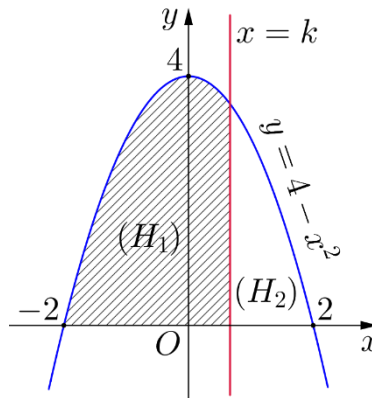


DẠNG 10.2**Ứng dụng tích phân tính diện tích hình phẳng**

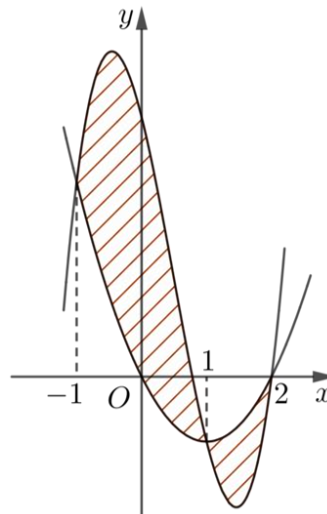
Câu 1: Trong mặt phẳng Oxy cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi parabol $y = 4 - x^2$ và trục hoành. Đường thẳng $x = k$ ($-2 < k < 2$) chia (H) thành hai phần (H_1) , (H_2) như hình vẽ dưới:



Biết rằng diện tích của hình (H_1) gấp $\frac{20}{7}$ lần diện tích của hình (H_2) , hỏi giá trị của k thuộc khoảng nào sau đây?

- A. $(-2; -1)$. B. $(0; 1)$. C. $(-1; 0)$. D. $(1; 2)$.

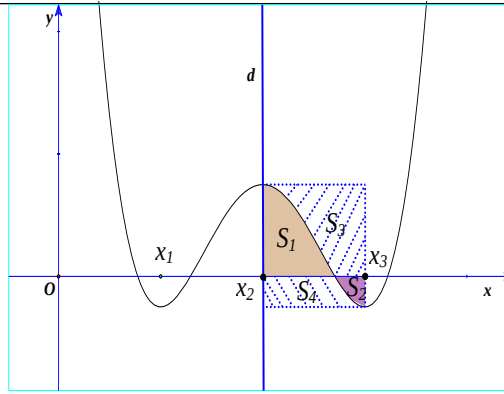
Câu 2: Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 4$ và $g(x) = mx^2 + nx$ có đồ thị trong hình bên.



Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số trên (phần gạch chéo trong hình vẽ) bằng

- A. $\frac{9}{4}$. B. $\frac{9}{2}$. C. $\frac{37}{12}$. D. $\frac{37}{6}$.

Câu 3: Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị (C) như hình vẽ bên. Biết hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại các điểm x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_3 = x_1 + 2$, $f(x_1) + f(x_3) + \frac{2}{3}f(x_2) = 0$ và (C) nhận đường thẳng $d: x = x_2$ làm trục đối xứng. Gọi S_1, S_2, S_3, S_4 là diện tích của các miền hình phẳng được đánh dấu như hình bên. Tỉ số $\frac{S_1 + S_2}{S_3 + S_4}$ gần kết quả nào nhất?



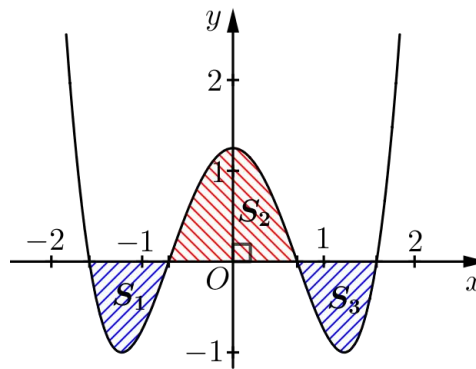
A. 1.62.

B. 1.68.

C. 1.64.

D. 1.66.

Câu 4: Cho hàm số $y = x^4 - 3x^2 + m$ có đồ thị (C_m) , với m là tham số thực. Giả sử (C_m) cắt trục Ox tại bốn điểm phân biệt như hình vẽ dưới:



Gọi S_1 ; S_2 ; S_3 là diện tích các miền gạch chéo được cho trên hình vẽ. Giá trị của m để $S_1 + S_3 = S_2$ là

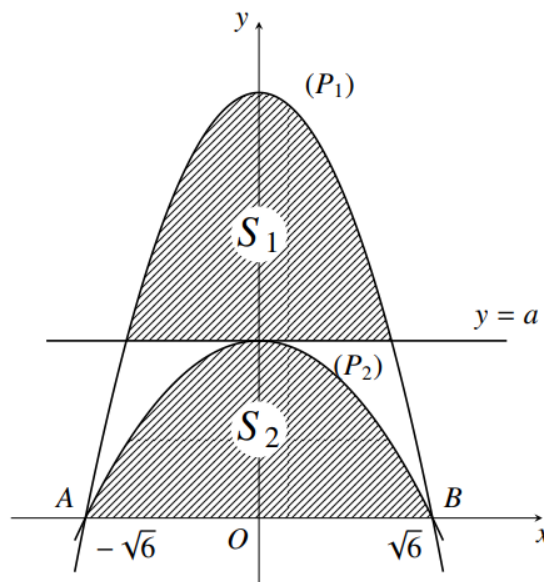
A. $m = -\frac{5}{2}$.

B. $m = \frac{5}{4}$.

C. $m = -\frac{5}{4}$.

D. $m = \frac{5}{2}$.

Câu 5: Cho parabol $(P_1): y = -x^2 + 6$ cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt A, B và đường thẳng $d: y = a$ ($0 < a < 6$). Xét parabol (P_2) đi qua A, B và có đỉnh thuộc đường thẳng $y = a$. Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P_1) và d ; S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P_2) và trục hoành (tham khảo hình vẽ).



Biết $S_1 = S_2$, tính $T = a^3 - 12a^2 + 108a$.

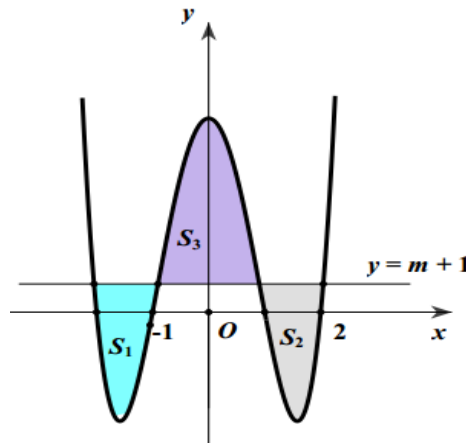
A. $T = 218$.

B. $T = 219$.

C. $T = 216$.

D. $T = 217$.

Câu 6: Đồ thị của hàm số $y = x^4 - 5x^2 + 4$ cắt đường thẳng $d: y = m + 1$ tại bốn điểm phân biệt và tạo ra các hình phẳng có diện tích S_1, S_2, S_3 . Biết rằng khi $S_1 + S_2 = S_3$ thì m là một số hữu tỉ được viết dưới dạng phân số tối giản $m = -\frac{a}{b}$ với $a, b \in \mathbb{N}^*$. Giá trị của $P = b - a$ bằng



A. 19.

B. 21.

C. 53.

D. 17.

Câu 7: Cho hàm số $y = \sqrt{x}$ có đồ thị (C) và điểm M thuộc (C) có hoành độ dương. Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) , trục hoành và đường thẳng đi qua M vuông góc với trục hoành; S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và đường thẳng OM . Biết $\frac{S_2}{S_1} = \frac{a}{b}$, giá trị của $a + b$ bằng

A. 5.

B. 6.

C. 19.

D. 21.

Câu 8: Hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị (C_1) đi qua điểm $A(1; 0)$; hàm số bậc hai $y = g(x)$ có đồ thị (C_2) đi qua điểm $B(1; -4)$. $(C_1), (C_2)$ cắt nhau tại 3 điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là $-1; 2; 3$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị $(C_1), (C_2)$?

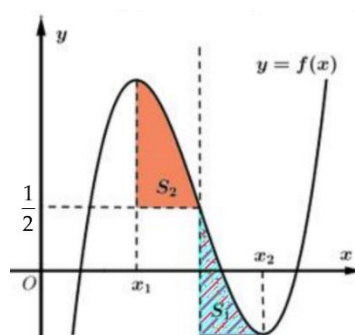
A. $\frac{115}{3}$.

B. $\frac{32}{3}$.

C. $\frac{71}{6}$.

D. $\frac{112}{3}$.

Câu 9: Cho hàm số bậc ba $f(x)$ có đồ thị hàm số như hình vẽ bên. Biết hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại hai điểm x_1, x_2 thỏa mãn $x_2 = x_1 + 2$ và $f(x_1) + f(x_2) = 1$. Gọi S_1, S_2 là diện tích của hai hình phẳng được cho trong hình vẽ bên. Tính tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$.



A. $\frac{5}{4}$.

B. $\frac{3}{5}$.

C. $\frac{3}{8}$.

D. $\frac{5}{3}$.

Câu 10: Cho parabol $(P): y = -4x^2$ và hai điểm A, B trên (P) sao cho đoạn $AB = 2$. Tìm diện tích lớn nhất của hình phẳng giới hạn bởi (P) và đường thẳng AB .

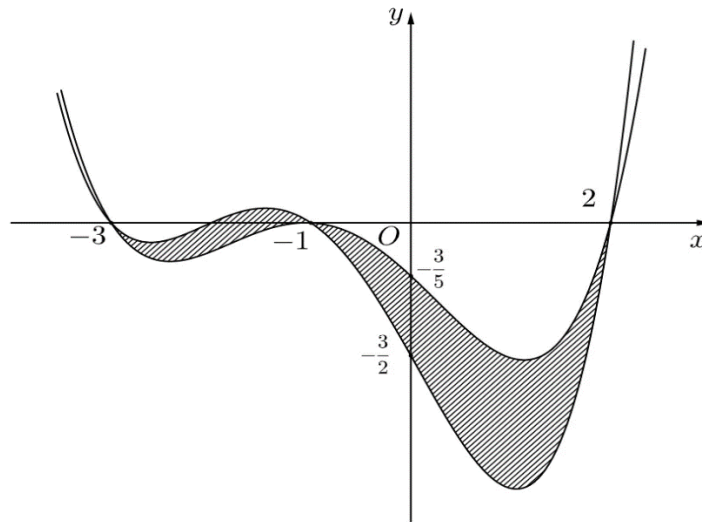
A. $\frac{16}{3}$.

B. $\frac{4}{3}$.

C. $\frac{32}{3}$.

D. 4.

Câu 11: Cho hình phẳng (H) được giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số đa thức bậc bốn $y = f(x)$ và $y = g(x)$. Biết rằng đồ thị của hai hàm số cắt nhau tại hai điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là $-1; 2$ và tiếp xúc với nhau tại điểm có hoành độ bằng -3 . Diện tích hình phẳng (H) (Phân gạch sọc trên hình vẽ bên) gần với kết quả nào dưới đây?



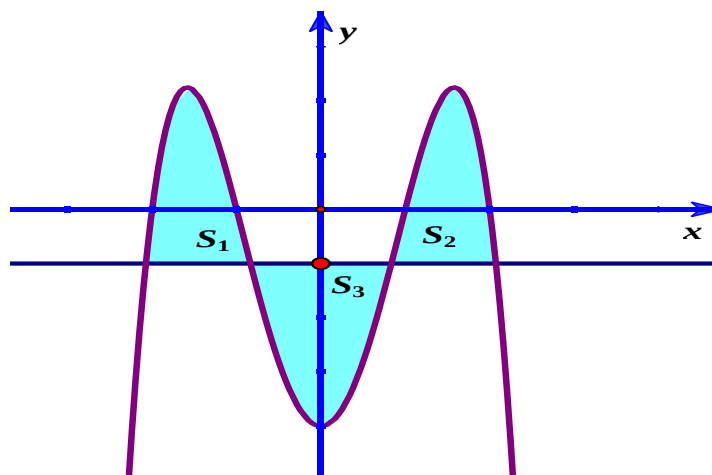
A. 3,11.

B. 2,45.

C. 3,21.

D. 2,95.

Câu 12: Đồ thị (C) của hàm số $y = -x^4 + 5x^2 - 4$ cắt đường thẳng $(d): y = m$ tại bốn điểm phân biệt và tạo ra các hình phẳng có diện tích S_1, S_2, S_3 (như hình vẽ).



Biết rằng khi $S_1 + S_2 = S_3$ thì giá trị của m là một số hữu tỉ được viết dưới dạng phân số tối giản

$\frac{p}{q}$, trong đó $q \in \mathbb{N}^*$, $p \in \mathbb{Z}$. Tính $T = p + q$.

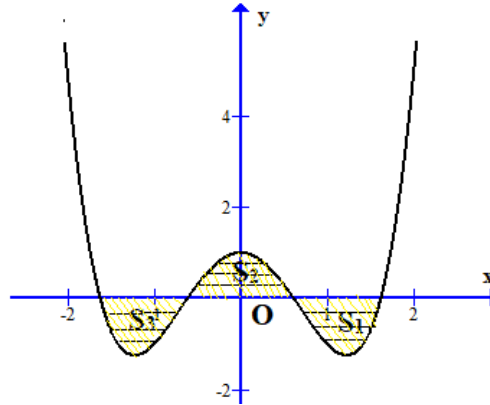
A. $T = 55$.

B. $T = 17$.

C. $T = -55$.

D. $T = -17$.

Câu 13: Cho hàm số $y = x^4 - 3x^2 + m$ có đồ thị (C_m) , với m là tham số thực. Giả sử (C_m) cắt trục Ox tại bốn điểm phân biệt như hình vẽ



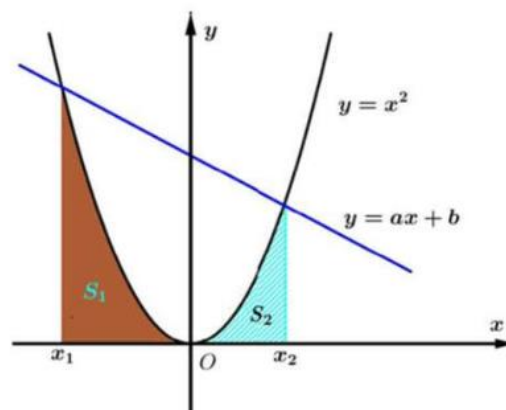
Gọi S_1, S_2, S_3 là diện tích các phần gạch được cho trên hình vẽ. Giá trị của m để $S_1 + S_3 = S_2$ là

- A. $m = -\frac{5}{2}$. B. $m = \frac{5}{4}$. C. $m = -\frac{5}{4}$. D. $m = \frac{5}{2}$.

Câu 14: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 3$ có đồ thị (C) . Gọi E là một điểm thuộc (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại E cắt (C) tại điểm thứ hai F và diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường thẳng EF với (C) bằng $\frac{27}{64}$. Tiếp tuyến của (C) tại F cắt (C) tại điểm thứ hai Q . Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường thẳng FQ với (C) bằng

- A. $\frac{27}{4}$. B. $\frac{27}{8}$. C. $\frac{459}{64}$. D. $\frac{135}{64}$.

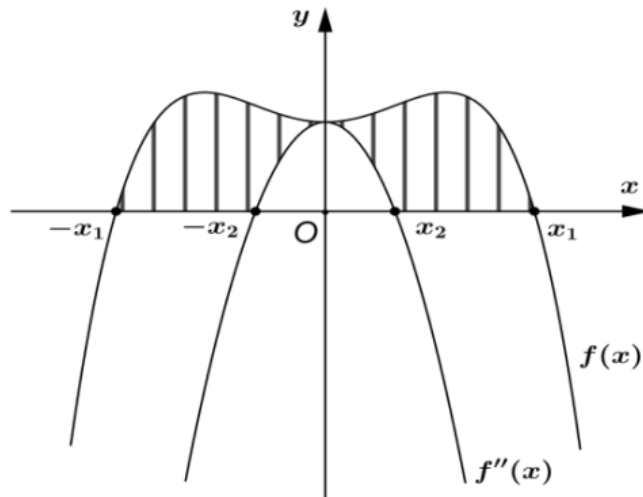
Câu 15: Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = f(x) = ax + b$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Biết parabol (P) và đường thẳng (d) cắt nhau tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $x_2 = x_1 + 3$ và $f(x_1) + f(x_2) = 5$. Gọi S_1, S_2 là diện tích hình phẳng được gạch trong hình. Tổng $S_1 + S_2$ bằng



- A. $\frac{7}{3}$. B. $\frac{1}{3}$. C. 3. D. $\frac{8}{3}$.

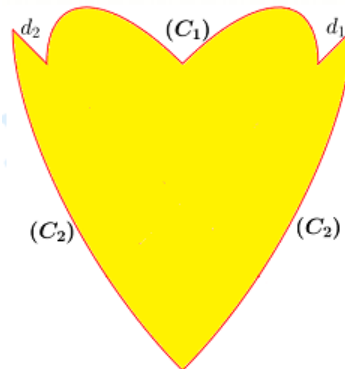
Câu 16: Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^2 + 1$, ($a \neq 0, a, b \in \mathbb{R}$) mà đồ thị hàm số $f''(x)$ và đồ thị hàm số $f(x)$ có một điểm chung duy nhất và nằm trên trục Oy (hình vẽ), trong đó $\pm x_1$ là nghiệm của

$f(x)$ và $\pm x_2$ là nghiệm của $f''(x)$, ($x_1, x_2 > 0$). Biết $x_1 = 3x_2$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị $f(x)$, $f''(x)$ và trục Ox .



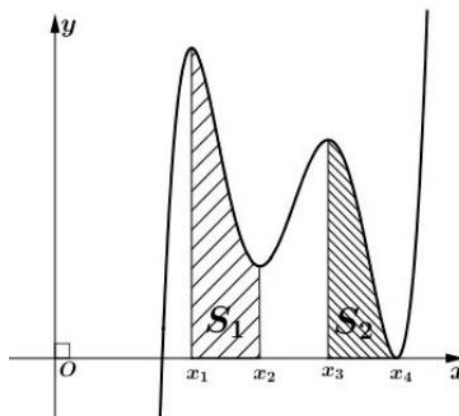
- A. $\frac{152}{45}$. B. $\frac{73}{15}$. C. $\frac{152}{15}$. D. $\frac{73}{45}$.

Câu 17: Hình (H) được cho dưới đây là hình phẳng được giới hạn bởi hai đường $(C_1): y = |x| + \sqrt{16 - x^2}$, $(C_2): y = |x| - \sqrt{25 - x^2}$ và hai đoạn thẳng $(d_1): y = x$ với $x \in [4; 5]$, $(d_2): y = -x$ với $x \in [-5; -4]$. Tính diện tích S của hình (H) .



- A. $\frac{41\pi}{2}$. B. $\frac{41\pi}{4}$. C. $\frac{41}{2}$. D. $\frac{41}{4}$.

Câu 18: Cho hàm đa thức bậc năm $y = f(x)$ có đồ thị hàm số như hình vẽ. Biết x_1, x_2, x_3, x_4 theo thứ tự lập thành cấp số cộng có công sai $d = 1$. Tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$ bằng



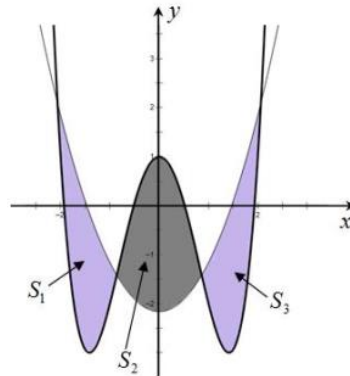
A. $\frac{16}{9}$.

B. $\frac{8}{5}$.

C. $\frac{11}{7}$.

D. $\frac{17}{11}$.

Câu 19: Cho hàm số bậc bốn $y = x^4 - 4x^2 + 1$ và parabol $y = x^2 - k$, với $k \in \mathbb{R}$ có đồ thị như hình bên dưới.



Gọi S_1, S_2, S_3 lần lượt là diện tích của phần hình phẳng được tô đậm tương ứng trong hình vẽ.

Khi $S_1 + S_3 = S_2$ thì k thuộc khoảng nào dưới đây?

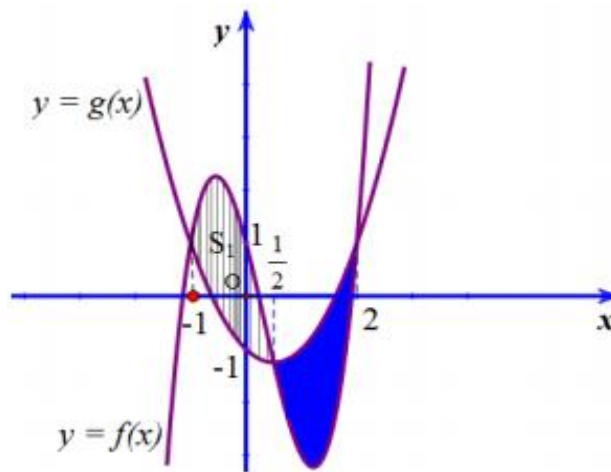
A. $\left(0; \frac{3}{7}\right)$.

B. $\left(\frac{9}{5}; \frac{11}{4}\right)$.

C. $\left(\frac{11}{4}; 3\right)$.

D. $\left(\frac{3}{7}; \frac{9}{5}\right)$.

Câu 20: Cho hai hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ và $g(x) = mx^2 + nx + k$ cắt nhau tại 3 điểm có hoành độ $-1; \frac{1}{2}; 2$ và có đồ thị như hình vẽ



Biết diện tích phần hình kẻ sọc (hình S_1) bằng $\frac{81}{32}$. Diện tích phần hình phẳng giới hạn bởi đồ

thị hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ và hai đường thẳng $x = \frac{1}{2}, x = 2$ (phần bôi đen trong hình vẽ) bằng

A. $\frac{79}{24}$.

B. $\frac{243}{96}$.

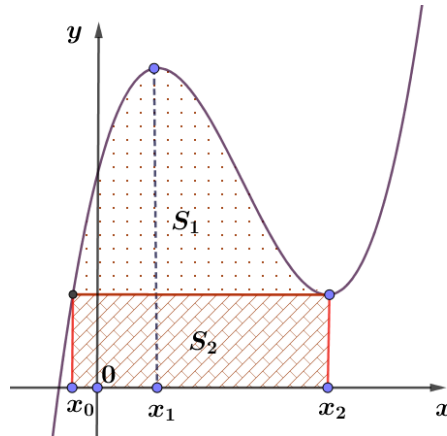
C. $\frac{81}{32}$.

