

PHẦN D. TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y							

Khi đó:

- a) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-5; 2)$
- b) Hàm số có bốn điểm cực trị
- c) Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$
- d) Hàm số một cực đại

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
--------	--------	---------	---------

Dựa vào bảng biến thiên.

Hàm số có 2 cực trị, trong đó có 1 cực tiểu và 1 cực đại

Hàm số có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $y'(2) = 0$; y' đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua $x = 2$ nên hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$.

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y							

Khi đó:

- a) Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$
- b) Hàm số có ba điểm cực trị
- c) Hàm số có $y_{CD} = 3$ và $y_{CT} = 0$.
- d) Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số thuộc đường thẳng $2x + 2y - 4 = 0$

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
--------	--------	---------	---------

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -2); (2; +\infty)$

Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số là $(2;0)$

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số ta có $y_{CD} = 3$ và $y_{CT} = 0$.

Câu 3. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(1-x)^2(3-x)^3(x-2)^4$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Khi đó :

- a) Hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại $x=0$
- b) Hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại $x=2$
- c) Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(3; +\infty)$
- d) Hàm số có hai điểm cực trị

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
---------	--------	--------	---------

Ta có

$$f'(x) = x(1-x)^2(3-x)^3(x-2)^4 \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \\ x=2 \\ x=3 \end{cases}$$

Bảng xét dấu đạo hàm.

x	$-\infty$	0	1	2	3	$+\infty$		
$f'(x)$		-	0	+	0	+	0	-

Suy ra hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại $x=0$

Câu 4. Cho hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x$, khi đó:

- a) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;3)$
- b) Hàm số có 2 điểm cực trị
- c) Giá trị cực tiểu của hàm số bằng 3
- d) Điểm cực đại của đồ thị hàm số có tổng hoành độ và tung độ bằng 4

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
---------	---------	--------	--------

$$y' = 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=3 \end{cases}$$

Ta có:

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$			
y'	+	0	-	0	+		
y	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Khi đó: $x_{CD} = 1 \Rightarrow y_{CD} = 4 \Rightarrow x_{CD} + y_{CD} = 5$.

Câu 5. Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 1$. Khi đó :

- a) Hàm số có 3 điểm cực trị.
- b) Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-1; 0)$; $(1; +\infty)$.
- c) Đồ thị hàm số có 2 điểm cực đại.
- d) Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$; $(0; 1)$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
---------	---------	--------	---------

$$y' = 4x^3 - 4x \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \Rightarrow y=1 \\ x=1 \Rightarrow y=0 \\ x=-1 \Rightarrow y=0 \end{cases}$$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'		$-$	$+$	$-$	$+$
y	$+\infty$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$
		0	1	0	$+\infty$

Hàm số có 3 điểm cực trị, đồng biến trên khoảng $(-1; 0)$; $(1; +\infty)$ và nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$; $(0; 1)$.

Câu 6.

Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m+1)x - 1$ (m là tham số). Khi đó:

- a) Với $m = -1$ thì hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$
- b) Với $m = -1$ thì đồ thị hàm số có một điểm cực tiểu là $(0; 2)$
- c) Ta có $y' = x^2 - 2mx + m + 1$.

d) Để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m+1)x - 1$ đạt cực đại tại $x = -2$ thì $m = k$, khi đó phương trình $2^{x+k} = 4$ có nghiệm là $x = 3$

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
---------	--------	---------	---------

Ta có $y' = x^2 - 2mx + m + 1$.

Giả sử $x = -2$ là điểm cực đại của hàm số đã cho, khi đó $y'(-2) = 0 \Leftrightarrow (-2)^2 - 2m(-2) + m + 1 = 0 \Leftrightarrow 5m + 5 = 0 \Leftrightarrow m = -1$.

