

CHỦ ĐỀ 3

NGUYÊN HÀM HÀM ẨN

Cần nhớ các công thức đạo hàm của hàm hợp

$$\bullet \int f'(x)dx = f(x) + C$$

$$\bullet f'(x).g(x) + f(x).g'(x) = [f(x).g(x)]'$$

$$\bullet \frac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{g^2(x)} = \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]'$$

$$\bullet \frac{f'(x)}{f(x)} = [\ln(f(x))]'$$

$$\bullet -\frac{f'(x)}{f^2(x)} = \left[\frac{1}{f(x)} \right]'$$

$$\bullet -\frac{f'(x)}{f^n(x)} = \left[\frac{1}{(n-1)[f(x)]^{n-1}} \right]'$$

$$\bullet n.f'(x).f(x) = [f(x)^n]'$$

$$\bullet \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} = [2\sqrt{f(x)}]'$$

DẠNG 1

$$\begin{cases} f'(x) = g(x)h[f(x)] \\ f'(x) \cdot h[f(x)] = g(x) \end{cases}$$

1. Điều kiện hàm ẩn có dạng:

Phương pháp giải:

$$\begin{aligned} \bullet \frac{f'(x)}{h[f(x)]} = g(x) &\Leftrightarrow \int \frac{f'(x)}{h[f(x)]} \cdot dx = \int g(x) \cdot dx \Leftrightarrow \int \frac{d[f(x)]}{h[f(x)]} = \int g(x) \cdot dx \\ \bullet f'(x) \cdot h[f(x)] = g(x) &\Leftrightarrow \int f'(x) h[f(x)] \cdot dx = \int g(x) \cdot dx \Leftrightarrow \int h[f(x)] \cdot d[f(x)] = \int g(x) \cdot dx \end{aligned}$$

Chú ý: Ngoài việc nguyên hàm hai vế, ta có thể lấy tích phân hai vế (tùy câu hỏi của bài toán)

$$\begin{cases} f'(x) + p(x) \cdot f(x) = 0 \\ f'(x) + p(x) [f(x)]^n = 0 \end{cases}$$

2. Điều kiện hàm ẩn có dạng:

Phương pháp giải:

$$\bullet f'(x) + p(x) \cdot f(x) = 0$$

$$\text{Chia hai vế với } f(x) \text{ ta được } \frac{f'(x)}{f(x)} + p(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = -p(x)$$

$$\text{Suy ra } \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = - \int p(x) dx \Leftrightarrow \ln |f(x)| = - \int p(x) dx$$

Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$

$$\bullet f'(x) + p(x) [f(x)]^n = 0$$

$$\text{Chia hai vế với } [f(x)]^n \text{ ta được } \frac{f'(x)}{[f(x)]^n} + p(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{[f(x)]^n} = -p(x)$$

$$\int \frac{f'(x)}{[f(x)]^n} dx = - \int p(x) dx \Leftrightarrow \frac{[f(x)]^{-n+1}}{-n+1} = - \int p(x) dx$$

Suy ra

$$\textbf{3. Điều kiện hàm ẩn có dạng: } u(x)f'(x) + u'(x)f(x) = h(x)$$

Phương pháp giải:

$$\text{Dễ dàng thấy rằng } u(x)f'(x) + u'(x)f(x) = [u(x)f(x)]'$$

$$\text{Do đó } u(x)f'(x) + u'(x)f(x) = h(x) \Leftrightarrow [u(x)f(x)]' = h(x)$$

$$\text{Suy ra } u(x)f(x) = \int h(x) dx$$

Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$ và $f'(x)\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}=1$. Tính $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

A. $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$

B. $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$

C. $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=2$

D. $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$

Lời giải

Chọn D.

Ta có:

$$f'(x)\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}=1$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{\frac{1}{4}\sin^2 x}$$

$$\Rightarrow f(x)=4\int\frac{1}{\sin^2 x}dx$$

$$\Rightarrow f(x)=4\cot x+C$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=0\Rightarrow C=-4$$

Do

$$\Rightarrow f(x)=4\cot x-4$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=4\cot\frac{\pi}{2}-4=0$$

Mà

Câu 2. Cho hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn $f'(x).f(x)=x^4+x^2$. Biết $f(0)=2$. Tính $f^2(2)$.

A. $f^2(2)=\frac{313}{15}$

B. $f^2(2)=\frac{332}{15}$

C. $f^2(2)=\frac{324}{15}$

D. $f^2(2)=\frac{323}{15}$

Lời giải

Chọn B.

Ta có $\int f'(x).f(x)dx = \int (x^4+x^2)dx + C \Rightarrow \frac{f^2(x)}{2} = \frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3} + C$

Do $f(0)=2$ nên suy ra $C=2$.

Vậy $f^2(2) = 2 \left(\frac{32}{5} + \frac{8}{3} + 2 \right) = \frac{332}{15}$.

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[-2; 1]$ thỏa mãn $f(0) = 3$ và $(f(x))^2 \cdot f'(x) = 3x^2 + 4x + 2$. Giá trị $f(1)$ là

- A. $2\sqrt[3]{42}$. B. $2\sqrt[3]{15}$. C. $\sqrt[3]{42}$. D. $\sqrt[3]{15}$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có: $(f(x))^2 \cdot f'(x) = 3x^2 + 4x + 2$ (*)

Lấy nguyên hàm 2 vế của phương trình trên ta được

$$\int (f(x))^2 \cdot f'(x) dx = \int (3x^2 + 4x + 2) dx \Leftrightarrow \int (f(x))^2 d(f(x)) = x^3 + 2x^2 + 2x + C$$

$$\Leftrightarrow \frac{(f(x))^3}{3} = x^3 + 2x^2 + 2x + C \Leftrightarrow (f(x))^3 = 3(x^3 + 2x^2 + 2x + C) \quad (1)$$

Theo đề bài $f(0) = 3$ nên từ (1) ta có $(f(0))^3 = 3(0^3 + 2 \cdot 0^2 + 2 \cdot 0 + C) \Leftrightarrow 27 = 3C \Leftrightarrow C = 9$

$$\Rightarrow (f(x))^3 = 3(x^3 + 2x^2 + 2x + 9)$$

$$\Rightarrow f(x) = \sqrt[3]{3(x^3 + 2x^2 + 2x + 9)}$$

$$\Rightarrow f(1) = \sqrt[3]{42}$$

Câu 4. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(2) = -\frac{1}{3}$ và $f'(x) = x[f(x)]^2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng

- A. $f(1) = -\frac{2}{3}$ B. $f(1) = -\frac{2}{9}$ C. $f(1) = -\frac{7}{6}$ D. $f(1) = -\frac{11}{6}$

Lời giải

Chọn A.