D. $\frac{45}{16}$.

Câu 21: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong ở hình bên dưới. Gọi x_1, x_2 lần lượt là hai điểm cực trị thỏa mãn $x_2 = x_1 + 2$ và $f(x_1) - 3f(x_2) = 0$. Đường thẳng song song với trục Ox

và qua điểm cực tiểu cắt đồ thị hàm số tại điểm thứ hai có hoành độ x_0 và $x_1 = x_0 + 1$. Tính tỉ số

$\frac{S_1}{S_2}$ (S_1 và S_2 lần lượt là diện tích hình phẳng được gạch ở hình bên dưới).



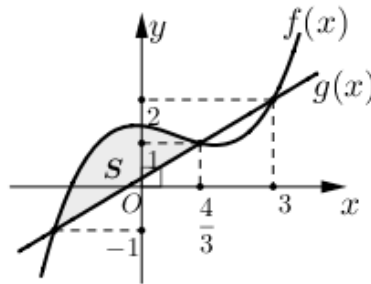
A. $\frac{3}{5}$.

B. $\frac{5}{8}$.

C. $\frac{3}{8}$.

D. $\frac{9}{8}$.

Câu 22: Cho $f(x), g(x)$ lần lượt là các hàm đa thức bậc ba và bậc nhất có đồ thị như hình vẽ.



Biết diện tích hình S (được tô màu) bằng $\frac{250}{81}$. Tính $\int_0^2 f(x) dx$.

A. $\frac{7}{3}$.

B. $\frac{38}{15}$.

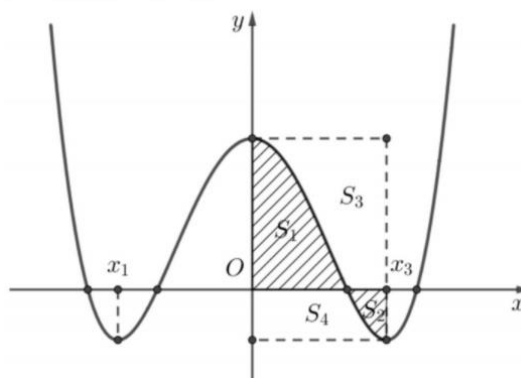
C. $\frac{8}{3}$.

D. $\frac{34}{15}$.

Câu 23: Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ. Biết rằng $f(x)$ đạt cực trị tại các điểm

$x_1; x_2; x_3$ thỏa mãn $x_3 = x_1 + 2$ và $f(x_1) + f(x_3) + \frac{2}{3}f(x_2) = 0$. Gọi S_1, S_2, S_3, S_4 là diện

tích các hình phẳng trong hình vẽ bên. Tỉ số $\frac{S_1 + S_2}{S_3 + S_4}$ gần nhất với kết quả nào dưới đây?



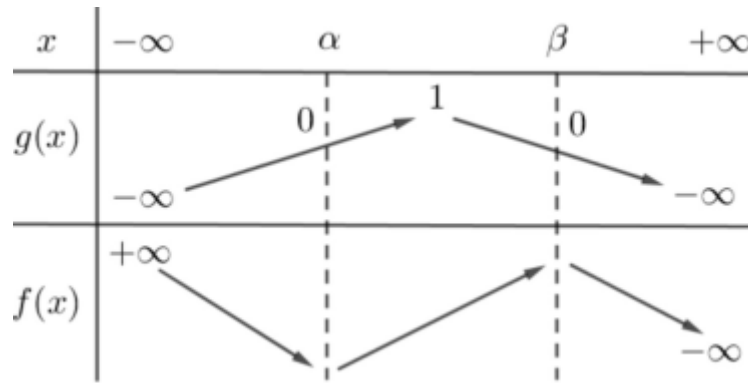
A. 0,65.

B. 0,7.

C. 0,55.

D. 0,6.

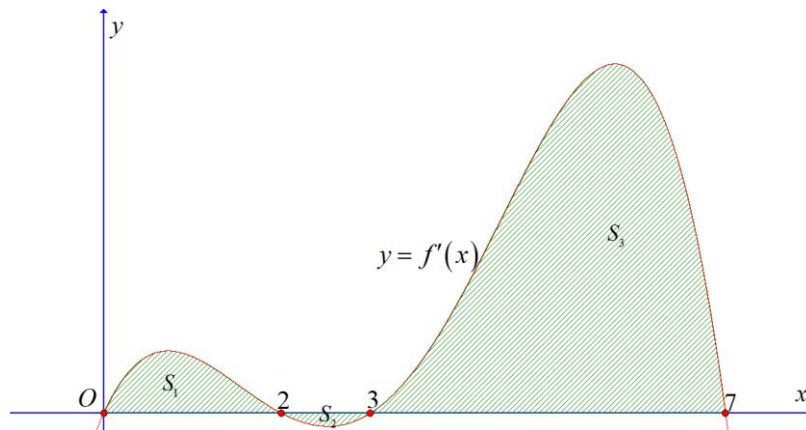
Câu 24: Cho hai hàm số $f(x) = ax^3 + 2x^2 + bx + 1$ và $g(x) = cx^2 + 4x + d$ có bảng biến thiên như sau



Biết rằng đồ thị của hai hàm số đã cho cắt nhau tại 3 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1 + x_2 + x_3 = 9$. Khi đó diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$; $y = g(x)$; $x = 1$; $x = 2$ bằng

- A. $\frac{3}{4}$. B. $\frac{3}{2}$. C. $\frac{1}{4}$. D. $\frac{1}{2}$.

Câu 25: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0; 7]$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ trên đoạn $[0; 7]$ như hình vẽ.

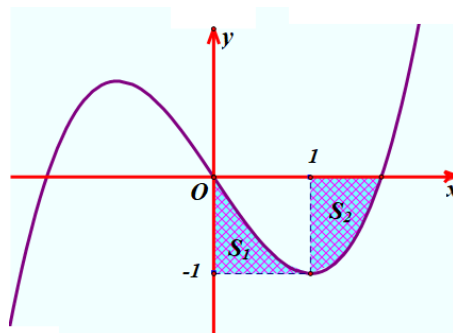


Đặt $g(x) = f(2x-1)$, biết rằng diện tích các hình phẳng trong hình vẽ lần lượt là $S_1 = \frac{244}{15}$,

$S_2 = \frac{28}{15}$, $S_3 = \frac{2528}{15}$ và $f(0) = 1$, tính $g(4)$.

- A. $\frac{2759}{15}$. B. $\frac{2744}{15}$. C. $\frac{5518}{15}$. D. $\frac{563}{3}$.

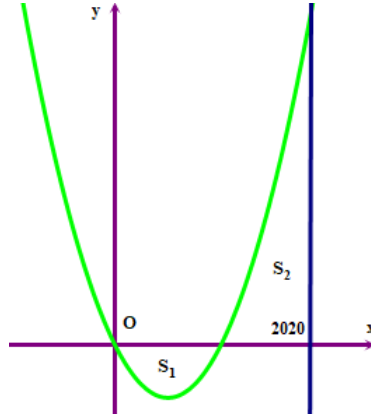
Câu 26: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong hình bên.



Biết $f(x)$ đạt cực tiểu tại $x=1$ và $f(x)+1$ và $f(x)-1$ lần lượt chia hết cho $(x-1)^2$ và $(x+1)^2$. Gọi S_1, S_2 là diện tích hai hình phẳng được gạch trong hình bên. Tính $S_1 + S_2$.

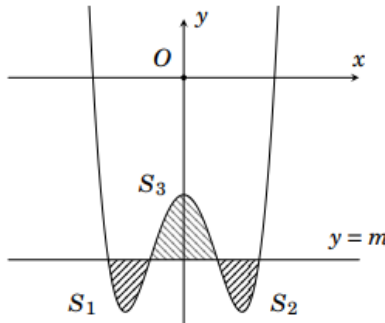
- A. $\frac{7}{8}$. B. $\frac{4}{9}$. C. $\frac{1}{8}$. D. $\frac{1}{2}$.

Câu 27: Cho hàm số $y = x^2 - mx$ ($0 < m < 2020$) có đồ thị (C) . Gọi $S_1 + S_2$ là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi (C) , trục hoành, trục tung và đường thẳng $x = 2020$. Giá trị của m sao cho $S_2 = S_1$ là



- A. $m = \frac{4040}{3}$ B. $m = \frac{4041}{3}$ C. $m = \frac{2021}{3}$ D. $m = \frac{2020}{3}$

Câu 28: Đồ thị $(C): y = 2x^4 - 4x^2 - 2$ cắt đường thẳng $d: y = m$ tại bốn điểm phân biệt và tạo ra các hình phẳng có diện tích S_1, S_2, S_3 như hình vẽ. Biết rằng $S_1 + S_2 = S_3$, khi đó $m = -\frac{a}{b}$ ở dạng tối giản với $a, b \in \mathbb{N}$. Tính giá trị của $T = a + b$.



- A. $T = -19$. B. $T = 19$. C. $T = 1$. D. $T = 37$.

$$\begin{aligned} \int_0^{x_3} (2x^4 - 4x^2 - 2 - m) dx &= \int_{x_3}^{x_4} (-2x^4 + 4x^2 + 2 + m) dx \\ \Leftrightarrow \int_0^{x_4} (2x^4 - 4x^2 - 2 - m) dx &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(\frac{2x^5}{5} - \frac{4x^3}{3} - (2+m)x \right) \Big|_0^{x_4} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{2x_4^5}{5} - \frac{4x_4^3}{3} - (2+m)x_4 &= 0 \\ \Leftrightarrow 6x_4^4 - 20x_4^2 - 15(2+m) &= 0. \end{aligned}$$

Suy ra x_4 là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x_4^4 - 4x_4^2 - 2 - m = 0 \\ 6x_4^4 - 20x_4^2 - 15(2 + m) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 24x_4^4 - 40x_4^2 = 0 \\ 6x_4^4 - 20x_4^2 - 15(2 + m) = 0 \end{cases}$$

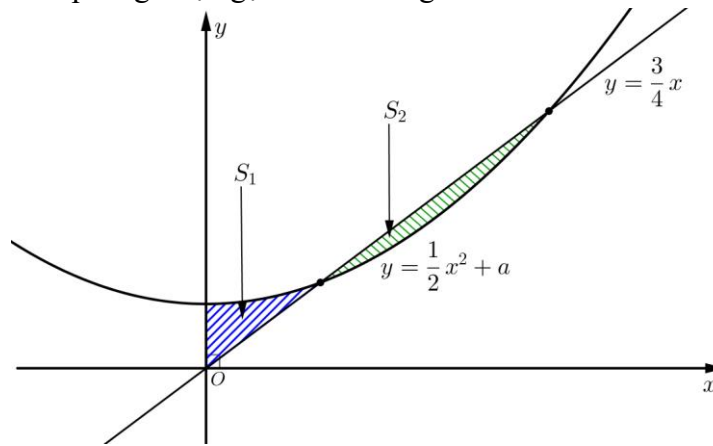
$$\begin{cases} \begin{cases} x_4^2 = 0(l) \\ x_4^2 = \frac{5}{3} \end{cases} \\ 6x_4^4 - 20x_4^2 - 15(2 + m) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_4^2 = \frac{5}{3} \\ m = -\frac{28}{9} \text{ (TM)} \end{cases}$$

Vậy $m = -\frac{28}{9}$. Do đó $a = 28$, $b = 9$.

Suy ra $T = a + b = 37$.

Câu 29: (Bỏ)

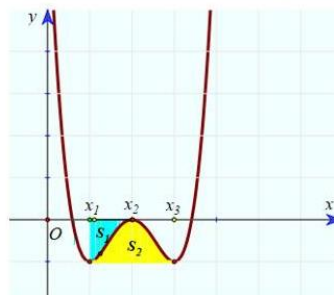
Câu 30: Cho đường thẳng $y = \frac{3}{4}x$ và parabol $y = \frac{1}{2}x^2 + a$ (a là tham số thực dương). Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích của hai hình phẳng được gạch chéo trong hình vẽ bên.



Khi $S_1 = S_2$ thì a thuộc khoảng nào dưới đây?

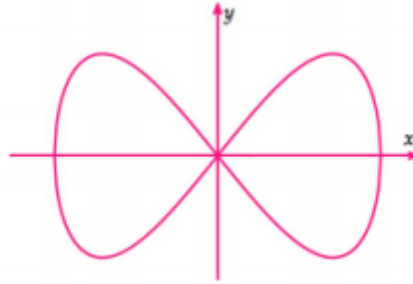
- A. $\left(\frac{1}{4}; \frac{9}{32}\right)$. B. $\left(\frac{7}{32}; \frac{1}{4}\right)$. C. $\left(\frac{3}{16}; \frac{7}{32}\right)$. D. $\left(0; \frac{3}{16}\right)$.

Câu 31: Cho hàm số bậc bốn trùng phương $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong như hình dưới đây. Biết hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại ba điểm x_1, x_2, x_3 ($x_1 < x_2 < x_3$) thỏa mãn $x_1 + x_2 = 4$. Gọi S_1, S_2 là diện tích của hai hình phẳng được tô màu trong hình. Tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$ bằng?



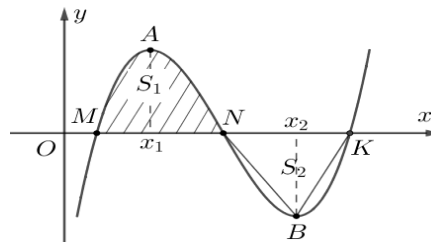
- A. $\frac{3}{5}$. B. $\frac{7}{16}$. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{7}{15}$.

Câu 32: Một hình phẳng được tạo thành từ đường cong lemniscate (đường cong số 8 của Bernoulli) có phương trình trong hệ tọa độ Oxy là $x^4 = a^2(x^2 - y^2)$ ($a > 0$) như hình vẽ bên. Biết rằng mỗi đơn vị trong hệ tọa độ Oxy tương ứng với chiều dài $1m$ và hình phẳng này có diện tích là $\frac{49}{3}(m^2)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?



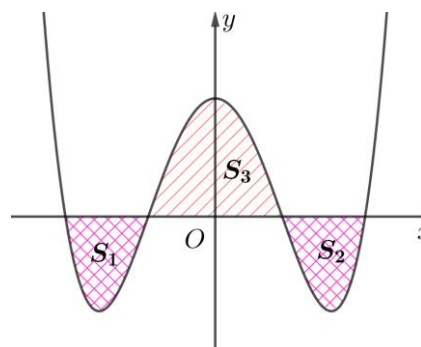
- A. $1 < a < 2$. B. $2 < a < 3$. C. $3 < a < 4$. D. $4 < a < 5$.

Câu 33: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong (C) trong hình bên. Hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại hai điểm x_1, x_2 thỏa $f(x_1) + f(x_2) = 0$. Gọi A, B là hai điểm cực trị của đồ thị (C) ; M, N, K là giao điểm của (C) với trục hoành; S là diện tích của hình phẳng được gạch trong hình, S_2 là diện tích tam giác NBK . Biết tứ giác $MAKB$ nội tiếp đường tròn, khi đó tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$ bằng



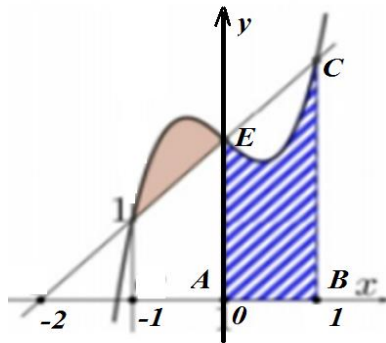
- A. $\frac{2\sqrt{6}}{3}$. B. $\frac{\sqrt{6}}{2}$. C. $\frac{5\sqrt{3}}{6}$. D. $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

Câu 34: Cho hàm số $y = x^4 - 3x^2 + m$ có đồ thị là (C_m) , m là tham số thực. Giả sử (C_m) cắt trục Ox tại 4 điểm phân biệt. Gọi S_1, S_2 là diện tích của hai hình phẳng nằm dưới trục Ox và S_3 là diện tích hình phẳng nằm trên trục Ox được tạo bởi (C_m) với trục Ox . Biết rằng tồn tại duy nhất giá trị $m = \frac{a}{b}$ với $(a, b \in \mathbb{N}^*$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản) để $S_1 + S_2 = S_3$. Giá trị $2a - b$ bằng:



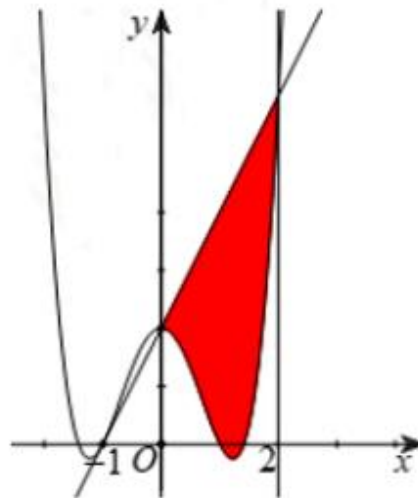
- A. 3. B. -4. C. 6. D. -2.

Câu 35: Cho hàm số bậc 3 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ và đường thẳng $d: g(x) = mx + n$ có đồ thị như hình vẽ. Nếu phần tô màu đen có diện tích bằng $\frac{1}{2}$, thì phần gạch chéo có diện tích bằng bao nhiêu?



- A. $\frac{5}{2}$. B. 2. C. 1. D. $\frac{3}{2}$.

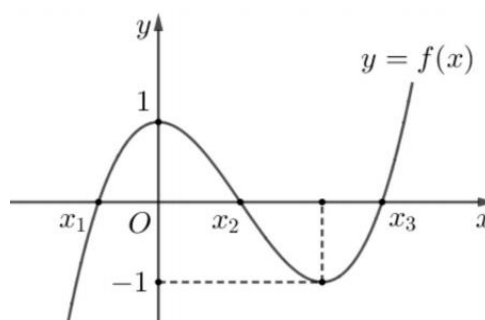
Câu 36: Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị (C) , biết rằng (C) đi qua điểm $A(-1; 0)$, tiếp tuyến d tại A của (C) cắt (C) tại hai điểm có hoành độ lần lượt là 0 và 2 và diện tích hình phẳng giới hạn bởi d , đồ thị (C) và hai đường thẳng $x = 0; x = 2$ có diện tích bằng $\frac{28}{5}$ (phần tô màu trong hình vẽ).



Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) , d và hai đường thẳng $x = -1; x = 0$ có diện tích bằng

- A. $\frac{2}{5}$. B. $\frac{1}{4}$. C. $\frac{2}{9}$. D. $\frac{1}{5}$.

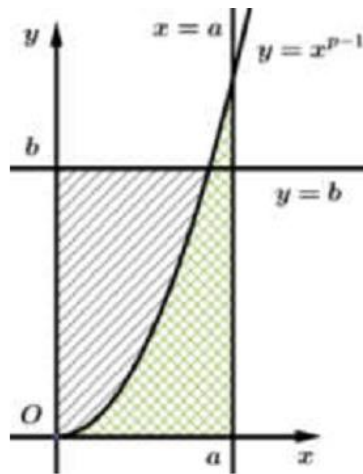
Câu 37: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị (C) như hình vẽ.



Biết rằng đồ thị hàm số đã cho cắt trục Ox tại ba điểm có hoành độ x_1, x_2, x_3 theo thứ tự lập thành cấp số cộng và $x_3 - x_1 = 2\sqrt{3}$. Gọi diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và trục Ox là S , diện tích S_1 của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x) + 1$, $y = -f(x) - 1$, $x = x_1$ và $x = x_3$ bằng

- A. $S + 2\sqrt{3}$. B. $S + 4\sqrt{3}$. C. $4\sqrt{3}$. D. $8\sqrt{3}$.

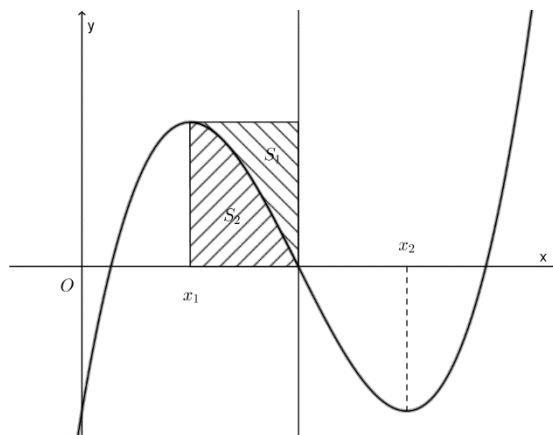
Câu 38: Cho các số p, q thỏa mãn các điều kiện: $p > 1$, $q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ và các số dương a, b . Xét hàm số: $y = x^{p-1}$ ($x > 0$) có đồ thị là (C) . Gọi (S_1) là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) , trục hoành, đường thẳng $x = a$, Gọi (S_2) là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) , trục tung, đường thẳng $y = b$, Gọi (S) là diện tích hình phẳng giới hạn bởi trục hoành, trục tung và hai đường thẳng $x = a$, $y = b$.



Khi so sánh $S_1 + S_2$ và S ta nhận được bất đẳng thức nào trong các bất đẳng thức dưới đây?

- A. $\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \leq ab$ B. $\frac{a^{p-1}}{p-1} + \frac{b^{q-1}}{q-1} \geq ab$ C. $\frac{a^{p+1}}{p+1} + \frac{b^{q+1}}{q+1} \leq ab$ D. $\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geq ab$.