Với $m = -1$, ta có $y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 1$.

$$y' = x^2 + 2x; \quad y' = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 0 \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$				$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta kết luận $m = -1$ là giá trị cần tìm.

d) Khi đó $2^{x-1} = 4 \Leftrightarrow 2^{x-1} = 2^2 \Rightarrow x - 1 = 2 \Leftrightarrow x = 3$

Câu 7. Cho hàm số $y = (m-1)x^4 - (m^2-2)x^2 + 2$ (m là tham số). Khi đó:

a) Khi $m = 0$ hàm số có 3 điểm cực trị

b) Khi $m = 1$ đồ thị hàm số có điểm cực tiểu là $M(a; b)$, khi đó $a + b = 2$

c) Với $m = 2$ hàm số đạt cực đại tại $x = -1$.

d) Để hàm số đạt cực tiểu tại $x = -1$ thì $m = k$, khi đó $\log_k 8 = 2$

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
---------	---------	--------	--------

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Đạo hàm: $y' = 4(m-1)x^3 - 2(m^2-2)x$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -1 \Rightarrow y'(-1) = 0 \Leftrightarrow -4(m-1) + 2(m^2-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 2 \end{cases}$.

Với $m = 0$, hàm số trở thành $y = -x^4 + 2x^2 + 2$. Dễ thấy hàm số đạt cực đại tại $x = -1$.

Khi $m = 1$ đồ thị hàm số có điểm cực tiểu là $M(0; 2)$, khi đó $a + b = 2$

Với $m = 2$, hàm số trở thành $y = x^4 - 2x^2 + 2$. Dễ thấy hàm số đạt cực tiểu tại $x = -1$.

Vậy $m = 2$ thì hàm số $y = (m-1)x^4 - (m^2-2)x^2 + 2$ đạt cực tiểu tại $x = -1$ hay $\log_2 8 = 3$

Câu 8. Cho hàm số $y = (m-1)x^4 - 2(m-3)x^2 + 1$ (m là tham số). Khi đó:

a) Nếu $m = 1$ thì hàm số không có cực đại

b) Nếu $m = 2$ thì hàm số có 1 điểm cực trị

c) Nếu $m = 0$ thì điểm cực tiểu của đồ thị hàm số là $M(a; b)$ khi đó $ab = 1$

d) Để hàm số $y = (m-1)x^4 - 2(m-3)x^2 + 1$ không có cực đại thì $m \in [a; b]$ khi đó $a + b = 3$

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
---------	---------	--------	--------

Nếu $m = 0$ thì điểm cực tiểu của đồ thị hàm số là $M(0; 1)$ khi đó $ab = 0$

TH1: Nếu $m = 1 \Rightarrow y = 4x^2 + 1$. Suy ra hàm số không có cực đại.

TH2: Nếu $m > 1$.

Để hàm số không có cực đại thì $-2(m - 3) \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 3$. Suy ra $1 < m \leq 3$.

Vậy $1 \leq m \leq 3$.

Câu 9. Cho hàm số $y = mx^4 + (m - 1)x^2 + 1 - 2m$ (m là tham số). Khi đó:

a) Khi $m = 0$ hàm số có một điểm cực trị

b) Khi $m = 1$ thì giá trị cực tiểu của hàm số bằng 0

c) Khi $m = \frac{1}{2}$ thì điểm cực đại của đồ thị hàm số là $M(a; b)$ khi đó $2024^a + 2023^b = 2$

d) Để hàm số $y = mx^4 + (m - 1)x^2 + 1 - 2m$ có một cực trị thì $m \in (-\infty; a] \cup [b; +\infty)$ khi đó $a + b = 3$

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
----------------	---------------	----------------	---------------

Ta có: $y' = 4mx^3 + 2(m - 1)x$

● Trường hợp 1: Xét $m = 0 \Rightarrow y' = -2x$. Ta thấy phương trình $y' = 0$ đổi dấu một lần nên hàm số có một điểm cực trị. Suy ra $m = 0$ (thỏa YCBT) (1)

● Trường hợp 2: Xét $m = 1 \Rightarrow y' = 4x^3$. Ta thấy phương trình $y' = 0$ đổi dấu một lần nên hàm số có một điểm cực trị. Suy ra $m = 1$ (thỏa YCBT) (2)

● Trường hợp 3: Xét $m \neq 0$,

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = \frac{1 - m}{2m} \end{cases}$$

Để hàm số có một điểm cực trị thì $\frac{1 - m}{2m} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m \geq 1 \end{cases}$ (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra $\begin{cases} m \leq 0 \\ m \geq 1 \end{cases}$

