

DẠNG 1. TÍNH CHẤT CỦA BẤT ĐẲNG THỨC

Câu 1. Cho các bất đẳng thức $a > b$ và $c > d$. Bất đẳng thức nào sau đây đúng

- A. $a - c > b - d$. B. $a + c > b + d$. C. $ac > bd$. D. $\frac{a}{c} > \frac{b}{d}$.

Lời giải

Chọn B.

Theo tính chất bất đẳng thức, $\begin{cases} a > b \\ c > d \end{cases} \Leftrightarrow a + c > b + d$.

Câu 2. Tìm mệnh đề đúng.

- A. $a < b \Leftrightarrow ac < bc$. B. $a < b \Leftrightarrow ac > bc$.
C. $a < b \Leftrightarrow a + c < b + c$. D. $\begin{cases} a < b \\ c < d \end{cases} \Leftrightarrow ac < bd$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có: $a < b \Leftrightarrow a + c < b + c$

Câu 3. Trong các tính chất sau, tính chất nào sai?

- A. $\begin{cases} 0 < a < b \\ 0 < c < d \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{d} < \frac{b}{c}$. B. $\begin{cases} a < b \\ c < d \end{cases} \Rightarrow a - c < b - d$.
C. $\begin{cases} a < b \\ c < d \end{cases} \Rightarrow a + c < b + d$. D. $\begin{cases} 0 < a < b \\ 0 < c < d \end{cases} \Rightarrow ac < bd$.

Lời giải

Chọn B.

Không có tính chất hiệu hai vế bất đẳng thức.

Ví dụ $\begin{cases} 1 < 2 \\ -5 < 1 \end{cases} \Rightarrow 1 - (-5) < 2 - 1$, Sai.

Câu 4. Nếu $a + 2c > b + 2c$ thì bất đẳng thức nào sau đây đúng?

- A. $-3a > -3b$. B. $a^2 > b^2$. C. $2a > 2b$. D. $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

Lời giải

Chọn C.

$a + 2c > b + 2c \Leftrightarrow a > b \Leftrightarrow 2a > 2b$.

Câu 5. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $x + |x| \geq x \Leftrightarrow |x| \geq 0$. B. $x^2 \leq 3x \Leftrightarrow x \leq 3$. C. $\frac{x+1}{x^2} \geq 0$. D. $\frac{1}{x} < 0 \Leftrightarrow x \leq 1$.

Lời giải

Chọn A.

Câu 6. Suy luận nào sau đây đúng?

A. $\begin{cases} a > b > 0 \\ c > d > 0 \end{cases} \Rightarrow ac > bd$

B. $\begin{cases} a > b \\ c > d \end{cases} \Rightarrow a - c > b - d$

C. $\begin{cases} a > b \\ c > d \end{cases} \Rightarrow ac > bd$

D. $\begin{cases} a > b \\ c > d \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{c} > \frac{b}{d}$

Lời giải

Chọn A.

$$\begin{cases} a > b > 0 \\ c > d > 0 \end{cases} \Rightarrow ac > bd$$

đúng theo tính chất nhân hai bất đẳng thức dương cùng chiều.

Câu 7. Cho a là số thực dương. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $|x| \geq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$

B. $|x| \leq a \Leftrightarrow x \leq a$

C. $|x| > a \Leftrightarrow x > a$

D. $|x| \geq a \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -a \\ x \geq a \end{cases}$

Lời giải.

Chọn D.

Câu 8. Bất đẳng thức nào sau đây đúng với mọi số thực a ?

A. $6a > 3a$

B. $3a > 6a$

C. $6 - 3a > 3 - 6a$

D. $6 + a > 3 + a$

Lời giải

Chọn D.

Ta có $6 + a > 3 + a \Leftrightarrow 6 + a - 3 - a > 0 \Leftrightarrow 3 > 0$ với mọi số thực a nên Chọn **D.**

Câu 9. (Độ Cẩn Vĩnh Phúc-lần 1-2018-2019) Cho 4 số a, b, c, d khác 0 thỏa mãn $a < b$ và $c < d$. Kết quả nào sau đây đúng nhất?

A. $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$

B. $ac < bd$

C. $a - d < b - c$

D. $a - c < b - d$

Lời giải

Chọn C

Từ $\begin{cases} a < b \\ c < d \end{cases} \Rightarrow a + c < b + d \Rightarrow a - d < b - c$

Câu 10. Cho a, b là các số thực bất kì. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

A. $a > b \Leftrightarrow a - b > 0$

B. $a > b > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

C. $a > b \Leftrightarrow a^3 > b^3$

D. $a > b \Leftrightarrow a^2 > b^2$

Lời giải

Chọn D

Các mệnh đề A, B, C đúng.

Mệnh đề D sai. Ta có phản ví dụ: $-2 > -5$ nhưng $(-2)^2 = 4 < 25 = (-5)^2$.

Câu 11. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\begin{cases} a < b \\ c > d \end{cases} \Rightarrow a + c < b + d$

B. $\begin{cases} a < b \\ c > d \end{cases} \Rightarrow a + c > b + d$

C. $\begin{cases} a > b \\ c > d \end{cases} \Rightarrow ac > bd$

D. $\begin{cases} a > b \\ c > d \end{cases} \Rightarrow a + c > b + d$

Lời giải

Chọn D.

Khi cộng hai bất đẳng thức cùng chiều ta được một bất đẳng thức cùng chiều nên ta có

$$\begin{cases} a > b \\ c > d \end{cases} \Rightarrow a + c > b + d$$

Câu 12. Cho $a > b$ khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $2a < 2b$

B. $a > b - c, \forall c \in \mathbb{R}$

C. $-a < -b$

D. $ac > cb, \forall c \in \mathbb{R}$

Lời giải

Chọn C

Câu A sai ví dụ $2 > 0 \Rightarrow 2.2 > 2.0$

Câu B sai với $a = 3, b = 2, c = -2$

Câu C đúng vì $-a < -b \Leftrightarrow a > b$

Câu D sai khi $c \notin 0$.

Câu 13. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

A. $|a + b| \leq |a| + |b|$

B. $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a, (a > 0)$

C. $a > b \Leftrightarrow ac > bc, (\forall c \in \mathbb{R})$

D. $a + b \geq 2\sqrt{ab}, (a \geq 0, b \geq 0)$

Lời giải

Chọn C

Các mệnh đề A, B đều đúng theo tính chất của bất đẳng thức chứa dấu giá trị tuyệt đối.

Mệnh đề D đúng theo bất đẳng thức Cô- Si cho 2 số không âm a và b .

Mệnh đề C sai khi $c < 0$ (vì khi nhân 2 vế của một bất đẳng thức với một số âm thì ta được bất đẳng thức mới đổi chiều bất đẳng thức đã cho).

Câu 14. Chuyên Lê Hồng Phong-Nam Định Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. $\begin{cases} 0 < x < 1 \\ y < 1 \end{cases} \Rightarrow xy < 1$

B. $\begin{cases} x < 1 \\ y < 1 \end{cases} \Rightarrow xy < 1$

C. $\begin{cases} x < 1 \\ y < 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{y} < 1$

D. $\begin{cases} x < 1 \\ y < 1 \end{cases} \Rightarrow x - y < 1$

Lời giải

Chọn A.