Câu 39: Cho $f(x)$ là hàm bậc ba có đồ thị như hình vẽ. Biết hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại $x_1; x_2$ thỏa mãn $x_2 = x_1 + 4$ và tâm đối xứng của đồ thị hàm số nằm trên trục hoành. Gọi $S_1; S_2$ là diện tích hình phẳng như trong hình vẽ. Tỷ số $\frac{S_1}{S_2}$ bằng:



- A. $\frac{3}{5}$. B. $\frac{3}{4}$. C. $\frac{4}{3}$. D. $\frac{5}{3}$.

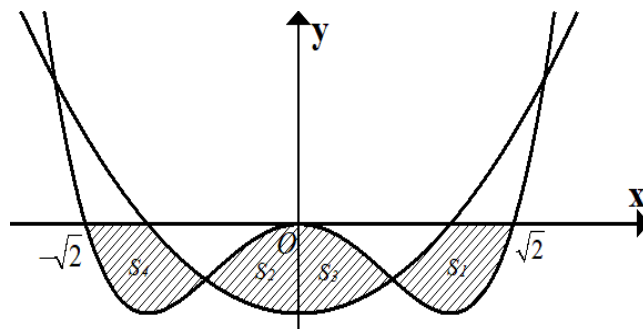
Câu 40: Cho hàm số $y = x^2$ có đồ thị (C) , biết rằng tồn tại hai điểm A, B thuộc đồ thị (C) sao cho tiếp tuyến tại A, B và đường thẳng vuông góc với hai tiếp tuyến tại A, B tạo thành một hình chữ nhật (H) có chiều dài gấp đôi chiều rộng. Gọi S_1 là diện tích giới hạn bởi đồ thị (C) và hai tiếp tuyến, S_2 là diện tích hình chữ nhật (H) . Tính tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$?

- A. $\frac{1}{6}$. B. $\frac{1}{3}$. C. $\frac{125}{768}$. D. $\frac{125}{128}$.

Câu 41: Cho hàm số $y = x^2$ có đồ thị (C) , biết rằng tồn tại hai điểm A, B thuộc đồ thị (C) sao cho tiếp tuyến tại A, B và đường thẳng pháp tuyến của hai tiếp tuyến đó tạo thành một hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng. Gọi S_1 là diện tích giới hạn bởi đồ thị (C) và hai tiếp tuyến, S_2 là diện tích hình chữ nhật giới hạn bởi các tiếp tuyến và pháp tuyến tại A, B . Tính tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$?

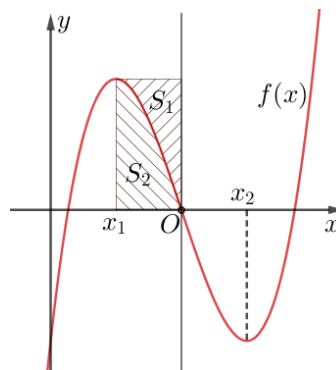
- A. $\frac{1}{6}$. B. $\frac{1}{3}$. C. $\frac{125}{768}$. D. $\frac{125}{128}$.

Câu 42: Cho hàm số $y = f(x) = x^4 - 2x^2$ và hàm số $y = g(x) = x^2 - m^2$, với $0 < m < \sqrt{2}$ là tham số thực. Gọi S_1, S_2, S_3, S_4 là diện tích các miền gạch chéo được cho trên hình vẽ. Ta có diện tích $S_1 + S_4 = S_2 + S_3$ tại m_0 . Chọn mệnh đề đúng.



- A. $m_0 \in \left(\frac{1}{2}; \frac{2}{3}\right)$. B. $m_0 \in \left(\frac{2}{3}; \frac{7}{6}\right)$. C. $m_0 \in \left(\frac{7}{6}; \frac{5}{4}\right)$. D. $m_0 \in \left(\frac{5}{4}; \frac{3}{2}\right)$.

Câu 43: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ.



Biết hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại hai điểm x_1, x_2 thỏa mãn $x_2 = x_1 + 2$ và $f(x_1) + f(x_2) = 0$.

Gọi S_1 và S_2 là diện tích của hai hình phẳng được gạch trong hình vẽ. Tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$ bằng

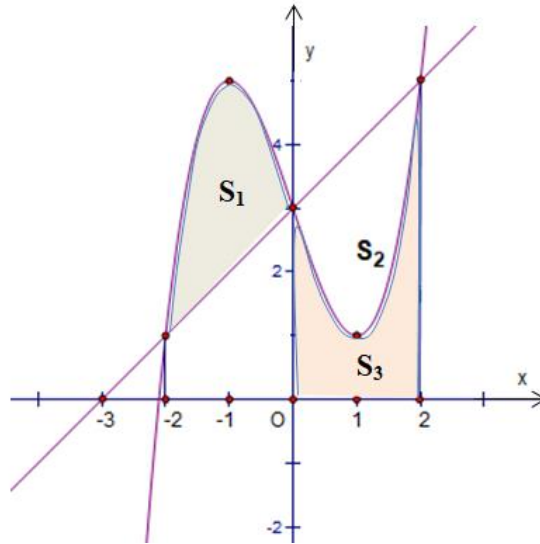
A. $\frac{3}{4}$.

B. $\frac{5}{8}$.

C. $\frac{3}{8}$.

D. $\frac{3}{5}$.

Câu 44: Cho hàm số bậc ba $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ và đường thẳng $d: g(x) = mx + n$ có đồ thị như hình vẽ. Gọi S_1, S_2, S_3 lần lượt là diện tích của các phần giới hạn như hình bên. Nếu $S_1 = 4$ thì tỷ số $\frac{S_2}{S_3}$ bằng.



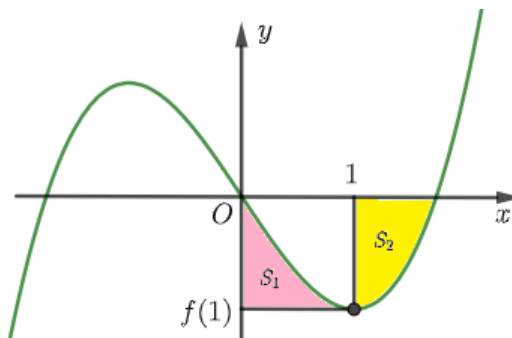
A. $\frac{3}{2}$.

B. 1.

C. 2.

D. $\frac{1}{2}$.

Câu 45: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ, biết $f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm $x = 1$ và thỏa mãn $[f(x) + 1]$ và $[f(x) - 1]$ lần lượt chia hết cho $(x - 1)^2$ và $(x + 1)^2$. Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích như trong hình bên. Tính $2S_2 + 8S_1$



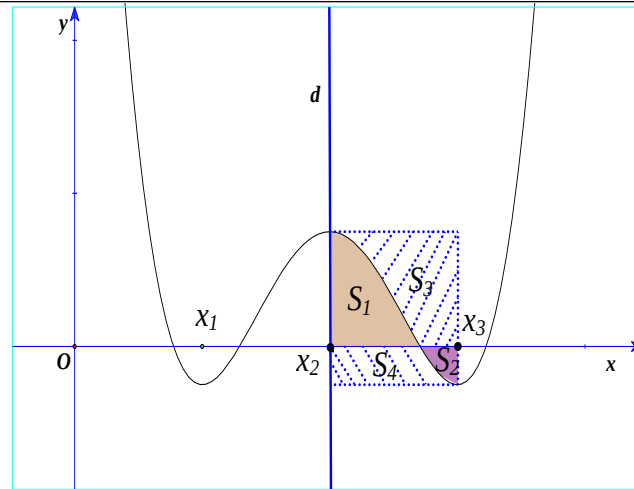
A. 4

B. $\frac{3}{5}$

C. $\frac{1}{2}$

D. 9

Câu 46: Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị (C) như hình vẽ bên. Biết hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại các điểm x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_3 = x_1 + 2$, $f(x_1) + f(x_3) + \frac{2}{3}f(x_2) = 0$ và (C) nhận đường thẳng $d: x = x_2$ làm trục đối xứng. Gọi S_1, S_2, S_3, S_4 là diện tích của các miền hình phẳng được đánh dấu như hình bên. Tỷ số $\frac{S_1 + S_2}{S_3 + S_4}$ gần kết quả nào nhất

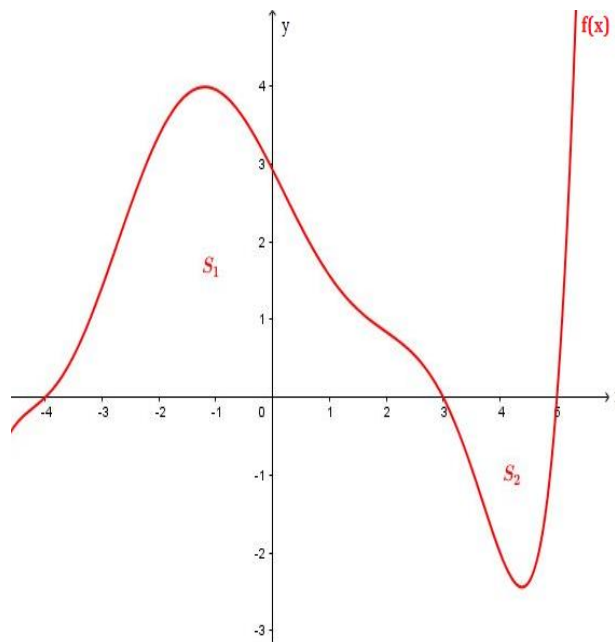


- A. 0,60. B. 0,55. C. 0,65. D. 0,70.

Câu 47: Cho parabol $(P): y = -4x^2$ và hai điểm A, B trên (P) sao cho đoạn $AB = 2$. Tìm diện tích lớn nhất của hình phẳng giới hạn bởi (P) và đường thẳng AB .

- A. $\frac{16}{3}$. B. $\frac{4}{3}$. C. $\frac{32}{3}$. D. 4.

Câu 48: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị là đường cong tạo với trục Ox hai vùng có diện tích S_1, S_2 (như hình vẽ). Biết rằng $S_1 = 4S_2$ và $\int_{-4}^5 f(x)dx = 24$. Tính $S_1 + S_2$

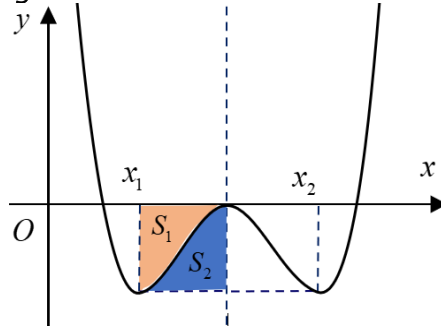


- A. 24. B. 40. C. 35. D. Không thể xác định

Câu 49: Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong như hình bên. Biết hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại hai điểm $x_1; x_2$ thỏa mãn $x_2 = x_1 + 2$ và đồ thị nhận đường thẳng $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ làm trục

đối xứng. Gọi $S_1; S_2$ là diện tích của phần hình phẳng được in màu trong hình bên. Biết $\frac{S_1}{S_2} = \frac{a}{b}$,

phân số $\frac{a}{b}$ tối giản, $a; b \in \mathbb{Z}$, tính $a + b$.



- A. $a + b = 13$. B. $a + b = 7$. C. $a + b = 15$. D. $a + b = 9$.

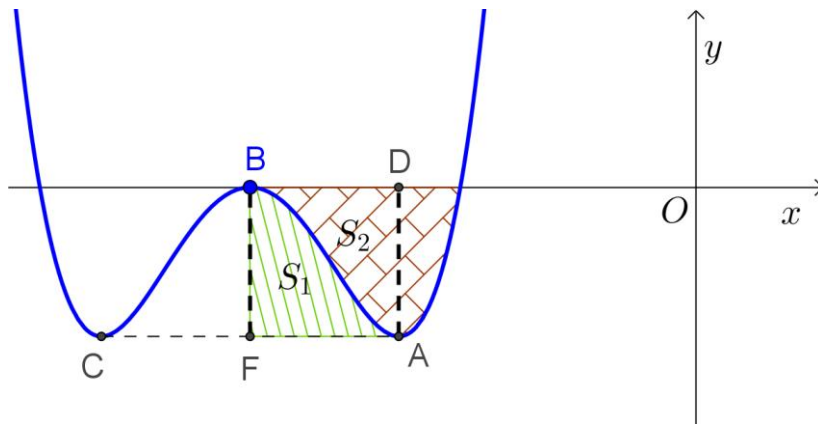
Câu 50: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm xác định, liên tục trên khoảng $(-1; +\infty)$ đồng thời thỏa mãn các điều kiện $f'(x) < 0 \forall x \in (-1, +\infty)$, $f'(0) = -1$ và $[f'(x)]^2 = f''(x)$, $f(3) = -\ln 4$. Khi đó diện tích giới hạn bởi đồ thị $(C): y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 2, x = 3$ bằng bao nhiêu?

- A. $8\ln 2 - \ln 3 - 1$. B. $8\ln 2 - 3\ln 3 - 1$.
C. $4\ln 2 - 3\ln 3 - 1$. D. $8\ln 2 + 3\ln 3 - 1$.

Câu 51: Cho parabol $(P): y = x^2 - kx + k - 4$, với k là tham số. Gọi S diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol (P) và trục hoành, giá trị nhỏ nhất của S là

- A. $4\sqrt{3}$. B. 4. C. $4\sqrt{5}$. D. 5.

Câu 52: Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên.



Biết đồ thị hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại ba điểm $C(x_1; y_1), B(x_2; y_2), A(x_3; y_3)$ ($x_1 < x_2 < x_3$) thỏa: $x_1 = x_3 - 2$ và hình vuông $BFAD$ có diện tích bằng 1. Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích của

hai hình phẳng được gạch trên hình vẽ bên. Tính tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$

- A. $\sqrt{2}$. B. $\frac{1}{15}$. C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. D. $\frac{\sqrt{2}}{15}$.

Câu 53: Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = (x - 3)^2$, trục tung và trục hoành. Gọi k_1, k_2 ($k_1 > k_2$) là hệ số góc của hai đường thẳng cùng đi qua điểm $A(0; 9)$ và chia (H) làm ba phần có diện tích bằng nhau. Tính $k_1 - k_2$.

A. $\frac{13}{2}$.

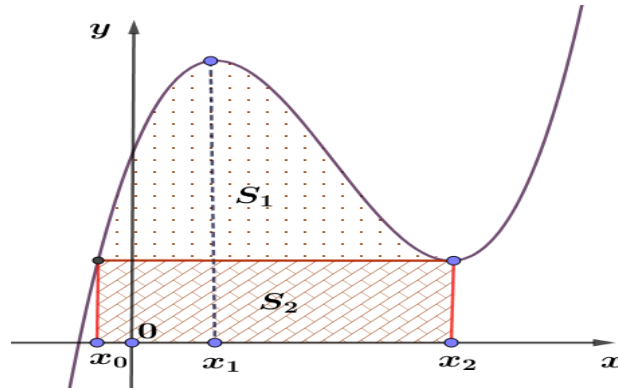
B. 7.

C. $\frac{25}{4}$.

D. $\frac{27}{4}$.

Câu 54: Hàm số bậc ba $f(x)$ có đồ thị là đường cong ở hình bên dưới. Gọi x_1, x_2 lần lượt là hai điểm cực trị thỏa mãn $x_2 = x_1 + 2$ và $f(x_1) - 3f(x_2) = 0$. Đường thẳng song song với trục và qua điểm cực tiểu của đồ thị hàm số tại điểm thứ hai có hoành độ x_0 và $x_1 = x_0 + 1$.

Tính tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$ (S_1, S_2 lần lượt là diện tích hình phẳng được gạch ở hình bên dưới).



A. $\frac{9}{8}$.

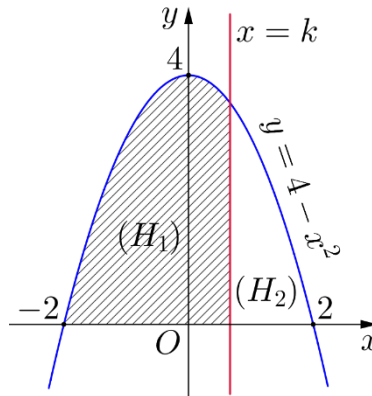
B. $\frac{5}{8}$.

C. $\frac{3}{8}$.

D. $\frac{3}{5}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Trong mặt phẳng Oxy cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi parabol $y = 4 - x^2$ và trục hoành. Đường thẳng $x = k$ ($-2 < k < 2$) chia (H) thành hai phần (H_1) , (H_2) như hình vẽ dưới:



Biết rằng diện tích của hình (H_1) gấp $\frac{20}{7}$ lần diện tích của hình (H_2) , hỏi giá trị của k thuộc khoảng nào sau đây?

- A. $(-2; -1)$. B. $(0; 1)$. C. $(-1; 0)$. D. $(1; 2)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $4 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2 \Rightarrow$ parabol $y = 4 - x^2$ giao với trục hoành tại các điểm có hoành độ lần lượt là -2 và 2 .

$$\text{Diện tích của hình } (H_1) \text{ là } S_1 = \int_{-2}^k (4 - x^2) dx = \left(4x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-2}^k = 4k - \frac{k^3}{3} + \frac{16}{3}.$$

$$\text{Diện tích của hình } (H_2) \text{ là } S_2 = \int_k^2 (4 - x^2) dx = \left(4x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_k^2 = \frac{16}{3} - 4k + \frac{k^3}{3}.$$

Vì diện tích của hình (H_1) gấp $\frac{20}{7}$ lần diện tích của hình (H_2) nên ta có phương trình:

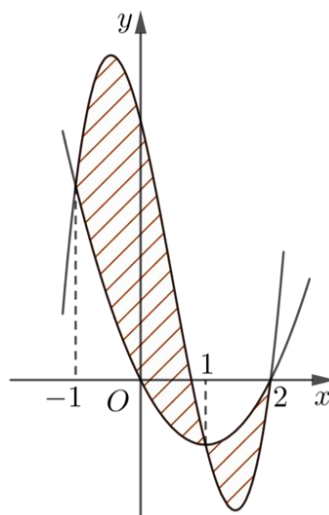
$$\begin{aligned} 4k - \frac{k^3}{3} + \frac{16}{3} &= \frac{20}{7} \left(\frac{16}{3} - 4k + \frac{k^3}{3} \right) \Leftrightarrow 7 \left(4k - \frac{k^3}{3} + \frac{16}{3} \right) = 20 \left(\frac{16}{3} - 4k + \frac{k^3}{3} \right) \\ \Leftrightarrow 9k^3 - 108k + \frac{208}{3} &= 0 \Leftrightarrow \left(k - \frac{2}{3} \right) (9k^2 + 6k - 104) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} k - \frac{2}{3} = 0 \\ 9k^2 + 6k - 104 = 0 \end{cases}. \end{aligned}$$

• Trường hợp 1: $k - \frac{2}{3} = 0 \Leftrightarrow k = \frac{2}{3}$ (thỏa mãn).

• Trường hợp 2: $9k^2 + 6k - 104 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{\pm\sqrt{105} - 1}{3}$ (loại).

Vậy $k \in (0; 1)$.

Câu 2: Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 4$ và $g(x) = mx^2 + nx$ có đồ thị trong hình bên.



Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số trên (phần gạch chéo trong hình vẽ) bằng

A. $\frac{9}{4}$.

B. $\frac{9}{2}$.

C. $\frac{37}{12}$.

D. $\frac{37}{6}$.

Lời giải

Chọn D

Do $f(x)$ là hàm số bậc ba và $g(x)$ là hàm số bậc hai nên $f(x) - g(x)$ là hàm số bậc ba.

Từ đồ thị hàm số ta thấy $f(x) = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$.

Suy ra ta có: $f(x) - g(x) = k \cdot (x+1)(x-1)(x-2)$

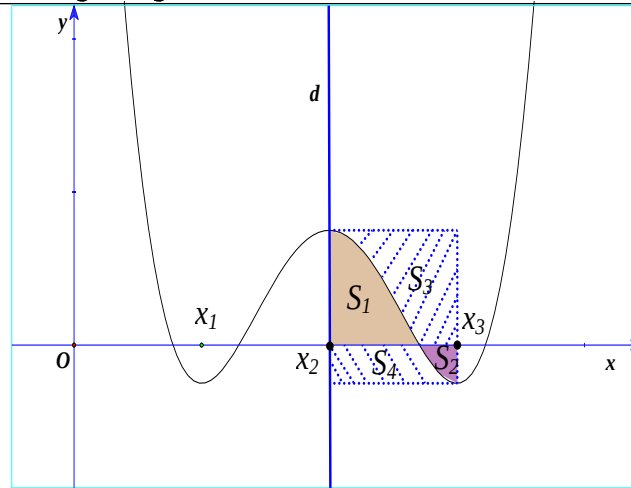
Mặt khác ta có: $f(0) - g(0) = 4 \Rightarrow k = 2$.

$\Rightarrow f(x) - g(x) = 2(x+1)(x-1)(x-2) = 2x^3 - 4x^2 - 2x + 4$

Vậy ta có diện tích phần gạch chéo là:

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^2 |f(x) - g(x)| dx = \int_{-1}^2 |2x^3 - 4x^2 - 2x + 4| dx \\ &= \int_{-1}^1 (2x^3 - 4x^2 - 2x + 4) dx - \int_1^2 (2x^3 - 4x^2 - 2x + 4) dx = \frac{16}{3} + \frac{5}{6} = \frac{37}{6}. \end{aligned}$$

Câu 3: Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị (C) như hình vẽ bên. Biết hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại các điểm x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_3 = x_1 + 2$, $f(x_1) + f(x_3) + \frac{2}{3}f(x_2) = 0$ và (C) nhận đường thẳng $d: x = x_2$ làm trục đối xứng. Gọi S_1, S_2, S_3, S_4 là diện tích của các miền hình phẳng được đánh dấu như hình bên. Tỉ số $\frac{S_1 + S_2}{S_3 + S_4}$ gần kết quả nào nhất?