✍ Ghi chú: Dùng công thức tính nhanh

Hàm số có một điểm cực trị khi và chỉ khi $m(m - 1) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 0 \\ m \geq 1 \end{cases}$.

c) Khi $m = \frac{1}{2}$ thì điểm cực đại của đồ thị hàm số là $M(0; 0)$ khi đó $2024^0 + 2023^0 = 1 + 1 = 2$

Câu 10. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x + 2)^4(x + 4)^3[x^2 + 2(m + 3)x + 6m + 18]$ (m là tham số). Khi đó:

a) Khi $m = -2$ thì hàm số $f(x)$ có một điểm cực trị

- b) Khi $m = -3$ thì hàm số $f(x)$ có hai điểm cực trị
 c) Khi $m = 5$ thì hàm số $f(x)$ có hai điểm cực trị
 d) Tổng tất cả các giá trị nguyên của m để hàm số $f(x)$ có đúng một điểm cực trị bằng 5

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
----------------	---------------	---------------	----------------

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \\ (x+2)^4 = 0 \\ (x+4)^3 = 0 \\ x^2 + 2(m+3)x + 6m + 18 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \\ x = -4 \\ x^2 + 2(m+3)x + 6m + 18 = 0 (*) \end{cases}$$

Ta có

Để hàm số $f(x)$ có đúng một điểm cực trị $\Leftrightarrow$ Phương trình $(*)$ vô nghiệm, có nghiệm kép hoặc có hai nghiệm phân biệt trong đó có nghiệm là -4 .

Trường hợp 1. Phương trình $(*)$ vô nghiệm
 $\Leftrightarrow \Delta = 4m^2 + 24m + 36 - 24m - 72 = 4m^2 - 36 < 0$
 $\Leftrightarrow -3 < m < 3 \Rightarrow m \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}$

Trường hợp 2. Phương trình $(*)$ có nghiệm kép
 $\Leftrightarrow \Delta = 4m^2 - 36 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 \\ m = -3 \end{cases}$

Trường hợp 3. Phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 . Trong đó $x_1 = -4$.

$x_1, x_2 \Leftrightarrow \Delta = 4m^2 - 36 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -3 \\ m > 3 \end{cases}$
 Phương trình có hai nghiệm phân biệt

Theo định lý Viète ta có $\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -4 + x_2 = -2m - 6 \\ P = x_1 \cdot x_2 = -4 \cdot x_2 = 6m + 18 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = -2m - 2 \\ x_2 = -\frac{3}{2}m - \frac{9}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -2m - 2 = -\frac{3}{2}m - \frac{9}{2} \Leftrightarrow m = 5$$

Vậy $m \in \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 5\}$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 11. Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 3mx^2 + 27x + 3m - 2$ (m là tham số). Khi đó:

- a) Khi $m = 1$ thì $f(2024) < f(2023)$
 b) Khi $m < -3$ thì hàm số có 2 điểm cực trị
 c) Khi $m > 3$ thì hàm số có 2 điểm cực trị

d) Gọi S là tập các giá trị dương của tham số m sao cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 27x + 3m - 2$ đạt cực trị tại x_1, x_2 thỏa mãn $|x_1 - x_2| \leq 5$. Biết $S = (a; b]$. Khi đó $2b - a = \frac{\sqrt{61}}{2} - 3$.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
---------------	----------------	----------------	---------------

+) Ta có $y' = 3x^2 - 6mx + 27$, $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + 9 = 0$ (1)

a) Khi $m = 1$ thì $y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$ suy ra $f(2024) > f(2023)$

+) Theo giả thiết hàm số đạt cực trị tại $x_1, x_2 \Leftrightarrow$ phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt
 $\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow m^2 - 9 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 3 \\ m < -3 \end{cases}$ (*)

+) Với điều kiện (*) thì phương trình (1) có 2 nghiệm x_1, x_2 , theo Vi-ét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1 x_2 = 9 \end{cases}$

+) Ta lại có $|x_1 - x_2| \leq 5 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 \leq 25 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 - 25 \leq 0$

$$\Leftrightarrow 4m^2 - 61 \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{61}}{2} \leq m \leq \frac{\sqrt{61}}{2} \quad (**)$$