Với $\begin{cases} 0 < x < 1 \\ y < 1 \end{cases} \Rightarrow xy < x < 1 \Rightarrow A \text{ đúng.}$

Chọn $\begin{cases} x = -3 < 1 \\ y = -1 < 1 \end{cases} \Rightarrow xy = \frac{x}{y} = 3 > 1 \Rightarrow B, C \text{ sai.}$

Chọn $\begin{cases} x = -1 < 1 \\ y = -3 < 1 \end{cases} \Rightarrow x - y = 2 > 1 \Rightarrow D \text{ sai.}$

Câu 15. Phát biểu nào sau đây là đúng?

- A. $(x+y)^2 \geq x^2 + y^2$. B. $x+y > 0$ thì $x > 0$ hoặc $y > 0$.
C. $x \geq y \Rightarrow x^2 \geq y^2$. D. $x+y > 0$ thì $x \cdot y > 0$.

Lời giải

Chọn B.

Nếu $x+y > 0$ thì ít nhất một trong hai số x, y phải dương.

Thật vậy nếu $\begin{cases} x \leq 0 \\ y \leq 0 \end{cases} \Rightarrow x+y \leq 0$ mâu thuẫn.

Câu 16. Cho $a > b > 0$. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

- A. $\frac{a}{a+1} < \frac{b}{b+1}$. B. $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$. C. $\frac{a^2-1}{a} > \frac{b^2-1}{b}$. D. $a^2 > b^2$.

Lời giải

Chọn A.

$$a > b > 0 \Leftrightarrow a+1 > b+1 > 1 \Leftrightarrow \frac{a}{a+1} > \frac{b}{b+1} .$$

DẠNG 2. BẤT ĐẲNG THỨC COSI và ỨNG DỤNG

Câu 17. Bất đẳng thức Côsi cho hai số a, b không âm có dạng nào trong các dạng được cho dưới đây?

- A. $\frac{a+b}{2} \geq 2\sqrt{a+b}$. B. $\frac{a-b}{2} \geq 2\sqrt{ab}$. C. $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$. D. $\frac{a+b}{2} \geq 2\sqrt{ab}$.

Lời giải

Chọn C

Câu 18. Cho ba số không âm a, b, c . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}$. B. $abc \geq 3\sqrt[3]{a+b+c}$. C. $a+b+c \geq 3\sqrt{abc}$. D. $a+b+c \geq 4\sqrt[3]{abc}$.

Lời giải

Chọn A

Áp dụng bất đẳng thức côsi ta có: $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc} \Leftrightarrow a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}$

Câu 19. Cho hai số thực a và b thỏa mãn $a+b=4$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Tích $a.b$ có giá trị nhỏ nhất là 2.

B. Tích $a.b$ không có giá trị lớn nhất.

C. Tích $a.b$ có giá trị lớn nhất là 4.

D. Tích $a.b$ có giá trị lớn nhất là 2.

Lời giải

Chọn C

Với mọi số thực a và b ta luôn có: $a.b \leq \frac{(a+b)^2}{4} \Leftrightarrow a.b \leq 4$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=2$.

Vậy tích $a.b$ lớn nhất bằng 4.

Câu 20. Mệnh đề nào sau đây sai?

A. $\begin{cases} a \geq x \\ b \geq y \end{cases} \Rightarrow a+b \geq x+y$

B. $a + \frac{1}{a} \geq 2 \quad \forall a > 0$

C. $a+b \geq 2\sqrt{ab} \quad \forall a, b \geq 0$

D. $a > b \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b} \quad \forall a, b \neq 0$

Lời giải

Chọn D

Theo tính chất của bất đẳng thức và bất đẳng thức Côsi thì A, B, C luôn đúng.

Ta có nếu $b < a < 0 \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ là sai.

Câu 21. Cho các mệnh đề sau

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2 \quad (I) \quad ; \quad \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3 \quad (II) \quad ; \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c} \quad (III)$$

Với mọi giá trị của a, b, c dương ta có

A. (I) đúng và (II), (III) sai.

B. (II) đúng và (I), (III) sai.

C. (III) đúng và (I), (II) sai.

D. (I), (II), (III) đúng.

Lời giải

Chọn D

Với mọi a, b, c dương ta luôn có:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2\sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a}} \Leftrightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2, \text{ dấu bằng xảy ra khi } a=b. \text{ Vậy (I) đúng.}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3\sqrt[3]{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a}} \Leftrightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3, \text{ dấu bằng xảy ra khi } a=b=c. \text{ Vậy (II) đúng.}$$

$(a+b+c) \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 3\sqrt[3]{abc} \cdot 3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}} = 9 \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c}$, dấu bằng xảy ra khi $a=b=c$. Vậy (III) đúng.

- Câu 22.** Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 + \frac{16}{x}, x > 0$ bằng
- A. 4. B. 24. C. 8. **D. 12.**
- Lời giải

Chọn D.

Ta có: $P = x^2 + \frac{16}{x} = x^2 + \frac{8}{x} + \frac{8}{x} \stackrel{\text{Cosi}}{\geq} 3\sqrt[3]{x^2 \cdot \frac{8}{x} \cdot \frac{8}{x}} = 12$. Vậy $P_{\min} = 12$.

- Câu 23.** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = 2x + \frac{3}{x}$ với $x > 0$ là
- A. $4\sqrt{3}$. B. $\sqrt{6}$. **C. $2\sqrt{6}$** D. $2\sqrt{3}$.
- Lời giải

Chọn C.

Theo bất đẳng thức Côsi ta có $2x + \frac{3}{x} \geq 2\sqrt{6}$ suy ra giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ bằng $2\sqrt{6}$.

- Câu 24.** Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = \sqrt{x-2} + \sqrt{4-x}$.
- A. 2. **B. $\sqrt{2}$** C. $2 - \sqrt{2}$ D. 0.
- Lời giải

Chọn B.

$A = \sqrt{x-2} + \sqrt{4-x}$ có tập xác định $D = [2; 4]$.

Ta có: $A^2 = 2 + 2\sqrt{(x-2)(4-x)} \geq 2 \Rightarrow A \geq \sqrt{2}$, dấu bằng xảy ra khi $x=2$ hoặc $x=4$.

- Câu 25.** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{4x^4 - 3x^2 + 9}{x^2}; x \neq 0$ là
- A. 9** B. -3. C. 12. D. 10.
- Lời giải

Chọn A.

Xét hàm số $y = \frac{4x^4 - 3x^2 + 9}{x^2} = 4x^2 + \frac{9}{x^2} - 3$.

Áp dụng bất đẳng thức Cô si, ta có $4x^2 + \frac{9}{x^2} \geq 2\sqrt{4x^2 \cdot \frac{9}{x^2}} = 12 \Rightarrow y \geq 9$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{4x^4 - 3x^2 + 9}{x^2}$ là 9 khi $4x^2 = \frac{9}{x^2} \Leftrightarrow x^2 = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{6}}{2}$.

