \rightarrow 2^+} y = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{5+x}{2-x} = -\infty$

Suy ra đường thẳng $x = 2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

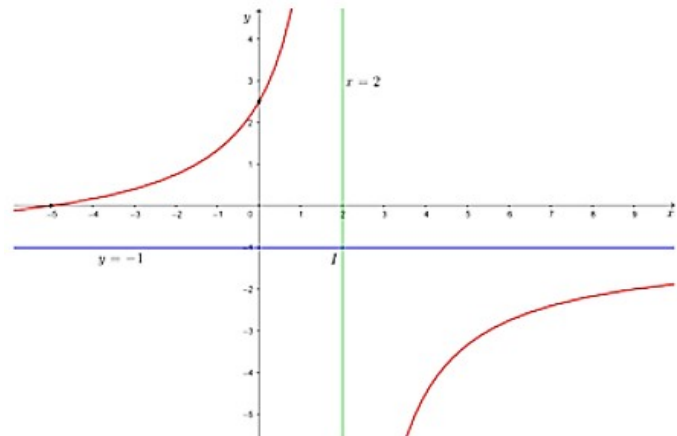
Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y'		+		+	
y			$+\infty$		-1
			$-\infty$		

Đồ thị:

Đồ thị hàm số giao với trục Ox tại điểm $(-5; 0)$, giao với trục Oy tại điểm $(0; \frac{5}{2})$.

Đồ thị của hàm số đã cho được biểu diễn như hình dưới đây.



Tâm đối xứng của đồ thị hàm số là điểm I $(2; -1)$. Các trục đối xứng của đồ thị hàm số là hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận $x = 2$ và $y = -1$.

► Hoạt động 4: Khảo sát hàm số $y = \frac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ ($a \neq 0, m \neq 0$)

a) Mục tiêu: Giúp HS củng cố kỹ năng khảo sát hàm số hàm số $y = \frac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ ($a \neq 0, m \neq 0$)

b) Nội dung: HS thực hiện HĐ4

c) Sản phẩm: Lời giải của các câu hỏi trong hoạt động và ví dụ, thực hành

d) Tổ chức thực hiện: HS hoạt động cá nhân, dưới sự hướng dẫn của GV.

HĐ CỦA GV VÀ HS

SẢN PHẨM DỰ KIẾN

Bước 1: Chuyển giao nhiệm vụ:

GV cho HS thực hiện cá nhân Ví dụ 5, GV có thể hỗ trợ HS (nếu cần). GV gọi đại diện lên trình bày kết quả, các bạn còn lại lắng nghe, nhận xét, góp ý. Sau đó GV tổng kết.

Sau khi HS thực hiện xong Ví dụ 5, GV có thể đặt câu hỏi để HS nhận xét về tâm đối xứng, trục đối xứng của đồ thị hàm số.

GV cho HS hoạt động cá nhân ví dụ 6 trong 10 phút, sau đó gọi một HS lên bảng; các HS khác theo dõi, nhận xét và góp ý; GV tổng kết.

4. Khảo sát hàm số $y = \frac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ ($a \neq 0, m \neq 0$).

Hs thực hiện ví dụ 5 và ghi bài.

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Sự biến thiên:

Chiều biến thiên:

Đạo hàm $y' = \frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$. Ta có $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 2$.

Trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$, $y' > 0$ nên hàm số đồng biến trên mỗi khoảng đó. Trên các khoảng $(0; 1)$ và $(1; 2)$, $y' < 0$ nên hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng đó.

Cực trị:

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$ và $y_{CT} = 6$.

Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và $y_{CD} = 2$.

Các giới hạn tại vô cực và tiệm cận:

$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+2x-2}{x-1} = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+2x-2}{x-1} = +\infty$.

Ta có: $a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+2x-2}{x^2-x} = 1$ và

$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2+2x-2}{x-1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x-2}{x-1} = 3$. Suy

ra đường thẳng $y = x + 3$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

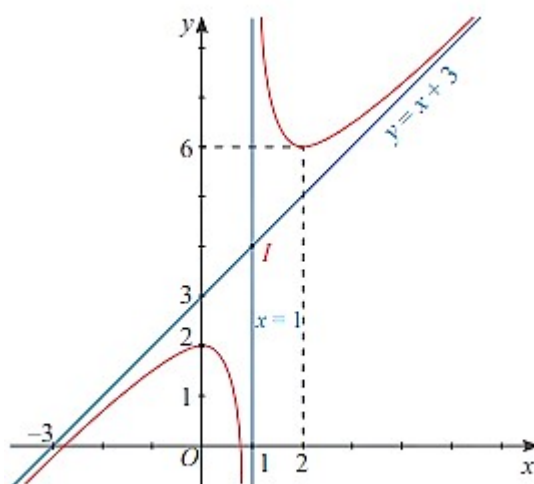
Ta có $\lim_{x \rightarrow 1^-} y = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2+2x-2}{x-1} = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 1^+} y = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2+2x-2}{x-1} = +\infty$. Suy ra đường

thẳng $x = 1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$	
y'	+	0	-	-	0	+
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$	$+\infty$
				6		$+\infty$

Đồ thị:



Hình 5

Ta có $y = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1 + \sqrt{3}$ hoặc $x = -1 - \sqrt{3}$. Vậy đồ thị hàm số giao với trục Ox tại điểm $(-1 + \sqrt{3}; 0)$ và điểm $(-1 - \sqrt{3}; 0)$.

Đồ thị hàm số giao với trục Oy tại điểm $(0; 2)$.

Đồ thị hàm số được biểu diễn trên Hình 5.

Ví dụ 6

GV cho HS thực hiện cá nhân Ví dụ 6. GV gọi đại diện lên trình bày kết quả, các bạn còn lại lắng nghe, nhận xét, góp ý. Sau đó GV tổng kết

Thực hành 3 trang 32:

Khảo sát và vẽ đồ thị của các hàm số sau:)

a) $y = x - \frac{1}{x}$;

b) $y = -x + 2 - \frac{1}{x+1}$;

c) $y = \frac{-x^2 - x + 2}{x+1}$.

GV chia lớp thành 4 nhóm thực hiện.

+ Nhóm 1, 2: làm ý a,

+ Nhóm 3, 4: làm ý b, c

Các nhóm lên trình bày trước lớp, các nhóm khác theo dõi, nhận xét. GV tổng kết.

Tâm đối xứng của đồ thị hàm số là điểm $I(1; 4)$.

Các trục đối xứng của đồ thị hàm số là hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận $x=1$ và $y=x+3$.

Chú ý: Đồ thị của hàm số $y = \frac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ ($a \neq 0, m \neq 0$):

a) Nhận giao điểm của tiệm cận đứng và tiệm cận xiên làm tâm đối xứng;

b) Nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi tiệm cận đứng và tiệm cận xiên làm trục đối xứng.

HS thực hiện ví dụ 6 và ghi bài.

HS thực hiện thực hành 2 và ghi bài.

a) $y = x - \frac{1}{x}$

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Sự biến thiên:

Chiều biến thiên:

Đạo hàm $y' = 1 + \frac{1}{x^2}$. Vì $y' > 0$ với mọi $x \neq 0$ nên hàm số đồng

biến trên mỗi khoảng $(-\infty; 0)$ và $(0; +\infty)$.

Các giới hạn tại vô cực và tiệm cận:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x - \frac{1}{x} \right) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \frac{1}{x} \right) = +\infty$$

Ta có

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (y - x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x - \frac{1}{x} - x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{x} \right) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (y - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \frac{1}{x} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x} \right) = 0$$

Suy ra đường thẳng $y = x$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

Ta có $\lim_{x \rightarrow 0^-} y = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(x - \frac{1}{x} \right) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} y = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x - \frac{1}{x} \right) = -\infty$. Suy ra đường thẳng $x=0$ (hay trục Oy) là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'	+		+
y	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$

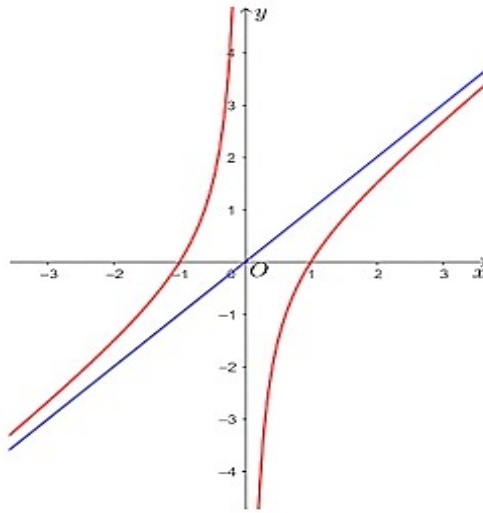
Đồ thị:

$$\text{Ta có } y=0 \Leftrightarrow x - \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = -1 \text{ hoặc } x = 1.$$

Vậy đồ thị hàm số giao với trục Ox tại điểm $(-1; 0)$ và điểm $(1; 0)$.

Đồ thị hàm số không cắt trục Oy.

Đồ thị của hàm số đã cho được biểu diễn như hình dưới đây.