Từ hệ thức đề cho: $f'(x) = x[f(x)]^2$ (1), suy ra $f'(x) \geq 0$ với mọi $x \in [1; 2]$.

Do đó $f(x)$ là hàm không giảm trên đoạn $[1; 2]$, ta có $f(x) \leq f(2) < 0$ với mọi $x \in [1; 2]$.

Cách 1: lấy nguyên hàm

$$f'(x) = x[f(x)]^2$$

$$\Rightarrow \frac{f'(x)}{[f(x)]^2} = x$$

$$\Rightarrow \left(-\frac{1}{f(x)} \right)' = x$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{f(x)} \right)' = -x$$

$$\Rightarrow \frac{1}{f(x)} = \int -x dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{f(x)} = -\frac{x^2}{2} + C$$

$$f(2) = -\frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{f(2)} = -2 + C \Leftrightarrow \frac{1}{-\frac{1}{3}} = -2 + C \Rightarrow C = -1$$

Mà

$$\Rightarrow \frac{1}{f(x)} = -\frac{x^2}{2} - 1$$

$$\frac{1}{f(1)} = -\frac{1}{2} - 1 \Leftrightarrow f(1) = -\frac{2}{3}$$

Do đó:

Cách 2: Lấy tích phân

$$[f(x)]^2 \Rightarrow \frac{f'(x)}{[f(x)]^2} = x, \forall x \in [1; 2].$$

Chia 2 vế hệ thức (1) cho

Lấy tích phân 2 vế trên đoạn $[1; 2]$ hệ thức vừa tìm được, ta được:

$$\int_1^2 \frac{f'(x)}{[f(x)]^2} dx = \int_1^2 x dx$$

$$\Rightarrow \int_1^2 \frac{1}{[f(x)]^2} df(x) = \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left. \frac{-1}{f(x)} \right|_1^2 = \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{f(1)} - \frac{1}{f(2)} = \frac{3}{2}$$

Do $f(2) = -\frac{1}{3}$ nên suy ra $f(1) = -\frac{2}{3}$.

Câu 5. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(2) = -\frac{1}{25}$ và $f'(x) = 4x^3 [f(x)]^2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng

A. $-\frac{391}{400}$

B. $-\frac{1}{40}$

C. $-\frac{41}{400}$

D. $-\frac{1}{10}$

Lời giải

Chọn D.

Ta có $f'(x) = 4x^3 [f(x)]^2 \Rightarrow -\frac{f'(x)}{[f(x)]^2} = -4x^3 \Rightarrow \left[\frac{1}{f(x)} \right]' = -4x^3 \Rightarrow \frac{1}{f(x)} = -x^4 + C$

Do $f(2) = -\frac{1}{25}$, nên ta có $C = -9$.

Do đó $f(x) = -\frac{1}{x^4 + 9} \Rightarrow f(1) = -\frac{1}{10}$.

Câu 6. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(2) = -\frac{1}{5}$ và $f'(x) = x^3 [f(x)]^2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng

A. $-\frac{4}{35}$

B. $-\frac{71}{20}$

C. $-\frac{79}{20}$

D. $-\frac{4}{5}$

Lời giải

Chọn D.

Ta có: $f'(x) = x^3 [f(x)]^2 \Rightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)} = x^3 \Rightarrow \int_1^2 \frac{f'(x)}{f^2(x)} dx = \int_1^2 x^3 dx$

$\Leftrightarrow \left[-\frac{1}{f(x)} \right]_1^2 = \frac{15}{4} \Leftrightarrow -\frac{1}{f(2)} + \frac{1}{f(1)} = \frac{15}{4} \Leftrightarrow f(1) = -\frac{4}{5}$

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $f(2) = -\frac{4}{19}$ và $f'(x) = x^3 f^2(x) \forall x \in \mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng

A. $-\frac{2}{3}$

B. $-\frac{1}{2}$

C. -1

D. $-\frac{3}{4}$

Lời giải

Chọn C.

Ta có $f'(x) = x^3 f^2(x) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)} = x^3 \Rightarrow \int \frac{f'(x)}{f^2(x)} dx = \int x^3 dx \Leftrightarrow -\frac{1}{f(x)} = \frac{x^4}{4} + C$

Mà $f(2) = -\frac{4}{19} \Rightarrow \frac{19}{4} = \frac{16}{4} + C \Rightarrow C = \frac{3}{4}$. Suy ra $f(x) = -\frac{4}{x^4 + 3}$.

Vậy $f(1) = -1$.

Câu 8. Cho hàm số $f(x) > 0$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ đồng thời thỏa mãn $f(0) = \frac{1}{2}$, $f'(x) = -e^x f^2(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Tính giá trị của $f(\ln 2)$.

A. $f(\ln 2) = \frac{1}{4}$

B. $f(\ln 2) = \frac{1}{3}$

C. $f(\ln 2) = \ln 2 + \frac{1}{2}$

D. $f(\ln 2) = \ln^2 2 + \frac{1}{2}$

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } f'(x) = -e^x f^2(x) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)} = -e^x \quad (\text{do } f(x) > 0)$$

$$\Rightarrow \int \frac{f'(x)}{f^2(x)} dx = \int -e^x dx \Rightarrow -\frac{1}{f(x)} = -e^x + C \Rightarrow f(x) = \frac{1}{e^x - C}$$

$$\text{Mà } f(0) = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{e^0 - C} = \frac{1}{2} \Rightarrow C = -1$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{e^x + 1} \Rightarrow f(\ln 2) = \frac{1}{e^{\ln 2} + 1} = \frac{1}{3}$$

Câu 9. Cho hàm số $f(x) \neq 0$ thỏa mãn điều kiện $f'(x) = (2x+3)f^2(x)$ và $f(0) = -\frac{1}{2}$. Biết rằng tổng $f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(2024) + f(2025) = \frac{a}{b}$ với $(a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}^*)$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. $\frac{a}{b} < -1$

B. $\frac{a}{b} > 1$

C. $a + b = 1010$

D. $b - a = 1519$

Lời giải

Chọn D.

$$\text{Ta có } f'(x) = (2x+3)f^2(x) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)} = 2x+3$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{f'(x)}{f^2(x)} dx = \int (2x+3) dx \Leftrightarrow -\frac{1}{f(x)} = x^2 + 3x + C$$

$$\text{Vì } f(0) = -\frac{1}{2} \Rightarrow C = 2$$

$$\text{Vậy } f(x) = -\frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+1}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f(1) = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \\ f(2) = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} \\ f(3) = \frac{1}{5} - \frac{1}{4} \\ \vdots \\ f(2025) = \frac{1}{2026} - \frac{1}{2025} \end{array} \right.$$

Ta có:

$$\text{Do đó } f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(2024) + f(2025) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2026} = -\frac{506}{1013}$$

Do $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}^* \Rightarrow a = -506, b = 1013 \Rightarrow b - a = 1519$

Do đó.