Câu 26. Hàm số $y = \frac{4}{x} + \frac{9}{1-x}$ với $0 < x < 1$, đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = \frac{a}{b}$ (a, b nguyên dương, phân số $\frac{a}{b}$ tối giản). Khi đó $a+b$ bằng

- A. 4. B. 139. C. 141. **D. 7.**

Lời giải

Chọn D.

Theo BĐT CAUCHY – SCHAWARS: $\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \dots + \frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}{b_1 + b_2 + \dots + b_n}$, trong đó các số $b_i > 0$

Vì $0 < x < 1$ nên $x > 0$ và $1-x > 0$

Từ đó $y = \frac{4}{x} + \frac{9}{1-x} = \frac{2^2}{x} + \frac{3^2}{1-x} \geq \frac{(2+3)^2}{x+1-x} = 25$

Suy ra $y_{\min} = 25$ khi $x = \frac{2}{5} = \frac{a}{b} \Rightarrow a+b = 7$.

Câu 27. Cho a là số thực bất kì, $P = \frac{2a}{a^2 + 1}$. Bất đẳng thức nào sau đây đúng với mọi a .

- A. $P > -1$. B. $P > 1$. C. $P < -1$. **D. $P \leq 1$.**

Lời giải

Chọn D.

Với a là số thực bất kì, ta có: $(a-1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 - 2a + 1 \geq 0$

$\Leftrightarrow a^2 + 1 \geq 2a \Leftrightarrow 1 \geq \frac{2a}{a^2 + 1}$.

Hay $P \leq 1$.

Câu 28. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = \frac{x}{4} + \frac{1}{x-1}$ với $x > 1$.

- A. $\frac{7}{4}$. B. 1. C. $\frac{1}{4}$. **D. $\frac{5}{4}$.**

Lời giải

Chọn D.

Với $x > 1 \Leftrightarrow x-1 > 0$

$P = \frac{x}{4} + \frac{1}{x-1} = \left(\frac{x-1}{4} + \frac{1}{x-1} \right) + \frac{1}{4}$

Áp dụng Bất đẳng thức Cô – si cho hai số dương $\frac{x-1}{4}, \frac{1}{x-1}$ có

$$\frac{x-1}{4} + \frac{1}{x-1} \geq 2 \cdot \sqrt{\frac{x-1}{4} \cdot \frac{1}{x-1}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-1}{4} + \frac{1}{x-1} \geq 1$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $\frac{x-1}{4} = \frac{1}{x-1} \Leftrightarrow (x-1)^2 = 4 \Leftrightarrow x=3$ (vì $x > 1$)

Do đó $P \geq \frac{5}{4}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\frac{5}{4}$ (khi $x=3$).

Câu 29. (Độ Cần Vĩnh Phúc-lần 1-2018-2019) Giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y = \sqrt{x^3 + 2(1 + \sqrt{x^3 + 1})} + \sqrt{x^3 + 2(1 - \sqrt{x^3 + 1})}$$

là

A. 1.

B. $\frac{5}{4}$

C. 3.

D. 0.

Lời giải

Chọn B

Hàm số xác định khi: $x^3 + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$.

$$y = \sqrt{x^3 + 2(1 + \sqrt{x^3 + 1})} + \sqrt{x^3 + 2(1 - \sqrt{x^3 + 1})} = \sqrt{(\sqrt{x^3 + 1} + 1)^2} + \sqrt{(\sqrt{x^3 + 1} - 1)^2}$$

$$= |\sqrt{x^3 + 1} + 1| + |1 - \sqrt{x^3 + 1}| \geq 2 \quad \forall x \geq -1.$$

$$(\sqrt{x^3 + 1} + 1)(1 - \sqrt{x^3 + 1}) \geq 0$$

Dấu “=” xảy ra khi:

Do $\sqrt{x^3 + 1} + 1 > 0 \quad \forall x \geq -1$ nên $-\sqrt{x^3 + 1} + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^3 + 1} \leq 1 \Leftrightarrow x \leq 0$

Với $x=0$ ta có: $y(0)=2 \Rightarrow \min y=2$ tại $x=0$.

Câu 30. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x-1}$ với $x > 1$ là

A. 2.

B. $\frac{5}{2}$

C. $2\sqrt{2}$.

D. 3.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có: $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x-1} = \frac{x-1}{2} + \frac{2}{x-1} + \frac{1}{2} \geq 2\sqrt{\frac{x-1}{2} \cdot \frac{2}{x-1}} + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$.

$$\begin{cases} x \geq 1 \\ \frac{x-1}{2} = \frac{2}{x-1} \Leftrightarrow x=3. \end{cases}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

Vậy hàm số $f(x)$ có giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{5}{2}$.

Câu 31. Cho $x \geq 2$. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{x}$ bằng

- A.** $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ **B.** $\frac{2}{\sqrt{2}}$ **C.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **D.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có $f(x) \geq 0$ và $[f(x)]^2 = \frac{x-2}{x^2} = \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} = \frac{1}{8} - 2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{4}\right)^2 \leq \frac{1}{8} \Rightarrow 0 \leq f(x) \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số bằng $\frac{\sqrt{2}}{4}$ đạt được khi $x=4$.

Câu 32. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x-2017}{\sqrt{x-2018}}$ là

- A.** 2 **B.** $\frac{2017}{2018}$ **C.** $\frac{2018}{2017}$ **D.** 2019

Lời giải

Chọn A

Tập xác định của hàm số $D = (2018; +\infty)$

Ta có $y = \frac{x-2017}{\sqrt{x-2018}} = \frac{x-2018+1}{\sqrt{x-2018}} = \sqrt{x-2018} + \frac{1}{\sqrt{x-2018}}$

$\sqrt{x-2018} + \frac{1}{\sqrt{x-2018}} \geq 2$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\sqrt{x-2018} = \frac{1}{\sqrt{x-2018}} \Leftrightarrow x-2018=1 \Leftrightarrow x=2019$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng 2 khi và chỉ khi $x=2019$.

Câu 33. Tìm giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = \sqrt{6-2x} + \sqrt{3+2x}$.

- A.** M không tồn tại; $m=3$ **B.** $M=3$; $m=0$
C. $M=3\sqrt{2}$; $m=3$ **D.** $M=3\sqrt{2}$; $m=0$

Lời giải

Chọn C

Tập xác định của hàm số $D = \left[-\frac{3}{2}; 3\right]$.

Ta thấy $y > 0 \forall x \in \left[-\frac{3}{2}; 3\right]$.

Có $y^2 = 9 + 2\sqrt{(6-2x)(3+2x)} \geq 9 \forall x \in \left[-\frac{3}{2}; 3\right]$. Suy ra $y \geq 3; \forall x \in \left[-\frac{3}{2}; 3\right]$.

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} x = -\frac{3}{2} \\ x = 3 \end{cases}$. Vậy $\begin{matrix} \text{Min } y = 3 \\ x \in \left[-\frac{3}{2}; 3\right] \end{matrix}$.

Theo BĐT Cô Si ta có $2\sqrt{(6-2x)(3+2x)} \leq (6-2x) + (3+2x) = 9$ với $\forall x \in \left[-\frac{3}{2}; 3\right]$.