Tâm đối xứng của đồ thị hàm số là gốc tọa độ $O(0;0)$. Các trục đối xứng của đồ thị hàm số là hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận $x=0$ (trục Oy) và $y=x$.

b) $y = -x + 2 - \frac{1}{x+1}$

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Sự biến thiên:

Chiều biến thiên:

Đạo hàm $y' = -1 + \frac{1}{(x+1)^2}$. Ta có $y' = 0 \Leftrightarrow x = -2$ hoặc $x = 0$.

Trên các khoảng $(-\infty; -2)$ và $(0; +\infty)$, $y' < 0$ nên hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng đó.

Trên các khoảng $(-2; -1)$ và $(-1; 0)$, $y' > 0$ nên hàm số đồng biến trên mỗi khoảng đó.

Cực trị:

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -2$ và $y_{CT} = 5$.

Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và $y_{CE} = 1$.

Các giới hạn tại vô cực và tiệm cận:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-x + 2 - \frac{1}{x+1} \right) = +\infty; \lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-x + 2 - \frac{1}{x+1} \right) = -\infty$$

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow -\infty} [y - (-x + 2)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{-1}{x+1} \right) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [y - (-x + 2)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-1}{x+1} \right) = 0$$

Suy ra đường thẳng $y = -x + 2$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

Ta có $\lim_{x \rightarrow -1^-} y = \lim_{x \rightarrow -1^-} \left(-x + 2 - \frac{1}{x+1} \right) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -1^+} y = \lim_{x \rightarrow -1^+} \left(-x + 2 - \frac{1}{x+1} \right) = -\infty$. Suy ra

đường thẳng $x = -1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$	
y'		$-$	0	$+$	0	$-$
y	$+\infty$		5		1	$-\infty$

Đồ thị:

$$\text{Ta có } y = 0 \Leftrightarrow -x + 2 - \frac{1}{x+1} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \text{ hoặc } x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Bước 2: Thực hiện nhiệm vụ:

- HĐ cá nhân: HS suy nghĩ, hoàn thành vào tập.

- HĐ cặp đôi, nhóm: các thành viên trao đổi, đóng góp ý kiến và thống nhất đáp án.

Cả lớp chú ý thực hiện các yêu cầu của GV, chú ý bài làm các bạn và nhận xét.

- GV: quan sát và trợ giúp HS.

Bước 3: Báo cáo, thảo luận:

- HS trả lời trình bày miệng/ trình bày bảng, cả lớp nhận xét, GV đánh giá, dẫn dắt, chốt lại kiến thức.

+ Sau thời gian thảo luận, GV mời đại diện từng nhóm lên thực hiện bài giải của nhóm mình.

+ HS dưới lớp quan sát, thực hiện bài làm vào vở cá nhân.

+ GV quan sát, nhận xét bài làm của HS và rút ra kinh nghiệm làm bài cho HS.

Bước 4: Kết luận, nhận định:

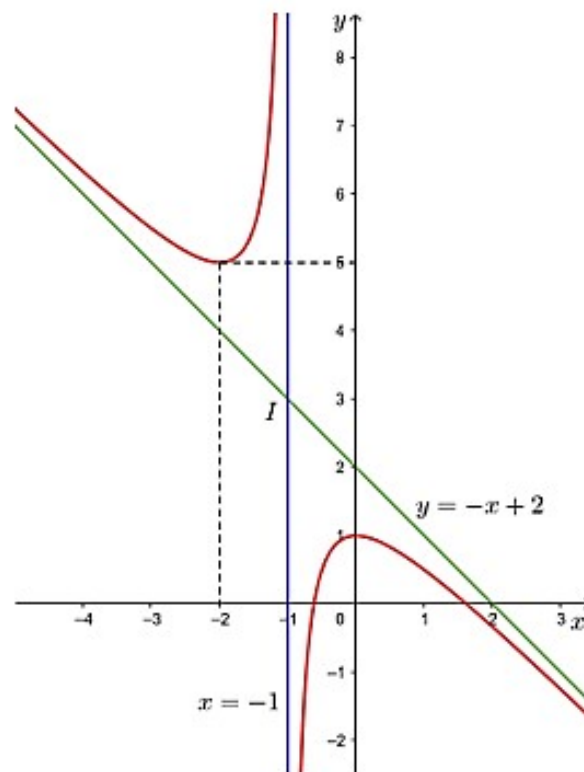
GV tổng quát, nhận xét quá trình hoạt động của các HS, cho HS nhắc lại củng cố kỹ năng khảo sát của hàm số

$$y = \frac{ax^2 + bx + c}{mx + n} \quad (a \neq 0, m \neq 0)$$

Vậy đồ thị hàm số giao với trục Ox tại điểm $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}; 0\right)$ và điểm $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}; 0\right)$.

Đồ thị hàm số giao với trục Oy tại điểm $(0; 1)$.

Đồ thị của hàm số đã cho được biểu diễn như hình dưới đây.



Tâm đối xứng của đồ thị hàm số là điểm $I(-1; 3)$.

Các trục đối xứng của đồ thị hàm số là hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận $x = -1$ và $y = -x + 2$.

$$c) y = \frac{-x^2 - x + 2}{x + 1}$$

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Sự biến thiên:

Chiều biến thiên:

Đạo hàm $y' = \frac{-x^2 - 2x - 3}{(x + 1)^2}$. Vì $y' < 0$ với mọi $x \neq -1$ nên hàm

số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$.

Các giới hạn tại vô cực và tiệm cận:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \frac{-x^2 - x + 2}{x + 1} = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} y = \frac{-x^2 - x + 2}{x + 1} = -\infty$$

$$\text{Ta có } a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2 - x + 2}{x(x + 1)} = -1 \text{ và}$$

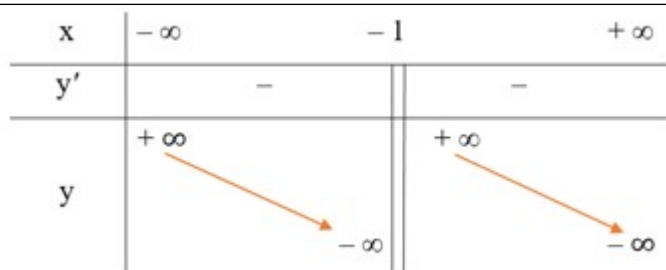
$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{-x^2 - x + 2}{x + 1} - (-1)x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x + 1} = 0.$$

Suy ra đường thẳng $y = -x$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

Ta có $\lim_{x \rightarrow -1^-} y = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{-x^2 - x + 2}{x + 1} = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow -1^+} y = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{-x^2 - x + 2}{x + 1} = +\infty$. Suy ra

đường thẳng $x = -1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Bảng biến thiên:



Đồ thị:

$$\text{Ta có } y=0 \Leftrightarrow \frac{-x^2-x+2}{x+1}=0 \Leftrightarrow x=-2 \text{ hoặc } x=1.$$

Vậy đồ thị hàm số giao với trục Ox tại điểm $(-2;0)$ và điểm $(1;0)$.

Đồ thị hàm số giao với trục Oy tại điểm $(0;2)$.

Đồ thị của hàm số đã cho được biểu diễn như hình dưới đây.

Tâm đối xứng của đồ thị hàm số là điểm $I(-1;1)$.

Các trục đối xứng của đồ thị hàm số là hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận $x=-1$ và $y=x-1$.

► Hoạt động 5: Vận dụng đạo hàm và khảo sát hàm số để giải quyết một số vấn đề liên quan đến thực tiễn

a) Mục tiêu: Vận dụng đạo hàm và khảo sát hàm số để giải quyết một số vấn đề liên quan đến thực tiễn

b) Nội dung: HS vận dụng các kiến thức của bài học thực hiện ví dụ 7, 8 và thực hành 4, 5

c) Sản phẩm học tập: Câu trả lời của HS

d) Tổ chức thực hiện:

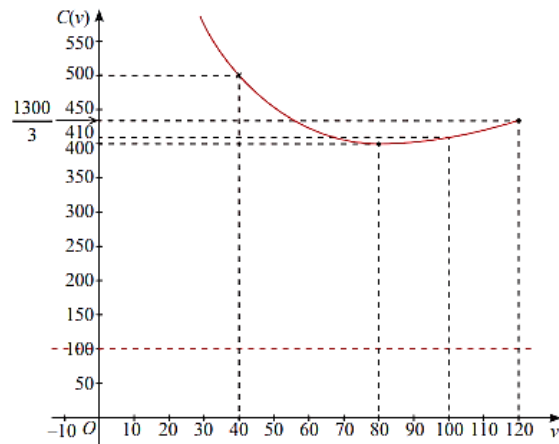
HD CỦA GV VÀ HS	SẢN PHẨM DỰ KIẾN													
Bước 1: Chuyển giao nhiệm vụ: GV yêu cầu HS hoạt động hoàn thành ví dụ 7, 8 Ví dụ 7. GV cho HS hoạt động cá nhân trong 10 phút, sau đó gọi HS lên bảng làm bài, các HS khác theo dõi bài làm, nhận xét và góp ý; GV tổng kết.	HS thực hiện ví dụ 7 và ghi bài. a) Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số $C(v)$: Tập xác định: $D=(0;120)$. Sự biến thiên: Chiều biến thiên: Đạo hàm $C'(v)=\frac{-16000}{v^2}+\frac{5}{2}=\frac{5(v-80)(v+80)}{2v^2}; C'(v)=0 \Leftrightarrow v=-$ (loại) hoặc $v=80$. Trên khoảng $(0;80)$, $C'(v)<0$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng này. Trên khoảng $(80;120)$, $C'(v)>0$ nên hàm số đồng biến trên khoảng này. Cực trị: Hàm số đạt cực tiểu tại $v=80$, $C_{CT}=C(80)=400$. Giới hạn vô cực và tiệm cận: $\lim_{v \rightarrow 0^+} C(v)=\lim_{v \rightarrow 0^+} \left(\frac{16000}{v^2}+\frac{5}{2}v\right)=+\infty$ nên đường thẳng $v=0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số. Bảng biến thiên: <table><tr><td>v</td><td>0</td><td>80</td><td>120</td></tr><tr><td>$C'(v)$</td><td></td><td>-</td><td>0</td><td>+</td></tr><tr><td>$C(v)$</td><td>$+\infty$</td><td>400</td><td>$\frac{1300}{3}$</td></tr></table> Đồ thị: Đồ thị hàm số có điểm cực tiểu $(80;400)$ và đi qua	v	0	80	120	$C'(v)$		-	0	+	$C(v)$	$+\infty$	400	$\frac{1300}{3}$
v	0	80	120											
$C'(v)$		-	0	+										
$C(v)$	$+\infty$	400	$\frac{1300}{3}$											