Câu 10. Cho hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$; $y = f(x)$ liên tục, nhận giá trị dương trên $(0; +\infty)$ và thỏa mãn $f(3) = \frac{4}{9}$ và $[f'(x)]^2 = x \cdot f(x)$. Tính $f(8)$.

A. $f(8) = \frac{43 - 24\sqrt{3}}{9}$. B. $f(8) = \frac{43 + 24\sqrt{3}}{9}$. C. $f(8) = \frac{43 - \sqrt{3}}{3}$. D. $f(8) = \frac{43 + \sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có với $\forall x \in (0; +\infty)$ thì $y = f(x) > 0$; $x + 1 > 0$.

Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$ nên $f'(x) \geq 0, \forall x \in (0; +\infty)$.

Do đó

$$[f'(x)]^2 = x f(x)$$

$$\Rightarrow f'(x) = \sqrt{x f(x)}$$

$$\Rightarrow \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} = \sqrt{x}$$

$$\Rightarrow 2(\sqrt{f(x)})' = \sqrt{x}$$

$$\Rightarrow (\sqrt{f(x)})' = \frac{1}{2}\sqrt{x}$$

$$\Rightarrow \sqrt{f(x)} = \frac{1}{2} \int \sqrt{x} dx$$

$$\Rightarrow \sqrt{f(x)} = \frac{1}{3} \sqrt{x^3} + C$$

Vì $f(3) = \frac{4}{9}$ nên $C = \frac{2 - 3\sqrt{3}}{3}$.

$$\Rightarrow \sqrt{f(x)} = \frac{1}{3} \sqrt{x^3} + \frac{2 - 3\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow f(x) = \left(\frac{1}{3} \sqrt{x^3} + \frac{2 - 3\sqrt{3}}{3} \right)^2$$

suy ra $f(8) = \frac{43 - 24\sqrt{3}}{9}$.

Câu 11. Cho hàm số $f(x) > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$, $f(0) = 1$ và $f(x) = \sqrt{x} \cdot f'(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $f(3) < 2$

B. $2 < f(3) < 4$

C. $f(3) > 6$

D. $4 < f(3) < 6$

Lời giải

Chọn C.

Ta có:

$$f(x) = \sqrt{x} \cdot f'(x)$$

$$\Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow \ln f(x) = \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

$$\Leftrightarrow \ln f(x) = 2\sqrt{x} + C$$

Mà $f(0) = 1$ nên $C = 0 \Rightarrow f(x) = e^{2\sqrt{x}} \Rightarrow f(3) = e^{2\sqrt{3}} > 6$

Câu 12. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên đoạn $[0;1]$ đồng thời thỏa mãn các điều kiện $f'(0) = -1, f'(x) < 0, [f'(x)]^2 = f''(x), \forall x \in [0;1]$. Giá trị $f'(2)$ thuộc khoảng

A. $(2;3)$

B. $(-2;0)$

C. $(0;2)$

D. $(-3;-2)$

Lời giải

Chọn C.

$$[f'(x)]^2 = f''(x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{f''(x)}{[f'(x)]^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow -\left(\frac{1}{f'(x)}\right)' = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{f'(x)} = -\int dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{f'(x)} = -x + C$$

$$f'(0) = -1 \Rightarrow C = 1$$

Mà

$$\Leftrightarrow \frac{1}{f'(x)} = -x + 1$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1-x}$$

$$\Rightarrow f'(2) = \frac{1}{1-2} = 1$$

Câu 13. Cho hàm số $f(x)$ đồng biến có đạo hàm đến cấp hai trên đoạn $[0;2]$ và thỏa mãn $[f(x)]^2 - f(x).f''(x) + [f'(x)]^2 = 0$. Biết $f(0)=1, f(2)=e^6$. Khi đó $f(1)$ bằng

A. $e^{\frac{3}{2}}$.

B. e^3 .

C. $e^{\frac{5}{2}}$.

D. e^2 .

Lời giải

Chọn C.

Theo đề bài, ta có

$$[f(x)]^2 - f(x).f''(x) + [f'(x)]^2 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{f(x).f''(x) - [f'(x)]^2}{[f(x)]^2} = 1$$

$$\Rightarrow \left[\frac{f'(x)}{f(x)} \right]' = 1$$

$$\Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = x + C$$

$$\Rightarrow \ln f(x) = \frac{x^2}{2} + C.x + D$$

Mà $\begin{cases} f(0)=1 \\ f(2)=e^6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C=2 \\ D=0 \end{cases}$.

Suy ra : $f(x) = e^{\frac{x^2}{2} + 2x} \Rightarrow f(1) = e^{\frac{5}{2}}$.

Câu 14. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $(f'(x))^2 + f(x).f''(x) = x^3 - 2x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = f'(0) = 1$. Tính giá trị của $T = f^2(2)$

A. $\frac{43}{30}$

B. $\frac{16}{15}$

C. $\frac{43}{15}$

D. $\frac{26}{15}$

Lời giải

Chọn C.