Suy ra $y^2 \leq 18, \forall x \in \left[-\frac{3}{2}; 3\right] \Rightarrow y \leq 3\sqrt{2}, \forall x \in \left[-\frac{3}{2}; 3\right]$.

Dấu bằng xảy ra khi $6-2x=3+2x \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}$. Vậy $\begin{matrix} \text{Max } y = 3\sqrt{2} \\ x \in \left[-\frac{3}{2}; 3\right] \end{matrix}$.

Câu 34. Chuyên Lê Hồng Phong-Nam Định Cho biểu thức $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x-1}}$, với $x > 1$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức là

A. 2.

B. 3.

C. 1.

D. 0.

Lời giải

Chọn A.

Với $x > 1$, ta có $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x-1}} = \sqrt{x-1} + \frac{1}{\sqrt{x-1}} \geq 2\sqrt{\sqrt{x-1} \cdot \frac{1}{\sqrt{x-1}}} = 2$.

Vậy $\text{Min } f(x) = 2$ khi $\sqrt{x-1} = \frac{1}{\sqrt{x-1}} \Leftrightarrow x = 2$.

Câu 35. Cho các số thực a, b thỏa mãn $ab > 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} - \frac{2a}{b} - \frac{2b}{a} - 1$$

A. 3.

B. -1.

C. 1.

D. -3.

Lời giải

Chọn D

Ta có

$$P = \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} - \frac{2a}{b} - \frac{2b}{a} - 1 = \left(\frac{a^2}{b^2} - \frac{2a}{b} + 1 \right) + \left(\frac{b^2}{a^2} - \frac{2b}{a} + 1 \right) - 3 = \left(\frac{a}{b} - 1 \right)^2 + \left(\frac{b}{a} - 1 \right)^2 - 3 \geq -3$$

$$\begin{cases} \frac{a}{b} = 1 \\ \frac{b}{a} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow a = b \neq 0$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

Vậy $\min P = -3$ khi $a = b \neq 0$.

Câu 36. (Chuyên Lam Sơn-KSCL-lần 2-2018-2019) Cho x, y là các số thực thay đổi nhưng luôn thỏa

mãn $(x + 2y)^3 + 8xy \geq 2$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 8x^4 + \frac{1}{2}(y^4 - 2xy)$ bằng

A. $-\frac{1}{16}$

B. -4

C. 0

D. -2

Lời giải

Chọn A

Ta có $P = 8x^4 + \frac{1}{2}y^4 - xy \geq 4(xy)^2 - xy = \left(2xy - \frac{1}{4} \right)^2 - \frac{1}{16} \geq -\frac{1}{16}$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: $\begin{cases} 16x^4 = y^4 \\ 8xy = 1 \\ (x + 2y)^3 + 8xy \geq 2 \end{cases} \quad (*)$

Để thấy $\begin{cases} x = \frac{1}{4} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$ là một nghiệm của $(*)$ nên $\min P = -\frac{1}{16}$.

Câu 37. Cho hai số thực x, y thỏa mãn: $x - 3\sqrt{x+1} = 3\sqrt{y+2} - y$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = x + y$.

A. $\max P = 9 - 3\sqrt{15}$ đạt được khi $\begin{cases} x = \frac{10 + 3\sqrt{15}}{2} \\ y = \frac{8 + 3\sqrt{15}}{2} \end{cases}$

B. $\max P = 9 + 3\sqrt{15}$ đạt được khi $\begin{cases} x = \frac{10 - 3\sqrt{15}}{2} \\ y = \frac{8 - 3\sqrt{15}}{2} \end{cases}$

C. $\max P = 9 + 3\sqrt{15}$ đạt được khi $\begin{cases} x = \frac{10 + 3\sqrt{15}}{2} \\ y = \frac{8 + 3\sqrt{15}}{2} \end{cases}$!

D. $\max P = 3 + \sqrt{15}$ đạt được khi $\begin{cases} x = \frac{10 + 3\sqrt{15}}{2} \\ y = \frac{8 + 3\sqrt{15}}{2} \end{cases}$.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $x \geq -1, y \geq -2$.

Ta có: $x - 3\sqrt{x+1} = 3\sqrt{y+2} - y$

$$\Leftrightarrow (x+y)^2 = 9(\sqrt{x+1} + \sqrt{y+2})^2 \leq 9 \cdot 2 \cdot (x+y+3) \quad (\text{theo bất đẳng thức Bunhia – Côpxki})$$

$$\Leftrightarrow (x+y)^2 - 18(x+y) - 54 \leq 0$$

$$\Rightarrow x+y \leq 9 + 3\sqrt{15} \Rightarrow P \leq 9 + 3\sqrt{15}.$$

$$\begin{cases} x+y = 9 + 3\sqrt{15} \\ \sqrt{x+1} = \sqrt{y+2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{10 + 3\sqrt{15}}{2} \\ y = \frac{8 + 3\sqrt{15}}{2} \end{cases} (t/m).$$

Dấu “=” xảy ra khi

Vậy $\max P = 9 + 3\sqrt{15}$ đạt được khi $\begin{cases} x = \frac{10 + 3\sqrt{15}}{2} \\ y = \frac{8 + 3\sqrt{15}}{2} \end{cases}$.

Câu 38. Cho hai số thực x, y thỏa mãn: $x - 3\sqrt{x+1} = 3\sqrt{y+2} - y$. Giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = x + y$ bằng

A. $9 + 3\sqrt{5}$.

B. $9 + 3\sqrt{3}$.

C. $9 - 3\sqrt{5}$.

D. $9 + 3\sqrt{15}$!

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $x \geq -1, y \geq -2$.

Ta có: $x - 3\sqrt{x+1} = 3\sqrt{y+2} - y$

$$\Rightarrow (x+y)^2 = 9(\sqrt{x+1} + \sqrt{y+2})^2 \leq 9 \cdot 2 \cdot (x+y+3) \quad (\text{theo bất đẳng thức Bunhia – Côpxki})$$

$$\Leftrightarrow (x+y)^2 - 18(x+y) - 54 \leq 0$$

$$\Rightarrow x+y \leq 9+3\sqrt{15} \Rightarrow P \leq 9+3\sqrt{15}.$$

$$\begin{cases} x+y=9+3\sqrt{15} \\ \sqrt{x+1}=\sqrt{y+2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{10+3\sqrt{15}}{2} \\ y=\frac{8+3\sqrt{15}}{2} \end{cases} (t/m).$$

Dấu “=” xảy ra khi

$$\text{Vậy } \max P = 9+3\sqrt{15} \text{ đạt được khi } \begin{cases} x=\frac{10+3\sqrt{15}}{2} \\ y=\frac{8+3\sqrt{15}}{2} \end{cases}.$$

Câu 39. (THUẬN THÀNH SỐ 2 LẦN 1_2018-2019) Cho hai số thực $x \neq 0, y \neq 0$ thay đổi và thỏa mãn

điều kiện $(x+y)xy = x^2 + y^2 - xy$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $M = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3}$ là