các điểm $(40; 500), (100; 410), \left(120; \frac{1300}{3}\right)$ như

Hình 7.

b) Quan sát đồ thị hàm số, ta nhận thấy hàm số đạt GTNN khi $v=80$ và GTNN là 400.

Như vậy, để tiết kiệm tiền xăng nhất, tài xế nên chạy xe với tốc độ trung bình là 80 km/h .



Hình 7

Ví dụ 8

GV cho HS hoạt động cá nhân trong 10 phút, sau đó gọi HS lên bảng làm bài, các HS khác theo dõi bài làm, nhận xét và góp ý; GV tổng kết.

HS thực hiện ví dụ 8 và ghi bài.

a) Khi bán x mét vải lụa:

Số tiền thu được là: $B(x) = 220x$ (nghìn đồng).

Lợi nhuận thu được là:

$L(x) = B(x) - C(x) = -x^3 + 3x^2 + 240x - 500$ (nghìn đồng).

b) Hàm số $L(x)$ xác định trên $[1; 18]$.

Sự biến thiên:

Chiều biến thiên:

Đạo hàm $L'(x) = -3x^2 + 6x + 240$; $L'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 10$ hoặc $x = -8$ (loại).

Trên khoảng $(1; 10)$, $L'(x) > 0$ nên hàm số đồng biến trên khoảng này.

Trên khoảng $(10; 18)$, $L'(x) < 0$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng này.

Cực trị: Hàm số $L(x)$ đạt cực đại tại $x = 10$ và

$L_{CD} = L(10) = 1200$.

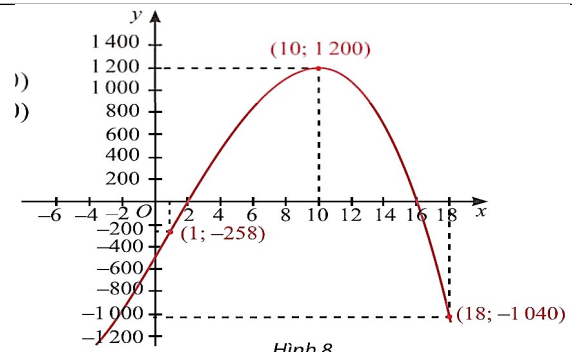
Bảng biến thiên

x	1	10	18
$L'(x)$	+	0	-
$L(x)$	-258	1200	-1040

Đồ thị hàm số có điểm cực đại $(10; 1200)$ và đi qua các điểm $(1; -258), (18; -1040)$ như Hình 8.

Thực hành 4:

GV cho HS hoạt động cá nhân trong 6 phút, GV có thể hướng dẫn (nếu cần), sau đó gọi một HS lên bảng; các HS khác theo dõi, nhận xét và góp ý; GV tổng kết.



Hình 8

c) Quan sát đồ thị hàm số, ta nhận thấy khi $x=10$ thì hàm số đạt giá trị lớn nhất là 1200. Như vậy, hộ làm nghề dệt cần sản xuất và bán ra mỗi ngày 10 mét vải lụa để thu được lợi nhuận tối đa. Lợi nhuận tối đa này là 1200 nghìn đồng.

HS thực hiện thực hành 4 và ghi bài.

a) Vì $d>0$ nên với $x=d$ thì $x>0$.

Xét hàm số $y = \frac{3x}{x-3}$ với $x>0$ và $x \neq 3$.

Tập xác định: $D = (0; 3) \cup (3; +\infty)$.

Sự biến thiên:

Chiều biến thiên:

Đạo hàm $y' = \frac{-9}{(x-3)^2}$. Vì $y' < 0$ với mọi $x>0$ và $x \neq 3$ nên

hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(0; 3)$ và $(3; +\infty)$.

Tiệm cận:

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{x-3} = 3$. Suy ra đường thẳng $y=3$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Ta có $\lim_{x \rightarrow 3^-} y = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{3x}{x-3} = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 3^+} y = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{3x}{x-3} = +\infty$. Suy ra đường thẳng $x=3$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

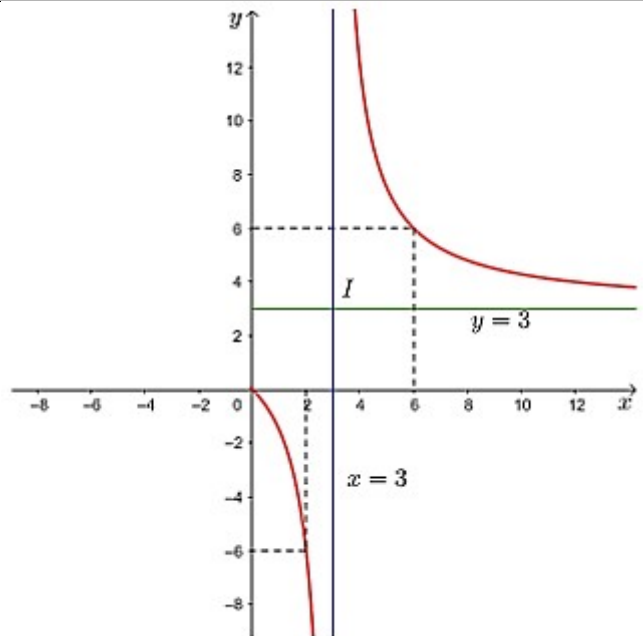
Bảng biến thiên:

x	0	3	$+\infty$
y'		-	-
y	0	$-\infty$	$+\infty$
			3

Đồ thị:

Đồ thị hàm số đi qua điểm $(2; -6)$ và điểm $(6; 6)$.

Đồ thị của hàm số đã cho được biểu diễn như hình dưới đây.



b) Để vật là ảnh thật thì $d' > 0$, tức là $y > 0$.

Quan sát đồ thị hàm số $y = \frac{3x}{x-3}$, ta thấy trên khoảng $(3; +\infty)$, đồ thị hàm số nằm phía trên trục Ox nên $y > 0$ trên khoảng này. Vậy với $x > 3$, tức $d > 3$ hay khoảng cách từ vật đến thấu kính lớn hơn 3 thì ảnh của vật là ảnh thật.

Để vật là ảnh ảo thì $d' < 0$, tức là $y < 0$.

Quan sát đồ thị hàm số $y = \frac{3x}{x-3}$, ta thấy trên khoảng $(0; 3)$, đồ thị hàm số nằm phía dưới trục Ox nên $y < 0$ trên khoảng này. Vậy với $x \in (0; 3)$, tức $d \in (0; 3)$ hay khoảng cách từ vật đến thấu kính lớn hơn 0 và nhỏ hơn 3 thì ảnh của vật là ảnh ảo.

c) Khi vật tiến gần đến tiêu điểm, tức vị trí A tiến gần đến vị trí F , thì khoảng cách AF dần tiến tới 0, hay $d - f \rightarrow 0$, suy ra $d \rightarrow f$, tức là $x \rightarrow 3$.

Thực hành 5:

GV cho HS hoạt động cá nhân trong 6 phút, GV có thể hướng dẫn (nếu cần), sau đó gọi một HS lên bảng; các HS khác theo dõi, nhận xét và góp ý; GV tổng kết.

Bước 2: Thực hiện nhiệm vụ:

- HĐ cá nhân: HS suy nghĩ, hoàn thành vào tập.
- HĐ cặp đôi, nhóm: các thành viên trao đổi, đóng góp ý kiến và thống nhất đáp án.

Cả lớp chú ý thực hiện các yêu cầu của GV, chú ý bài làm các bạn và nhận xét.

Bước 3: Báo cáo, thảo luận:

- HS trả lời trình bày miệng/ trình bày bảng, cả lớp nhận xét, GV đánh giá, dẫn dắt, chốt lại kiến thức.