Có

$$(f'(x))^2 + f(x).f''(x) = x^3 - 2x$$

$$\Leftrightarrow (f(x).f'(x))' = x^3 - 2x$$

$$\Rightarrow f(x).f'(x) = \int (x^3 - 2x) dx$$

$$\Rightarrow f(x).f'(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^2 + C$$

Từ $f(0) = f'(0) = 1$. Suy ra $C = 1$.

$$\text{Vậy } f(x).f'(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^2 + 1$$

Tiếp đến có:

$$2f(x).f'(x) = \frac{1}{2}x^4 - 2x^2 + 2$$

$$\Leftrightarrow (f^2(x))' = \frac{1}{2}x^4 - 2x^2 + 2$$

$$\Rightarrow f^2(x) = \int \left(\frac{1}{2}x^4 - 2x^2 + 2 \right) dx$$

$$\Rightarrow f^2(x) = \frac{1}{10}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + 2x + C$$

Từ $f(0) = 1$. Suy ra $C = 1$.

$$\text{Vậy } f^2(x) = \frac{1}{10}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + 2x + 1$$

$$\text{Do đó } T = \frac{43}{15}$$

Câu 15. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $[f'(x)]^2 + f(x).f''(x) = 2x^2 - x + 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = f'(0) = 3$. Giá trị của $[f(1)]^2$ bằng

A. 28.

B. 22.

C. $\frac{19}{2}$.

D. 10.

Lời giải

Chọn A.

$$\text{Ta có } [f(x)f'(x)]' = [f'(x)]^2 + f(x)f''(x)$$

$$\text{Do đó theo giả thiết ta được } [f(x)f'(x)]' = 2x^2 - x + 1$$

$$\text{Suy ra } f(x)f'(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{x^2}{2} + x + C. \text{ Hơn nữa } f(0) = f'(0) = 3 \text{ suy ra } C = 9.$$

$$\text{Tương tự vì } [f^2(x)]' = 2f(x)f'(x) \text{ nên } [f^2(x)]' = 2\left(\frac{2}{3}x^3 - \frac{x^2}{2} + x + 9\right)$$

$$\text{Suy ra } f^2(x) = \int 2\left(\frac{2}{3}x^3 - \frac{x^2}{2} + x + 9\right) dx = \frac{1}{3}x^4 - \frac{x^3}{3} + x^2 + 18x + C,$$

cũng vì $f(0)=3$ suy ra $f^2(x)=\frac{1}{3}x^4 - \frac{x^3}{3} + x^2 + 18x + 9$.

Do đó $[f(1)]^2 = 28$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 16. Cho hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn $y'=xy^2$ và $f(-1)=1$. Tính giá trị $f(2)$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $f(2)=e^3$

Ta có $y'=xy^2 \Rightarrow \frac{y'}{y}=x^2 \Rightarrow \int \frac{y'}{y} dx = \int x^2 dx \Leftrightarrow \ln y = \frac{x^3}{3} + C \Leftrightarrow y = e^{\frac{x^3}{3} + C}$.

Theo giả thiết $f(-1)=1$ nên $e^{-\frac{1}{3}+C}=1 \Leftrightarrow C=\frac{1}{3}$.

Vậy $y=f(x)=e^{\frac{x^3}{3}+\frac{1}{3}}$.

Do đó $f(2)=e^3$.

Câu 17. Cho hàm số $f(x) \neq 0$, liên tục trên đoạn $[1;2]$ và thỏa mãn $f(1)=\frac{1}{3}$; $x^2 \cdot f'(x) = f^2(x)$ với $\forall x \in [1;2]$. Tính $f(2)$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $f(2)=2$

Cách 1: lấy nguyên hàm

Học sinh tự làm nhé

Cách 2: Lấy tích phân

Ta có

$$x^2 \cdot f'(x) = f^2(x)$$

$$\Rightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)} = \frac{1}{x^2}$$

$$\Rightarrow \left(-\frac{1}{f(x)} \right)' = \frac{1}{x^2}$$

$$\Rightarrow \int_1^2 \left(-\frac{1}{f(x)} \right)' dx = \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx$$

$$\Rightarrow \left(-\frac{1}{f(x)} \right) \Big|_1^2 = -\frac{1}{x} \Big|_1^2$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{f(2)} + \frac{1}{f(1)} = -\frac{1}{2} + 1$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{f(2)} + \frac{1}{f(1)} = \frac{1}{2}$$

do $f(1) = \frac{1}{3} \Rightarrow -\frac{1}{f(2)} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \Rightarrow f(2) = -6$

Câu 18. Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $f(x) < 0, \forall x > 0$ và có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên khoảng $(0; +\infty)$ thỏa mãn $f'(x) = (2x+1)f^2(x), \forall x > 0$ và $f(1) = -\frac{1}{2}$. Tính giá trị của biểu thức $T = f(1) + f(2) + \dots + f(2023) + f(2024)$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $T = -\frac{2024}{2025}$

Ta có:

$$f'(x) = (2x+1)f^2(x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)} = 2x+1$$

$$\Rightarrow \int \frac{f'(x)}{f^2(x)} dx = \int (2x+1) dx$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{f(x)} = x^2 + x + C$$

Mà $f(1) = -\frac{1}{2} \Rightarrow C = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{-1}{x^2 + x} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}$.

$$\left\{ \begin{array}{l} f(1) = \frac{1}{2} - 1 \\ f(2) = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \\ f(3) = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} \\ \vdots \\ f(2024) = \frac{1}{2023} - \frac{1}{2024} \end{array} \right.$$

Ta có:

$$\Rightarrow T = f(1) + f(2) + \dots + f(2024) = -1 + \frac{1}{2025} = -\frac{2024}{2025}$$

Câu 19. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(0) = 1 - \ln 2$ và $e^x f'(x) = 2^x [f(x)]^2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Tính giá trị của $f(1)$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $f(1) = \frac{e - e \ln 2}{2}$

Từ giả thiết ta có: $f'(x) = \frac{2^x}{e^x} [f(x)]^2$ với mọi $x \in (1; 2]$.

Do đó $f(x) \geq f(1) = 1 > 0$ với mọi $x \in [1; 2]$.

Xét với mọi $x \in [1; 2]$ ta có:

$$e^x f'(x) = 2^x [f(x)]^2$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{2^x}{e^x} [f(x)]^2$$

$$\Rightarrow \frac{f'(x)}{[f(x)]^2} = \left(\frac{2}{e}\right)^x$$

$$\Rightarrow -\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = \left(\frac{2}{e}\right)^x$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{f(x)}\right)' = -\left(\frac{2}{e}\right)^x$$

$$\Rightarrow \frac{1}{f(x)} = -\int \left(\frac{2}{e}\right)^x dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{f(x)} = -\frac{\left(\frac{2}{e}\right)^x}{\ln \frac{2}{e}} + C$$

$$\Rightarrow \frac{1}{f(x)} = \frac{\left(\frac{2}{e}\right)^x}{1 - \ln 2} + C$$

Mà $f(0) = 1 - \ln 2 \Rightarrow C = 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{f(x)} = \frac{\left(\frac{2}{e}\right)^x}{1 - \ln 2}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1 - \ln 2}{\left(\frac{2}{e}\right)^x}$$

Vậy $f(1) = \frac{e - e \ln 2}{2}$.

