|  |  |
| --- | --- |
| PHÒNG GD&ĐT VỤ BẢN  **TRƯỜNG THCS ĐẠI AN** | **ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI NĂM HỌC 2023-2024**  Môn: Toán lớp 9 (vòng 1)  *( Thời gian 150 phút )* |

**Bài 1:** *(4 điểm)*

a) Cho các số thực *x, y, z* thỏa mãn đồng thời các điều kiện

và . Tính giá trị của



b) Chứng minh rằng: Nếu thì



**Bài 2**: *(6 điểm)* Giải phương trình

a)



b )



c) .

**Bài 3:** *(2 điểm)*Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình**:**

**+ + + = 1**



**Bài 4**: *(7 điểm)* Cho đường tròn tâm và đường thẳng cắt đường tròn tâm tại hai điểm ( không đi qua ). Trên tia đối của tia lấy điểm ( nằm ngoài đường tròn tâm ). Kẻ và là các tiếp tuyến với đường tròn tâm tại và . Gọi là trung điểm của , cắt tại và cắt đường tròn tại các điểm và ( nằm giữa và ), cắt tại .



a) Chứng minh 

b) Chứng minh bốn điểm B, H, O, C cùng nằm trên một đường tròn

c) Gọi là trung điểm , từ kẻ đường thẳng vuông góc với cắt đường thẳng tại . Chứng minh là trung điểm .



**Bài 5:** *(1 điểm)* Cho và . Chứng minh rằng:.



ĐÁP ÁN – BIỂU ĐIỂM

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Bài** | **Ý** | **Nội dung đáp án** | **Điểm** |
| 1 | a | Ta có  Tương tự và  Suy ra      Ta có  Suy ra | 2 |
| b | Đặt  Ta có:  Bình phương hai vế được:  Biến đổi ta được:  hay (đpcm) | 2 |
| 2 | a | a) Điều kiện  Phương trình đã cho được viết lại như sau:  Xét phương trình:  . Tương đương  Chia cho  Ta có: . Đặt phương trình mới là:  Với ta có: | 2 |
| b | Điều kiện: .  Để đơn giản ta đặt  Phương trình đã cho trở thành:  Nhẩm được . Nên ta phân tích phương trình thành:  Để ý rằng và nên ta có . Vì vậy phương trình có nghiệm duy nhất . | 2 |
| c | .  Điều kiện  Đặt  Từ đó ta có hệ:    Suy ra:      (do )  Với , ta có:    Thử lại ta thấy, nghiệm của phương trình đã cho là . | 2 |
| 3 |  | Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình**: + + + = 1**  Vai trò của x, y, z như nhau nên không làm mất tính tổng quát giả sử  1≤ x ≤ y ≤ z ⇒ x2 ≤ xy ≤ xz ≤ yz ≤ xyz  ⇒ 1 =  **+ + +**  ≤ + + +  ⇔ 1 ≤ ⇒ x2 ≤ 12 ⇒ x є 1, 2,3  Nếu x = 1 ⇒ + + + = 1  ⇒ z + 1 + y + 9 = yz ⇒ yz – z – y + 1 = 11  (y- 1) (z - 1) = 11 ⇒ y = 2 ; z = 12 hoặc z =2 ; y = 12  Nếu x = 2 ⇒ + + + = 1  ⇒ (2y - 1) (2z-1) = 23 ⇒ y = 1; z = 12 hoặc y = 12; z = 1  Nếu x = 3 ⇒ (3y – 1) (3z - 1) = 37 vô nghiệm  Vậy (x, y, z) = (1; 2, 12) và các hoán vị của nó | 2 |
|  | a | a, Chứng minh  \* Ta có là hai tiếp tuyến của cắt nhau tại nên là tia phân giác của góc . Mà cân tại nên .  Ta có vuông tại có đường cao nên suy ra .  Ta có đồng dạng với (vì và chung) nên .  Vậy . (đpcm) | 2 |
| b | b, Chứng minh bốn điểm B, H, O, C cùng nằm trên một đường tròn  Gọi F là giao điểm của MN với OI    Cmtt ta có  mà  Vậy bốn điểm B, C O, H thuộc đường tròn đường kính OF | 2 |
| c | c, Gọi là trung điểm , từ kẻ đường thẳng vuông góc với cắt đường thẳng tại . Chứng minh là trung điểm .  Ta có thuộc đường tròn nên .  Xét và có (cùng phụ với ), (cùng phụ với ).  Suy ra . Do đó ta được .  Tương tự ta có .  Suy ra . Vậy là trung điểm . (đpcm). | 3 |
| 5 |  | Cho và . Chứng minh rằng:.  **Giải:**  Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có: . Tương tự:  Cộng ba bất đẳng thức này lại vế theo vế, ta được:  Bài toán được quy về chứng minh:. Bất đẳng thức cuối cùng hiển nhiên đúng vì theo bất đẳng thức Cauchy, ta có:  Bài toán được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi . | 1 |