HS thực hiện thực hành 5 và ghi bài.

a) Thể tích của hình hộp chữ nhật cần chế tạo là:

$$V = 2xy \text{ (cm}^3\text{)}.$$

Theo bài ra ta có $V = 500 \text{ cm}^3$, khi đó $2xy = 500$, suy ra

$$y = \frac{250}{x}.$$

b) Diện tích xung quanh của chiếc hộp là

$$S_{xq} = 2(x + y) \cdot 2 = 4(x + y) \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Diện tích toàn phần của chiếc hộp là

$$S_{tp} = S_{xq} + 2S_t = 4(x + y) + 2xy \text{ (cm}^2\text{)}$$

Lại có $y = \frac{250}{x}$ nên

$$S_{tp} = 4\left(x + \frac{250}{x}\right) + 2x \cdot \frac{250}{x} = 4x + \frac{1000}{x} + 500.$$

Vậy diện tích toàn phần của chiếc hộp là

$$S(x) = 500 + 4x + \frac{1000}{x}.$$

Bước 4: Kết luận, nhận định: GV tổng quát, nhận xét quá trình hoạt động của các HS, cho HS nhắc lại kiến thức đã học.

c) Xét hàm số $S(x) = 500 + 4x + \frac{1000}{x}$ với $x \in (0; +\infty)$.

Ta có $S'(x) = 4 - \frac{1000}{x^2}$;

Trên khoảng $(0; +\infty)$, $S'(x) = 0$ khi $x = 5\sqrt{10}$.

Ta có $\lim_{x \rightarrow 0^+} S(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(500 + 4x + \frac{1000}{x} \right) = +\infty$;

$\lim_{x \rightarrow +\infty} S(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(500 + 4x + \frac{1000}{x} \right) = +\infty$

Bảng biến thiên:

x	0	$5\sqrt{10}$	$+\infty$
$S'(x)$		0	
		-	+
$S(x)$	$+\infty$	$500 + \frac{200\sqrt{10}}{5}$	$+\infty$

d) Để dùng ít vật liệu nhất thì diện tích toàn phần của chiếc hộp phải nhỏ nhất.

Căn cứ vào bảng biến thiên ở câu c), ta thấy hàm số $S(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $500 + \frac{200\sqrt{10}}{5}$

tại $x = 5\sqrt{10}$. Với $x = 5\sqrt{10}$, ta có $y = \frac{250}{5\sqrt{10}} = 5\sqrt{10}$.

Vậy kích thước 3 cạnh của chiếc hộp là $2 \text{ cm}, 5\sqrt{10} \text{ cm}, 5\sqrt{10} \text{ cm}$ thì dùng ít vật liệu nhất.

► Hoạt động 3: Luyện tập

- Mục tiêu: Học sinh củng cố lại kiến thức đã học thông qua một số bài tập.
- Nội dung: HS vận dụng các kiến thức của bài học làm bài tập 1; 2; 3, 4 (SGK – tr.36)
- Sản phẩm học tập: Câu trả lời của HS
- Tổ chức thực hiện:

HD CỦA GV VÀ HS	SẢN PHẨM DỰ KIẾN
Bước 1: Chuyển giao nhiệm vụ: GV yêu cầu HS hoạt động hoàn thành bài tập 1, 2 – sgk trang 36 Bài 1. GV cho HS hoạt động cá nhân trong 8 phút, sau đó gọi HS lên bảng làm bài, các HS khác theo dõi bài làm, nhận xét và góp ý; GV tổng kết.	HS thực hiện bài 1 và ghi bài. Bài 1: a) $y = x^3 + x - 2$ Tập xác định: $\mathbb{R}$. Sự biến thiên: Chiều biến thiên: Đạo hàm $y' = 3x^2 + 1$; $y' > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Do đó, hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$. Các giới hạn tại vô cực: $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(1 + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} \right) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left(1 + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} \right) = +\infty$ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$+\infty$
y'		+
y	$-\infty$	$+\infty$

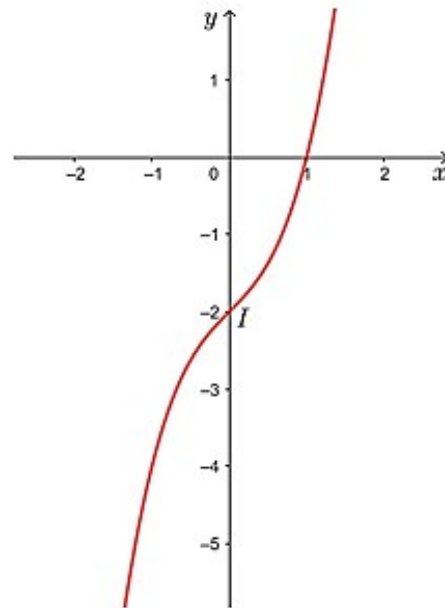
Đồ thị:

Khi $x = 0$ thì $y = -2$ nên $(0; -2)$ là giao điểm của đồ thị với trục Oy.

Ta có $y = 0 \Leftrightarrow x^3 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Vậy đồ thị của hàm số giao với trục Ox tại điểm $(1; 0)$.

Đồ thị của hàm số đã cho được biểu diễn như hình dưới đây.



Đồ thị của hàm số có tâm đối xứng là điểm $I(0; -2)$.

$$b) y = 2x^3 + x^2 - \frac{1}{2}x - 3$$

Tập xác định: R .

Sự biến thiên:

Chiều biến thiên:

$$\text{Đạo hàm } y' = 6x^2 + 2x - \frac{1}{2}; y' = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \text{ hoặc } x = \frac{1}{6}.$$

Trên các khoảng $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$ và $\left(\frac{1}{6}; +\infty\right)$, $y' > 0$ nên hàm số đồng biến trên mỗi khoảng đó.

Trên khoảng $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{6}\right)$, $y' < 0$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng đó.

Cực trị:

$$\text{Hàm số đạt cực đại tại } x = -\frac{1}{2} \text{ và } y_{C\oplus} = \frac{-11}{4}.$$

$$\text{Hàm số đạt cực tiểu tại } x = \frac{1}{6} \text{ và } y_{CT} = \frac{-329}{108}.$$

Các giới hạn tại vô cực:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(2 + \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} - \frac{3}{x^3} \right) = -\infty; \lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$+\infty$	
y'	+	0	-	0	+
y	$-\infty$	$-\frac{11}{4}$	$-\frac{329}{108}$	$+\infty$	

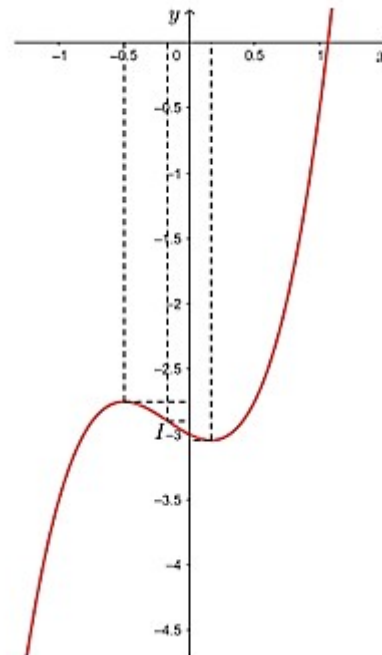
Đồ thị:

Khi $x=0$ thì $y=-3$ nên $(0; -3)$ là giao điểm của đồ thị với trục Oy .

Ta có $y=0 \Leftrightarrow 2x^3 + x^2 - \frac{1}{2}x - 3=0$, phương trình này có 1 nghiệm nên đồ thị của hàm số giao với trục Ox tại 1 điểm.

Điểm $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{11}{4}\right)$ là cực đại và điểm $\left(\frac{1}{6}; -\frac{329}{108}\right)$ là điểm cực tiểu của đồ thị hàm số.

Đồ thị của hàm số đã cho được biểu diễn như hình dưới đây.



Đồ thị của hàm số có tâm đối xứng là điểm I

$$\left(-\frac{1}{6}; -\frac{313}{108}\right).$$

Bài 2:

a) Xét hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$. Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 3x^2 - 6x$; $y'' = 6x - 6$;

$$y'' = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Với $x = 1$, ta có $y(1) = 0$.

Vậy $I(1; 0)$.

b) Ta có $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 2$.

Bài 2

GV chia lớp thành 4 nhóm thực hiện.

+ Nhóm 1, 2: làm ý a, b;

+ Nhóm 3, 4: làm ý

Các nhóm lên trình bày trước lớp, các nhóm khác theo dõi, nhận xét. GV tổng kết.

+ Tùy tình hình lớp học, GV có thể lựa chọn thêm một số bài tập trong SBT hoặc

bài tập nâng cao để giao cho những HS đã hoàn thành bài tập trong SGK hoặc HS khá giỏi (Dạy học phân hoá trong tiết chữa bài tập).

Bước 2: Thực hiện nhiệm vụ: HS quan sát và chú ý lắng nghe, thảo luận, hoàn thành các bài tập GV yêu cầu.

Bước 3: Báo cáo, thảo luận: Mỗi BT GV mời đại diện các nhóm trình bày. Các HS khác chú ý chữa bài, theo dõi nhận xét bài các nhóm trên bảng.