Câu 20. Cho hàm số $y = f(x)$ đồng biến và có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $(f'(x))^2 = f(x).e^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 2$. Tính $f(2)$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $f(2) = (e + \sqrt{2} - 1)^2$

Vì hàm số $y = f(x)$ đồng biến và có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ đồng thời $f(0) = 2$ nên $f'(x) \geq 0$ và $f(x) > 0$ với mọi $x \in [0; +\infty)$.

Từ giả thiết $(f'(x))^2 = f(x).e^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ suy ra $f'(x) = \sqrt{f(x).e^x}$, $\forall x \in [0; +\infty)$.

Do đó, $\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}$, $\forall x \in [0; +\infty)$.

Lấy nguyên hàm hai vế, ta được $\sqrt{f(x)} = e^{\frac{x}{2}} + C$, $\forall x \in [0; +\infty)$ với C là hằng số nào đó.

Kết hợp với $f(0) = 2$, ta được $C = \sqrt{2} - 1$.

Từ đó, tính được $f(2) = (e + \sqrt{2} - 1)^2 \approx 9,81$.

Câu 21. Giả sử hàm số $y = f(x)$ liên tục, nhận giá trị dương trên $(0; +\infty)$ và thỏa mãn $f(1) = 1$, $f(x) = f'(x).\sqrt{3x}$, với mọi $x > 0$. Tính $f(5)$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $f(5) = e^{\frac{2\sqrt{5}-2}{\sqrt{3}}}$

Ta có :

$$f(x) = f'(x).\sqrt{3x}$$

$$\Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{\sqrt{3x}}$$

$$\Rightarrow \ln f(x) = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

$$\Rightarrow \ln f(x) = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{x} + C$$

$$\Rightarrow f(x) = e^{\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{x} + C}$$

$$f(1) = 1 \text{ nên } 1 = e^{\frac{2}{\sqrt{3}} + C} \Rightarrow C = -\frac{2}{\sqrt{3}}$$

Mà

$$\Rightarrow f(x) = e^{\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{3}}}$$

$$\text{Suy ra } f(5) = e^{\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{5} - \frac{2}{\sqrt{3}}} = e^{\frac{2\sqrt{5} - 2}{\sqrt{3}}}$$

Câu 22. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbf{R}$ thỏa mãn $e^{f(x)} - \frac{x}{f'(x)} = 0$ với $\forall x \in \mathbf{R}$. Biết $f(1) = 1$, tính $f(e^2)$

Trả lời:

Lời giải

Đáp án:

Câu 23. Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương và thỏa mãn $f(0) = 1$, $(f'(x))^3 = e^x (f(x))^2$, $\forall x \in \mathbf{R}$. Tính $f(3)$

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $f(3) = e^3$

$$(f'(x))^3 = e^x (f(x))^2, \forall x \in \mathbf{R}$$

Ta có:

$$\Leftrightarrow f'(x) = \sqrt[3]{e^x} \cdot \sqrt[3]{(f(x))^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{f'(x)}{\sqrt[3]{(f(x))^2}} = \sqrt[3]{e^x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{f'(x)}{\sqrt[3]{(f(x))^2}} = \sqrt[3]{e^x}$$

$$\Leftrightarrow f'(x) \cdot (f(x))^{-\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{e^x}$$

$$\Leftrightarrow 3 \left[(f(x))^{-\frac{1}{3}} \right]' = \sqrt[3]{e^x}$$

$$\Leftrightarrow \left[(f(x))^{\frac{1}{3}} \right]' = \frac{1}{3} \sqrt[3]{e^x}$$

$$\Leftrightarrow (f(x))^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \int \sqrt[3]{e^x} dx$$

$$\Leftrightarrow (f(x))^{\frac{1}{3}} = e^{\frac{x}{3}} + C$$

$$f(0)=1 \Rightarrow 1=1+C \Rightarrow C=0$$

$$\Rightarrow (f(x))^{\frac{1}{3}} = e^{\frac{x}{3}}$$

$$\Rightarrow f(x) = e^x$$

$$\Rightarrow f(3) = e^3$$

Câu 24. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện $x^6 [f'(x)]^3 + 27 [f(x)-1]^4 = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(1)=0$. Tính giá trị của $f(2)$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $f(2) = -7$

Ta có

$$x^6 [f'(x)]^3 + 27 [f(x)-1]^4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^6 [f'(x)]^3 = -27 [f(x)-1]^4$$

$$\Leftrightarrow \frac{[f'(x)]^3}{[f(x)-1]^4} = -\frac{27}{x^6}$$

$$\Leftrightarrow \frac{[f'(x)]^3}{[f(x)-1]^3 [f(x)-1]} = -\frac{27}{x^6}$$

$$\Leftrightarrow \frac{f'(x)}{(f(x)-1)\sqrt[3]{f(x)-1}} = -\frac{3}{x^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{f'(x)}{-3(f(x)-1)\sqrt[3]{f(x)-1}} = \frac{1}{x^2}$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{1}{\sqrt[3]{f(x)-1}} \right]' = \frac{1}{x^2}$$

$$\int \left[\frac{1}{\sqrt[3]{f(x)-1}} \right]' dx = \int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C.$$

Do đó

Suy ra $\frac{1}{\sqrt[3]{f(x)-1}} = -\frac{1}{x} + C$

Có $f(1)=0 \Rightarrow C=0$

Do đó $f(x)=1-x^3$

Khi đó $f(2)=-7$.

Câu 25. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $[xf'(x)]^2 + 1 = x^2[1 - f(x).f''(x)]$ với mọi x dương. Biết $f(1)=f'(1)=1$. Tính giá trị $f^2(2)$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $f^2(2)=2\ln 2+2$

Ta có: $[xf'(x)]^2 + 1 = x^2[1 - f(x).f''(x)] ; x > 0$

$\Leftrightarrow x^2.[f'(x)]^2 + 1 = x^2[1 - f(x).f''(x)]$

$\Leftrightarrow [f'(x)]^2 + \frac{1}{x^2} = 1 - f(x).f''(x)$

$\Leftrightarrow [f'(x)]^2 + f(x).f''(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$

$\Leftrightarrow [f(x).f'(x)]' = 1 - \frac{1}{x^2}$

Do đó: $\int [f(x).f'(x)]'.dx = \int \left(1 - \frac{1}{x^2}\right).dx \Rightarrow f(x).f'(x) = x + \frac{1}{x} + C.$