+) Kết hợp (*), (**) và điều kiện m dương ta được: $3 < m \leq \frac{\sqrt{61}}{2}$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = \frac{\sqrt{61}}{2} \end{cases} \Rightarrow T = 2b - a = \frac{\sqrt{61}}{2} - 3$$

Câu 12. Cho hàm số $y = 2x^3 + 3(m - 1)x^2 + 6m(1 - 2m)x$ (m là tham số). Khi đó:

a) Khi $m = \frac{1}{3}$ thì hàm số có hai điểm cực trị

b) Với $m \neq \frac{a}{b}$ (phân số tối giản) thì hàm số có hai điểm cực trị, khi đó $a + b = 4$

c) Với $m = 2$ thì hàm số nghịch biến trên khoảng $(-3; 2)$

d) Biết đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho song song đường thẳng $y = -4x$, khi đó tổng tất cả các giá trị thực của tham số m bằng $\frac{2}{3}$

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
---------------	----------------	----------------	---------------

$$\text{Ta có } y' = 6x^2 + 6(m - 1)x + 6m(1 - 2m), y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ x = 1 - 2m \end{cases}$$

Để hàm số có hai cực trị thì $m \neq 1 - 2m \Leftrightarrow m \neq \frac{1}{3}$.

Hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là $A(m; -7m^3 + 3m^2)$, $B(1 - 2m; 20m^3 - 24m^2 + 9m - 1)$. Do đó $\overrightarrow{AB} = (1 - 3m; (3m - 1)^3)$. Do đó AB có vector pháp tuyến là $\vec{n} = ((3m - 1)^2; 1)$.

Do đó $AB: (3m - 1)^2 x + y - 2m^3 + 3m^2 - m = 0 \Leftrightarrow y = -(3m - 1)^2 x + 2m^3 - 3m^2 + m$.

Để đường thẳng AB song song với đường thẳng $y = -4x$ thì:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq \frac{1}{2} \\ m \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m = -\frac{1}{3}.$$

Câu 13. Cho hàm số $y = \frac{2}{3}x^3 - mx^2 - 2(3m^2 - 1)x + \frac{2}{3}$ (m là tham số). Khi đó:

a) Khi $m = 1$ thì hàm số có 2 điểm cực trị

b) Khi $m = 1$ thì hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 2)$

c) Hàm số có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow \begin{cases} m > 2\sqrt{13} \\ m < -2\sqrt{13} \end{cases}$

d) Biết $\frac{a}{b}$ (trong đó $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản và $a, b \in \mathbb{N}^*$) là giá trị của tham số m để hàm số có 2 điểm cực trị x_1, x_2 sao cho $x_1 x_2 + 2(x_1 + x_2) = 1$. Khi đó giá trị biểu thức $S = a^2 + b^2 = 11$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
---------	---------	--------	--------

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Đạo hàm $y' = 2x^2 - 2mx - 6m^2 + 2$.

Hàm số có hai điểm cực trị

$$\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow m^2 - 2(-6m^2 + 2) > 0 \Leftrightarrow 13m^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{2\sqrt{13}}{13} \\ m < -\frac{2\sqrt{13}}{13} \end{cases}$$

Theo định lý Viet thì $\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1 x_2 = -3m^2 + 1 \end{cases}$

$$\text{Ta có } x_1 x_2 + 2(x_1 + x_2) = 1 \Leftrightarrow -3m^2 + 1 + 2m = 1 \Leftrightarrow 3m^2 - 2m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Chỉ có giá trị $m = \frac{2}{3}$ thỏa điều kiện, khi đó $S = a^2 + b^2 = 2^2 + 3^2 = 13$.

Câu 14. Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 3mx + \frac{5}{3}$ (m là tham số). Khi đó:

a) Khi $m = 1$ hàm số có 2 điểm cực trị

b) Khi $m = 1$ hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$

c) Biết $m < a$ thì hàm số có cực trị, khi đó phương trình $\log_2(x+a) = 3$ có nghiệm là $x = 7$

d) Có 6 giá trị nguyên của tham số m sao cho ứng với mỗi m , hàm số có đúng một điểm cực trị thuộc khoảng $(-2; 5)$?