Bước 4: Kết luận, nhận định:

- GV chữa bài, chốt đáp án, tuyên dương các hoạt động tốt, nhanh và chính xác.
- GV chú ý cho HS các lỗi sai hay mắc phải khi thực hiện giải bài tập.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
y'	+	0	-	0	+
y	$-\infty$	2	-2	$+\infty$	

Do đó, hàm số đạt cực đại tại $x=0$, giá trị cực đại là $y_{CD}=2$; hàm số đạt cực tiểu tại $x=2$, giá trị cực tiểu là $y_{CT}=-2$.

Hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là $(0; 2)$ và $(2; -2)$.

$$\text{Ta thấy } \begin{cases} \frac{0+2}{2}=1 \\ \frac{2+(-2)}{2}=0 \end{cases}$$

Vậy điểm I $(1; 0)$ là trung điểm của đoạn thẳng nối hai điểm cực trị của đồ thị hàm số.

► Hoạt động 4: Vận dụng

a) Mục tiêu:

- Học sinh thực hiện làm bài tập vận dụng thực tế để nắm vững kiến thức.
- HS thấy sự gần gũi toán học trong cuộc sống, vận dụng kiến thức vào thực tế, rèn luyện tư duy toán học qua việc giải quyết vấn đề toán học

b) Nội dung: HS sử dụng SGK và vận dụng kiến thức để trao đổi và thảo luận hoàn thành các bài toán theo yêu cầu của GV.

c) Sản phẩm: HS hoàn thành các bài tập được giao.

d) Tổ chức thực hiện:

HD CỦA GV VÀ HS	SẢN PHẨM DỰ KIẾN
Bước 1: Chuyển giao nhiệm vụ: - GV yêu cầu HS hoạt động hoàn thành bài tập 5, 6 (SGK – tr.36) Bài 5 GV cho HS hoạt động theo bàn trong 7 phút, sau đó gọi HS lên bảng làm bài, các HS khác theo dõi bài làm, nhận xét và góp ý; GV tổng kết.	HS thực hiện bài 5 và ghi bài. a) Xét hàm số $y = \frac{-x^2+3x+1}{x+2}$. Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$. Sự biến thiên: Chiều biến thiên: Đạo hàm $y' = \frac{-x^2-4x+5}{(x+2)^2}$. Ta có $y'=0 \Leftrightarrow x=-5$ hoặc $x=1$. Trên các khoảng $(-\infty; -5)$ và $(1; +\infty)$, $y' < 0$ nên hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng đó. Trên các khoảng $(-5; -2)$ và $(-2; 1)$, $y' > 0$ nên hàm số đồng biến trên mỗi khoảng đó. Cực trị: Hàm số đạt cực tiểu tại $x=-5$ và $y_{CT}=13$. Hàm số đạt cực đại tại $x=1$ và $y_{CD}=1$. Các giới hạn tại vô cực và tiệm cận: $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^2+3x+1}{x+2} = +\infty; \lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2+3x+1}{x+2} = -\infty$ Ta có $a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^2+3x+1}{x(x+2)} = -1$ và $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-x^2+3x+1}{x+2} - (-1)x \right) = 2$ Suy ra đường thẳng $y = -x + 5$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

Ta có $\lim_{x \rightarrow -2^-} y = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{-x^2+3x+1}{x+2} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -2^+} y = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{-x^2+3x+1}{x+2} = -\infty$.

Suy ra đường thẳng $x = -2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Bảng biến thiên:

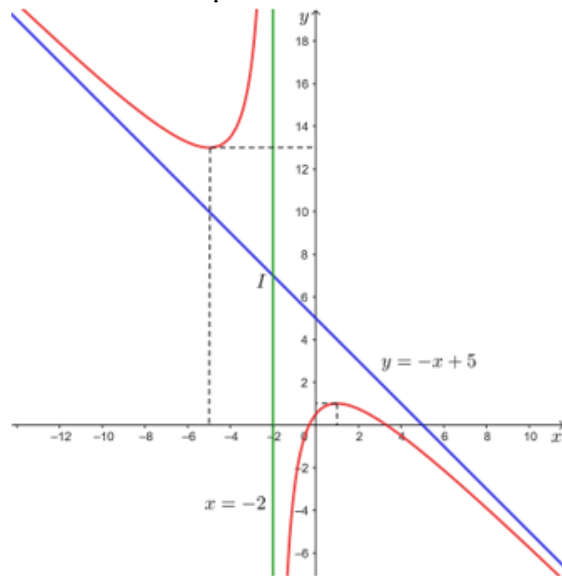
x	$-\infty$	-5	-2	1	$+\infty$	
y'	-	0	+	+	0	-
y	$+\infty$		$+\infty$		1	$-\infty$

Đồ thị:

Đồ thị hàm số giao với trục Oy tại điểm $(0; \frac{1}{2})$.

Đồ thị hàm số cắt trục Ox tại 2 điểm và đi qua các điểm $(-5; 13), (1; 1)$.

Đồ thị của hàm số đã cho được biểu diễn như hình dưới đây.



Tâm đối xứng của đồ thị hàm số là điểm I(-2; 7).

Các trục đối xứng của đồ thị hàm số là hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận $x = -2$ và $y = -x + 5$.

b) Hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là $(-5; 13)$ và $(1; 1)$.

Ta có $\begin{cases} \frac{-5+1}{2} = -2 \\ \frac{13+1}{2} = 7 \end{cases}$. Vậy tọa độ trung điểm của đoạn nối hai điểm cực

trị của đồ thị hàm số là $(-2; 7)$, đây chính là tâm đối xứng I của đồ thị hàm số.

Bài 6

GV cho HS hoạt động theo bàn trong 7 phút, sau đó gọi HS lên bảng làm bài, các HS khác theo dõi bài làm, nhận xét và góp ý; GV tổng kết

Bước 2: Thực hiện nhiệm vụ:

HS quan sát và chú ý lắng nghe, thảo luận, hoàn thành các bài tập GV yêu cầu.

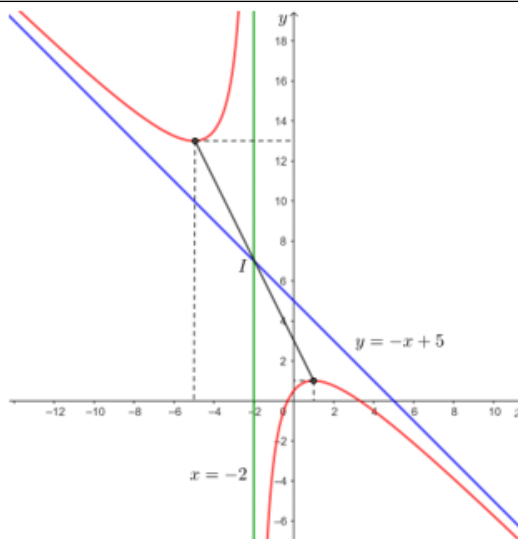
Bước 3: Báo cáo, thảo luận:

Mỗi BT GV mời đại diện các nhóm trình bày. Các HS khác chú ý chữa bài, theo dõi nhận xét bài các nhóm trên bảng.

Bước 4: Kết luận, nhận định:

- GV chữa bài, chốt đáp án, tuyên dương các hoạt động tốt, nhanh và chính xác.
- GV chú ý cho HS các lỗi sai hay mắc phải khi thực hiện giải bài tập.

- Giao cho HS làm các bài tập sau trong SGK: Bài tập 3, 4



Vậy trung điểm của đoạn nối hai điểm cực trị của đồ thị hàm số trùng với tâm đối xứng của đồ thị hàm số.

Bài 6:

a) Sau khi cắt bốn góc tám bìa và dựng thành chiếc hộp không nắp, khi đó chiếc hộp dựng thành có dạng hình hộp chữ nhật với các kích thước là x , $6 - 2x$ và $6 - 2x$ (dm).

Rõ ràng x phải thỏa mãn điều kiện $0 < x < 3$.

Thể tích của chiếc hộp là $V(x) = x(6 - 2x)^2$ (dm³) ($0 < x < 3$).

b) Xét hàm số $V(x) = x(6 - 2x)^2$ với $x \in (0; 3)$.

Tập xác định: $D = (0; 3)$.

Sự biến thiên:

Chiều biến thiên:

Đạo hàm $V'(x) = (6 - 2x)^2 + x \cdot 2(6 - 2x) \cdot (-2) = (6 - 2x)(6 - 6x)$.

Trên khoảng $(0; 3)$, ta có $V'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Trên khoảng $(0; 1)$, $V'(x) > 0$ nên hàm số đồng biến trên khoảng đó.

Trên khoảng $(1; 3)$, $V'(x) < 0$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng đó.

Hàm số có một điểm cực trị là điểm cực đại tại $x = 1$, $y_{CD} = 16$.

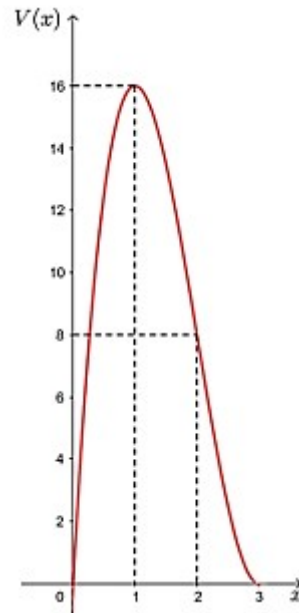
Bảng biến thiên:

x	0	1	3	
V'(x)		+	0	-
V(x)	0	16	0	

Đồ thị:

Trên khoảng $(0; 3)$, đồ thị hàm số đi qua các điểm $(1; 16)$ và $(2; 8)$.