Vì $f(1)=f'(1)=1 \Rightarrow 1=2+C \Leftrightarrow C=-1.$

Nên $\int f(x).f'(x).dx = \int \left(x + \frac{1}{x} - 1\right).dx \Leftrightarrow \int f(x).d(f(x)) = \int \left(x + \frac{1}{x} - 1\right).dx$

$\Rightarrow \frac{f^2(x)}{2} = \frac{x^2}{2} + \ln x - x + C.$

Vì $f(1)=1 \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - 1 + C \Leftrightarrow C=1.$

Vậy $\frac{f^2(x)}{2} = \frac{x^2}{2} + \ln x - x + 1 \Rightarrow f^2(2)=2\ln 2+2$

DẠNG 2

1. Điều kiện hàm ẩn có dạng: $A(x)f(x) + B(x)f'(x) = h(x)$ (1)

Ý tưởng giải:

♦ Ta cần nhân thêm một lượng $u(x)$ vào (1) để tạo thành $u'(x)f(x) + u(x)f'(x) = u(x)h(x)$ và lúc này:

$$u'(x)f(x) + u(x)f'(x) = u(x)h(x)$$

$$\Leftrightarrow [u(x)f(x)]' = u(x)h(x)$$

$$\Rightarrow \int [u(x)f(x)]' dx = \int u(x)h(x) dx$$

$$\Rightarrow u(x)f(x) = \int u(x)h(x) dx$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{\int u(x)h(x) dx}{u(x)}$$

◆ Cách tìm $u(x)$

$$u(x) \text{ được chọn sao cho : } \begin{cases} u'(x) = A(x) \\ u(x) = B(x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{A(x)}{B(x)} \Rightarrow \int \frac{u'(x)}{u(x)} \cdot dx = \int \frac{A(x)}{B(x)} \cdot dx \Rightarrow \ln|u(x)| = \int \frac{A(x)}{B(x)} \cdot dx \Rightarrow u(x) = e^{\int \frac{A(x)}{B(x)} \cdot dx}$$

Tóm lại phương pháp giải: $A(x)f(x) + B(x)f'(x) = h(x)$ (1) như sau:

+ **Bước 1:** Tìm $u(x)$: $u(x) = e^{\int \frac{A(x)}{B(x)} \cdot dx}$

+ **Bước 2:** Nhân $u(x)$ vào (1) $\Rightarrow f(x) = \frac{\int u(x) \cdot h(x) \cdot dx}{u(x)}$

2. Một số dạng đặc biệt của (1)

a) Điều kiện hàm ẩn có dạng: $\begin{cases} f'(x) + f(x) = h(x) \\ f'(x) - f(x) = h(x) \end{cases}$

Phương pháp giải:

◆ $f'(x) + f(x) = h(x)$

Nhân hai vế với e^x ta được $e^x \cdot f'(x) + e^x \cdot f(x) = e^x \cdot h(x) \Leftrightarrow [e^x \cdot f(x)]' = e^x \cdot h(x)$

Suy ra $e^x \cdot f(x) = \int e^x \cdot h(x) \cdot dx$

Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$

◆ $f'(x) - f(x) = h(x)$

Nhân hai vế với e^{-x} ta được $e^{-x} \cdot f'(x) - e^{-x} \cdot f(x) = e^{-x} \cdot h(x) \Leftrightarrow [e^{-x} \cdot f(x)]' = e^{-x} \cdot h(x)$

Suy ra $e^{-x} \cdot f(x) = \int e^{-x} \cdot h(x) \cdot dx$

Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$

b) Điều kiện hàm ẩn có dạng: $f'(x) + p(x) \cdot f(x) = h(x)$

Phương pháp giải:

Nhân hai vế với $e^{\int p(x) \cdot dx}$ ta được

$$f'(x) \cdot e^{\int p(x) \cdot dx} + p(x) \cdot e^{\int p(x) \cdot dx} \cdot f(x) = h(x) \cdot e^{\int p(x) \cdot dx} \Leftrightarrow [f(x) \cdot e^{\int p(x) \cdot dx}]' = h(x) \cdot e^{\int p(x) \cdot dx}$$

Suy ra $f(x) \cdot e^{\int p(x) \cdot dx} = \int e^{\int p(x) \cdot dx} \cdot h(x) \cdot dx$

Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$

Câu 26. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(x) + f'(x) = e^{-x}, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 2$. Tất cả các nguyên hàm của $f(x)e^x$ là

A. $x^2 + x + C$.

B. $2x^2 + 2x + C$.

C. $2x^2 + x + C$.

D. $\frac{1}{2}x^2 + 2x + C$.

Lời giải

Chọn D.

$$f(x) + f'(x) = e^{-x}$$

$$\Leftrightarrow f(x)e^x + f'(x)e^x = 1$$

$$\Leftrightarrow (f(x)e^x)' = 1$$

$$\Rightarrow f(x)e^x = \int x dx$$

$$\Leftrightarrow f(x)e^x = x + C$$

$$\text{Vì } f(0) = 2 \text{ nên } C = 2.$$

$$\Rightarrow f(x)e^x = x + 2$$

$$\Rightarrow \int f(x)e^x dx = \int (x + 2) dx = \frac{1}{2}x^2 + 2x + C$$

$$\int f(x)e^x dx = \frac{1}{2}x^2 + 2x + C$$

Câu 27. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x) + 2x.f(x) = e^{-x^2}, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 0$.

Tính $f(1)$.

A. $f(1) = e^2$.

B. $f(1) = -\frac{1}{e}$.

C. $f(1) = \frac{1}{e^2}$.

D. $f(1) = \frac{1}{e}$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có

$$f'(x) + 2x.f(x) = e^{-x^2}$$

$$\Leftrightarrow e^{x^2} f'(x) + 2x.e^{x^2}.f(x) = 1$$

$$\Leftrightarrow (e^{x^2}.f(x))' = 1$$

$$\text{Suy ra } \int (e^{x^2}.f(x))' dx = \int dx$$

$$\Rightarrow e^{x^2} \cdot f(x) = x + C$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{x+C}{e^{x^2}}$$

$$\text{Vì } f(0) = 0 \Rightarrow C = 0$$

$$\text{Do đó } f(x) = \frac{x}{e^{x^2}}$$

$$\text{Vậy } f(1) = \frac{1}{e}$$

Câu 28. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}$ thỏa mãn điều kiện: $f(1) = -2 \ln 2$ và $x(x+1) \cdot f'(x) + f(x) = x^2 + x$. Biết $f(2) = a + b \cdot \ln 3$ ($a, b \in \mathbb{Q}$). Giá trị $2(a^2 + b^2)$ là

A. $\frac{27}{4}$

B. 9

C. $\frac{3}{4}$

D. $\frac{9}{2}$

Lời giải

Chọn B.