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
--------	---------	---------	--------

+) TXĐ: $D = \mathbb{R}$; $y' = -3x^2 + 6x - 3m$

+) Hàm số có cực trị $\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow 9 - 9m > 0 \Leftrightarrow m < 1$

$$\begin{cases} x_2 = \frac{-3 - \sqrt{9 - 9m}}{-3} = 1 + \sqrt{1 - m} \\ x_1 = \frac{-3 + \sqrt{9 - 9m}}{-3} = 1 - \sqrt{1 - m} \end{cases}$$

Khi đó hai điểm cực trị của hàm số là

+) Hàm số có đúng một điểm cực trị thuộc khoảng $(-2; 5)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2 < 1 + \sqrt{1 - m} < 5 \\ 1 - \sqrt{1 - m} \leq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < 1 - \sqrt{1 - m} < 5 \\ 1 + \sqrt{1 - m} \geq 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \leq \sqrt{1 - m} < 4 \\ \sqrt{1 - m} < 3 \\ \sqrt{1 - m} \geq 4 \end{cases} \quad (I) \Leftrightarrow 9 \leq 1 - m < 16$$

$$\Leftrightarrow -15 < m \leq -8$$

$$m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-14; -13; \dots; -8\}$$

Mà

Vậy có 7 giá trị nguyên của tham số m .

Câu 15. Cho hàm số $y = f(x) = -3x^4 + 8x^2 + bx$ (b là tham số). Khi đó:

a) Khi $b = 0$ thì hàm số đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{2}{3}\right)$

b) Khi $b=0$ thì $f(2024) < f(2023)$

c) Khi $b=0$ thì đồ thị hàm số có điểm cực đại là $\left(\frac{64}{9}; \frac{2}{3}\right)$

d) Có 13 giá trị nguyên của tham số b để hàm số $y = -3x^4 + 8x^2 + bx$ có đúng ba điểm cực trị

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
---------	---------	--------	--------

Ta có: $y' = -12x^3 + 16x + b$

Xét phương trình $-12x^3 + 16x = -b$. (1)

Để hàm số có ba điểm cực trị thì phương trình (1) phải có 3 nghiệm phân biệt.

Xét hàm số $g(x) = -12x^3 + 16x$

Bảng biến thiên của $g(x)$

x	$-\infty$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$+\infty$	
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$+\infty$	$-\frac{64}{9}$	$\frac{64}{9}$	$-\infty$	

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy, phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt khi $-\frac{64}{9} < -b < \frac{64}{9} \Leftrightarrow -\frac{64}{9} < b < \frac{64}{9}$.

Do $b \in \mathbb{Z} \Rightarrow b \in \{-7, -6, \dots, 6, 7\}$.

Vậy có 15 giá trị nguyên của tham số b thỏa yêu cầu đề bài.

Câu 16. Cho hàm số $y = f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m^2$ (m là tham số). Khi đó:

a) Hàm số có 3 điểm cực trị

b) Khi $m=0$ thì hàm số $y = -f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1; 2)$

c) Khi $m=0$ thì đồ thị hàm số $y = -f(x)$ có 2 điểm cực đại là $(-1; 5)$ và $(0; 0)$

d) Có 6 giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = |f(x)|$ có đúng 5 điểm cực trị

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Sai
---------	--------	--------	--------

Xét hàm số $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m^2$; $f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0; x_2 = -1; x_3 = 2$. Suy ra, hàm số $y = f(x)$ có 3 điểm cực trị.

$\Rightarrow$ Hàm số $y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m^2|$ có 5 điểm cực trị khi đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt $\Leftrightarrow 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m^2 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt.

Phương trình $3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m^2 = 0 \Leftrightarrow -3x^4 + 4x^3 + 12x^2 = m^2$ (1).

Xét hàm số $g(x) = -3x^4 + 4x^3 + 12x^2$; $g'(x) = -12x^3 + 12x^2 + 24x$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	0	2	$+\infty$			
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$								

Phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 < 0 \\ 5 < m^2 < 32 \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{5} < |m| < \sqrt{32}$.

Vậy $m \in \{3; 4; 5; -3; -4; -5\}$.