Đồ thị hàm số $V(x)$ trên khoảng $(0; 3)$ được biểu diễn như hình dưới đây.



Từ đó, ta thấy để tìm được độ dài cạnh hình vuông cần cắt bỏ để chiếc hộp đạt thể tích lớn nhất, ta cần tìm $x_0 \in (0; 3)$ sao cho $V(x_0)$ có giá trị lớn nhất.

Căn cứ vào bảng biến thiên ta thấy trong khoảng $(0; 3)$ hàm số có một điểm cực trị duy nhất là điểm cực đại $x = 1$ nên tại đó $V(x)$ có giá trị lớn nhất là $\max_{(0;3)} V(x) = 16$.

Vậy độ dài cạnh của hình vuông cần cắt bỏ là 1 dm thì chiếc hộp có thể tích lớn nhất

HD GIẢI BÀI TẬP SGK

Bài 1:

a) $y = x^3 + x - 2$

Tập xác định: $\mathbb{R}$.

Sự biến thiên:

Chiều biến thiên:

Đạo hàm $y' = 3x^2 + 1$; $y' > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Do đó, hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

Các giới hạn tại vô cực:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(1 + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} \right) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left(1 + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} \right) = +\infty$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$+\infty$
y'		+
y	$-\infty$	$+\infty$

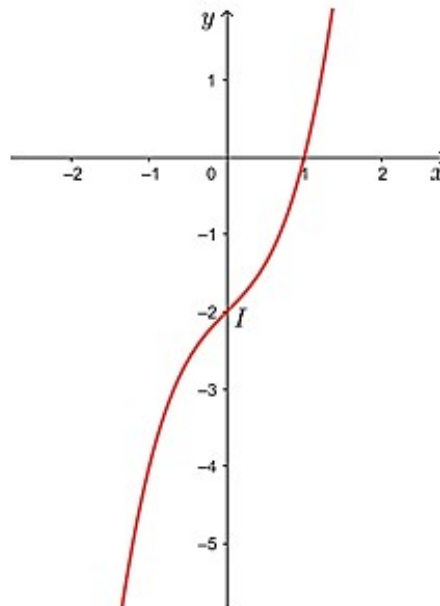
Đồ thị:

Khi $x = 0$ thì $y = -2$ nên $(0; -2)$ là giao điểm của đồ thị với trục Oy.

Ta có $y = 0 \Leftrightarrow x^3 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Vậy đồ thị của hàm số giao với trục Ox tại điểm $(1; 0)$.

Đồ thị của hàm số đã cho được biểu diễn như hình dưới đây.



Đồ thị của hàm số có tâm đối xứng là điểm I(0 ; - 2).

$$b) y = 2x^3 + x^2 - \frac{1}{2}x - 3$$

Tập xác định: R .

Sự biến thiên:

Chiều biến thiên:

$$\text{Đạo hàm } y' = 6x^2 + 2x - \frac{1}{2}; y' = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \text{ hoặc } x = \frac{1}{6}.$$

Trên các khoảng $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$ và $\left(\frac{1}{6}; +\infty\right)$, $y' > 0$ nên hàm số đồng biến trên mỗi khoảng đó.

Trên khoảng $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{6}\right)$, $y' < 0$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng đó.

Cực trị:

$$\text{Hàm số đạt cực đại tại } x = -\frac{1}{2} \text{ và } y_{C\oplus} = -\frac{11}{4}.$$

$$\text{Hàm số đạt cực tiểu tại } x = \frac{1}{6} \text{ và } y_{CT} = -\frac{329}{108}.$$

Các giới hạn tại vô cực:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(2 + \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} - \frac{3}{x^3} \right) = -\infty; \lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left(2 + \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} - \frac{3}{x^3} \right) = +\infty$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$+\infty$	
y'	+	0	-	0	+
y	$-\infty$	$-\frac{11}{4}$	$-\frac{329}{108}$	$+\infty$	

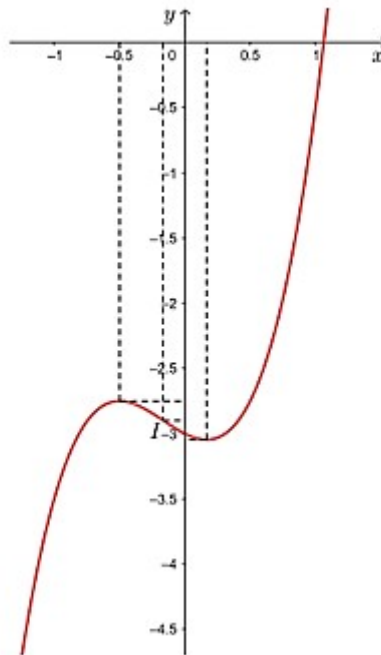
Đồ thị:

Khi $x=0$ thì $y=-3$ nên $(0; -3)$ là giao điểm của đồ thị với trục Oy.

Ta có $y=0 \Leftrightarrow 2x^3 + x^2 - \frac{1}{2}x - 3 = 0$, phương trình này có 1 nghiệm nên đồ thị của hàm số giao với trục Ox tại 1 điểm.

Điểm $\left(\frac{-1}{2}; -\frac{11}{4}\right)$ là cực đại và điểm $\left(\frac{1}{6}; -\frac{329}{108}\right)$ là điểm cực tiểu của đồ thị hàm số.

Đồ thị của hàm số đã cho được biểu diễn như hình dưới đây.



Đồ thị của hàm số có tâm đối xứng là điểm $I\left(\frac{-1}{6}; -\frac{313}{108}\right)$.

Bài 2:

a) Xét hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$. Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 3x^2 - 6x$; $y'' = 6x - 6$;

$y'' = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Với $x = 1$, ta có $y(1) = 0$.

Vậy $I(1; 0)$.

b) Ta có $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 2$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
y'	+	0	-	0	+
y	$-\infty$		2		$+\infty$
				-2	

Do đó, hàm số đạt cực đại tại $x=0$, giá trị cực đại là $y_{CD}=2$; hàm số đạt cực tiểu tại $x=2$, giá trị cực tiểu là $y_{CT}=-2$.

Hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là $(0; 2)$ và $(2; -2)$.

$$\text{Ta thấy } \begin{cases} \frac{0+2}{2}=1 \\ \frac{2+(-2)}{2}=0 \end{cases}$$

Vậy điểm $I(1; 0)$ là trung điểm của đoạn thẳng nối hai điểm cực trị của đồ thị hàm số.

Bài 3:

a) $y = 3 + \frac{1}{x}$

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Sự biến thiên:

Chiều biến thiên:

Đạo hàm $y' = \frac{-1}{x^2}$. Vì $y' < 0$ với mọi $x \neq 0$ nên hàm số đã cho nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty; 0)$ và $(0; +\infty)$.

Tiệm cận:

Ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(3 + \frac{1}{x}\right) = 3$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3 + \frac{1}{x}\right) = 3$. Suy ra đường thẳng $y=3$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Ta có $\lim_{x \rightarrow 0^-} y = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(3 + \frac{1}{x}\right) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} y = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(3 + \frac{1}{x}\right) = +\infty$. Suy ra đường thẳng $x=0$ (hay trục Oy) là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		-		-	
y	3		$+\infty$		3

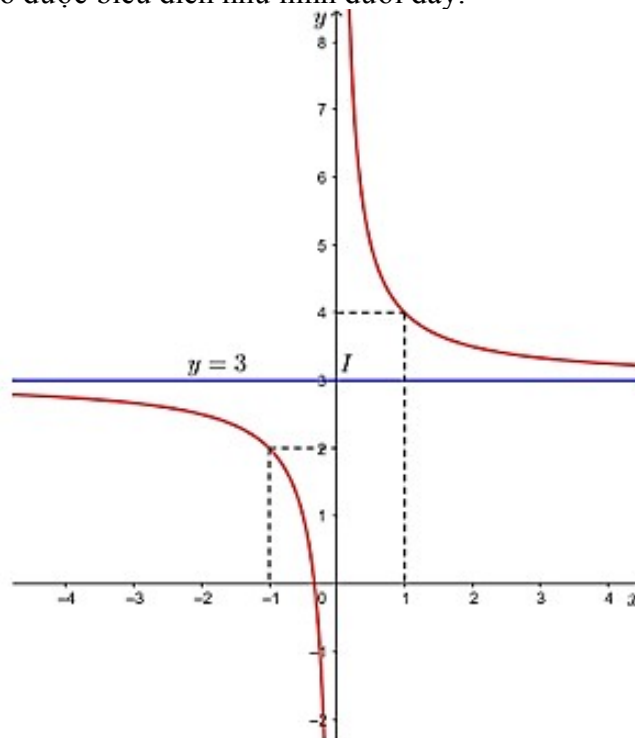
Đồ thị:

Ta có $y=0 \Leftrightarrow 3 + \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$ nên đồ thị hàm số cắt trục Ox tại điểm $\left(-\frac{1}{3}; 0\right)$.