Chia cả hai vế của biểu thức $x(x+1) \cdot f'(x) + f(x) = x^2 + x$ cho $(x+1)^2$ ta có

$$\frac{x}{x+1} \cdot f'(x) + \frac{1}{(x+1)^2} f(x) = \frac{x}{x+1}$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{x}{x+1} \cdot f(x) \right]' = \frac{x}{x+1}$$

$$\text{Vậy } \frac{x}{x+1} \cdot f(x) = \int \left[\frac{x}{x+1} \cdot f(x) \right]' dx = \int \frac{x}{x+1} dx = \int \left(1 - \frac{1}{x+1} \right) dx = x - \ln|x+1| + C$$

$$\text{Do } f(1) = -2 \ln 2 \text{ nên ta có } \frac{1}{2} \cdot f(1) = 1 - \ln 2 + C \Leftrightarrow -\ln 2 = 1 - \ln 2 + C \Leftrightarrow C = -1$$

$$\text{Khi đó } f(x) = \frac{x+1}{x} (x - \ln|x+1| - 1)$$

$$\text{Vậy ta có } f(2) = \frac{3}{2} (2 - \ln 3 - 1) = \frac{3}{2} (1 - \ln 3) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \ln 3 \Rightarrow a = \frac{3}{2}, b = -\frac{3}{2}$$

$$2(a^2 + b^2) = 2 \left[\left(\frac{3}{2} \right)^2 + \left(-\frac{3}{2} \right)^2 \right] = 9$$

Suy ra

Câu 29. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}$ thỏa mãn $f(1) = 2 \ln 2 + 1$, $x(x+1)f'(x) + (x+2)f(x) = x(x+1)$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}$. Biết $f(2) = a + b \ln 3$, với a, b là hai số hữu tỉ.

Tính $T = a^2 - b$.

A. $T = \frac{-3}{16}$

B. $T = \frac{21}{16}$

C. $T = \frac{3}{2}$

D. $T = 0$

Lời giải

Chọn A.

Ta có $x(x+1)f'(x) + (x+2)f(x) = x(x+1)$

$$\Leftrightarrow f'(x) + \frac{x+2}{x(x+1)}f(x) = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{x+1}f'(x) + \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}f(x) = \frac{x^2}{x+1}$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{x^2}{x+1}f(x) \right]' = \frac{x^2}{x+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{x+1}f(x) = \int \frac{x^2}{x+1} dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{x+1}f(x) = \frac{x^2}{2} - x + \ln|x+1| + c$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \frac{x+1}{x^2} \left(\frac{x^2}{2} - x + \ln|x+1| + c \right).$$

Ta có $f(1) = 2 \ln 2 + 1 \Leftrightarrow c = 1$.

Từ đó
$$f(x) = \frac{x+1}{x^2} \left(\frac{x^2}{2} - x + \ln|x+1| + 1 \right),$$

$$\Rightarrow f(2) = \frac{3}{4} + \frac{3}{4} \ln 3. \quad \text{Nên} \quad \begin{cases} a = \frac{3}{4} \\ b = \frac{3}{4} \end{cases}$$

$$T = a^2 - b = -\frac{3}{16}.$$

Vậy

Câu 30. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $(0; +\infty)$ thỏa mãn $f'(x) + \frac{f(x)}{x} = 4x^2 + 3x$ và $f(1) = 2$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ $x = 2$ là

A. $y = -16x - 20$. B. $y = 16x - 20$. C. $y = 16x + 20$. D. $y = -16x + 20$.

Lời giải

Chọn B.

$$f'(x) + \frac{f(x)}{x} = 4x^2 + 3x \Leftrightarrow xf'(x) + f(x) = 4x^3 + 3x^2$$

Lấy nguyên hàm hai vế ta được: $xf(x) = \int (4x^3 + 3x^2) dx = x^4 + x^3 + C$

Với $x = 1$ ta có: $f(1) = 2 + C$

Theo bài ra $f(1)=2 \Leftrightarrow 2+C=2 \Leftrightarrow C=0$.

Vậy $xf'(x)=x^4+x^3 \Leftrightarrow f'(x)=x^3+x^2$.

Ta có: $f'(x)=3x^2+2x$; $f'(2)=16$; $f(2)=12$.

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm có hoành độ $x=2$ là:

$$y=16(x-2)+12 \Leftrightarrow y=16x-20$$

Câu 31. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $(0;+\infty)$ thỏa mãn $2xf'(x)+f(x)=3x^2\sqrt{x}$. Biết $f(1)=\frac{1}{2}$. Tính $f(4)$?

A. 24.

B. 14.

C. 4.

D. 16.

Lời giải

Chọn D.

Trên khoảng $(0;+\infty)$ ta có:

$$2xf'(x)+f(x)=3x^2\sqrt{x}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}f'(x)+\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{3}{2}x^2$$

$$\Rightarrow (\sqrt{x}.f(x))'=\frac{3}{2}x^2$$

$$\Rightarrow \int (\sqrt{x}.f(x))' dx = \int \frac{3}{2}x^2 dx$$

$$\Rightarrow \sqrt{x}.f(x)=\frac{1}{2}x^3+C \quad (*)$$

Mà $f(1)=\frac{1}{2}$ nên từ $(*)$ có: $\sqrt{1}.f(1)=\frac{1}{2}.1^3+C \Leftrightarrow \frac{1}{2}=\frac{1}{2}+C \Leftrightarrow C=0 \Rightarrow f(x)=\frac{x^2\sqrt{x}}{2}$.

Vậy $f(4)=\frac{4^2\sqrt{4}}{2}=16$.

Câu 32. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(1)=4$ và $f(x)=xf'(x)-2x^3-3x^2$ với mọi $x>0$. Giá trị của $f(2)$ bằng

A. 5.

B. 10.

C. 20.

D. 15.

Lời giải

Chọn C.

$$f(x) - xf'(x) = -2x^3 - 3x^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1.f(x) - x.f'(x)}{x^2} = \frac{-2x^3 - 3x^2}{x^2}$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{f(x)}{x} \right]' = 2x + 3$$

Suy ra, $\frac{f(x)}{x}$ là một nguyên hàm của hàm số $g(x) = 2x + 3$.

Ta có $\int (2x + 3)dx = x^2 + 3x + C, C \in \mathbb{R}$.