A. 1.62.

B. 1.68.

C. 1.64.

D. 1.66.

Lời giải

Chọn D

Nhận thấy kết quả bài toán không đổi khi ta tịnh tiến đồ thị (C) sang bên trái sao cho đường thẳng $d: x = x_2$ trùng với trục tung khi đó (C) là đồ thị của hàm trùng phương $y = g(x)$ có ba điểm cực trị $x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1$. Suy ra $y = g(x) = k(x^4 - 2x^2) + c$ ($k > 0$)

$$\text{Lại có } f(x_1) + f(x_3) + \frac{2}{3}f(x_2) = 0 \Rightarrow -2k + 2c + \frac{2}{3}c = 0 \Leftrightarrow c = \frac{3}{4}k$$

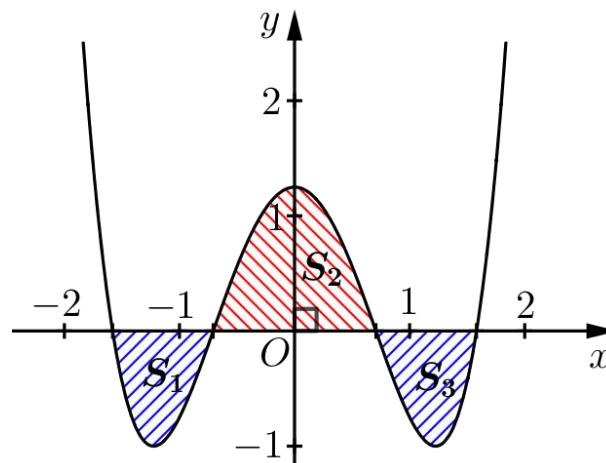
$$\text{Suy ra: } y = g(x) = k(x^4 - 2x^2) + \frac{3}{4}k$$

$$\text{Khi đó: } S_1 + S_2 = k \int_0^1 \left(x^4 - 2x^2 + \frac{3}{4} \right) dx = \frac{28\sqrt{2} - 17}{60}k.$$

$$\text{Ta lại có: } g(0) - g(1) = k \Rightarrow S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = k \cdot 1 = k.$$

$$\text{Suy ra } S_3 + S_4 = k - \frac{28\sqrt{2} - 17}{60}k = \frac{77 - 28\sqrt{2}}{60}k \Rightarrow \frac{S_3 + S_4}{S_1 + S_2} = \frac{77 - 28\sqrt{2}}{28\sqrt{2} - 17} = 1.655 \approx 1.66.$$

Câu 4: Cho hàm số $y = x^4 - 3x^2 + m$ có đồ thị (C_m) , với m là tham số thực. Giả sử (C_m) cắt trục Ox tại bốn điểm phân biệt như hình vẽ dưới:



Gọi $S_1; S_2; S_3$ là diện tích các miền gạch chéo được cho trên hình vẽ. Giá trị của m để $S_1 + S_3 = S_2$ là

A. $m = -\frac{5}{2}$.

B. $m = \frac{5}{4}$.

C. $m = -\frac{5}{4}$.

D. $m = \frac{5}{2}$.

Lời giải**Chọn B**

Hoành độ giao điểm của (C_m) với trục Ox là nghiệm của phương trình: $x^4 - 3x^2 + m = 0$ (1).

Đặt $t = x^2$ ($t \geq 0$), ta được phương trình: $t^2 - 3t + m = 0$ (2)

Phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ Phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt cùng

$$\text{dương} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9 - 4m > 0 \\ 3 > 0 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{9}{4} \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < \frac{9}{4}.$$

Khi đó: Gọi k là nghiệm dương lớn nhất của phương trình (1). Ta có: $k^4 - 3k^2 + m = 0$ (3).

Theo đề bài: $S_1 + S_3 = S_2$ và $S_1 = S_3 \Rightarrow S_2 = 2S_3 \Rightarrow \int_0^k f(x) dx = 0$.

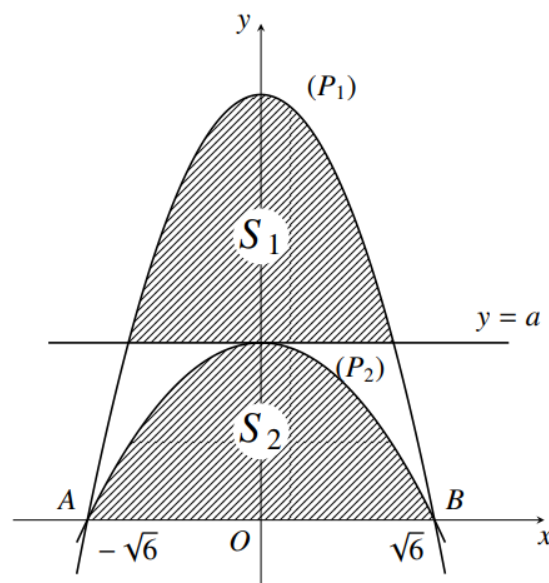
$$\text{Mà } \int_0^k f(x) dx = \int_0^k (x^4 - 3x^2 + m) dx = \left(\frac{x^5}{5} - x^3 + mx \right) \Big|_0^k = \frac{k^5}{5} - k^3 + mk = k \left(\frac{k^4}{5} - k^2 + m \right).$$

$$\text{Suy ra } k \left(\frac{k^4}{5} - k^2 + m \right) = 0 \Leftrightarrow \frac{k^4}{5} - k^2 + m = 0 \text{ (do } k > 0 \text{)} \text{ (4)}.$$

$$\text{Từ (3) và (4) suy ra } k^4 - 3k^2 - \frac{k^4}{5} + k^2 = 0 \Leftrightarrow 2k^4 - 5k^2 = 0 \Leftrightarrow 2k^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow k^2 = \frac{5}{2}.$$

$$\text{Thay } k^2 = \frac{5}{2} \text{ vào (3), ta được: } \left(\frac{5}{2} \right)^2 - 3 \cdot \frac{5}{2} + m = 0 \Leftrightarrow -\frac{5}{4} + m = 0 \Leftrightarrow m = \frac{5}{4} \text{ (thỏa mãn).}$$

Câu 5: Cho parabol $(P_1): y = -x^2 + 6$ cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt A, B và đường thẳng $d: y = a$ ($0 < a < 6$). Xét parabol (P_2) đi qua A, B và có đỉnh thuộc đường thẳng $y = a$. Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P_1) và d ; S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P_2) và trục hoành (tham khảo hình vẽ).



Biết $S_1 = S_2$, tính $T = a^3 - 12a^2 + 108a$.

Lời giải

Chọn C

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $-x^2 + 6 = a$

$$\Leftrightarrow x^2 = 6 - a$$

$$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{6-a}.$$

$$\text{Khi đó } S_1 = 2 \int_0^{\sqrt{6-a}} (-x^2 + 6 - a) dx = 2 \left(-\frac{x^3}{3} + 6x - ax \right) \Big|_0^{\sqrt{6-a}} = \frac{4}{3}(6-a)\sqrt{6-a}.$$

$$\text{Tọa độ giao điểm } A, B \text{ là nghiệm của hệ } \begin{cases} y = -x^2 + 6 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{6} \Rightarrow y = 0 \\ x = -\sqrt{6} \Rightarrow y = 0 \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } A(-\sqrt{6}; 0), B(\sqrt{6}; 0).$$

$$\text{Gọi } (P_2): y = mx^2 + nx + p.$$

Vì parabol (P_2) đi qua A, B và có đỉnh thuộc đường thẳng $y = a$ nên

$$\begin{cases} 6m + \sqrt{6}n + p = 0 \\ 6m - \sqrt{6}n + p = 0 \\ p = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 0 \\ p = a \\ m = -\frac{a}{6} \end{cases} \Rightarrow (P_2): y = -\frac{a}{6}x^2 + a.$$

$$\text{Do đó } S_2 = 2 \int_0^{\sqrt{6}} \left(-\frac{a}{6}x^2 + a \right) dx = 2 \left(-\frac{ax^3}{18} + ax \right) \Big|_0^{\sqrt{6}} = 2 \left(-\frac{\sqrt{6}a}{3} + \sqrt{6}a \right) = \frac{4\sqrt{6}a}{3}.$$

Theo

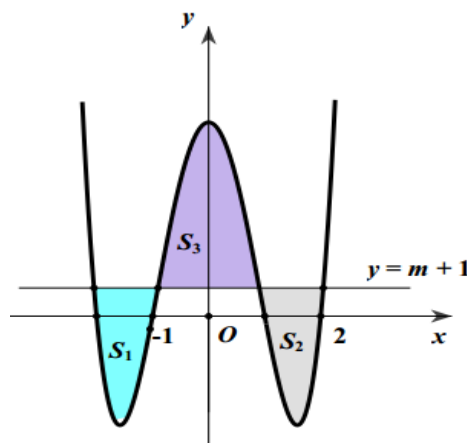
đề

bài

$$S_1 = S_2 \Leftrightarrow \frac{4}{3}(6-a)\sqrt{6-a} = \frac{4\sqrt{6}a}{3} \Leftrightarrow (6-a)^3 = 6a^2 \Leftrightarrow 216 - 108a + 18a^2 - a^3 = 6a^2$$

$$\Leftrightarrow a^3 - 12a^2 + 108a = 216.$$

Câu 6: Đồ thị của hàm số $y = x^4 - 5x^2 + 4$ cắt đường thẳng $d: y = m + 1$ tại bốn điểm phân biệt và tạo ra các hình phẳng có diện tích S_1, S_2, S_3 . Biết rằng khi $S_1 + S_2 = S_3$ thì m là một số hữu tỉ được viết dưới dạng phân số tối giản $m = -\frac{a}{b}$ với $a, b \in \mathbb{N}^*$. Giá trị của $P = b - a$ bằng



A. 19.

B. 21.

C. 53.

D. 17.

Lời giải

Chọn A

Để d cắt tại bốn điểm phân biệt thì $-\frac{13}{4} < m < 3$.

Giả sử PT có bốn nghiệm phân biệt $x_1 < x_2 < 0 < x_3 < x_4$.

Do tính đối xứng của đồ thị nên từ giả thiết $S_1 + S_2 = S_3$ nên $S_2 = \frac{S_3}{2}$

$$\int_0^{x_3} (x^4 - 5x^2 + 3 - m) dx = -\int_{x_3}^{x_4} (x^4 - 5x^2 + 3 - m) dx \Leftrightarrow \int_0^{x_4} (x^4 - 5x^2 + 3 - m) dx = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x^5}{5} - \frac{5x^3}{3} + (3-m)x \right) \Big|_0^{x_4} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{5}x_4^5 - \frac{5}{3}x_4^3 + (3-m)x_4 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{5}x_4^4 - \frac{5}{3}x_4^2 + 3 - m = 0$$

$$\text{Mà } x_4 \text{ là nghiệm của PT nên ta có } \begin{cases} x_4^4 - 5x_4^2 + 3 - m = 0 \\ \frac{1}{5}x_4^4 - \frac{5}{3}x_4^2 + 3 - m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_4^2 = \frac{25}{6} \\ m = -\frac{17}{36} \end{cases}$$

Vậy $P = b - a = 36 - 17 = 19$.

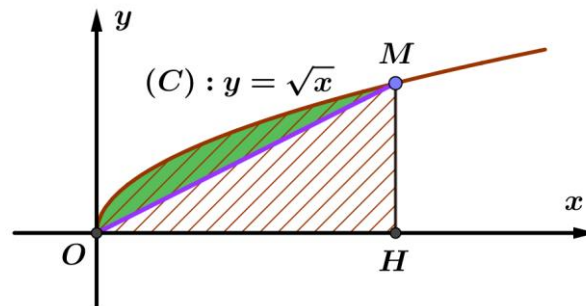
Câu 7: Cho hàm số $y = \sqrt{x}$ có đồ thị (C) và điểm M thuộc (C) có hoành độ dương. Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) , trục hoành và đường thẳng đi qua M vuông góc với trục hoành; S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và đường thẳng OM . Biết $\frac{S_2}{S_1} = \frac{a}{b}$, giá trị của $a + b$ bằng

A. 5.

B. 6.

C. 19.

D. 21.

Lời giải**Chọn A**

Gọi $M(a; \sqrt{a}) \in (C)$, $a > 0$. Ta có: $S_1 = \int_0^a \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} a\sqrt{a}$;

$S_2 = S_1 - S_{\Delta OMH} = \frac{2}{3} a\sqrt{a} - \frac{1}{2} a\sqrt{a} = \frac{1}{6} a\sqrt{a}$ với H là hình chiếu của M lên trục Ox .

Suy ra $\frac{S_2}{S_1} = \frac{1}{4}$. Vậy $a + b = 5$.

Câu 8: Hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị (C_1) đi qua điểm $A(1; 0)$; hàm số bậc hai $y = g(x)$ có đồ thị (C_2) đi qua điểm $B(1; -4)$. $(C_1), (C_2)$ cắt nhau tại 3 điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là $-1; 2; 3$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị $(C_1), (C_2)$?

A. $\frac{115}{3}$.

B. $\frac{32}{3}$.

C. $\frac{71}{6}$.

D. $\frac{112}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Vì $(C_1), (C_2)$ cắt nhau tại 3 điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là $-1; 2; 3$ nên đa thức bậc ba $f(x) - g(x)$ có ba nghiệm $-1; 2; 3$. Do đó, $f(x) - g(x) = a(x+1)(x-2)(x-3)$, với $a \neq 0$.

Mặt khác vì (C_1) đi qua điểm $A(1; 0)$; (C_2) đi qua điểm $B(1; -4)$ nên $f(1) = 0, g(1) = -4$.

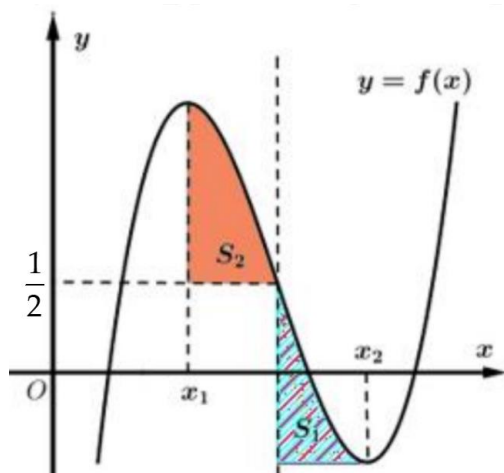
Do đó, $f(1) - g(1) = 4$

Suy ra $a(1+1)(1-2)(1-3) = 4$ hay $a = 1$.

Khi đó diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị $(C_1), (C_2)$ là

$$\int_{-1}^2 |(x+1)(x-2)(x-3)| dx + \int_2^3 |(x+1)(x-2)(x-3)| dx = \frac{71}{6} \text{ (đvdt)}.$$

Câu 9: Cho hàm số bậc ba $f(x)$ có đồ thị hàm số như hình vẽ bên. Biết hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại hai điểm x_1, x_2 thỏa mãn $x_2 = x_1 + 2$ và $f(x_1) + f(x_2) = 1$. Gọi S_1, S_2 là diện tích của hai hình phẳng được cho trong hình vẽ bên. Tính tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$.



A. $\frac{5}{4}$.

B. $\frac{3}{5}$.

C. $\frac{3}{8}$.

D. $\frac{5}{3}$.

Lời giải

Chọn B

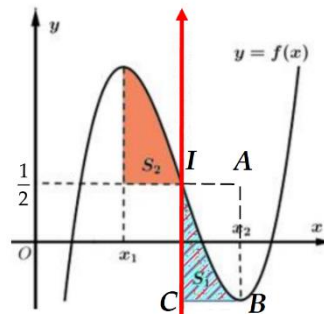
Không mất tính tổng quát, tịnh tiến đồ thị hàm bậc ba $y = f(x)$ sao cho điểm uốn của đồ thị thuộc trục tung $\Rightarrow x_1 + x_2 = 0$. Lại có $x_2 = x_1 + 2$ nên $x_1 = -1, x_2 = 1$.

Theo giả thiết, ta có $f'(x) = k(x-1)(x+1) = k(x^2 - 1)$ với $k > 0$.

Suy ra $f(x) = k\left(\frac{x^3}{3} - x\right) + C$.

Do $f(-1) + f(1) = 1 \Leftrightarrow \frac{2k}{3} + C - \frac{2k}{3} + C = 1 \Leftrightarrow C = \frac{1}{2}$

Suy ra $f(x) = k\left(\frac{x^3}{3} - x\right) + \frac{1}{2}$ và $f(x_2) = f(1) = -\frac{2k}{3} + \frac{1}{2}$.



$$\text{Ta có } S_2 = \int_{-1}^0 \left[f(x) - \frac{1}{2} \right] dx = \int_{-1}^0 k \left(\frac{x^3}{3} - x \right) dx = \frac{5k}{12}.$$

$$\text{Xét } \frac{S_1}{S_2} = \frac{S_{IABC} - S_2}{S_2} = \frac{BC \cdot IC}{S_2} - 1 = \frac{1 \cdot \left| \frac{1}{2} - f(1) \right|}{S_2} - 1 = \frac{\frac{2k}{3}}{\frac{5k}{12}} - 1 = \frac{3}{5}.$$

Câu 10: Cho parabol $(P): y = -4x^2$ và hai điểm A, B trên (P) sao cho đoạn $AB = 2$. Tìm diện tích lớn nhất của hình phẳng giới hạn bởi (P) và đường thẳng AB .

A. $\frac{16}{3}$.

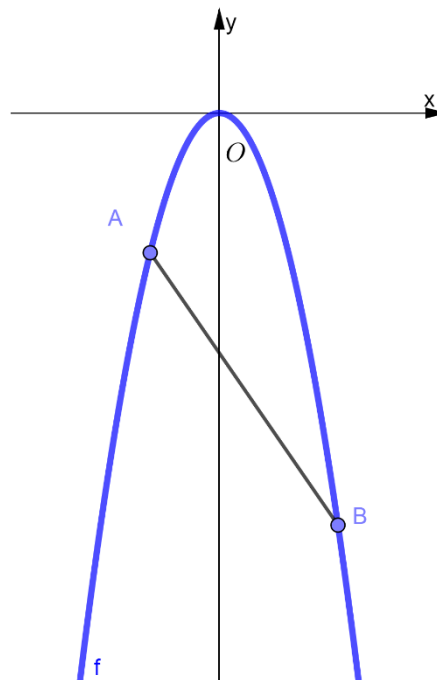
B. $\frac{4}{3}$.

C. $\frac{32}{3}$.

D. 4.

Lời giải

Chọn A



+) Giả sử $A(a; -4a^2) \in (P)$, $B(b; -4b^2) \in (P)$ và $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$

+) Phương trình đường thẳng AB là $y = -4(b+a)(x-a) - 4a^2$

$$y = -4(b+a)x + 4ab$$

+) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P) và đường thẳng AB là

$$S = \int_a^b \left[-4x^2 + 4(a+b)x - 4ab \right] dx = \left[-\frac{4x^3}{3} + 2(a+b)x^2 - 4abx \right]_a^b = \frac{2}{3}b^3 - \frac{2}{3}a^3 + 2a^2b - 2ab^2$$

$$= \frac{2}{3}(b^3 - a^3 + 3a^2b - 3ab^2) = \frac{2}{3}(b-a)^3$$

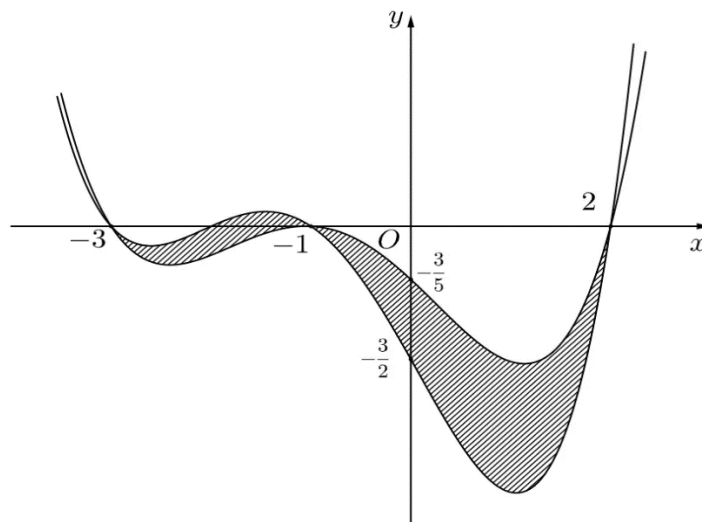
$$+) \text{ Mà } AB = 2 \Rightarrow (b-a)^2 + 16(b^2 - a^2)^2 = 4 \Leftrightarrow (b-a)^2 = \frac{4}{1+16(b+a)^2} \leq 4 \Rightarrow -2 \leq b-a \leq 2$$

$$\text{Do đó } S \leq \frac{16}{3}.$$

$$\text{Dấu bằng khi } \begin{cases} a+b=0 \\ b-a=2 \\ b-a=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \\ a=1 \\ b=-1 \end{cases} \dots$$

$$\text{Vậy GTLN của } S \text{ là } \frac{16}{3}.$$

Câu 11: Cho hình phẳng (H) được giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số đa thức bậc bốn $y = f(x)$ và $y = g(x)$. Biết rằng đồ thị của hai hàm số cắt nhau tại hai điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là $-1; 2$ và tiếp xúc với nhau tại điểm có hoành độ bằng -3 . Diện tích hình phẳng (H) (Phần gạch sọc trên hình vẽ bên) gần với kết quả nào dưới đây?



