|  |  |
| --- | --- |
| **TRƯỜNG THPT CHUYÊN HẠ LONG**  **QUẢNG NINH** | **ĐỀ ĐỀ XUẤT KỲ THI CHỌN HSG**  **KHU VỰC DH&ĐBBB LẦN XIV NĂM 2023**  **Môn Toán lớp: 10** |
|  | *( Thời gian: 180 phút không kể thời gian giao đề)* |

**Câu 1**. Tìm tất cả các hàm số  sao cho



**Câu 2.** Cho là các số thực dương, chứng minh rằng



**Câu 3.** Cho tam giác  cố định có  nội tiếp . Một điểm  nằm trên cung không chứa . Đường tròn  cắt đoạn  tại ; đường tròn  cắt đoạn  tại .  là trung điểm của đoạn .

(a) Chứng minh rằng khi  dịch chuyển trên cung  không chứa  thì  dịch chuyển trên một đường tròn cố định.

(b) cắt  tại ;  cắt  tại điểm thứ hai là . Đường tròn ngoại tiếp tam giác cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác  tại điểm  nằm trong tam giác . Chứng minh rằng dịch chuyển trên một đường thẳng cố định khi  dịch chuyển.

**Câu 4.** Với mỗi số nguyên dương  không chia hết cho 6; ta xét  là số dư của  khi chia cho . Tìm giá trị nhỏ nhất của .

**Câu 5.** Với  là số nguyên dương, tính giá trị biểu thức



\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\* Hết \*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*

**ĐÁP ÁN VÀ BIỂU ĐIỂM**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **Câu** | **Lời giải** | | **Điểm** | |
| Câu 1 | (1)  Giả sử tồn tại hàm  thỏa mãn đề bài.   * Nếu , thì dễ thấy  hay . (4) * Xét hàm  được xác định bởi: , khi đó từ (1) suy ra  nên   (2)   * Biến đổi (2): :     Từ đó theo (4) suy ra . Ta thấy phải tồn tại ít nhất một giá trị  để, nên  cộng tính, mà  nên , với ; kết hợp với định nghĩa của ta được , hay . Từ đó suy ra  đến đây chia các trường hợp của , ta được kết quả cuối cùng | | 4 điểm | |
| Câu 2 | Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwartz:    Ta chứng minh    Đây là bất đẳng thức Schur. Cuối cùng thì , ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi . | | 4 điểm | |
| Câu 3 | Lấy  đối xứng với  qua .  Khi đó: ; và suy ra  lần lượt là tâm ngoại tiếp tam giác .  Ta chứng minh  Ta có biến đổi:      Do đó nên . Mặt khác  là trung điểm của  nên .  Lại có :    Suy ra  là phân giác của . Tương tự là phân giác của .  Do đó nên dịch chuyển trên đường tròn đường kính  cố định. | | 2 điểm | |
|  | Gọi  là giao điểm khác  của  và  Khi đó  là điểm Miquel của tứ giác toàn phần  và do đó nên  Gọi  là trung điểm của .  (\*) Trước hết ta chứng minh cùng thuộc 1 đường tròn.  Thật vậy, ta có biến đổi góc:    Suy ra  cùng thuộc 1 đường tròn.  Bởi  là giao điểm khác  của  và  nên ta có :      Suy ra . Mặt khác  lần lượt là trung điểm của  Vậy nên  và suy ra  cùng thuộc 1 đường tròn.  Suy ra cùng thuộc 1 đường tròn.  (\*) Ta chứng minh  Thật vậy ta chú ý là giao điểm khác  của  và  nên ta có :    Suy ra  nằm trên đường thẳng  cố định. | | 2 điểm | |
| Câu4 | Đầu tiên ta chứng minh  Thật vậy, giả sử .  Khi đó ta có các trường hợp sau:  **Trường hợp 1:** . Khi đó . Điều này vô lý do  là số nguyên dương lẻ.  **Trường hợp 2:** .  Khi đó .  Gọi  là ước nguyên tố nhỏ nhất của .  Đặt . Khi đó    Tuy nhiên điều này vô lý do  không chia hết cho 6.  **Trường hợp 3:**  Khi đó . Bởi  là số nguyên dương lẻ nên  Xét là một ước nguyên tố bất kỳ của .  Đặt . Khi đó từ điều kiện , ta có  nhưng  không là ước của .  Do đó nên .  Theo định lý Fermat nhỏ ta có . Do đó nên :  là ước nguyên tố của .  Ta thu được  . Điều này vô lý.  Do đó nên  Ta cũng chú ý thêm  Vậy nên giá trị nhỏ nhất của  là bằng 3, đạt được khi . | 4 điểm | |
| Câu 5 | Đặt . Ta có . Viết lại các biểu thức:      Ta có:              Từ đó suy ra  với mọi . | 4 điểm | |

**Giáo viên ra đề:**

* **Nguyễn Việt Dũng (SĐT: 036 333 5566)**
* **Đặng Hồng Như (SĐT: 077 822 6171)**