Đồ thị hàm số không cắt trục Oy.

Ngoài ra, đồ thị hàm số đi qua các điểm $(-1; 2)$ và $(1; 4)$.

Đồ thị của hàm số đã cho được biểu diễn như hình dưới đây.



Tâm đối xứng của đồ thị hàm số là điểm $I(0; 3)$. Các trục đối xứng của đồ thị hàm số là hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận $x=0$ và $y=3$.

b) $y = \frac{x-3}{1-x}$

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Sự biến thiên:

Chiều biến thiên:

Đạo hàm $y' = \frac{-2}{(1-x)^2}$. Vì $y' < 0$ với mọi $x \neq 1$ nên hàm số đã cho nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

Tìm cận:

Ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-3}{1-x} = -1$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-3}{1-x} = -1$. Suy ra đường thẳng $y = -1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Ta có $\lim_{x \rightarrow 1^-} y = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-3}{1-x} = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 1^+} y = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-3}{1-x} = +\infty$. Suy ra đường thẳng $x = 1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Bảng biến thiên:

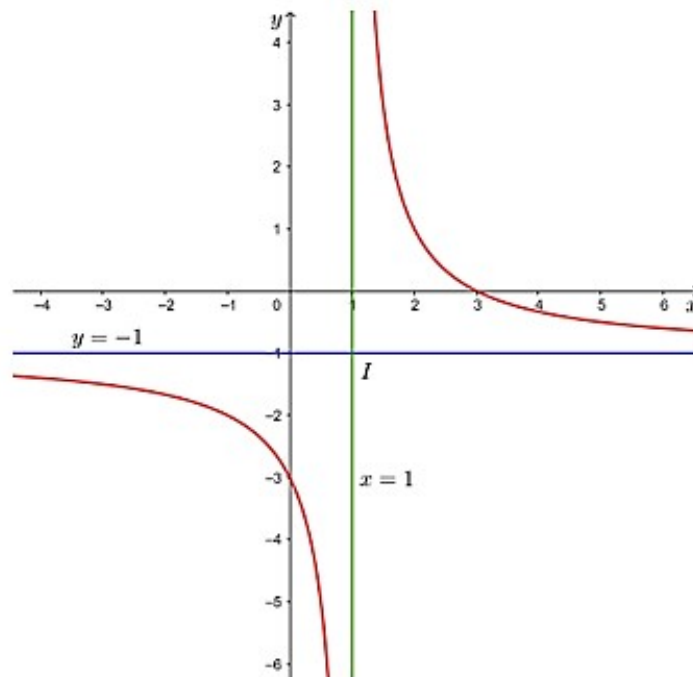
x	$-\infty$	1	$+\infty$
y'		-	-
y	-1	$+\infty$	-1

Đồ thị:

Ta có $x = 0$ thì $y = -3$ nên đồ thị hàm số cắt trục Oy tại điểm $(0; -3)$.

Ta có $y = 0 \Leftrightarrow \frac{x-3}{1-x} = 0 \Leftrightarrow x = 3$ nên đồ thị hàm số cắt trục Ox tại điểm $(3; 0)$.

Đồ thị của hàm số đã cho được biểu diễn như hình dưới đây.



Tâm đối xứng của đồ thị hàm số là điểm $I(1; -1)$. Các trục đối xứng của đồ thị hàm số là hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận $x = 1$ và $y = -1$.

Bài 4:

a) $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Sự biến thiên:

Chiều biến thiên:

Đạo hàm $y' = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$. Ta có $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 2$.

Trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$, $y' > 0$ nên hàm số đồng biến trên mỗi khoảng đó.
Trên các khoảng $(0; 1)$ và $(1; 2)$, $y' < 0$ nên hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng đó.

Cực trị:

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$ và $y_{CT} = 2$.

Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và $y_{CD} = -2$.

Các giới hạn tại vô cực và tiệm cận:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \frac{\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 - 2x + 2}{\lim_{x \rightarrow -\infty} x - 1} = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} y = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - 2x + 2}{\lim_{x \rightarrow +\infty} x - 1} = +\infty$$

$$\text{Ta có } a = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - 2x + 2}{\lim_{x \rightarrow +\infty} x(x-1)} = 1 \text{ và } b = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^2 - 2x + 2}{x-1} - x \right] = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} -x + 2}{\lim_{x \rightarrow +\infty} x - 1} = -1.$$

Suy ra đường thẳng $y = x - 1$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

Ta có $\lim_{x \rightarrow 1^-} y = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 2x + 2}{x-1} = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 1^+} y = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 2x + 2}{x-1} = +\infty$. Suy ra đường thẳng $x = 1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Bảng biến thiên:

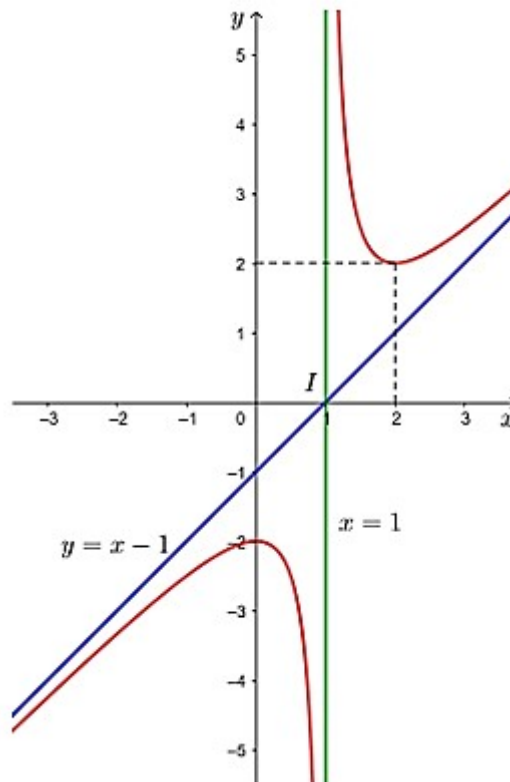
x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$			
y'		+	0	-		-	0	+
y								

Đồ thị:

Đồ thị hàm số giao với trục Oy tại điểm $(0; -2)$.

Đồ thị hàm số không cắt trục Ox.

Đồ thị của hàm số đã cho được biểu diễn như hình dưới đây.



Tâm đối xứng của đồ thị hàm số là điểm $I(1; 0)$.

Các trục đối xứng của đồ thị hàm số là hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận $x = 1$ và $y = x - 1$.

$$b) y = 2x - \frac{1}{1-2x}$$

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$.

Sự biến thiên:

Chiều biến thiên:

Đạo hàm $y' = 2 - \frac{2}{(1-2x)^2}$. Ta có $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 1$.

Trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(1; +\infty)$, $y' > 0$ nên hàm số đồng biến trên mỗi khoảng đó.

Trên các khoảng $(0; \frac{1}{2})$ và $(\frac{1}{2}; 1)$, $y' < 0$ nên hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng đó.

Cực trị:

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$ và $y_{CT} = 3$.

Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và $y_{CD} = -1$.

Các giới hạn tại vô cực và tiệm cận:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2x - \frac{1}{1-2x} \right) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2x - \frac{1}{1-2x} \right) = +\infty$$

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow +\infty} (y - 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{1-2x} = 0; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (y - 2x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{1-2x} = 0$$

Suy ra đường thẳng $y = 2x$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} y = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} \left(2x - \frac{1}{1-2x} \right) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} y = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} \left(2x - \frac{1}{1-2x} \right) = +\infty$$

Suy ra đường thẳng $x = \frac{1}{2}$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Bảng biến thiên:

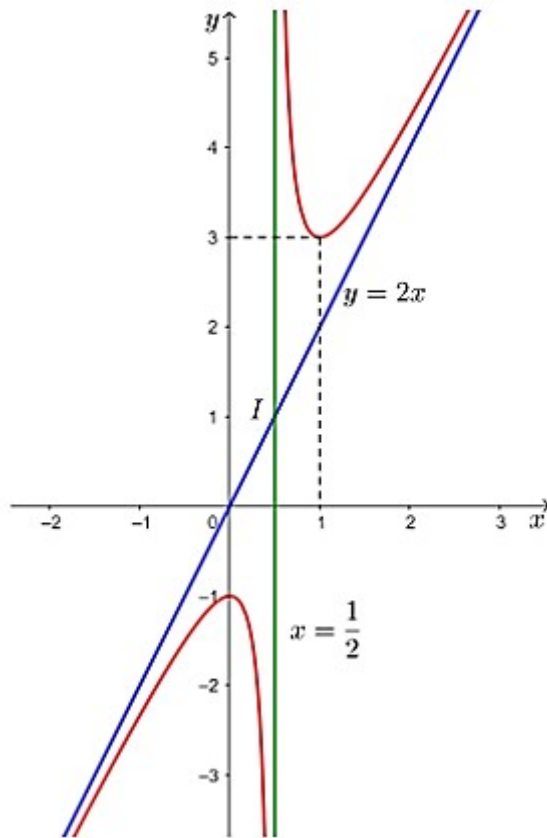
x	$-\infty$	0	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$	
y'	+	0	-	-	0	+
y	$-\infty$	-1	$-\infty$	$+\infty$	3	$+\infty$

Đồ thị:

Đồ thị hàm số giao với trục Oy tại điểm $(0; -1)$.