A. 9.

B. 16.

C. 18.

D. 1.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } xy(x+y) = x^2 + y^2 - xy \Rightarrow \frac{xy(x+y)}{x^2y^2} = \frac{x^2 + y^2 - xy}{x^2y^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} - \frac{1}{xy} = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right)^2 - \frac{3}{xy}.$$

$$\text{Đặt } a = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}, b = \frac{1}{xy} \quad (a^2 \geq 4b) \Rightarrow a = a^2 - 3b \Rightarrow b = \frac{a^2 - a}{3}.$$

$$\text{Biến đổi } M = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right)^3 - \frac{3}{xy} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) = a^3 - 3ab = a^3 - 3a \cdot \frac{a^2 - a}{3} = a^2.$$

$$\text{Ta có } \frac{a^2 - a}{3} = b \leq \frac{a^2}{4} \Rightarrow 3a^2 \geq 4a^2 - 4a \Leftrightarrow a^2 - 4a \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq a \leq 4 \Rightarrow M = a^2 \leq 16.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2} \Rightarrow M_{\max} = 16.$$

Câu 40. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x(3 - xy - xz) + y + 6z \leq 5xz(y + z)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 3x + y + 6z$ là

A. $3\sqrt{6}$

B. 9

C. $\sqrt{30}$

D. $6\sqrt{2}$

Lời giải

Chọn A

Ta có: $x(3 - xy - xz) + y + 6z \leq 5xz(y + z)$

$$\Leftrightarrow 3x + y + 6z \leq x^2y + x^2z + 5xz(y + z)$$

$$\Leftrightarrow 3x + y + 6z \leq x(y + z)(x + 5z)$$

$$\Rightarrow 2P \leq 2x(y + z)(x + 5z) \leq \left(\frac{3x + y + 5z}{3} \right)^3$$

$$\Leftrightarrow 2P \leq \frac{P^3}{27} \Leftrightarrow P^2 \geq 54 \Leftrightarrow P \geq 3\sqrt{6}$$

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} 2x = y + z = x + 5z \\ 3x + y + 6z = 3\sqrt{6} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{6}}{2}, y = \frac{9\sqrt{6}}{10}, z = \frac{\sqrt{6}}{10}$

Câu 41. Cho các số thực $a, b, c > 0$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = \frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}} + \frac{\sqrt[3]{abc}}{a+b+c}$ là

A. 2

B. $\frac{10}{3}$

C. $\frac{5}{2}$

D. 3

Lời giải

Chọn B

Áp dụng BĐT Cauchy ta được:

$$\begin{aligned} T &= \frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}} + \frac{\sqrt[3]{abc}}{a+b+c} = \left(\frac{1}{9} \cdot \frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}} + \frac{\sqrt[3]{abc}}{a+b+c} \right) + \frac{8}{9} \cdot \frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}} \\ &\geq 2\sqrt{\frac{1}{9} \cdot \frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}} \cdot \frac{\sqrt[3]{abc}}{a+b+c}} + \frac{8}{9} \cdot 3 = \frac{2}{3} + \frac{8}{3} = \frac{10}{3} \end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$.

Câu 42. Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{a} + \frac{4}{b} + \frac{9}{c} ?$$

A. 63.

B. 36.

C. 35.

D. 34.

Lời giải

Chọn B

Áp dụng bất đẳng thức Cô si cho hai số thực dương ta có:

$$\frac{1}{a} + 36a \geq 12 \quad (1)$$

$$\frac{4}{b} + 36b \geq 24 \quad (2)$$

$$\frac{9}{c} + 36c \geq 36 \quad (3)$$

Cộng các vế tương ứng của (1), (2), (3) ta có $P + 36(a+b+c) \geq 72 \Rightarrow P \geq 36$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\frac{1}{a} = 36a; \frac{4}{b} = 36b; \frac{9}{c} = 36c$ và $a+b+c=1$ hay $a = \frac{1}{6}; b = \frac{1}{3}; c = \frac{1}{2}$.

Câu 43. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $a > 1, b > \frac{1}{2}, c > \frac{1}{3}$ và $\frac{1}{a} + \frac{2}{2b+1} + \frac{3}{3c+2} \geq 2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = (a-1)(2b-1)(3c-1)$

A. $\frac{3}{4}$

B. $\frac{4}{3}$

C. $\frac{3}{2}$

D. $\frac{2}{3}$

Lời giải

Chọn A

Đặt $x = a - 1, y = 2b - 1, z = 3c - 1$. Khi đó bài toán trở thành “ Cho $\frac{1}{x+1} + \frac{2}{y+2} + \frac{3}{z+3} \geq 2$, với x, y, z dương. Tìm giá trị lớn nhất của $P = xyz$ ”.

Ta có

$$\frac{1}{x+1} \geq 1 - \frac{2}{y+2} + 1 - \frac{3}{z+3} = \frac{y}{y+2} + \frac{z}{z+3} \geq 2\sqrt{\frac{yz}{(y+2)(z+3)}} \quad (1)$$

Tương tự

$$\frac{2}{y+2} \geq 2\sqrt{\frac{xz}{(x+1)(z+3)}} \quad (2)$$

$$\frac{3}{z+3} \geq 2\sqrt{\frac{xy}{(x+1)(y+2)}} \quad (3)$$

Nhân cả hai vế của (1), (2), (3) ta được:

$$\frac{6}{(x+1)(y+2)(z+3)} \geq \frac{8xyz}{(x+1)(y+2)(z+3)} \Leftrightarrow xyz \leq \frac{3}{4}$$

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức $P = (a-1)(2b-1)(3c-1)$ là $\frac{3}{4}$.

Câu 44. Cho a, b, c, d là các số thực thay đổi thỏa mãn $a^2 + b^2 = 2$ và $c^2 + d^2 + 25 = 6c + 8d$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = 3c + 4d - (ac + bd)$.

- A. $25 + 4\sqrt{2}$. B. $25 + 5\sqrt{2}$ C. $25 - 5\sqrt{2}$ D. $25 + \sqrt{10}$.

Lời giải

Chọn B

$$c^2 + d^2 + 25 = 6c + 8d \Leftrightarrow (c - 3)^2 + (d - 4)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} c = 3 \\ d = 4 \end{cases}$$

Theo đề ra ta có:

$$P = 25 - (3a + 4b)$$

Do vậy

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopski ta có:

$$|3a + 4b| \leq \sqrt{(3^2 + 4^2)(a^2 + b^2)} \stackrel{a^2 + b^2 = 2}{=} 5\sqrt{2} \rightarrow -5\sqrt{2} \leq 3a + 4b \leq 5\sqrt{2}$$

$$5\sqrt{2} \geq -(3a + 4b) \geq -5\sqrt{2} \rightarrow 25 + 5\sqrt{2} \geq 25 - (3a + 4b) \geq 25 - 5\sqrt{2}$$

Hay

$$\rightarrow 25 + 5\sqrt{2} \geq P \geq 25 - 5\sqrt{2} \quad \max P = 25 + 5\sqrt{2}$$

Vậy . Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 2 \\ \frac{3}{a} = \frac{4}{b} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 2 \\ b = \frac{4}{3}a < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{4}{3}a < 0 \\ a^2 + \frac{16}{9}a^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{3\sqrt{2}}{5} \\ b = -\frac{4\sqrt{2}}{5} \end{cases}$$

Câu 45. Cho $0 < x < y \leq z \leq 1$ và $3x + 2y + z \leq 4$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $S = 3x^2 + 2y^2 + z^2$.