Câu 17. Cho hàm số $y = -x^3 + 3mx^2 - 3m - 1$ với m là một tham số thực. Khi đó:

a) Khi $m = 0$ hàm số không có điểm cực trị

b) Khi $m \neq 0$ hàm số có hai điểm cực trị

b) Khi $m = 1$ thì tọa độ trung điểm của hai điểm cực trị đồ thị hàm số là $I(1; 2)$

d) Để đồ thị hàm số đã cho có hai điểm cực trị đối xứng nhau qua đường thẳng $d: x + 8y - 74 = 0$ thì $m \in (1; 3]$

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
---------	---------	--------	---------

$$y' = -3x^2 + 6mx$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2m \end{cases}$$

Đồ thị có hai cực trị khi: $m \neq 0$

Khi đó hai điểm cực trị là: $A(0; -3m - 1), B(2m; 4m^3 - 3m - 1)$

Tọa độ trung điểm AB là: $I(m; 2m^3 - 3m - 1)$

A và B đối xứng qua d khi và chỉ khi: $\begin{cases} I \in d \\ AB \cdot u_d = 0 \end{cases}$

$$AB = (2m; 4m^3), u_d = (8; -1)$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{u_d} = 0 \Leftrightarrow 16m - 4m^3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 2 \\ m = -2 \end{cases}$$

+

Với $m = 0$ loại

Với $m = 2$, ta có $I(2; 9) \Rightarrow I \in d$

Với $m = -2$, ta có $I(-2; -11) \Rightarrow I \notin d$

Do đó $m = 2$ thỏa mãn yêu cầu.

Câu 18. Cho hàm số $y = -x^4 + 2mx^2 + 2$ có đồ thị (C_m) .

a) Khi $m = 0$ hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$

b) Khi $m = 0$ hàm số có một điểm cực trị

c) Để hàm số có ba cực trị thì $m > 0$

d) Để đồ thị hàm số có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông thì $m = a$, khi đó thể tích khối chóp có đáy $S = 4$ chiều cao $h = a$ bằng 4

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
--------	---------	---------	--------

Cách 1:

Ta có $y' = -4x^3 + 4mx = -4x(x^2 - m)$

Để hàm số có ba cực trị thì phương trình $y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow -4x(x^2 - m) = 0$ có ba nghiệm phân biệt $\Rightarrow m > 0$.

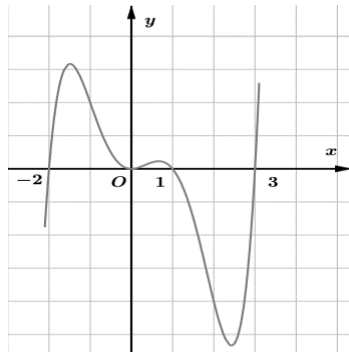
Gọi $A(0; 2)$, $B(-\sqrt{m}; m^2 + 2)$, $C(\sqrt{m}; m^2 + 2)$ là ba điểm cực trị của đồ thị hàm số.

Vì $\triangle ABC$ cân tại A nên $\triangle ABC$ chỉ có thể vuông tại $A \Leftrightarrow \overline{AB} \cdot \overline{AC} = 0$.

Với $\overline{AB} = (-\sqrt{m}; m^2)$, $\overline{AC} = (\sqrt{m}; m^2) \Rightarrow -m + m^4 = 0 \Leftrightarrow m(m^3 - 1) = 0 \Rightarrow m = 1$

Cách 2: Áp dụng công thức tính nhanh: Ba điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ tạo thành một tam giác vuông khi $8a + b^3 = 0 \Leftrightarrow 8m^3 - 8 = 0 \Leftrightarrow m = 1$.

Câu 19. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình bên.



Khi đó:

a) Hàm số $y = f(x)$ có 4 điểm cực trị

b) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -2)$

c) Hàm số $g(x) = f(x^2)$ đồng biến trên khoảng $(\sqrt{3}; +\infty)$

d) Hàm số $g(x) = f(x^2)$ có 5 điểm cực trị?