A. 3,11.

B. 2,45.

C. 3,21.

D. 2,95.

Lời giải

Chọn A

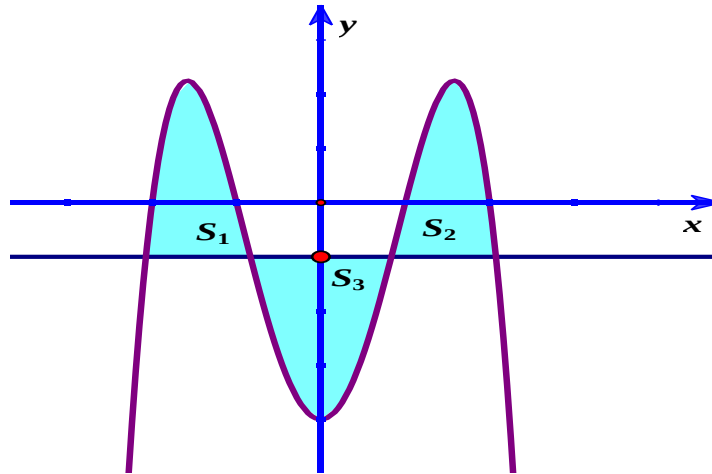
Theo giả thiết tại điểm có hoành độ $x = -3$ hai đồ thị hàm số này tiếp xúc nhau nên ta có:

$$f(x) - g(x) = \frac{1}{-18} \left(-\frac{3}{2} - \left(-\frac{3}{5} \right) \right) (x+3)^2 (x+1)(x-2).$$

Khi đó, Diện tích hình phẳng (H) (Phần gạch sọc trên hình vẽ) là:

$$S_{(H)} = \int_{-3}^2 \left[\frac{1}{-18} \left(-\frac{3}{2} - \left(-\frac{3}{5} \right) \right) (x+3)^2 (x+1)(x-2) \right] dx = \frac{3733}{1200} \approx 3,11.$$

Câu 12: Đồ thị (C) của hàm số $y = -x^4 + 5x^2 - 4$ cắt đường thẳng $(d): y = m$ tại bốn điểm phân biệt và tạo ra các hình phẳng có diện tích S_1, S_2, S_3 (như hình vẽ).



Biết rằng khi $S_1 + S_2 = S_3$ thì giá trị của m là một số hữu tỉ được viết dưới dạng phân số tối giản

$\frac{p}{q}$, trong đó $q \in \mathbb{N}^*$, $p \in \mathbb{Z}$. Tính $T = p + q$.

A. $T = 55$.

B. $T = 17$.

C. $T = -55$.

D. $T = -17$.

Lời giải

Chọn B

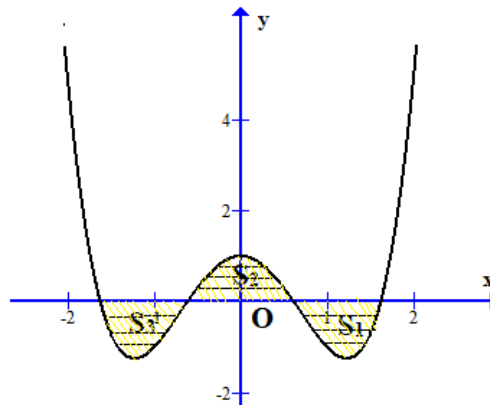
Giả sử (C_m) cắt (d) tại bốn điểm phân biệt có hoành độ là $-x_2$; $-x_1$; x_1 ; x_2 ($0 < x_1 < x_2$)

Do (C_m) đối xứng nhau qua trục Oy nên $S_1 = S_2 = \frac{1}{2}S_3$

$$\Rightarrow -\int_0^{x_1} (f(x) - m) dx = \int_{x_1}^{x_2} (f(x) - m) dx \Leftrightarrow \int_0^{x_2} (f(x) - m) dx = 0 \Leftrightarrow -\frac{x_2^5}{5} + \frac{5x_2^3}{3} - (4+m)x_2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{x_2^4}{5} + \frac{5x_2^2}{3} - 4 - m = 0 \text{ (do } x_2 \neq 0 \text{)}.$$

Câu 13: Cho hàm số $y = x^4 - 3x^2 + m$ có đồ thị (C_m) , với m là tham số thực. Giả sử (C_m) cắt trục Ox tại bốn điểm phân biệt như hình vẽ



Gọi S_1, S_2, S_3 là diện tích các phần gạch được cho trên hình vẽ. Giá trị của m để $S_1 + S_3 = S_2$ là

A. $m = -\frac{5}{2}$.

B. $m = \frac{5}{4}$.

C. $m = -\frac{5}{4}$.

D. $m = \frac{5}{2}$.

Lời giải

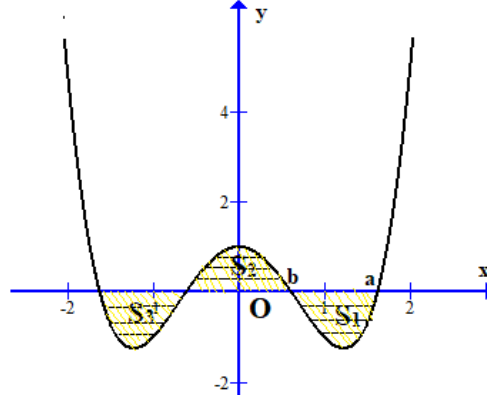
Chọn B

Ta có phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và trục Ox là $x^4 - 3x^2 + m = 0$ (*)

(C_m) cắt trục Ox tại bốn điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình $t^2 - 3t + m = 0$, với

$$(t = x^2, t \geq 0) \text{ có hai nghiệm dương phân biệt} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 9 - 4m > 0 \\ P = m > 0 \\ S = 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < \frac{9}{4}$$

Gọi $x = a, x = b$ ($b < a$) là hai nghiệm dương của phương trình (*), suy ra $a^4 - 3a^2 + m = 0$ (1)



$$\begin{aligned} \text{Do } \begin{cases} S_1 = S_3 \\ S_1 + S_3 = S_2 \end{cases} \text{ ta có } \frac{1}{2} S_2 = S_1 &\Leftrightarrow \int_0^b |f(x)| dx = \int_b^a |f(x)| dx \Leftrightarrow \int_0^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx \\ &\Leftrightarrow \int_0^a f(x) dx = 0 \Leftrightarrow \int_0^a (x^4 - 3x^2 + m) dx = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{5} a^5 - a^3 + ma = 0 \Leftrightarrow a^4 - 5a^2 + 5m = 0 \quad (2) \end{aligned}$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta có } \begin{cases} a^4 - 3a^2 + m = 0 \\ a^4 - 5a^2 + 5m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^4 - 3a^2 + m = 0 \\ 4a^4 - 10a^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{5}{4} \\ a^2 = \frac{5}{2} \end{cases}$$

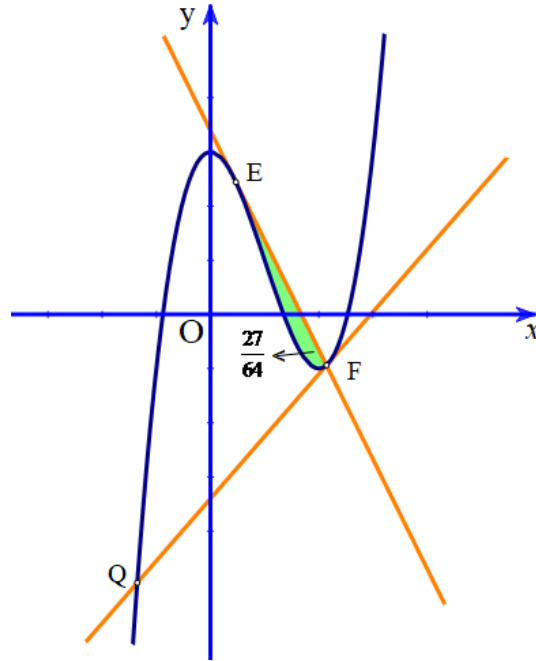
Kết hợp điều kiện có nghiệm, vậy $m = \frac{5}{4}$.

Câu 14: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 3$ có đồ thị (C) . Gọi E là một điểm thuộc (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại E cắt (C) tại điểm thứ hai F và diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường thẳng EF với (C) bằng $\frac{27}{64}$. Tiếp tuyến của (C) tại F cắt (C) tại điểm thứ hai Q . Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường thẳng FQ với (C) bằng

A. $\frac{27}{4}$. B. $\frac{27}{8}$. C. $\frac{459}{64}$. D. $\frac{135}{64}$.

Lời giải

Chọn A



Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị là (C) , $M(x_M; y_M) \in (C)$ bất kỳ và không trùng với điểm uốn của đồ thị. Khi đó

Bổ đề 1: Tiếp tuyến của (C) tại điểm M sẽ cắt đồ thị tại điểm thứ hai $N(x_N; y_N)$ và

$$x_N + \frac{b}{3a} = -2\left(x_M + \frac{b}{3a}\right)$$

Bổ đề 2: Gọi S là hình phẳng giới hạn bởi tiếp tuyến của đồ thị (C) tại M với đồ thị (C) . Ta có

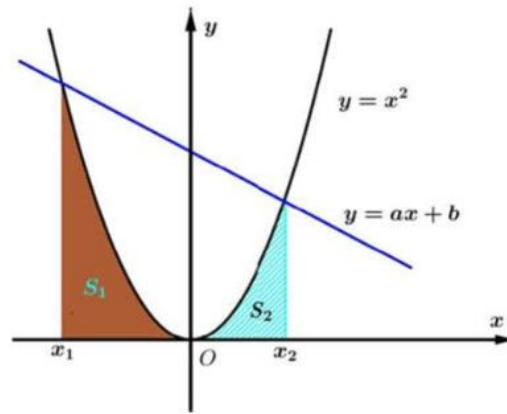
$$S = \left| \frac{27}{4} a \left(x_M + \frac{b}{3a} \right)^4 \right|$$

Áp dụng ($E \equiv M, N \equiv F$)

$$\text{ta có } \frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{27}{4} |a| \left(x_M + \frac{b}{3a} \right)^4}{\frac{27}{4} |a| \left(x_N + \frac{b}{3a} \right)^4} = \left(\frac{x_M + \frac{b}{3a}}{x_N + \frac{b}{3a}} \right)^4 = \left(\frac{x_M + \frac{b}{3a}}{-2\left(x_M + \frac{b}{3a}\right)} \right)^4 = \frac{1}{16}$$

$$\text{Vậy } S_2 = 16S_1 = 16 \cdot \frac{27}{64} = \frac{27}{4}.$$

Câu 15: Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = f(x) = ax + b$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Biết parabol (P) và đường thẳng (d) cắt nhau tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $x_2 = x_1 + 3$ và $f(x_1) + f(x_2) = 5$. Gọi S_1, S_2 là diện tích hình phẳng được gạch trong hình. Tổng $S_1 + S_2$ bằng



A. $\frac{7}{3}$.

B. $\frac{1}{3}$.

C. 3.

D. $\frac{8}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) : $x^2 = ax + b \Leftrightarrow x^2 - ax - b = 0$

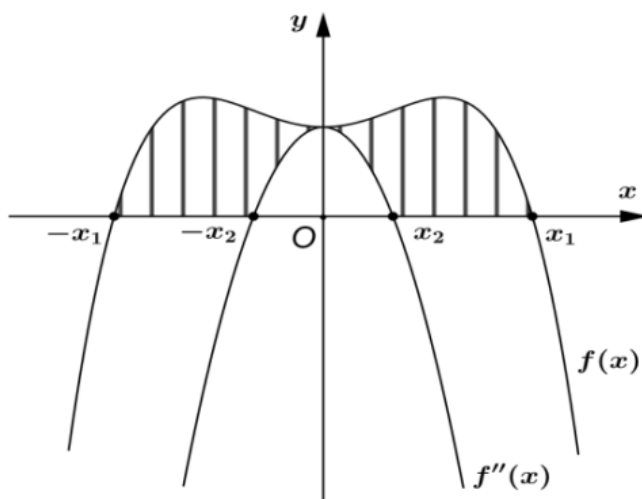
Khi đó x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình (1) nên $x_1 + x_2 = a$; $x_1 x_2 = -b$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} x_2 - x_1 = 3 \\ f(x_1) + f(x_2) = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 - x_1 = 3 \\ 5 = x_1^2 + x_2^2 = (x_2 - x_1)^2 + 2x_1 x_2 = 9 - 2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 - x_1 = 3 \\ b = 2 \end{cases}.$$

Từ đồ thị ta có

$$S_1 + S_2 = \int_{x_1}^{x_2} x^2 dx = \frac{x_2^3 - x_1^3}{3} = \frac{(x_2 - x_1)^3 + 3x_1 x_2 (x_2 - x_1)}{3} = \frac{3^3 + 9(-b)}{3} = 3.$$

Câu 16: Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^2 + 1$, ($a \neq 0, a, b \in \mathbb{R}$) mà đồ thị hàm số $f''(x)$ và đồ thị hàm số $f(x)$ có một điểm chung duy nhất và nằm trên trục Oy (hình vẽ), trong đó $\pm x_1$ là nghiệm của $f(x)$ và $\pm x_2$ là nghiệm của $f''(x)$, ($x_1, x_2 > 0$). Biết $x_1 = 3x_2$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị $f(x)$, $f''(x)$ và trục Ox .



A. $\frac{152}{45}$.

B. $\frac{73}{15}$.

C. $\frac{152}{15}$.

D. $\frac{73}{45}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f(x) = ax^4 + bx^2 + 1 \Rightarrow f''(x) = 12ax^2 + 2b$, ($a \neq 0, a, b \in \mathbb{R}$).

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị $f(x)$ và $f''(x)$ là $ax^4 + bx^2 + 1 = 12ax^2 + 2b$.

Theo bài ra ta có $x=0$ là nghiệm của phương trình nên $2b=1 \Leftrightarrow b=\frac{1}{2}$. Do đó

$$f(x) = ax^4 + \frac{1}{2}x^2 + 1, f''(x) = 12ax^2 + 1.$$

Ta có $f''(x)=0 \Leftrightarrow 12ax^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -\frac{1}{12a}$, có nghiệm khi $a < 0$ nên $x_2^2 = -\frac{1}{12a}$ với $a < 0$.

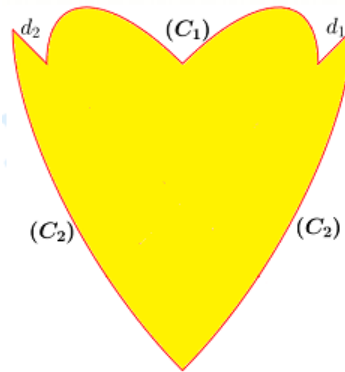
Do $a < 0$ nên $\frac{-1 - \sqrt{1-16a}}{4a} > 0, \frac{-1 + \sqrt{1-16a}}{4a} < 0$ do đó $x_1^2 = \frac{-1 - \sqrt{1-16a}}{4a}$.

Ta có $x_1 = 3x_2$ nên $x_1^2 = 9x_2^2 \Leftrightarrow \frac{-1 - \sqrt{1-16a}}{4a} = -\frac{9}{12a} \Leftrightarrow 1 + \sqrt{1-16a} = 3 \Leftrightarrow a = -\frac{3}{16}$

Do vậy $f(x) = -\frac{3}{16}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + 1, f''(x) = -\frac{9}{4}x^2 + 1, x_1^2 = 4, x_2^2 = \frac{4}{9}$ nên diện tích hình phẳng

$$\text{cần tính là } \int_{-2}^2 \left(-\frac{3}{16}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + 1 \right) dx - \int_{-\frac{2}{3}}^{\frac{2}{3}} \left(-\frac{9}{4}x^2 + 1 \right) dx = \frac{152}{45}.$$

Câu 17: Hình (H) được cho dưới đây là hình phẳng được giới hạn bởi hai đường $(C_1): y = |x| + \sqrt{16-x^2}$, $(C_2): y = |x| - \sqrt{25-x^2}$ và hai đoạn thẳng $(d_1): y = x$ với $x \in [4; 5], (d_2): y = -x$ với $x \in [-5; -4]$. Tính diện tích S của hình (H).



A. $\frac{41\pi}{2}$.

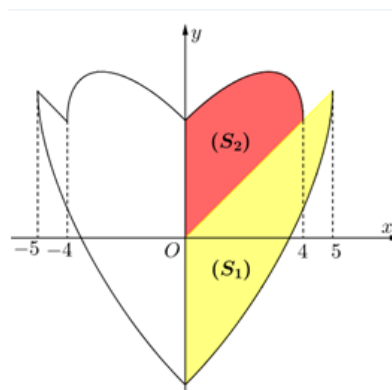
B. $\frac{41\pi}{4}$.

C. $\frac{41}{2}$.

D. $\frac{41}{4}$.

Lời giải

Chọn A



Xét phương trình

$$|x| + \sqrt{16 - x^2} = x, x \in [4; 5] \Leftrightarrow x + \sqrt{16 - x^2} = x, x \in [4; 5]$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{16 - x^2} = 0, x \in [4; 5] \Leftrightarrow x = 4$$

Xét phương trình

$$|x| + \sqrt{25 - x^2} = x, x \in [4; 5] \Leftrightarrow x + \sqrt{25 - x^2} = x, x \in [4; 5]$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{25 - x^2} = 0, x \in [4; 5] \Leftrightarrow x = 5$$

Gọi S_1 là diện tích hình phẳng được giới hạn bởi các đường $y = x - \sqrt{25 - x^2}, y = x, x = 0, x = 5$

được tô màu trong hình bên, suy ra $S_1 = \int_0^5 \left(x - \left(x - \sqrt{25 - x^2} \right) \right) dx = \int_0^5 \sqrt{25 - x^2} dx$.

Đặt $x = 5 \cos t \Rightarrow dx = -5 \sin t dt$. Với $x = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$; $x = 5 \Rightarrow t = 0$.

Vậy:

$$S_1 = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sqrt{25 - 25 \cos^2 t} (-5 \sin t) dt = 25 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt = \frac{25}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2t) dt = \frac{25}{2} \left(t - \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{25}{4} \pi$$

Gọi S_2 là diện tích hình phẳng được giới hạn bởi các đường $y = x + \sqrt{16 - x^2}, y = x, x = 0, x = 4$

được tô màu trong hình bên, suy ra $S_2 = \int_0^4 \left(\left(x + \sqrt{16 - x^2} \right) - x \right) dx = \int_0^4 \sqrt{16 - x^2} dx$.

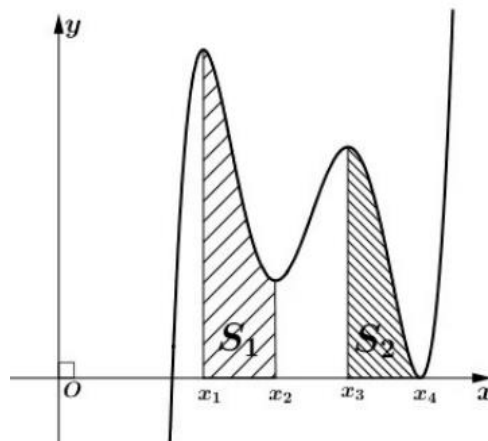
Đặt $x = 4 \cos t \Rightarrow dx = -4 \sin t dt$. Với $x = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$; $x = 4 \Rightarrow t = 0$.

Vậy:

$$S_2 = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sqrt{16 - 16 \cos^2 t} (-4 \sin t) dt = 16 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt = 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2t) dt = 8 \left(t - \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 4\pi$$

Diện tích cần tính bằng $S = 2(S_1 + S_2) = \frac{41}{2} \pi$.

Câu 18: Cho hàm đa thức bậc năm $y = f(x)$ có đồ thị hàm số như hình vẽ. Biết x_1, x_2, x_3, x_4 theo thứ tự lập thành cấp số cộng có công sai $d = 1$. Tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$ bằng



A. $\frac{16}{9}$.

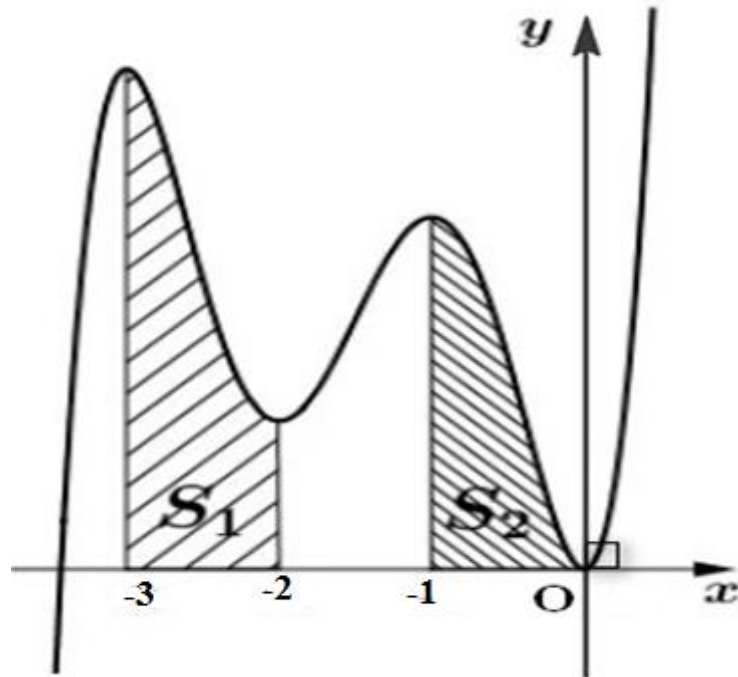
B. $\frac{8}{5}$.