- A. 3. B. 4. C. $\frac{8}{3}$ D. $\frac{10}{3}$.

Lời giải

Ta có

$$S = 3x^2 + 2y^2 + z^2 = 2\left(y - x + \frac{2}{3}\right)(y - 1) + \left(z - x + \frac{2}{3}\right)(z - 1) + \left(x + \frac{1}{3}\right)(3x + 2y + z - 4) + \frac{10}{3} \leq \frac{10}{3}$$

Câu 46. Cho ba số thực a, b, c thỏa mãn điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Biểu thức

$$P = \frac{1}{\sqrt{1+8a^3}} + \frac{1}{\sqrt{1+8b^3}} + \frac{1}{\sqrt{1+8c^3}}$$
 có giá trị nhỏ nhất bằng

- A. 1 B. $\frac{3}{2}$ C. 3 D. $\frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Chúng minh được: với $a, b, c > 0$ ta có: $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} \geq \frac{(x+y+z)^2}{a+b+c}$ (1).

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$$

Dấu “=” xảy ra khi

Áp dụng bất đẳng thức Cô – Si cho hai số không âm ta có:

$$\sqrt{1+8a^3} = \sqrt{(1+2a)(1-2a+4a^2)} \leq \frac{(1+2a)+(1-2a+4a^2)}{2} = 1+2a^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1+8a^3}} \geq \frac{1}{1+2a^2}$$

Tương tự ta được:

$$P = \frac{1}{\sqrt{1+8a^3}} + \frac{1}{\sqrt{1+8b^3}} + \frac{1}{\sqrt{1+8c^3}} \geq \frac{1}{1+2a^2} + \frac{1}{1+2b^2} + \frac{1}{1+2c^2} \geq \frac{9}{3+2(a^2+b^2+c^2)} \quad (\text{theo (1)}).$$

$$\Rightarrow P \geq 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1+2a^2 = 1-2a+4a^2 \\ 1+2b^2 = 1-2b+4b^2 \\ 1+2c^2 = 1-2c+4c^2 \\ \frac{1}{1+2a^2} = \frac{1}{1+2b^2} = \frac{1}{1+2c^2} \\ a^2+b^2+c^2=3; a, b, c > 0 \Leftrightarrow a=b=c=1 \end{cases}$$

Dấu “=” xảy ra

$$\min P = 1 \Leftrightarrow a=b=c=1.$$

Vậy

Câu 47. Cho 4 số nguyên không âm a, b, c, d thỏa $a^2 + 2b^2 + 3c^2 + 4d^2 = 36$ và $2a^2 + b^2 - 2d^2 = 6$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $Q = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$.

A. $\min Q = 30$

B. $\min Q = 32$

C. $\min Q = 42$

D. $\min Q = 14$

Lời giải

Chọn D

Từ $2a^2 + b^2 - 2d^2 = 6$ (*) suy ra b là số chẵn. Mặt khác do $a^2 + 2b^2 + 3c^2 + 4d^2 = 36$ (**), ta được $2b^2 \leq 36$. Do đó $b \in \{0, 2, 4\}$.

Xét $b=4$. Từ (*) ta có $d^2 - a^2 = 5 \Rightarrow d^2 \geq 5$ và từ (**) ta có $d^2 \leq 9$. Do đó $d=3 \Rightarrow a=b=c=0$ (loại vì không thỏa (*)).

Xét $b=2$. Từ (*) ta có $a^2 - d^2 = 1 \Rightarrow (a-d)(a+d) = 1 \Rightarrow \begin{cases} a-d=1 \\ a+d=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ d=0 \end{cases}$. Thay vào (*) ta

giải được $\begin{cases} a=1 \\ b=2 \\ c=3 \\ d=0 \end{cases}$. Vậy $Q = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 0^2 = 14$.

Xét $b=0$. Từ (*) và $0 \leq a-d \leq a+d$, ta có:

$$a^2 - d^2 = 3 \Rightarrow (a-d)(a+d) = 3 \Rightarrow \begin{cases} a-d=1 \\ a+d=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ d=1 \end{cases}$$

Thay vào (*) ta giải được $\begin{cases} a=2 \\ b=0 \\ c^2 = \frac{28}{3} \\ d=1 \end{cases}$ (mâu thuẫn vì $c \in \mathbb{N}$).

Kết luận $Q=14$. Chọn **D**.

Câu 48. (THI HK1 LỚP 11 THPT VIỆT TRÌ 2018 - 2019) Cho ba số thực dương x, y, z . Biểu thức

$$P = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2) + \frac{x}{yz} + \frac{y}{zx} + \frac{z}{xy}$$
 có giá trị nhỏ nhất bằng:

- A. $\frac{5}{2}$. B. 9. C. $\frac{11}{2}$. **D. $\frac{9}{2}$.**

Lời giải

Chọn D

Vì x, y, z là các số thực dương suy ra $\frac{x}{yz}, \frac{y}{zx}, \frac{z}{xy}$ là các số dương. Áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta có:

$$\frac{x}{yz} + \frac{y}{xz} \geq 2 \cdot \sqrt{\frac{x}{yz} \cdot \frac{y}{xz}} = \frac{2}{z} \quad (1)$$

$$\frac{x}{yz} + \frac{z}{xy} \geq 2 \cdot \sqrt{\frac{x}{yz} \cdot \frac{z}{xy}} = \frac{2}{y} \quad (2)$$

$$\frac{z}{xy} + \frac{y}{zx} \geq 2 \cdot \sqrt{\frac{z}{xy} \cdot \frac{y}{zx}} = \frac{2}{x} \quad (3)$$

Cộng các vế của (1), (2) và (3) ta được $\frac{x}{yz} + \frac{y}{zx} + \frac{z}{xy} \geq \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$

Áp dụng BĐT Cô – si ta có:

$$\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2x} + \frac{1}{2x} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{2x} \cdot \frac{1}{2x}} = \frac{3}{2} \quad (4)$$

$$\frac{y^2}{2} + \frac{1}{2y} + \frac{1}{2y} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{y^2}{2} \cdot \frac{1}{2y} \cdot \frac{1}{2y}} = \frac{3}{2} \quad (5)$$

$$\frac{z^2}{2} + \frac{1}{2z} + \frac{1}{2z} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{z^2}{2} \cdot \frac{1}{2z} \cdot \frac{1}{2z}} = \frac{3}{2} \quad (6)$$

Cộng các vế của (4), (5) và (6) ta được $\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2) + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{9}{2}$

Suy ra $P \geq \frac{9}{2}$. Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z$

Câu 49. (TH&TT LẦN 1 – THÁNG 12) Cho $a, b, c > 0$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$E = \left(1 + \frac{a}{2b}\right) \left(1 + \frac{b}{2c}\right) \left(1 + \frac{c}{2a}\right)$ thuộc khoảng nào dưới đây?