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
--------	--------	---------	---------

Từ đồ thị $y = f'(x)$ ta có

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 0 \\ x = 1 \\ x = 3 \end{cases};$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ -2 < x < 1 \end{cases}; \quad f'(x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -2 \\ 1 < x < 3 \end{cases}.$$

Ta có $g'(x) = 2xf'(x^2)$;

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(x^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = 1 \\ x^2 = 3 \\ x^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \\ x = \pm \sqrt{3} \end{cases}.$$

$$f'(x^2) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x^2 < 1 \\ x^2 > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 1 \\ x \neq 0 \\ x > \sqrt{3} \\ x < -\sqrt{3} \end{cases}.$$

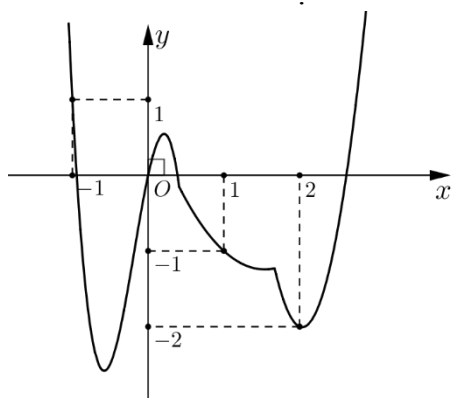
Ta có

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	0	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$			
$2x$		-	-	-	0	+	+			
$f'(x^2)$		+	0	-	0	+	0	-	0	+
$g'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	0	-
$g(x)$										

Từ bảng biến thiên ta có hàm số $g(x) = f(x^2)$ có 5 điểm cực trị.

Câu 20. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Đặt $g(x) = 2f(x) + x^2 + 1$.



Khi đó:

- a) Hàm số $y = g(x)$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.
- b) Hàm số $y = g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1; 0)$.
- c) Hàm số $y = g(x)$ đạt cực tiểu tại $x = 0$.
- d) Hàm số $y = g(x)$ đạt cực đại tại $x = 1$.

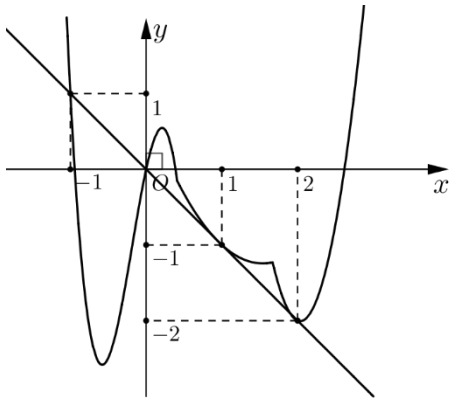
Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
---------	--------	---------	--------

$$g'(x) = 2f'(x) + 2x$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -x$$

Ta vẽ thêm đường thẳng $y = -x$ và đồ thị.



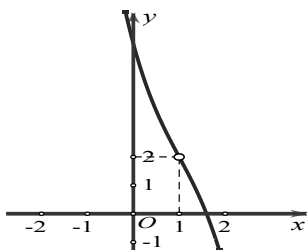
Khi đó phương trình $g'(x) = 0$ có các nghiệm $x = -1$, $x = 1$, $x = 2$.

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	0	1	2	$+\infty$
$g'(x)$		+	0	-	0	+
$g(x)$						

Dựa vào bảng biến thiên, hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$.

Câu 21. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và không có cực trị, đồ thị của hàm số $y = f(x)$ là đường cong của như hình vẽ dưới đây.



Xét hàm số $h(x) = \frac{1}{2} [f(x)]^2 - 2x \cdot f(x) + 2x^2$. Khi đó:

- a) Đồ thị của hàm số có điểm cực tiểu là $M(1;0)$.
- b) Hàm số đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.
- c) Đồ thị hàm số $y = h(x)$ có điểm cực đại là $N(1;2)$.
- d) Đồ thị hàm số $y = h(x)$ có điểm cực đại là $M(1;0)$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
---------	---------	--------	--------

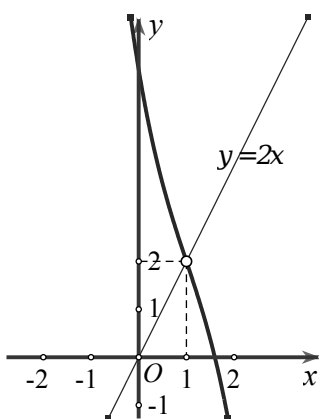
Theo bài ra ta có

$$\begin{aligned} h'(x) &= f'(x) \cdot f(x) - 2f(x) + 2x \cdot f'(x) + 4x = f'(x)(f(x) - 2x) - 2(f(x) - 2x) \\ &= (f'(x) - 2)(f(x) - 2x) \end{aligned}$$

Từ đồ thị ta thấy $y = f(x)$ nghịch biến nên $f'(x) < 0$ suy ra $f'(x) - 2 < 0$.