C. $\frac{11}{7}$.

D. $\frac{17}{11}$.

Lời giải

Chọn C



Tịnh tiến đồ thị hàm số $y = f(x)$ sang trái x_4 đơn vị, ta được đồ thị hàm số $y = g(x)$

Ta thấy x_1, x_2, x_3, x_4 là cực trị của hàm số $y = f(x)$ mà x_1, x_2, x_3, x_4 lập thành cấp số cộng có công sai

$d = 1 \Rightarrow$ Hàm số $y = g(x)$ có bốn điểm cực trị là $0; -1; -2; -3$

$$g'(x) = kx(x+1)(x+2)(x+3) = k(x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x)$$

$$g(x) = \int k(x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x)dx = k\left(\frac{x^5}{5} + \frac{3}{2}x^4 + \frac{11}{3}x^3 + 3x^2\right) + C$$

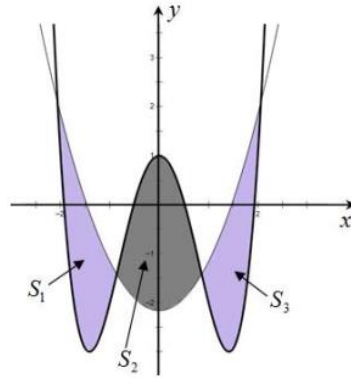
$$g(0) = 0 \Rightarrow C = 0 \quad g(x) = k\left(\frac{x^5}{5} + \frac{3}{2}x^4 + \frac{11}{3}x^3 + 3x^2\right)$$

$$\Rightarrow S_1 = \int_{-3}^{-2} |g(x)|dx = k \int_{-3}^{-2} \left(\frac{x^5}{5} + \frac{3}{2}x^4 + \frac{11}{3}x^3 + 3x^2\right)dx = \frac{11k}{20}$$

$$\Rightarrow S_2 = \int_{-1}^0 |g(x)|dx = k \int_{-1}^0 \left(\frac{x^5}{5} + \frac{3}{2}x^4 + \frac{11}{3}x^3 + 3x^2\right)dx = \frac{7k}{20}$$

$$\Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = \frac{11}{7}$$

Câu 19: Cho hàm số bậc bốn $y = x^4 - 4x^2 + 1$ và parabol $y = x^2 - k$, với $k \in \mathbb{R}$ có đồ thị như hình bên dưới.



Gọi S_1, S_2, S_3 lần lượt là diện tích của phần hình phẳng được tô đậm tương ứng trong hình vẽ. Khi $S_1 + S_3 = S_2$ thì k thuộc khoảng nào dưới đây?

- A. $\left(0; \frac{3}{7}\right)$. B. $\left(\frac{9}{5}; \frac{11}{4}\right)$. C. $\left(\frac{11}{4}; 3\right)$. D. $\left(\frac{3}{7}; \frac{9}{5}\right)$.

Lời giải

Chọn B

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị:

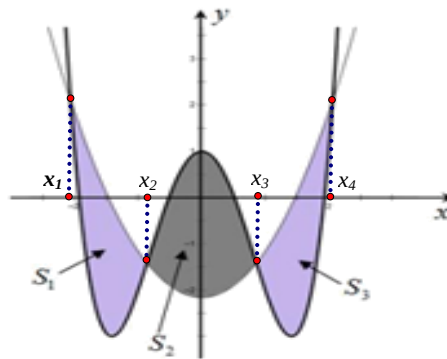
$$x^4 - 4x^2 + 1 = x^2 - k \Leftrightarrow x^4 - 5x^2 + 1 + k = 0 \quad (1).$$

Đặt $t = x^2, t > 0$ phương trình (1) trở thành $t^2 - 5t + 1 + k = 0 \quad (2)$.

Theo bài ra thì phương trình (2) phải có 2 nghiệm phân biệt $t > 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 25 - 4(1+k) > 0 \\ 5 > 0 \\ 1+k > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k < \frac{21}{4} \\ k > -1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < k < \frac{21}{4} \quad (*)$$

Khi đó hai đồ thị giao nhau tại các điểm có hoành độ lần lượt là x_1, x_2, x_3, x_4 , với x_1, x_2, x_3, x_4 là nghiệm của phương trình (1)



Do $S_1 = S_3$ và $S_1 + S_3 = S_2$ nên $S_2 = 2S_1$.

Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^4 - 5x^2 + (1+k)$

$$\text{Diện tích } S_1 = \int_{x_1}^{x_2} |x^4 - 5x^2 + (1+k)| dx = -F(x) \Big|_{x_1}^{x_2} = -[F(x_2) - F(x_1)].$$

$$\text{Diện tích } S_2 = \int_{x_2}^{x_3} |x^4 - 5x^2 + (1+k)| dx = F(x) \Big|_{x_2}^{x_3} = F(x_3) - F(x_2)$$

Ta có

$$2S_1 = S_2 \Leftrightarrow -2 \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = \int_{x_2}^{x_3} f(x) dx$$

$$\Leftrightarrow -2[F(x_2) - F(x_1)] = F(x_3) - F(x_2) \Leftrightarrow 2F(x_1) = F(x_2) + F(x_3) \quad (3)$$

Do $F(x)$ là hàm số lẻ và $x_2 = -x_3$ nên từ (3) suy ra $F(x_1) = 0$

Ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} f(x_1) = 0 \\ F(x_1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^4 - 5x_1^2 + 1 + k = 0 \\ \frac{x_1^5}{5} - \frac{5}{3}x_1^3 + (1+k)x_1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1^4 + 5x_1^2 + 1 + k = 0 \\ \frac{x_1^4}{5} - \frac{5}{3}x_1^2 + 1 + k = 0 \quad (x_1 \neq 0) \end{cases} \Rightarrow -\frac{4}{5}x_1^4 - \frac{100}{3}x_1^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_1^2 = \frac{25}{6} \end{cases} \Leftrightarrow x_1^2 = \frac{25}{6} \quad (\text{Vì } x_1 \neq 0).$$

Thay vào (1) ta được $\left(\frac{25}{6}\right)^2 - 5\left(\frac{25}{6}\right) + 1 + k = 0 \Leftrightarrow k = \frac{89}{36} \approx 2,42$.

Cách 2

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị $x^4 - 4x^2 + 1 = x^2 - k \Leftrightarrow x^4 - 5x^2 + 1 + k = 0$ (1).

Đặt $t = x^2$, $t > 0$ phương trình (1) trở thành $t^2 - 5t + 1 + k = 0$ (2).

Theo bài ra thì phương trình (2) phải có 2 nghiệm $t > 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 25 - 4(1+k) > 0 \\ 5 > 0 \\ 1+k > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k < \frac{21}{4} \\ k > -1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < k < \frac{21}{4} \quad (*)$$

Khi đó hai đồ thị giao nhau tại các điểm có hoành độ lần lượt là x_1, x_2, x_3, x_4 , với x_1, x_2, x_3, x_4 là nghiệm của phương trình (1)

Giả sử (2) có 2 nghiệm t_1, t_2 ($0 < t_1 < t_2$) thì (1) có 4 nghiệm viết theo thứ tự từ bé đến lớn là $-\sqrt{t_2}; -\sqrt{t_1}; \sqrt{t_1}; \sqrt{t_2}$.

Áp dụng định lý Vi-et cho phương trình (2) ta có $\begin{cases} t_1 + t_2 = 5 \\ t_1 t_2 = k + 1 \end{cases}$.

Ta có

$$\begin{aligned} S_1 + S_3 &= \int_{-\sqrt{t_2}}^{-\sqrt{t_1}} (-x^4 + 5x^2 - k - 1) dx + \int_{\sqrt{t_1}}^{\sqrt{t_2}} (-x^4 + 5x^2 - k - 1) dx = 2 \int_{\sqrt{t_1}}^{\sqrt{t_2}} (-x^4 + 5x^2 - k - 1) dx \\ &= 2 \left(-\frac{x^5}{5} + \frac{5x^3}{3} - kx - x \right) \Big|_{\sqrt{t_1}}^{\sqrt{t_2}} \\ &= 2 \left(-\frac{\sqrt{t_2}^5}{5} + \frac{5\sqrt{t_2}^3}{3} - k\sqrt{t_2} - \sqrt{t_2} \right) - 2 \left(-\frac{\sqrt{t_1}^5}{5} + \frac{5\sqrt{t_1}^3}{3} - k\sqrt{t_1} - \sqrt{t_1} \right) \\ &= 2 \left(\frac{\sqrt{t_1}^5}{5} - \frac{5\sqrt{t_1}^3}{3} + k\sqrt{t_1} + \sqrt{t_1} \right) + 2 \left(-\frac{\sqrt{t_2}^5}{5} + \frac{5\sqrt{t_2}^3}{3} - k\sqrt{t_2} - \sqrt{t_2} \right) \end{aligned}$$

$$\text{Lại có: } \int_{-\sqrt{t_1}}^{\sqrt{t_1}} (x^4 - 5x^2 + k + 1) dx = \left(\frac{x^5}{5} - \frac{5x^3}{3} + kx + x \right) \Big|_{-\sqrt{t_1}}^{\sqrt{t_1}} = 2 \left(\frac{\sqrt{t_1}^5}{5} - \frac{5\sqrt{t_1}^3}{3} + k\sqrt{t_1} + \sqrt{t_1} \right)$$

$$S_1 + S_3 = S_2$$

$$\Leftrightarrow 2 \left(\frac{\sqrt{t_1}^5}{5} - \frac{5\sqrt{t_1}^3}{3} + k\sqrt{t_1} + \sqrt{t_1} \right) + 2 \left(-\frac{\sqrt{t_2}^5}{5} + \frac{5\sqrt{t_2}^3}{3} - k\sqrt{t_2} - \sqrt{t_2} \right) = 2 \left(\frac{\sqrt{t_1}^5}{5} - \frac{5\sqrt{t_1}^3}{3} + k\sqrt{t_1} + \sqrt{t_1} \right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{t_2}^5}{5} - \frac{5\sqrt{t_2}^3}{3} + k\sqrt{t_2} + \sqrt{t_2} \right) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{t_2^2}{5} - \frac{5}{3}t_2 + k + 1 \right) = 0 \quad (**) \quad (\text{do } t_2 > 0).$$

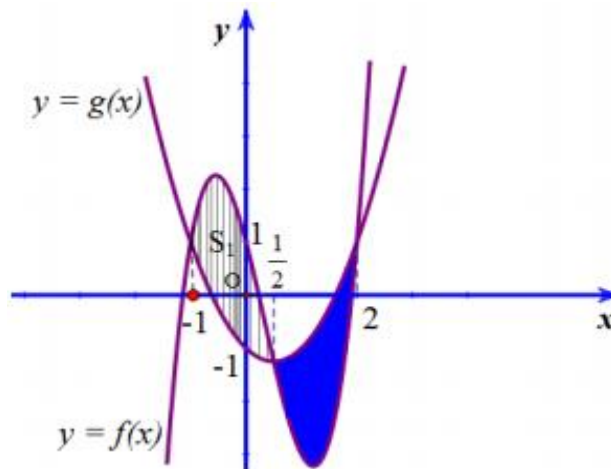
Mặt khác t_2 là nghiệm của phương trình (2) $\Rightarrow t_2^2 = 5t_2 - k - 1$. Thế vào (**) ta được

$$\frac{5t_2 - k - 1}{5} - \frac{5}{3}t_2 + k + 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{-2}{3}t_2 = \frac{-4}{5}(k + 1) \Leftrightarrow t_2 = \frac{6}{5}(k + 1) \Rightarrow t_1 = 5 - t_2 = \frac{19}{5} - \frac{6}{5}k$$

$$\text{Ta có } t_1 t_2 = k + 1 \Leftrightarrow \left(\frac{19}{5} - \frac{6}{5}k \right) \cdot \frac{6}{5}(k + 1) = k + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} k = -1 (l) \\ k = \frac{89}{36} (tm) \end{cases}$$

Vậy khi $S_1 + S_3 = S_2$ thì k thuộc khoảng $\left(\frac{9}{5}; \frac{11}{4} \right)$.

Câu 20: Cho hai hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ và $g(x) = mx^2 + nx + k$ cắt nhau tại 3 điểm có hoành độ $-1; \frac{1}{2}; 2$ và có đồ thị như hình vẽ



Biết diện tích phần hình kẻ sọc (hình S_1) bằng $\frac{81}{32}$. Diện tích phần hình phẳng giới hạn bởi đồ

thị hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ và hai đường thẳng $x = \frac{1}{2}$, $x = 2$ (phần bôi đen trong hình vẽ) bằng

A. $\frac{79}{24}$.

B. $\frac{243}{96}$.

C. $\frac{81}{32}$.

D. $\frac{45}{16}$.

Lời giải

Chọn C

Phương trình hoành độ giao điểm $f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) = 0$.

Đặt $h(x) = f(x) - g(x)$, phương trình trở thành $h(x) = 0$ (1).

Vì đồ thị của hai hàm số $y=f(x)$, $y=g(x)$ cắt nhau tại 3 điểm có hoành độ $x=-1$; $x=\frac{1}{2}$;

$x=2$, nên $x=-1$; $x=\frac{1}{2}$; $x=2$ cũng là 3 nghiệm của phương trình (1).

Do đó $h(x)=a.(x+1)\left(x-\frac{1}{2}\right).(x-2)$.

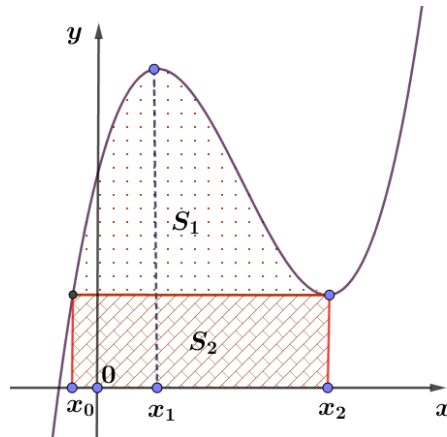
$$\begin{aligned} \text{Mà } S_1 &= \int_{-1}^{\frac{1}{2}} |f(x)-g(x)|dx = \int_{-1}^{\frac{1}{2}} |h(x)|dx = \int_{-1}^{\frac{1}{2}} \left| a(x+1)\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-2) \right| dx \\ &= |a| \int_{-1}^{\frac{1}{2}} \left| (x+1)\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-2) \right| dx = \frac{81}{32}. \text{ Nên } |a|=2 \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } S = \int_{\frac{1}{2}}^2 |h(x)|dx = |a| \int_{\frac{1}{2}}^2 \left| (x+1)\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-2) \right| dx = \frac{81}{32}.$$

Nhận xét: có thể tính a bằng cách thứ 2 như sau:

Dựa vào đồ thị ta có $f(0)=1$, $g(0)=-1$, nên $h(0)=f(0)-g(0)=2 \Leftrightarrow a=2$.

Câu 21: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong ở hình bên dưới. Gọi x_1, x_2 lần lượt là hai điểm cực trị thỏa mãn $x_2 = x_1 + 2$ và $f(x_1) - 3f(x_2) = 0$. Đường thẳng song song với trục Ox và qua điểm cực tiểu cắt đồ thị hàm số tại điểm thứ hai có hoành độ x_0 và $x_1 = x_0 + 1$. Tính tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$ (S_1 và S_2 lần lượt là diện tích hình phẳng được gạch ở hình bên dưới).



A. $\frac{3}{5}$.

B. $\frac{5}{8}$.

C. $\frac{3}{8}$.

D. $\frac{9}{8}$.

Lời giải

Chọn D

Tính tiến đồ thị hàm số $y=f(x)$ sang trái x_1 đơn vị ta được đồ thị hàm số $y=g(x)$.

Khi đó $g'(x)=ax.(x-2)$ ($a>0$). Suy ra $y=g(x)=a\frac{x^3}{3}-ax^2+C$.

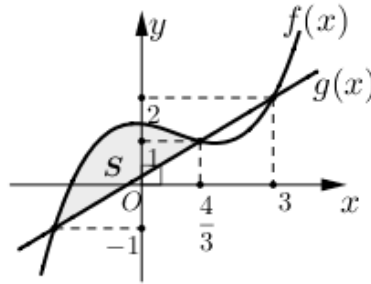
Vì $f(x_1)-3f(x_2)=0 \Rightarrow g(0)=3g(2) \Leftrightarrow C=3a\left(\frac{8}{3}-4\right)+3C \Leftrightarrow C=2a$.

$$\text{Do đó } y = g(x) = a \left(\frac{x^3}{3} - x^2 + 2 \right).$$

$$\text{Khi đó } S_1 + S_2 = \int_{-1}^2 a \left(\frac{x^3}{3} - x^2 + 2 \right) dx = a \left(\frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{3} + 2x \right) \Big|_{-1}^2 = \frac{17}{4} a.$$

$$S_2 = \int_{-1}^2 f(x_2) dx = 3f(2) = C = 2a \Rightarrow S_1 = \frac{17}{4} a - 2a = \frac{9}{4} a \Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = \frac{9}{8}.$$

Câu 22: Cho $f(x), g(x)$ lần lượt là các hàm đa thức bậc ba và bậc nhất có đồ thị như hình vẽ.



Biết diện tích hình S (được tô màu) bằng $\frac{250}{81}$. Tính $\int_0^2 f(x) dx$.

A. $\frac{7}{3}$.

B. $\frac{38}{15}$.

C. $\frac{8}{3}$.

D. $\frac{34}{15}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $g(x)$ là hàm số bậc nhất đi qua $A\left(\frac{4}{3}; 1\right)$ và $B(3; 2)$ nên $g(x) = \frac{3}{5}x + \frac{1}{5}$.

Với $y = -1 \Rightarrow \frac{3}{5}x + \frac{1}{5} = -1 \Leftrightarrow x = -2 \Rightarrow C(-2; -1)$ là giao điểm của $f(x)$ và $g(x)$.

$$\text{Do đó } f(x) - g(x) = a(x+2)\left(x - \frac{4}{3}\right)(x-3).$$

$$\text{Lại có } S = \int_{-2}^{\frac{4}{3}} [f(x) - g(x)] dx \Leftrightarrow \frac{250}{81} = \int_{-2}^{\frac{4}{3}} \left[a(x+2)\left(x - \frac{4}{3}\right)(x-3) \right] dx \Leftrightarrow a = \frac{3}{20}.$$

$$\text{Suy ra } f(x) - g(x) = \frac{3}{20}(x+2)\left(x - \frac{4}{3}\right)(x-3) \Leftrightarrow f(x) = \frac{3}{20}(x+2)\left(x - \frac{4}{3}\right)(x-3) + \frac{3}{5}x + \frac{1}{5}.$$

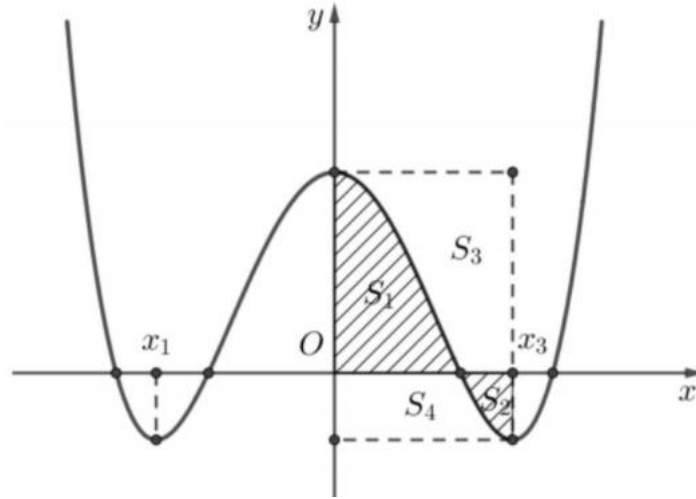
$$\text{Vậy } \int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 \left[\frac{3}{20}(x+2)\left(x - \frac{4}{3}\right)(x-3) + \frac{3}{5}x + \frac{1}{5} \right] dx = \frac{34}{15}.$$

----- HẾT -----

Câu 23: Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ. Biết rằng $f(x)$ đạt cực trị tại các điểm

$x_1; x_2; x_3$ thỏa mãn $x_3 = x_1 + 2$ và $f(x_1) + f(x_3) + \frac{2}{3}f(x_2) = 0$. Gọi S_1, S_2, S_3, S_4 là diện

tích các hình phẳng trong hình vẽ bên. Tỉ số $\frac{S_1 + S_2}{S_3 + S_4}$ gần nhất với kết quả nào dưới đây?



A. 0,65.

B. 0,7.

C. 0,55.

D. 0,6.

Lời giải

Chọn D.

Hàm số $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ có

$$f'(x) = 4ax^3 + 2bx = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = -\frac{b}{2a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm \sqrt{-\frac{b}{2a}} \end{cases} \quad (ab < 0)$$

Do đó hàm số có ba điểm cực trị $x_1; x_2 = 0; x_3 = -x_1$ vậy $x_3 = x_1 + 2 \Leftrightarrow -x_1 = x_1 + 2 \Leftrightarrow x_1 = -1 \Rightarrow x_3 = 1$.

$$\text{Suy ra } f'(x) = 4a(x+1)x(x-1) = 4a(x^3 - x)$$

$$f(x) = \int f'(x) dx = a(x^4 - 2x^2) + c$$

$$\text{Do } f(x_1) + f(x_3) + \frac{2}{3}f(x_2) = 0 \Leftrightarrow f(-1) + f(1) + \frac{2}{3}f(0) = 0 \Leftrightarrow (c-a) + (c-a) + \frac{2}{3}c = 0$$

$$\Leftrightarrow c = \frac{3}{4}a.$$

$$\text{Vậy } f(x) = a\left(x^4 - 2x^2 + \frac{3}{4}\right)$$

$$\text{Xét } f(x) = 0 \Leftrightarrow x^4 - 2x^2 + \frac{3}{4} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \\ x = \pm \sqrt{\frac{3}{2}} \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } S_1 = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} |f(x)| dx = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} f(x) dx = a \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(x^4 - 2x^2 + \frac{3}{4}\right) dx = \frac{7\sqrt{2}}{30} a.$$

$$S_2 = \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 |f(x)| dx = - \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 f(x) dx = -a \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \left(x^4 - 2x^2 + \frac{3}{4} \right) dx = \frac{14\sqrt{2}-17}{60} a.$$

$$\text{Suy ra } S_1 + S_2 = \frac{7\sqrt{2}}{30} a + \frac{14\sqrt{2}-17}{60} a = \frac{28\sqrt{2}-17}{60} a.$$

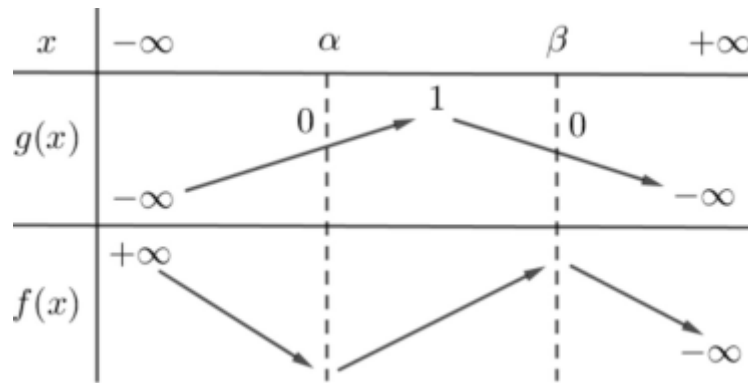
Ta có $S_1 + S_2 + S_3 + S_4$ là diện tích hình chữ nhật có các kích thước 1; $f(x_2) - f(x_3) = a$.