- A. $(1; 2\sqrt{2})$ B. $\left(3; \frac{7}{2}\right)$ C. $(1; 3)$ D. $\left(\frac{17}{5}; \frac{7}{2}\right)$

Lời giải

Chọn B

$$\begin{aligned} E &= \left(1 + \frac{a}{2b}\right) \left(1 + \frac{b}{2c}\right) \left(1 + \frac{c}{2a}\right) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{a}{2b}\right) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{b}{2c}\right) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{c}{2a}\right) \\ &\geq 3 \sqrt[3]{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2b}} \cdot 3 \sqrt[3]{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{2c}} \cdot 3 \sqrt[3]{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{c}{2a}} = \frac{27}{8} \end{aligned}$$

Dấu = xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức E bằng $\frac{27}{8}$.

Câu 50. Cho x, y, z là các số dương thỏa mãn: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 4$. Giá trị lớn nhất của biểu thức

$F = \frac{1}{2x + y + z} + \frac{1}{x + 2y + z} + \frac{1}{x + y + 2z}$ là:

- A. 2. B. 1. C. 4. D. 3.

Lời giải

Chọn B

Áp dụng hệ quả của BĐT Côsi ta có:

$$(2x+y+z)\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=(x+x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\geq 16\Leftrightarrow \frac{1}{2x+y+z}\leq \frac{1}{16}\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$$

(1).

$$\text{Tương tự ta có: } \frac{1}{x+2y+z}\leq \frac{1}{16}\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{1}{z}\right) \quad (2); \quad \frac{1}{x+y+2z}\leq \frac{1}{16}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{2}{z}\right) \quad (3)$$

Cộng các BĐT (1),(2),(3) về theo về ta có:

$$F=\frac{1}{2x+y+z}+\frac{1}{x+2y+z}+\frac{1}{x+y+2z}\leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=1.$$

Vậy $F_{\max}=1$ đạt được khi $x=y=z=\frac{3}{4}$.

Câu 51. Cho các số thực dương a, b, c, m, n, p thỏa mãn các điều kiện $2 \cdot \sqrt[2017]{m} + 2 \cdot \sqrt[2017]{n} + 3 \cdot \sqrt[2017]{p} \leq 7$ và

$4a+4b+3c \geq 42$. Đặt $S = \frac{2(2a)^{2018}}{m} + \frac{2(2b)^{2018}}{n} + \frac{3c^{2018}}{p}$ thì khẳng định đúng là:

A. $42 < S \leq 7 \cdot 6^{2018}$. B. $S > 6^{2018}$. C. $7 \leq S \leq 7 \cdot 6^{2018}$. D. $4 \leq S \leq 42$.

Lời giải

Chọn B

+ Theo bài ra 6 số $a, b, c, m, n, p > 0$, áp dụng BĐT Cauchy cho 2018 số dương, gồm 2017 số

$6^{2018} \cdot \sqrt[2017]{m}$ và 1 số là $\frac{(2a)^{2018}}{m}$ ta được:

$$2017 \cdot 6^{2018} \cdot \sqrt[2017]{m} + \frac{(2a)^{2018}}{m} \geq 2018 \cdot \sqrt[2018]{(6^{2018} \cdot \sqrt[2017]{m})^{2017} \cdot \frac{(2a)^{2018}}{m}} = 2018 \cdot 6^{2017} \cdot 2a$$

$$\Rightarrow 2 \cdot 2017 \cdot 6^{2018} \cdot \sqrt[2017]{m} + \frac{2 \cdot (2a)^{2018}}{m} \geq 2018 \cdot 6^{2017} \cdot 4a$$

$$\Rightarrow \frac{2 \cdot (2a)^{2018}}{m} \geq 2018 \cdot 6^{2017} \cdot 4a - 2017 \cdot 6^{2018} \cdot 2 \cdot \sqrt[2017]{m} \quad (1)$$

+ Chứng minh tương tự ta có:

$$\frac{2 \cdot (2b)^{2018}}{n} \geq 2018 \cdot 6^{2017} \cdot 4b - 2017 \cdot 6^{2018} \cdot 2 \cdot \sqrt[2017]{n} \quad (2)$$

$$\frac{3 \cdot c^{2018}}{p} \geq 2018 \cdot 6^{2017} \cdot 3c - 2017 \cdot 6^{2018} \cdot 3 \cdot \sqrt[2017]{p} \quad (3)$$

Cộng 3 BĐT (1), (2), (3) theo về ta có:

$$S \geq 2018 \cdot 6^{2017} (4a+4b+3c) - 2017 \cdot 6^{2018} (2 \cdot \sqrt[2017]{m} + 2 \cdot \sqrt[2017]{n} + 3 \cdot \sqrt[2017]{p})$$

Theo bài ra: $2 \cdot \sqrt[2017]{m} + 2 \cdot \sqrt[2017]{n} + 3 \cdot \sqrt[2017]{p} \leq 7$ và $4a + 4b + 3c \geq 42$ nên ta có:

$$S \geq 2018 \cdot 6^{2017} \cdot 42 - 2017 \cdot 6^{2018} \cdot 7 = 7 \cdot 6^{2018} > 6^{2018} \Rightarrow \text{Chọn B.}$$

Câu 52. Với $a, b, c > 0$. Biểu thức $P = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $0 < P \leq \frac{3}{2}$. B. $\frac{3}{2} < P$. C. $\frac{4}{3} \leq P$. D. $\frac{3}{2} \leq P$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có:
$$P+3 = \left(\frac{a}{b+c} + 1 \right) + \left(\frac{b}{c+a} + 1 \right) + \left(\frac{c}{a+b} + 1 \right) = (a+b+c) \left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \right).$$

Áp dụng bất đẳng thức: $\forall x, y, z > 0 \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{9}{x+y+z}$; đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z$.

Ta được $\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \geq \frac{9}{2(a+b+c)}$, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Do đó $P+3 \geq \frac{9}{2} \Rightarrow P \geq \frac{3}{2}$; đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$.

Câu 53. Cho các số dương x, y, z thỏa mãn $xyz = 1$. Khi đó giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{\sqrt{1+x^3+y^3}}{xy} + \frac{\sqrt{1+y^3+z^3}}{yz} + \frac{\sqrt{1+z^3+x^3}}{zx}$$
 là

- A. $3\sqrt{3}$. B. $3\sqrt{3}$. C. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn B.

Áp dụng BĐT Cô-si, ta có: $1+x^3+y^3 \geq 3xy \Rightarrow \frac{\sqrt{1+x^3+y^3}}{xy} \geq \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{xy}} = \sqrt{3z}$.

Tương tự, ta có: $\frac{\sqrt{1+y^3+z^3}}{yz} \geq \sqrt{3x}$, $\frac{\sqrt{1+z^3+x^3}}{zx} \geq \sqrt{3y}$.

Suy ra: $P \geq \sqrt{3x} + \sqrt{3y} + \sqrt{3z} \geq 3\sqrt{3}\sqrt{\sqrt{xyz}} = 3\sqrt{3}$.

Đấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z=1$.

Vậy $\min P = 3\sqrt{3}$.