Suy ra $h'(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) - 2x = 0$.

Từ đồ thị dưới ta thấy $f(x) - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 1$.



Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$h(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

Suy ra đồ thị của hàm số $y = h(x)$ có điểm cực tiểu là $M(1; 0)$.

Câu 22. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm đến cấp hai trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của hàm số $y = f'(x)$ như hình sau:

x	$-\infty$	-2	0	4	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Và hàm số $g(x) = f(1-x) + \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x$. Khi đó:

- a) Hàm số $y = f(x)$ có 3 điểm cực trị
- b) $x = 0$ là điểm cực đại của $y = f(x)$
- c) $x = 0$ là điểm cực đại của hàm số $y = g(x)$
- d) Hàm số $y = g(x)$ đạt cực tiểu tại $x = 3$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
---------	---------	--------	---------

$$g'(x) = -f'(1-x) + x^2 - 4x + 3$$

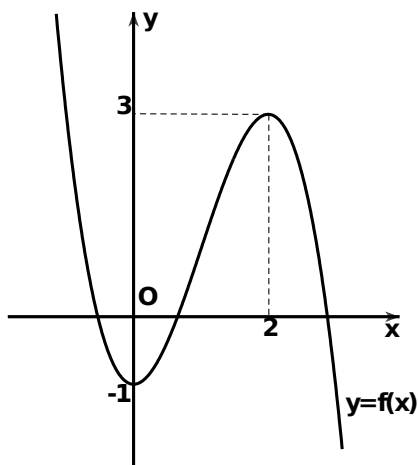
$$-f'(1-x) > 0 \Leftrightarrow f'(1-x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x < -2 \\ 0 < 1-x < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ -3 < x < 1 \end{cases}$$

Bảng xét dấu $g'(x)$:

x	$-\infty$	-3	1	3	$+\infty$
$-f'(1-x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$x^2 - 4x + 3$	$+$	$+$	0	$-$	$+$
$g'(x)$	không xác định	$+$	0	$-$	$+$

Từ bảng xét dấu $g'(x)$ ta suy ra hàm số đạt cực tiểu tại $x = 3$.

Câu 23. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$, có đồ thị $f(x)$ như hình vẽ.



Khi đó:

- a) Hàm số $y = f(x)$ có 2 điểm cực trị
- b) $y = 2$ là giá trị cực đại của hàm số $y = f(x)$
- c) Hàm số $g(x) = f(x^3 + x)$ đồng biến trên khoảng $(0; 3)$
- d) Hàm số $g(x) = f(x^3 + x)$ đạt cực tiểu tại điểm x_0 . Khi đó giá trị x_0 thuộc khoảng $(-1; 1)$

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
---------	--------	--------	---------

Ta có $g(x) = f(x^3 + x) \Rightarrow g'(x) = (3x^2 + 1)f'(x^3 + x)$

$$\Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow (3x^2 + 1)f'(x^3 + x) = 0 \Leftrightarrow f'(x^3 + x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + x = 0 \\ x^3 + x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$\text{Do đó } g'(x) > 0 \Leftrightarrow (3x^2 + 1)f'(x^3 + x) > 0 \Leftrightarrow f'(x^3 + x) > 0 \Leftrightarrow 0 < x^3 + x < 2 \Leftrightarrow 0 < x < 1$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
$g'(x)$	-	0	+	0	-
$g(x)$	$+\infty$				$-\infty$

Vậy hàm số $g(x) = f(x^3 + x)$ đạt cực tiểu tại điểm $x_0 = 0$. Suy ra $x_0 \in (-1; 1)$.