Do đó, $\frac{f(x)}{x} = x^2 + 3x + C_1, (1)$ với $C_1 \in \mathbb{R}$ nào đó.

Vì $f(1) = 4$ theo giả thiết, nên thay $x = 1$ vào hai vế của (1) ta thu được $C_1 = 0$, từ đó $f(x) = x^3 + 3x^2$.

Vậy $f(2) = 20$.

Câu 33. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $(0; +\infty)$ thỏa mãn $3x \cdot f(x) - x^2 \cdot f'(x) = 2f^2(x)$, với $f(x) \neq 0, \forall x \in (0; +\infty)$ và $f(1) = \frac{1}{3}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[1; 2]$. Tính $M + m$.

A. $\frac{9}{10}$.

B. $\frac{21}{10}$.

C. $\frac{5}{3}$.

D. $\frac{7}{3}$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có:

$$\begin{aligned} 3x \cdot f(x) - x^2 \cdot f'(x) &= 2f^2(x) \\ \Rightarrow 3x^2 \cdot f(x) - x^3 \cdot f'(x) &= 2x \cdot f^2(x) \\ \Rightarrow \frac{3x^2 \cdot f(x) - x^3 \cdot f'(x)}{f^2(x)} &= 2x \quad \text{vì } f(x) \neq 0, \forall x \in (0; +\infty) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x^3}{f(x)} \right)' = 2x \Rightarrow \frac{x^3}{f(x)} = \int 2x dx = x^2 + C$$

Mà $f(1) = \frac{1}{3} \Rightarrow C = 2 \Rightarrow f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 2}$.

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 2} \Rightarrow f'(x) = \frac{x^4 + 6x^2}{(x^2 + 2)^2} > 0, \forall x \in (0; +\infty)$$

Ta có:

Vậy, hàm số $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 2}$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Mà $[1; 2] \subset (0; +\infty)$ nên hàm số $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 2}$ đồng biến trên đoạn $[1; 2]$.

Suy ra, $M = f(2) = \frac{4}{3}; m = f(1) = \frac{1}{3} \Rightarrow M + m = \frac{5}{3}$.

Câu 34. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{x^2} (x^3 - 4x)$. Hàm số $F(x^2 + x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 6.

B. 5.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $F'(x) = f(x)$

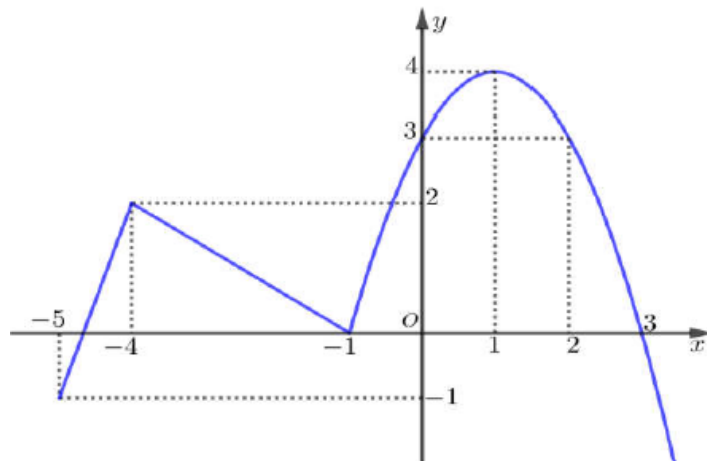
$$\Rightarrow F'(x^2 + x) = f(x^2 + x) \cdot (x^2 + x)' = (2x + 1)(x^2 + x)e^{(x^2 + x)^2} ((x^2 + x)^2 - 4)$$

$$=(2x+1)x(x+1)e^{(x^2+x)^2}(x^2+x-2)(x^2+x+2)$$

$$=(2x+1)x(x+1)(x+2)(x-1)(x^2+x+2)e^{(x^2+x)^2}=0 \Leftrightarrow x \in \left\{-2; -1; \frac{-1}{2}; 0; 1\right\}$$

$F'(x^2+x)=0$ có 5 nghiệm đơn nên $F(x^2+x)$ có 5 điểm cực trị.

Câu 35. Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ trên $[-5; 3]$ như hình vẽ (phần cong của đồ thị là một phần của parabol $y=ax^2+bx+c$).



Biết $f(0)=0$, giá trị của $2f(-5)+3f(2)$ bằng

A. 33.

B. $\frac{109}{3}$.

C. $\frac{35}{3}$.

D. 11.

Lời giải

Chọn C.

*)Parabol $y=ax^2+bx+c$ qua các điểm $(2;3), (1;4), (0;3), (-1;0), (3;0)$ nên xác định được

$$y=-x^2+2x+3, \forall x \geq -1 \text{ suy ra } f(x)=-\frac{x^3}{3}+x^2+3x+C_1$$

$$\text{Mà } f(0)=0 \Rightarrow C_1=0, f(x)=-\frac{x^3}{3}+x^2+3x$$

$$\text{Có } f(-1)=-\frac{5}{3}; f(2)=\frac{22}{3} \quad (1)$$

*Đồ thị $f'(x)$ trên đoạn $[-4; -1]$ qua các điểm $(-4;2), (-1;0)$ nên

$$f'(x)=\frac{-2}{3}(x+1) \Rightarrow f(x)=\frac{-2}{3}\left(\frac{x^2}{2}+x\right)+C_2$$

$$\text{Mà } f(-1)=-\frac{5}{3} \Leftrightarrow C_2=-\frac{5}{3}+\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)=-2 \Rightarrow f(x)=\frac{-2}{3}\left(\frac{x^2}{2}+x\right)-2, \text{ hay } f(-4)=-\frac{14}{3}.$$

* Đồ thị $f'(x)$ trên đoạn $[-5; -4]$ qua các điểm $(-4; 2), (-5; -1)$ nên

$$f'(x) = 3x + 14 \Rightarrow f(x) = \frac{3x^2}{2} + 14x + C_3$$

Mà $f(-4) = \frac{-14}{3} \Leftrightarrow \frac{3 \cdot (-4)^2}{2} + 14 \cdot (-4) + C_3 = \frac{-14}{3}$ suy ra $C_3 = \frac{82}{3}$.

Ta có $f(x) = \frac{3x^2}{2} + 14x + \frac{82}{3} \Rightarrow f(-5) = -\frac{31}{6}$ (2).

Từ (1) và (2) ta được $2f(-5) + 3f(2) = -\frac{31}{3} + 22 = \frac{35}{3}$.