Khi đó $S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = a$.

$$\text{Do đó } S_3 + S_4 = a - (S_1 + S_2) = a - \frac{28\sqrt{2}-17}{60} a = \frac{7(11-4\sqrt{2})}{60} a.$$

$$\Rightarrow \frac{S_1 + S_2}{S_3 + S_4} = \frac{28\sqrt{2}-17}{7(11-4\sqrt{2})} \approx 0,6.$$

Câu 24: Cho hai hàm số $f(x) = ax^3 + 2x^2 + bx + 1$ và $g(x) = cx^2 + 4x + d$ có bảng biến thiên như sau



Biết rằng đồ thị của hai hàm số đã cho cắt nhau tại 3 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1 + x_2 + x_3 = 9$. Khi đó diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x); y = g(x); x = 1; x = 2$ bằng

A. $\frac{3}{4}$.

B. $\frac{3}{2}$.

C. $\frac{1}{4}$.

D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Tại các điểm cực trị α, β của $f(x)$ thì $g(\alpha) = g(\beta) = 0$, do đó

$$g(x) = c(x - \alpha)(x - \beta) \text{ và } f'(x) = 3ax^2 + 4x + b = 3a(x - \alpha)(x - \beta).$$

$$\text{Do đó } g(x) = kf'(x) \Leftrightarrow cx^2 + 4x + d = k(3ax^2 + 4x + b) \Leftrightarrow \begin{cases} c = 3ka \\ 4 = 4k \\ d = kb \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 1 \\ c = 3a \\ d = b \end{cases}.$$

$$\text{Suy ra } f(x) = ax^3 + 2x^2 + bx + 1 \text{ và } g(x) = 3ax^2 + 4x + b.$$

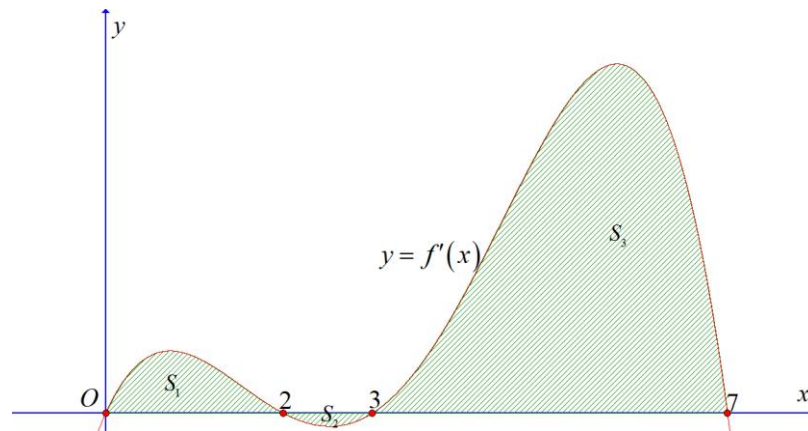
$$\text{Phương trình hoành độ giao điểm } ax^3 + 2x^2 + bx + 1 = 3ax^2 + 4x + b \\ \Leftrightarrow ax^3 + (2 - 3a)x^2 + (b - 4)x + 1 - b = 0.$$

$$\text{Theo Vi-et } x_1 + x_2 + x_3 = \frac{3a - 2}{a} = 9 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{3} \Rightarrow g(x) = -x^2 + 4x + b \text{ đạt giá trị lớn nhất tại}$$

$$x_0 = \frac{-4}{-2} = 2 \text{ và giá trị lớn nhất bằng } g(2) = 1 \Leftrightarrow b + 4 = 1 \Leftrightarrow b = -3 \Rightarrow c = -1 \Rightarrow d = -3.$$

$$\text{Vậy } S = \int_1^2 \left| -\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 7x + 4 \right| dx = \frac{3}{4}.$$

Câu 25: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0; 7]$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ trên đoạn $[0; 7]$ như hình vẽ.



Đặt $g(x) = f(2x-1)$, biết rằng diện tích các hình phẳng trong hình vẽ lần lượt là $S_1 = \frac{244}{15}$,

$S_2 = \frac{28}{15}$, $S_3 = \frac{2528}{15}$ và $f(0) = 1$, tính $g(4)$.

- A. $\frac{2759}{15}$. B. $\frac{2744}{15}$. C. $\frac{5518}{15}$. D. $\frac{563}{3}$.

Lời giải

Chọn A

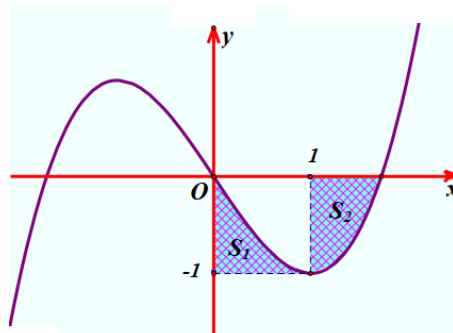
$$\text{Xét tích phân } \int_{\frac{1}{2}}^4 g'(x) dx = g(4) - g\left(\frac{1}{2}\right) = g(4) - f(0).$$

$$\text{Ta có } g'(x) = 2f'(2x-1) \text{ nên } \int_{\frac{1}{2}}^4 g'(x) dx = 2 \int_{\frac{1}{2}}^4 f'(2x-1) dx = \int_0^7 f'(t) dt.$$

$$\text{Dựa vào đồ thị suy ra } \int_0^7 f'(t) dt = S_1 - S_2 + S_3 = \frac{2744}{15}.$$

$$\text{Từ đó ta có } g(4) = \int_{\frac{1}{2}}^4 g'(x) dx + f(0) = \frac{2759}{15}.$$

Câu 26: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong hình bên.



Biết $f(x)$ đạt cực tiểu tại $x=1$ và $f(x)+1$ và $f(x)-1$ lần lượt chia hết cho $(x-1)^2$ và $(x+1)^2$. Gọi S_1, S_2 là diện tích hai hình phẳng được gạch trong hình bên. Tính $S_1 + S_2$.

A. $\frac{7}{8}$.

B. $\frac{4}{9}$.

C. $\frac{1}{8}$.

D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Theo bài ra $f(x)+1$ và $f(x)-1$ lần lượt chia hết cho $(x-1)^2$ và $(x+1)^2$ nên ta có thể phân tích thành nhân tử như sau:

$$\begin{cases} f(x)+1 = a(x-1)^2(x-m) \\ f(x)-1 = a(x+1)^2(x-n) \end{cases}$$

Kết hợp với bài ra ta có :

$$\begin{cases} f(1)+1=0 \\ f(-1)-1=0 \\ f(0)=0 \\ f'(1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c+d+1=0 \\ -a+b-c+d-1=0 \\ d=0 \\ 3a+2b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{2} \\ b=0 \\ c=-\frac{3}{2} \\ d=0 \end{cases}$$

Do đó : $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$.

Ta có $f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\pm\sqrt{3} \end{cases}$.

S_1 là diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị $y = f(x); y = -1; x = 0; x = 1$

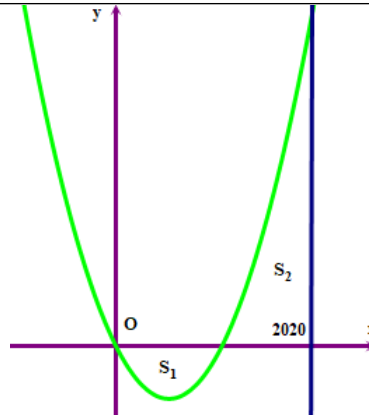
Nên $S_1 = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x + 1 \right) dx = \frac{3}{8}$.

S_2 là diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị $y = f(x); y = 0; x = 1; x = \sqrt{3}$

Nên $S_2 = \int_1^{\sqrt{3}} \left(-\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x \right) dx = \frac{1}{2}$.

Vậy $S_1 + S_2 = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} = \frac{7}{8}$ (đvdt).

Câu 27: Cho hàm số $y = x^2 - mx$ ($0 < m < 2020$) có đồ thị (C) . Gọi $S_1 + S_2$ là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi (C) , trục hoành, trục tung và đường thẳng $x = 2020$. Giá trị của m sao cho $S_2 = S_1$ là



A. $m = \frac{4040}{3}$

B. $m = \frac{4041}{3}$

C. $m = \frac{2021}{3}$

D. $m = \frac{2020}{3}$

Lời giải

Chọn A

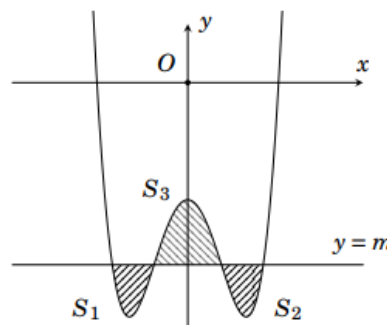
Ta có

$$S_2 = \int_0^m (x^2 - mx) dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{mx^2}{2} \right) \Big|_m^{2020} = \left(\frac{2020^3}{3} - \frac{m2020^2}{2} \right) + \frac{m^3}{6}.$$

$$S_1 = -\int_0^m (x^2 - mx) dx = -\left(\frac{x^3}{3} - \frac{mx^2}{2} \right) \Big|_0^m = \frac{m^3}{6}.$$

$$S_2 = 2020S_1 \Leftrightarrow \left(\frac{2020^3}{3} - \frac{m2020^2}{2} \right) + \frac{m^3}{6} = \frac{m^3}{6}.$$

Câu 28: $\Leftrightarrow \frac{2020^3}{3} - \frac{m2020^2}{2} = 0 \Leftrightarrow m = \frac{4040}{3}$. Đồ thị (C): $y = 2x^4 - 4x^2 - 2$ cắt đường thẳng $d: y = m$ tại bốn điểm phân biệt và tạo ra các hình phẳng có diện tích S_1, S_2, S_3 như hình vẽ. Biết rằng $S_1 + S_2 = S_3$, khi đó $m = -\frac{a}{b}$ ở dạng tối giản với $a, b \in \mathbb{N}$. Tính giá trị của $T = a + b$.



A. $T = -19$.

B. $T = 19$.

C. $T = 1$.

D. $T = 37$.

Lời giải

Chọn D

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d là

$$2x^4 - 4x^2 - 2 - m = 0. \quad (1)$$

Đặt $t = x^2$, phương trình (1) trở thành

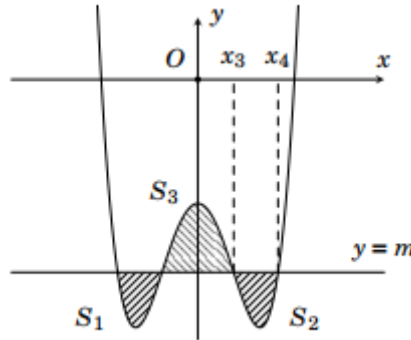
$$2t^2 - 4t - 2 - m = 0 \quad (2)$$

Đồ thị (C) cắt d tại 4 điểm phân biệt khi phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt, khi đó phương trình (2) có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - 2(-2 - m) > 0 \\ 2 > 0 \\ -1 - \frac{m}{2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -4 < m < -2.$$

Gọi t_1, t_2 là hai nghiệm dương của (2) với $t_1 < t_2$.

Khi đó (1) có 4 nghiệm phân biệt theo thứ tự là $x_1 = -\sqrt{t_1}$, $x_2 = -\sqrt{t_2}$, $x_3 = \sqrt{t_1}$, $x_4 = \sqrt{t_2}$.



Do tính đối xứng qua trục Oy của (C) nên yêu cầu của bài toán trở thành

$$\begin{aligned} \int_0^{x_3} (2x^4 - 4x^2 - 2 - m)dx &= \int_{x_3}^{x_4} (-2x^4 + 4x^2 + 2 + m)dx \\ \Leftrightarrow \int_0^{x_4} (2x^4 - 4x^2 - 2 - m)dx &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(\frac{2x^5}{5} - \frac{4x^3}{3} - (2+m)x \right) \Big|_0^{x_4} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{2x_4^5}{5} - \frac{4x_4^3}{3} - (2+m)x_4 &= 0 \\ \Leftrightarrow 6x_4^4 - 20x_4^2 - 15(2+m) &= 0. \end{aligned}$$

Suy ra x_4 là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x_4^4 - 4x_4^2 - 2 - m = 0 \\ 6x_4^4 - 20x_4^2 - 15(2+m) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 24x_4^4 - 40x_4^2 = 0 \\ 6x_4^4 - 20x_4^2 - 15(2+m) = 0 \end{cases}$$

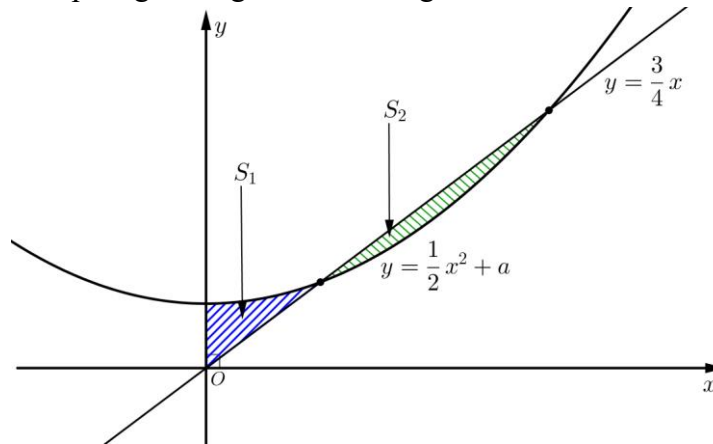
$$\begin{cases} \begin{cases} x_4^2 = 0 (l) \\ x_4^2 = \frac{5}{3} \end{cases} \\ 6x_4^4 - 20x_4^2 - 15(2+m) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_4^2 = \frac{5}{3} \\ m = -\frac{28}{9} \text{ (TM)} \end{cases}$$

Vậy $m = -\frac{28}{9}$. Do đó $a = 28$, $b = 9$.

Suy ra $T = a + b = 37$.

Câu 29: (Bỏ)

Câu 30: Cho đường thẳng $y = \frac{3}{4}x$ và parabol $y = \frac{1}{2}x^2 + a$ (a là tham số thực dương). Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích của hai hình phẳng được gạch chéo trong hình vẽ bên.



Khi $S_1 = S_2$ thì a thuộc khoảng nào dưới đây?

- A. $\left(\frac{1}{4}; \frac{9}{32}\right)$. B. $\left(\frac{7}{32}; \frac{1}{4}\right)$. C. $\left(\frac{3}{16}; \frac{7}{32}\right)$. D. $\left(0; \frac{3}{16}\right)$.

Lời giải

Chọn C

Xét phương trình hoành độ giao điểm $\frac{1}{2}x^2 + a = \frac{3}{4}x \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{4}x + a = 0$ (*).

Do đường thẳng $y = \frac{3}{4}x$ cắt parabol $y = \frac{1}{2}x^2 + a$ tại hai điểm phân biệt có hoành độ dương nên phương trình (*) có hai nghiệm dương phân biệt $0 < x_1 < x_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{9}{16} - 2a > 0 \\ 2a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < a < \frac{9}{32}.$$

Ta có:

$$S_1 = \int_0^{x_1} \left(\frac{1}{2}x^2 + a - \frac{3}{4}x \right) dx; \quad S_2 = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{3}{4}x - \frac{1}{2}x^2 + a \right) dx = - \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{1}{2}x^2 + a - \frac{3}{4}x \right) dx.$$

$$S_1 = S_2 \Leftrightarrow S_1 - S_2 = 0 \Leftrightarrow \int_0^{x_1} \left(\frac{1}{2}x^2 + a - \frac{3}{4}x \right) dx + \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{1}{2}x^2 + a - \frac{3}{4}x \right) dx = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{x_2} \left(\frac{1}{2}x^2 + a - \frac{3}{4}x \right) dx = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{x^3}{6} + ax - \frac{3}{8}x^2 \right) \Big|_0^{x_2} = 0$$

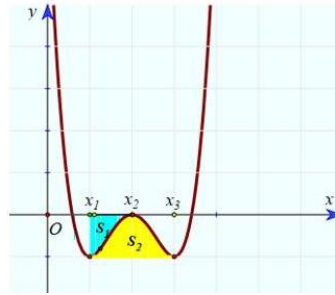
$$\Leftrightarrow \frac{1}{6}x_2^3 + ax_2 - \frac{3}{8}x_2^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{6}x_2^2 + a - \frac{3}{8}x_2 = 0.$$

Mà x_2 là nghiệm phương trình (*) nên $\frac{1}{2}x_2^2 - \frac{3}{4}x_2 + a = 0$.

$$\text{Trừ vế với vế hai phương trình được: } -\frac{1}{3}x_2^2 + \frac{3}{8}x_2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 0 & (L) \\ x_2 = \frac{9}{8} & (TM) \end{cases}.$$

$$\text{Với } x_2 = \frac{9}{8} \Rightarrow a = \frac{27}{128} \text{ (tm). Vậy } a = \frac{27}{128} \in \left(\frac{3}{16}; \frac{7}{32} \right).$$

Câu 31: Cho hàm số bậc bốn trùng phương $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong như hình dưới đây. Biết hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại ba điểm x_1, x_2, x_3 ($x_1 < x_2 < x_3$) thỏa mãn $x_1 + x_3 = 4$. Gọi S_1, S_2 là diện tích của hai hình phẳng được tô màu trong hình. Tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$ bằng?



A. $\frac{3}{5}$.

B. $\frac{7}{16}$.

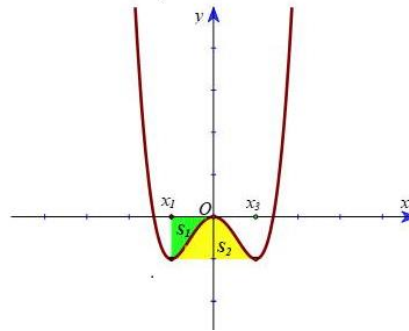
C. $\frac{1}{2}$.

D. $\frac{7}{15}$.

Lời giải

Chọn B

Diện tích S_1, S_2 không đổi khi ta tịnh tiến đồ thị thỏa $x_2 = 0$



Gọi $g(x) = ax^4 + bx^2 + c$, ta có $g(x)$ là hàm chẵn và ba điểm cực trị tương ứng là $-2; 0; 2$ là các nghiệm của phương trình $4ax^3 + 2bx = 0$.

Dựa vào đồ thị $g(x)$, ta có $g(0) = 0$. Từ đó suy ra $g(x) = a(x^4 - 16x^2)$ với $a > 0$.

Do tính đối xứng của hàm trùng phương nên diện tích hình chữ nhật bằng

$$2S_1 + S_2 = |g(2)| \cdot 4 = 64a$$

Ta có S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $g(x)$, trục hoành, đường thẳng $x = 2, x = 0$.

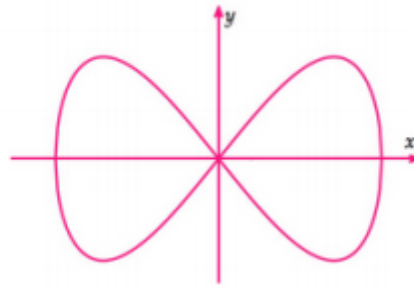
$$S_1 = \int_{-2}^0 g(x) dx = a \int_{-2}^0 (x^4 - 16x^2) dx = \frac{224a}{15}$$

$$\text{Suy ra } S_2 = 64a - 2 \cdot \frac{224a}{15} = \frac{512a}{15}.$$

$$\text{Vậy } \frac{S_1}{S_2} = \frac{224}{512} = \frac{7}{16}.$$

Câu 32: Một hình phẳng được tạo thành từ đường cong lemniscate (đường cong số 8 của Bernoulli) có phương trình trong hệ tọa độ Oxy là $x^4 = a^2(x^2 - y^2)$ ($a > 0$) như hình vẽ bên. Biết rằng mỗi

đơn vị trong hệ tọa độ Oxy tương ứng với chiều dài $1m$ và hình phẳng này có diện tích là $\frac{49}{3}(m^2)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $1 < a < 2$.B. $2 < a < 3$.C. $3 < a < 4$.D. $4 < a < 5$.**Lời giải****Chọn C**

$$\text{Ta có } x^4 = a^2(x^2 - y^2) \Leftrightarrow a^2 y^2 = a^2 x^2 - x^4 \Leftrightarrow y = \pm \frac{1}{a} x \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Vì tính đối xứng của hình trên nên diện tích của hình phẳng bằng 4 lần diện tích của miền hình phẳng nằm trong góc phần tư thứ nhất của hệ tọa độ Oxy .