Đồ thị hàm số không cắt trục Ox.

Đồ thị của hàm số đã cho được biểu diễn như hình dưới đây.



Tâm đối xứng của đồ thị hàm số là điểm $I\left(\frac{1}{2}; 1\right)$.

Các trục đối xứng của đồ thị hàm số là hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận $x = \frac{1}{2}$ và $y = 2x$.

Bài 5:

a) Xét hàm số $y = \frac{-x^2 + 3x + 1}{x + 2}$.

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

Sự biến thiên:

Chiều biến thiên:

Đạo hàm $y' = \frac{-x^2 - 4x + 5}{(x + 2)^2}$. Ta có $y' = 0 \Leftrightarrow x = -5$ hoặc $x = 1$.

Trên các khoảng $(-\infty; -5)$ và $(1; +\infty)$, $y' < 0$ nên hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng đó.

Trên các khoảng $(-5; -2)$ và $(-2; 1)$, $y' > 0$ nên hàm số đồng biến trên mỗi khoảng đó.

Cực trị:

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -5$ và $y_{CT} = 13$.

Hàm số đạt cực đại tại $x = 1$ và $y_{CD} = 1$.

Các giới hạn tại vô cực và tiệm cận:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^2 + 3x + 1}{x + 2} = +\infty; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2 + 3x + 1}{x + 2} = -\infty$$

$$\text{Ta có } a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^2 + 3x + 1}{x(x + 2)} = -1 \text{ và } b = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-x^2 + 3x + 1}{x + 2} - (-1)x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x + 1}{x + 2} = 5$$

Suy ra đường thẳng $y = -x + 5$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow -2^-} y = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{-x^2 + 3x + 1}{x + 2} = +\infty; \lim_{x \rightarrow -2^+} y = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{-x^2 + 3x + 1}{x + 2} = -\infty$$

Suy ra đường thẳng $x = -2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Bảng biến thiên:

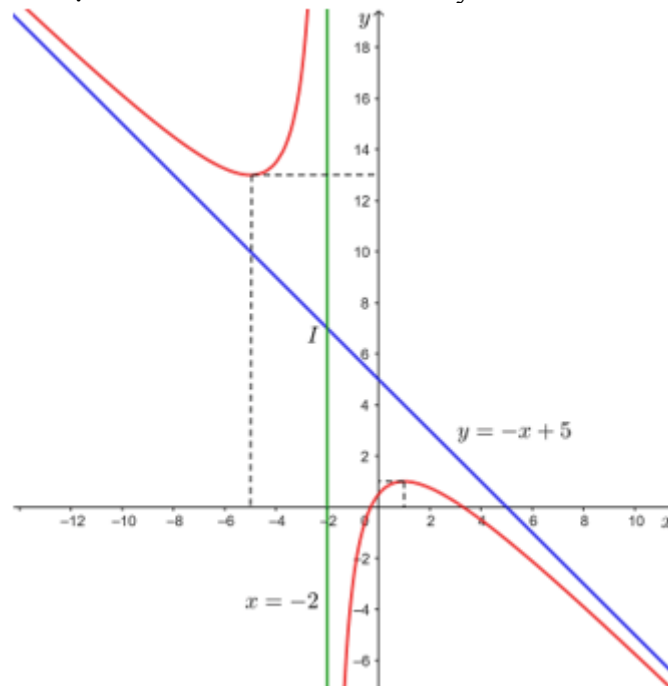
x	$-\infty$	-5	-2	1	$+\infty$				
y'		-	0	+		+	0	-	
y	$+\infty$			$+\infty$			1		$-\infty$

Đồ thị:

Đồ thị hàm số giao với trục Oy tại điểm $\left(0; \frac{1}{2}\right)$.

Đồ thị hàm số cắt trục Ox tại 2 điểm và đi qua các điểm $(-5; 13), (1; 1)$.

Đồ thị của hàm số đã cho được biểu diễn như hình dưới đây.



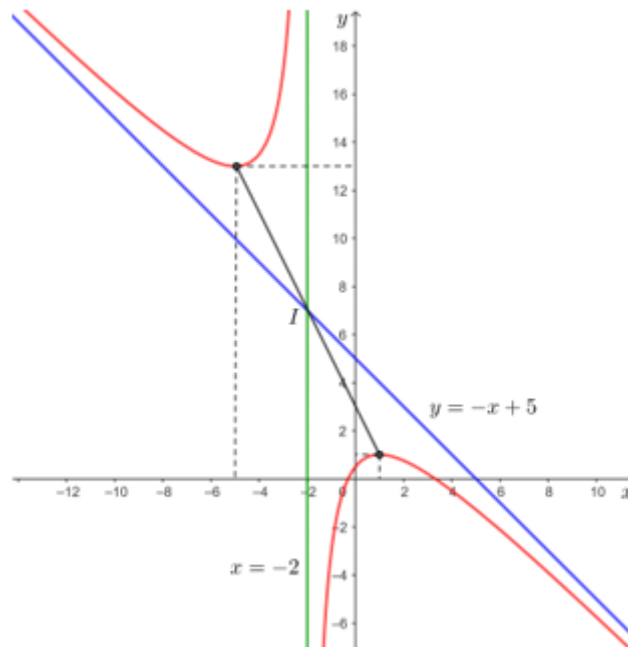
Tâm đối xứng của đồ thị hàm số là điểm I(-2; 7).

Các trục đối xứng của đồ thị hàm số là hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận $x = -2$ và $y = -x + 5$.

b) Hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là $(-5; 13)$ và $(1; 1)$.

Ta có $\begin{cases} \frac{-5+1}{2} = -2 \\ \frac{13+1}{2} = 7 \end{cases}$. Vậy tọa độ trung điểm của đoạn nối hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là $(-2; 7)$.

7), đây chính là tâm đối xứng I của đồ thị hàm số.



Vậy trung điểm của đoạn nối hai điểm cực trị của đồ thị hàm số trùng với tâm đối xứng của đồ thị hàm số.

Bài 6:

a) Sau khi cắt bốn góc tám bìa và dựng thành chiếc hộp không nắp, khi đó chiếc hộp dựng thành có dạng hình hộp chữ nhật với các kích thước là x , $6 - 2x$ và $6 - 2x$ (dm).

Rõ ràng x phải thỏa mãn điều kiện $0 < x < 3$.

Thể tích của chiếc hộp là $V(x) = x(6 - 2x)^2$ (dm³) ($0 < x < 3$).

b) Xét hàm số $V(x) = x(6 - 2x)^2$ với $x \in (0; 3)$.

Tập xác định: $D = (0; 3)$.

Sự biến thiên:

Chiều biến thiên:

Đạo hàm $V'(x) = (6 - 2x)^2 + x \cdot 2(6 - 2x) \cdot (-2) = (6 - 2x)(6 - 6x)$.

Trên khoảng $(0; 3)$, ta có $V'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Trên khoảng $(0; 1)$, $V'(x) > 0$ nên hàm số đồng biến trên khoảng đó.

Trên khoảng $(1; 3)$, $V'(x) < 0$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng đó.

Hàm số có một điểm cực trị là điểm cực đại tại $x = 1$, $y_{CD} = 16$.

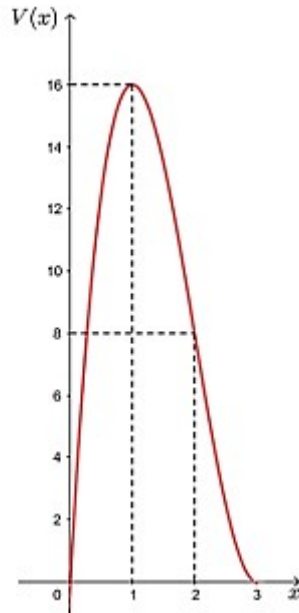
Bảng biến thiên:

x	0	1	3	
V'(x)		+	0	-
V(x)	0	16	0	

Đồ thị:

Trên khoảng $(0; 3)$, đồ thị hàm số đi qua các điểm $(1; 16)$ và $(2; 8)$.

Đồ thị hàm số $V(x)$ trên khoảng $(0; 3)$ được biểu diễn như hình dưới đây.



Từ đó, ta thấy để tìm được độ dài cạnh hình vuông cần cắt bỏ để chiếc hộp đạt thể tích lớn nhất, ta cần tìm $x_0 \in (0;3)$ sao cho $V(x_0)$ có giá trị lớn nhất.
 Căn cứ vào bảng biến thiên ta thấy trong khoảng $(0;3)$ hàm số có một điểm cực trị duy nhất là điểm cực đại $x=1$ nên tại đó $V(x)$ có giá trị lớn nhất là $\max_{(0;3)} V(x)=16$.
 Vậy độ dài cạnh của hình vuông cần cắt bỏ là 1 dm thì chiếc hộp có thể tích lớn nhất

....., ngày tháng năm 2024
Giáo viên soạn

.....

GÓP Ý, RÚT KINH NGHIỆM

.....

Duyệt của tổ chuyên môn

Duyệt của BGH

.....