Câu 54. (Đề thi thử Chuyên Nguyễn Du-ĐăkLăk lần 2) Cho phương trình $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 1 = 0$ có nghiệm. Giá trị nhỏ nhất $P = a^2 + b^2 + c^2$ bằng

A. $\frac{4}{3}$

B. 4.

C. 2.

D. $\frac{8}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Kiểm tra $x = 0$ không là nghiệm của phương trình. Chia cả hai vế cho $x^2 \neq 0$ ta được

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} + ax + b + \frac{c}{x} = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = -ax - b - \frac{c}{x}$$

$$\Rightarrow \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 = \left(ax + \frac{c}{x} + b\right)^2 \stackrel{\text{Bunhiacopxki}}{\leq} (a^2 + b^2 + c^2) \left(x^2 + \frac{1}{x^2} + 1\right)$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2}{x^2 + \frac{1}{x^2} + 1} \stackrel{\text{Cô-si}}{\geq} \frac{4}{3}. \text{ Dấu "}" xảy ra khi } x^2 = \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

Câu 55. Người ta dùng 100m rào để rào một mảnh vườn hình chữ nhật để thả gia súc. Biết một cạnh của hình chữ nhật là bức tường (không phải rào). Tính diện tích lớn nhất của mảnh để có thể rào được?

A. 1350 m².

B. 1250 m².

C. 625 m².

D. 1150 m².

Lời giải

Chọn B

Đặt cạnh của hình chữ nhật lần lượt là x, y ($x, y > 0$; y là cạnh của bức tường).

Ta có: $2x + y = 100$ (1)

$$S = xy = 2x \cdot \frac{y}{2} \stackrel{\text{Casi}}{\leq} 2 \cdot \left(\frac{x + \frac{y}{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{8}(2x + y)^2 = \frac{1}{8}(100)^2 = 1250$$

Diện tích hình chữ nhật là

Vậy $S_{\max} = 1250 \text{ m}^2$. Đạt được khi $x = \frac{y}{2} \Leftrightarrow y = 2x \Rightarrow x = 25 \text{ m}; y = 50 \text{ m}$.

Câu 56. Trong các hình chữ nhật có chu vi bằng 300 m, hình chữ nhật có diện tích lớn nhất bằng

A. 22500 m².

B. 900 m².

C. 5625 m².

D. 1200 m².

Lời giải

Chọn C

Giả sử hình chữ nhật có chiều dài và chiều rộng lần lượt là a, b ($0 < a, b < 150$), đơn vị: m.

Từ giả thiết, ta có $a + b = 150$.

Diện tích hình chữ nhật là $S = a.b$.

Áp dụng bất đẳng thức Cô – si, ta có

$$\sqrt{a.b} \leq \frac{a+b}{2} \Leftrightarrow \sqrt{a.b} \leq 75 \Leftrightarrow ab \leq 5625 \Leftrightarrow S \leq 5625$$

Dấu bằng xảy ra $\begin{cases} a=b \\ a+b=150 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=75.$

Hay $\max S = 5625 m^2$.

Câu 57. (NGÔ GIA TỰ_VĨNH PHÚC_LẦN 1_1819) Trong tất cả các hình chữ nhật có cùng diện tích $48m^2$, hình chữ nhật có chu vi nhỏ nhất là

A. $16\sqrt{3}$

B. $20\sqrt{3}$

C. 16

D. 20

Lời giải

Chọn A

Gọi hai cạnh của hình chữ nhật lần lượt là a, b với $a.b = 48$.

Khi đó chu vi hình chữ nhật $P = 2.(a + b) \geq 2.2\sqrt{ab} = 16\sqrt{3}$.

Câu 58. (ĐỀ THI HỌC KÌ I LỚP 12 - QUANG TRUNG - ĐÔNG ĐA - HÀ NỘI) Một miếng bìa hình tam giác đều ABC , cạnh bằng 16. Học sinh Minh cắt một hình chữ nhật $MNPQ$ từ miếng bìa trên để làm biển trông xe cho lớp trong buổi ngoại khóa (với M, N thuộc cạnh BC ; P, Q lần lượt thuộc cạnh AC và AB). Diện tích hình chữ nhật $MNPQ$ lớn nhất bằng bao nhiêu?

A. $16\sqrt{3}$

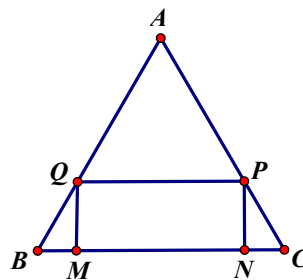
B. $8\sqrt{3}$

C. $32\sqrt{3}$

D. $34\sqrt{3}$

Lời giải

Chọn C



Đặt $BM = x \Rightarrow MN = 16 - 2x$ với $0 < x < 8$.

$\triangle QBM$ vuông tại $M \Rightarrow QM = BM.\tan 60^\circ = x\sqrt{3}$.

$$S_{MNPQ} = MN.MQ = (16 - 2x)x\sqrt{3} = 2\sqrt{3}(8 - x)x \leq 2\sqrt{3}.\left(\frac{8 - x + x}{2}\right)^2$$

$\Rightarrow S_{MNPQ} \leq 32\sqrt{3}$. Vậy tích hình chữ nhật $MNPQ$ lớn nhất bằng $32\sqrt{3}$ khi $x = 4$.

Câu 59. Một miếng giấy hình tam giác vuông ABC (vuông tại A) có diện tích S , có M là trung điểm BC . Cắt miếng giấy theo hai đường thẳng vuông góc, đường thẳng qua M cắt cạnh AB tại E , đường thẳng qua M cắt cạnh AC tại F . Khi đó miếng giấy tam giác MEF có diện tích nhỏ nhất bằng bao nhiêu?

A. $\frac{S}{3}$.

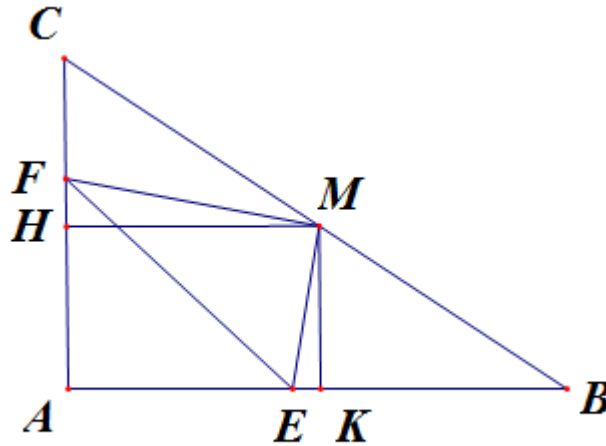
B. $\frac{3S}{5}$.

C. $\frac{3S}{8}$.

D. $\frac{S}{4}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của M lên AC, AB .
 Khi đó ta luôn có $ME \geq MK$, $MF \geq MH$.

Vì tam giác MEF vuông tại M nên $S_{\triangle MEF} = \frac{1}{2} ME \cdot MF \geq \frac{1}{2} MH \cdot MK$.

Do M là trung điểm BC nên $MK = \frac{1}{2} AC$, $MH = \frac{1}{2} AB$,

Vì vậy $S_{\triangle MEF} \geq \frac{1}{2} MH \cdot MK = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} AB \cdot \frac{1}{2} AC = \frac{S}{4}$.