|  |
| --- |
| PHÒNG GD&ĐT THANH OAIĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9NĂM HỌC 2020-2021. MÔN: TOÁN 9 Thời gian: 150 phút *(Không kể thời gian giao đề)*  Ngày thi: 25/11/2020  **Đề số 9** |

1. *(5 điểm)*

1) Cho biểu thức 

a) Rút gọn biểu thức .

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của .

2) Chứng minh rằng:  (2020 chữ số 2).

1. *(5 điểm)*

1) Giải phương trình sau: .

2) Tìm các số nguyên  để biểu thức  là một số chính phương.

1. *(4 điểm)*

1) Cho , trong đó  là hằng số.

Biết , , . Tính .

2) Với các số dương ,  thỏa mãn . Tìm giá trị nhỏ nhất của:



1. *(5 điểm)*

1) Cho tam giác  nội tiếp đường tròn tâm  có , ,  theo thứ tự là trung điểm của , , . Gọi  là trực tâm của tam giác .

a) Chứng minh tam giác  và tam giác  đồng dạng.

b) Kẻ các đường thẳng , ,  (, , ). Chứng minh các đường thẳng , ,  đồng quy.

2) Từ điểm  nằm trong tam giác  cho trước lần lượt vẽ các đường vuông góc ,  đến , , . Tìm vị trí của  để tích  đạt giá trị lớn nhất.

1. *(1 điểm)* Cho dãygồm 1000 số: . Chứng minh trong dãy trên tồn tại ítnhất một số chia hết cho 2013.

🙢**HẾT**🙠

|  |
| --- |
| ĐÁP ÁN ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI MÔN TOÁN - LỚP 9PHÒNG GD & ĐT THANH OAI **Năm học 2020 – 2021** |

**HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT**

1. *(5 điểm)*

1) Cho biểu thức 

a) Rút gọn biểu thức .

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của .

2) Chứng minh rằng:  (2020 chữ số 2).

**Lời giải**

1) Cho biểu thức 

a) Rút gọn biểu thức .

ĐKXĐ: ; .







 .

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của .

.

Vậy giá trị nhỏ nhất của 

 (thỏa mãn điều kiện).

2) Chứng minh rằng:  (2020 chữ số 2).







…



  (đpcm).

1. *(5 điểm)*

1) Giải phương trình sau: .

2) Tìm các số nguyên  để biểu thức  là một số chính phương.

**Lời giải**

1) Giải phương trình sau: .

**Điều kiện:** .

Phương trình đã cho tương đương với:







Với **** thì ; ; 

nên

Từ đó suy ra:  là nghiệm duy nhất của phương trình.

2) Tìm các số nguyên  để biểu thức  là một số chính phương.

Đặt(với  là số tự nhiên)

Ta có: 

Ta sẽ chứng minh: với 

Thật vậy: 



Do  nên 

Hay  

 hoặc 

Thử lại: với  hoặc  biểu thức đã cho đều bằng , thỏa mãn.

Vậy .

1. *(4 điểm)*

1) Cho , trong đó , , ,  là hằng số.

Biết ; ; . Tính .

2) Với các số dương ,  thỏa mãn . Tìm giá trị nhỏ nhất của:



**Lời giải**

1) Cho , trong đó , , ,  là hằng số.

Biết ; ; . Tính .

Đặt 

 là nghiệm của , mà  là đa thức bậc 4 nên  có dạng:





Tính được ; 

.

2) Với các số dương  thỏa mãn . Tìm giá trị nhỏ nhất của:



Ta có:





Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi .

Vậy giá trị nhỏ nhất của  khi .

1. *(5 điểm)*

1) Cho tam giác  nội tiếp đường tròn tâm  có , ,  theo thứ tự là trung điểm của , , . Gọi  là trực tâm của tam giác .

a) Chứng minh tam giác  và tam giác  đồng dạng.

b) Kẻ các đường thẳng , ,  (, , ). Chứng minh các đường thẳng , ,  đồng quy.

2) Từ điểm  nằm trong tam giác  cho trước lần lượt vẽ các đường vuông góc ,  đến , , . Tìm vị trí của  để tích  đạt giá trị lớn nhất.

**Lời giải**

1) Cho tam giác  nội tiếp đường tròn tâm  có  theo thứ tự là trung điểm của . Gọi  là trực tâm của tam giác .

****

a) Chứng minh tam giác  và tam giác  đồng dạng.

Chứng minh được  (cùng vuông góc )

 (cùng vuông góc )

;  (góc có cạnh tương ứng song song)

 (đpcm)

b) Kẻ các đường thẳng  . Chứng minh các đường thẳng  đồng quy.

Từ câu a) suy ra: 

Chứng minh được tứ giác  là hình bình hành suy ra , dẫn đến tứ giác  là hình bình hành. Nên  đi qua trung điểm  của .

Chứng minh tương tự có  đi qua , nên các đường thẳng  đồng quy (đpcm)

2) Từ điểm  nằm trong tam giác  cho trước lần lượt vẽ các đường vuông góc  đến . Tìm vị trí của  để tích  đạt giá trị lớn nhất.

******

Đặt , , ; , , .







Dấu “=” xảy ra , suy ra diện tích các tam giác , tam giác , tam giác  bằng nhau, khi đó  là trọng tâm tam giác .

Vậy  lớn nhất khi  là trọng tâm của tam giác .

1. *(1 điểm)*

Cho dãygồm 1000 số: . Chứng minh trong dãy trên tồn tại ítnhất một số chia hết cho 2013.

**Lời giải**

Tách2013 = 3.11.61 trong đó 3; 11; 61 đôi một nguyên tố cùng nhau.

Sử dụng điều kiện chia hết cho đồng thời 3 và 11, đó là những số có số chữ số là bội của 6.

Đó là những số: 777777 (6 chữ số), 777777777777 (12 chữ số), 777…77 (996 chữ số)

Số số hạng của dãy trên là 

Khi chia 166 số trên cho 61 thì có 166 số dư, mà số dư của các phép chia này chỉ nhận 61 giá trị từ 0 đến 60, nên theo nguyên lý Dirichle sẽ tồn tại 2 số trong dãy trên có cùng số dư khi chia cho 61 hiệu của hai số đó chia hết cho 61.

Hiệu của hai số có dạng:  (có  số 7, )

Mà  suy ra 77...7 chia hết cho 61.

Vậy trong 1000 số đã cho tồn tại ít nhất một số chia hết cho 2013.

**🙢 HẾT 🙠**