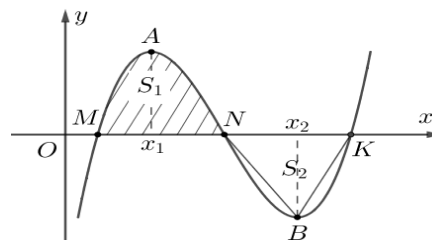
$$\text{Do đó } S = 4 \left(\int_0^a \frac{1}{a} x \sqrt{a^2 - x^2} dx \right). \text{ Đặt } t = \sqrt{a^2 - x^2} \Rightarrow t^2 = a^2 - x^2 \Rightarrow t dt = -x dx.$$

$$\text{Đổi cận } x = 0 \Rightarrow t = a; x = a \Rightarrow t = 0.$$

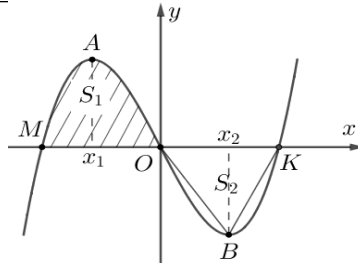
$$S = 4 \left(\int_0^a \frac{1}{a} x \sqrt{a^2 - x^2} dx \right) = \frac{4}{a} \left(\int_0^a t^2 dt \right) = \frac{4}{a} \cdot \frac{t^3}{3} \Big|_0^a = \frac{4a^2}{3}.$$

$$\text{Đề cho } S = \frac{49}{3} \text{ nên } a = \frac{7}{2} \Rightarrow 3 < a < 4.$$

Câu 33: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong (C) trong hình bên. Hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại hai điểm x_1, x_2 thỏa $f(x_1) + f(x_2) = 0$. Gọi A, B là hai điểm cực trị của đồ thị (C) ; M, N, K là giao điểm của (C) với trục hoành; S là diện tích của hình phẳng được gạch trong hình, S_2 là diện tích tam giác NBK . Biết tứ giác $MAKB$ nội tiếp đường tròn, khi đó tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$ bằng

A. $\frac{2\sqrt{6}}{3}$.B. $\frac{\sqrt{6}}{2}$.C. $\frac{5\sqrt{3}}{6}$.D. $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.**Lời giải****Chọn D**

Kết quả bài toán không thay đổi khi ta tịnh tiến đồ thị (C) sang trái sao cho điểm uốn trùng với gốc tọa độ O . (như hình dưới)



Do $f(x)$ là hàm số bậc ba, nhận gốc tọa độ là tâm đối xứng ($O \equiv N$).

Đặt $x_1 = -a$, $x_2 = a$, với $a > 0 \Rightarrow f'(x) = k(x^2 - a^2)$ với $k > 0$

$$\Rightarrow f(x) = k\left(\frac{1}{3}x^3 - a^2x\right) \Rightarrow x_M = -a\sqrt{3}, x_K = a\sqrt{3}$$

Có $MAKB$ nội tiếp đường tròn tâm $O \Rightarrow OA = OM = a\sqrt{3}$

$$\text{Có } f(x_1) = \sqrt{OA^2 - x_1^2} \Leftrightarrow f(-a) = a\sqrt{2} \Leftrightarrow k\left(-\frac{1}{3}a^3 + a^3\right) = a\sqrt{2} \Leftrightarrow k = \frac{3\sqrt{2}}{2a^2}$$

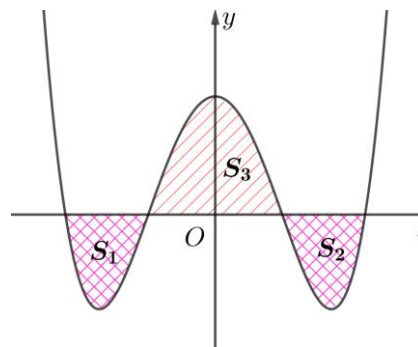
$$\Rightarrow f(x) = \frac{3\sqrt{2}}{2a^2}\left(\frac{1}{3}x^3 - a^2x\right)$$

$$S_1 = \int_{-a\sqrt{3}}^0 f(x)dx = \frac{3\sqrt{2}}{2a^2}\left(\frac{1}{12}x^4 - \frac{a^2}{2}x^2\right)\Bigg|_{-a\sqrt{3}}^0 = \frac{9\sqrt{2}}{8}a^2$$

$$S_2 = S_{\Delta AMO} = \frac{1}{2}f(-a) \cdot MO = \frac{1}{2}a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{3} = \frac{\sqrt{6}}{2}a^2$$

$$\text{Vậy } \frac{S_1}{S_2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

Câu 34: Cho hàm số $y = x^4 - 3x^2 + m$ có đồ thị là (C_m) , m là tham số thực. Giả sử (C_m) cắt trục Ox tại 4 điểm phân biệt. Gọi S_1, S_2 là diện tích của hai hình phẳng nằm dưới trục Ox và S_3 là diện tích hình phẳng nằm trên trục Ox được tạo bởi (C_m) với trục Ox . Biết rằng tồn tại duy nhất giá trị $m = \frac{a}{b}$ với $(a, b \in \mathbb{N}^*$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản) để $S_1 + S_2 = S_3$. Giá trị $2a - b$ bằng:



A. 3.

B. -4.

C. 6.

D. -2.

Lời giải

Chọn C

♦ Giả sử u là nghiệm dương lớn nhất của phương trình $x^4 - 3x^2 + m = 0$

$$\text{hay } u^4 - 3u^2 + m = 0 \Leftrightarrow u^4 - 3u^2 = -m \quad (1)$$

♦ để $S_1 + S_2 = S_3$ thì $\int_0^u (x^4 - 3x^2 + m) dx = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{x^5}{5} - x^3 + mx \right) \Big|_0^u = 0$

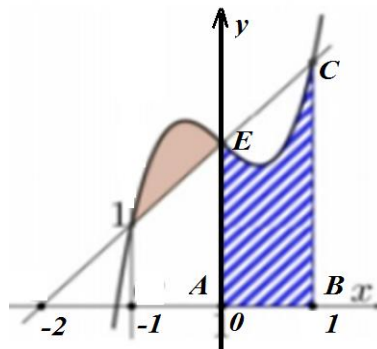
$\Leftrightarrow \frac{u^5}{5} - u^3 + mu = 0 \Leftrightarrow \frac{u^4}{5} - u^2 + m = 0 \text{ (do } u > 0) \Leftrightarrow \frac{u^4}{5} - u^2 = -m \quad (2)$

♦ Từ (1); (2) suy ra $u^4 - 3u^2 = \frac{u^4}{5} - u^2 \Leftrightarrow 5u^4 - 15u^2 = u^4 - 5u^2 \Leftrightarrow 4u^4 - 10u^2 = 0$

$\Leftrightarrow 2u^2(2u^2 - 5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u^2 = 0 \text{ (L)} \\ u^2 = \frac{5}{2} \text{ (tm)} \end{cases} \Rightarrow m = \frac{5}{4} \text{ và theo giả thiết thì giá trị này là duy nhất}$

♦ Vậy $a = 5; b = 4 \Leftrightarrow 2a - b = 6$

Câu 35: Cho hàm số bậc 3 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ và đường thẳng $d: g(x) = mx + n$ có đồ thị như hình vẽ. Nếu phần tô màu đen có diện tích bằng $\frac{1}{2}$, thì phần gạch chéo có diện tích bằng bao nhiêu?



A. $\frac{5}{2}$.

B. 2.

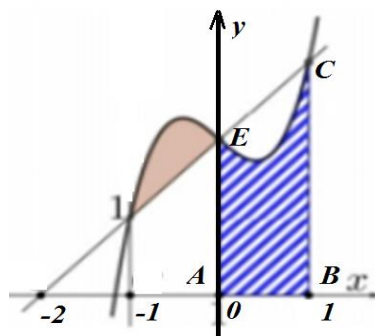
C. 1.

D. $\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Không mất tính tổng quát, ta tịnh tiến đồ thị sang bên trái 1 đơn vị thì có đồ thị như hình dưới



Ta vẫn gọi đường cong và đường thẳng có phương trình dạng $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ và $g(x) = mx + n$.

+ Quan sát đường thẳng đi qua điểm $M(-2; 0)$ và $N(-1; 1)$ nên đường thẳng có phương trình $y = x + 2$.

+ Quan sát đường cong thấy hai điểm cực trị có hoành độ là $-1; 1$, kết hợp với đạo hàm $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ suy ra $b = 0$ và $c = -3a$.

+ Quan sát giao điểm đồ thị với Oy ta thấy $d=2$; vậy $f(x) = ax^3 - 3ax + 2$

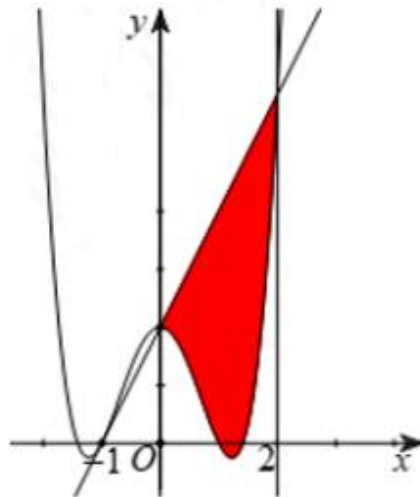
+ Từ giả thiết về diện tích phần tô đen ta có

$$\int_{-1}^0 (ax^3 - 3ax - x) dx = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a \int_{-1}^0 (x^3 - 3x) dx - \int_{-1}^0 x dx = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{5}{4} \cdot a - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = \frac{4}{5}$$

Vậy ta có hai đường có phương trình: $f(x) = \frac{4}{5}x^3 - \frac{12}{5}x + 2$.

+ Diện tích hình gạch chéo bằng $S = \int_0^1 \left(\frac{4}{5}x^3 - \frac{12}{5}x + 2 \right) dx = 1$.

Câu 36: Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị (C) , biết rằng (C) đi qua điểm $A(-1;0)$, tiếp tuyến d tại A của (C) cắt (C) tại hai điểm có hoành độ lần lượt là 0 và 2 và diện tích hình phẳng giới hạn bởi d , đồ thị (C) và hai đường thẳng $x=0; x=2$ có diện tích bằng $\frac{28}{5}$ (phần tô màu trong hình vẽ).



Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) , d và hai đường thẳng $x=-1; x=0$ có diện tích bằng

A. $\frac{2}{5}$.

B. $\frac{1}{4}$.

C. $\frac{2}{9}$.

D. $\frac{1}{5}$.

Lời giải

Chọn D

Gọi phương trình đường thẳng d có dạng $y = mx + n$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) , d và hai đường thẳng $x=0, x=2$ là

$$\int_0^2 |ax^4 + bx^2 + c - mx - n| dx = \frac{28}{5} \Leftrightarrow -\int_0^2 (ax^4 + bx^2 + c - mx - n) dx = \frac{28}{5} \quad (*)$$

Vì (C) và d tiếp xúc tại điểm $x=-1$ và giao nhau tại các điểm có hoành độ $x=0; x=2$ nên ta có $ax^4 + bx^2 + c - mx - n = a(x-2)x(x+1)^2 = a(x^4 - 3x^2 - 2x)$.

Khi đó:

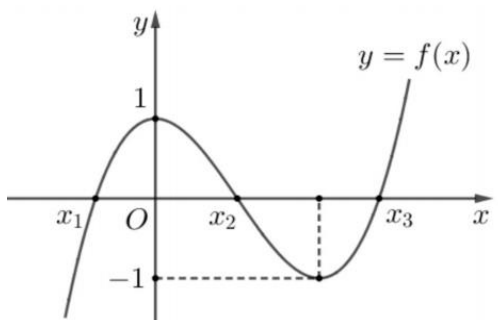
$$(*) \Leftrightarrow -a \int_0^2 (x^4 - 3x^2 - 2x) dx = \frac{28}{5} \Leftrightarrow -a \left(\frac{x^5}{5} - x^3 - x^2 \right) \Big|_0^2 = \frac{28}{5} \Leftrightarrow \frac{28}{5} a = \frac{28}{5} \Leftrightarrow a = 1.$$

Vậy diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) , d và hai đường thẳng $x = -1$, $x = 0$ là

$$S = \int_{-1}^0 |x^4 - 3x^2 - 2x| dx = \frac{1}{5}.$$

Lưu ý: Đề bài trên đã bổ sung thêm yếu tố giới hạn bởi đồ thị (C) với đường thẳng d vào câu hỏi so với đề bài gốc vì nếu đề bài gốc là tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và hai đường thẳng $x = -1$; $x = 0$ là không hợp lí vì hình phẳng hở nên không tính được diện tích, nếu chọn bổ sung giới hạn với trục Ox thì đáp án là $\frac{6}{5}$ không có trong 4 đáp án.

Câu 37: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị (C) như hình vẽ.



Biết rằng đồ thị hàm số đã cho cắt trục Ox tại ba điểm có hoành độ x_1, x_2, x_3 theo thứ tự lập thành cấp số cộng và $x_3 - x_1 = 2\sqrt{3}$. Gọi diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và trục Ox là S , diện tích S_1 của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x) + 1$, $y = -f(x) - 1$, $x = x_1$ và $x = x_3$ bằng

A. $S + 2\sqrt{3}$.

B. $S + 4\sqrt{3}$.

C. $4\sqrt{3}$.

D. $8\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: “ x_1, x_2, x_3 theo thứ tự lập thành cấp số cộng” $\Rightarrow x_2 = \frac{x_1 + x_3}{2}$

Ta có: “Gọi diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và trục Ox là S ”

Vậy dựa vào hình ảnh, ta có: $S = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx - \int_{x_2}^{x_3} f(x) dx$

Do $f(x)$ là hàm số bậc 3 nên ta có: $\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = - \int_{x_2}^{x_3} f(x) dx$ (1)

Ta có: “diện tích S_1 của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x) + 1$, $y = -f(x) - 1$, $x = x_1$ và $x = x_3$ ”

$$\Rightarrow S_1 = \int_{x_1}^{x_3} |f(x) + 1 - (-f(x) - 1)| dx = \int_{x_1}^{x_3} |2f(x) + 2| dx = 2 \int_{x_1}^{x_3} |f(x) + 1| dx = 2 \int_{x_1}^{x_3} |f(x) - (-1)| dx$$

Dựa vào đồ thị ta có thể thấy rằng, khi $x \in (x_1; x_3)$ thì đồ thị $y = f(x)$ nằm phía trên đồ thị $y = -1$

$$\Rightarrow S_1 = 2 \int_{x_1}^{x_3} |f(x) - (-1)| dx = 2 \int_{x_1}^{x_3} [f(x) - (-1)] dx = 2 \left[\int_{x_1}^{x_3} f(x) dx + \int_{x_1}^{x_3} 1 dx \right]$$

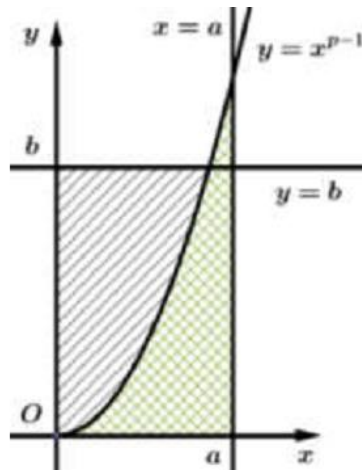
Trong đó: $\int_{x_1}^{x_3} 1 \cdot dx = x \Big|_{x_1}^{x_3} = x_3 - x_1 = 2\sqrt{3}$

Trong đó: $\int_{x_1}^{x_3} f(x) dx = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx + \int_{x_2}^{x_3} f(x) dx$

Mà theo (1) thì ta có: $\int_{x_1}^{x_3} f(x) dx = -\int_{x_2}^{x_3} f(x) dx + \int_{x_2}^{x_3} f(x) dx = 0$

Vậy ta có: $S_1 = 2 \left[\int_{x_1}^{x_3} f(x) dx + \int_{x_1}^{x_3} 1 \cdot dx \right] = 2 \cdot (0 + 2\sqrt{3}) = 4\sqrt{3}$.

Câu 38: Cho các số p, q thỏa mãn các điều kiện: $p > 1, q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ và các số dương a, b . Xét hàm số: $y = x^{p-1} (x > 0)$ có đồ thị là (C) . Gọi (S_1) là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) , trục hoành, đường thẳng $x = a$, Gọi (S_2) là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) , trục tung, đường thẳng $y = b$, Gọi (S) là diện tích hình phẳng giới hạn bởi trục hoành, trục tung và hai đường thẳng $x = a, y = b$.



Khi so sánh $S_1 + S_2$ và S ta nhận được bất đẳng thức nào trong các bất đẳng thức dưới đây?

A. $\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \leq ab$ B. $\frac{a^{p-1}}{p-1} + \frac{b^{q-1}}{q-1} \geq ab$ C. $\frac{a^{p+1}}{p+1} + \frac{b^{q+1}}{q+1} \leq ab$ D. $\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geq ab$.

Lời giải

Chọn D

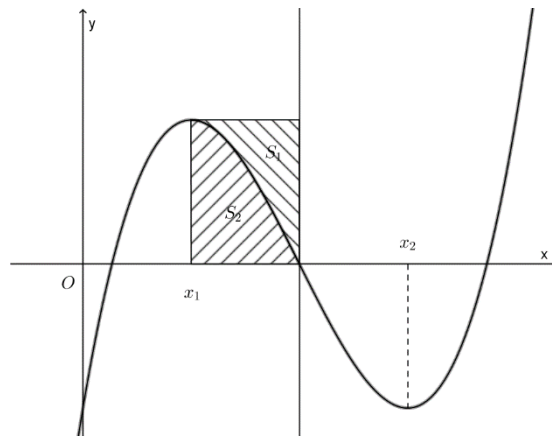
Ta có: $S \leq S_1 + S_2$.

$$S_1 = \int_0^a (x^{p-1}) dx = \left(\frac{x^p}{p} \right) \Big|_0^a = \frac{a^p}{p}; \quad S_2 = \int_0^b \left(y^{\frac{1}{p-1}} \right) dy = \left(\frac{y^{\frac{1}{p-1}+1}}{\frac{1}{p-1}+1} \right) \Big|_0^b = \left(\frac{y^q}{q} \right) \Big|_0^b = \frac{b^q}{q}.$$

Vì: $\frac{1}{p-1} + 1 = \frac{p}{p-1} = \frac{1}{1-\frac{1}{p}} = \frac{1}{\frac{1}{q}} = q$.

Vậy $\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geq ab$.

Câu 39: Cho $f(x)$ là hàm bậc ba có đồ thị như hình vẽ. Biết hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại $x_1; x_2$ thỏa mãn $x_2 = x_1 + 4$ và tâm đối xứng của đồ thị hàm số nằm trên trục hoành. Gọi $S_1; S_2$ là diện tích hình phẳng như trong hình vẽ. Tỷ số $\frac{S_1}{S_2}$ bằng:



A. $\frac{3}{5}$.

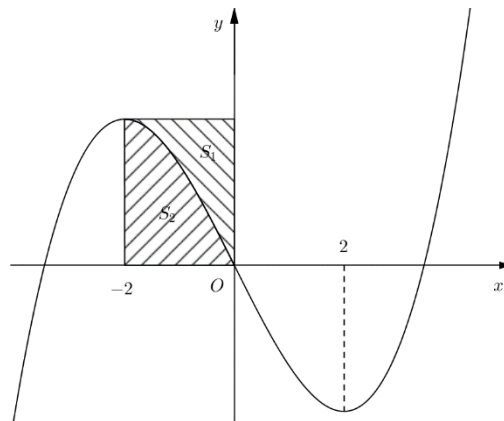
B. $\frac{3}{4}$.

C. $\frac{4}{3}$.

D. $\frac{5}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi I là điểm uốn của đồ thị hàm số

Tịnh tiến đồ thị theo vector $\overrightarrow{IO}$ ta được đồ thị hàm số $y = g(x)$ có điểm uốn là gốc tọa độ O và hai điểm cực trị $x_3 = -2, x_4 = 1 \Rightarrow g'(x) = 3a(x+2)(x-2) = 3a(x^2 - 4)$ với $a \neq 0$.

Từ đó ta có $g(x) = a(x^3 - 12x) + d$.

Do $g(x)$ đi qua gốc tọa độ O nên $d = 0 \Rightarrow g(x) = a(x^3 - 12x)$.

$$\text{Ta có } S_2 = \int_{-2}^0 a(x^3 - 12x) dx = a \left(\frac{x^4}{4} - 6x^2 \right) \Big|_{-2}^0 = 20a.$$

Lại có: $S_1 + S_2$ bằng diện tích của hình chữ nhật có các cạnh là 2 và $g(-2) = 16a$

$$\Rightarrow S_1 + S_2 = 32a. \text{ Do đó } S_1 = 32a - 20a = 12a.$$

$$\text{Vậy } \frac{S_1}{S_2} = \frac{12a}{20a} = \frac{3}{5}.$$

Câu 40: Cho hàm số $y = x^2$ có đồ thị (C) , biết rằng tồn tại hai điểm A, B thuộc đồ thị (C) sao cho tiếp tuyến tại A, B và đường thẳng vuông góc với hai tiếp tuyến tại A, B tạo thành một hình chữ nhật

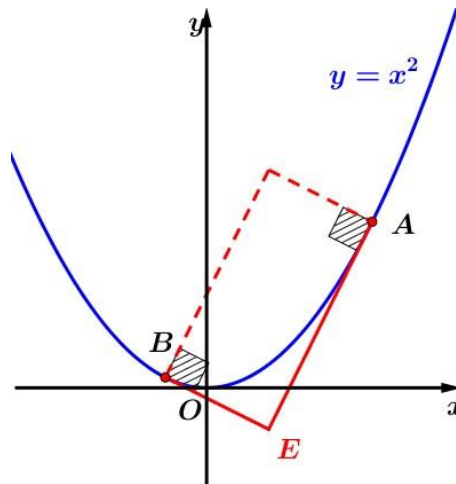
(H) có chiều dài gấp đôi chiều rộng. Gọi S_1 là diện tích giới hạn bởi đồ thị (C) và hai tiếp tuyến, S_2 là diện tích hình chữ nhật (H). Tính tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$?

- A. $\frac{1}{6}$. B. $\frac{1}{3}$. C. $\frac{125}{768}$. D. $\frac{125}{128}$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $A(a; a^2)$ và $B(b; b^2)$. Không mất tính tổng quát, ta xét $a > 0$ và $b < 0$



Gọi: (d_1) là đường tiếp tuyến với (C) tại A, (d_2) là đường tiếp tuyến với (C) tại B.

$$\Rightarrow \begin{cases} (d_1): y = 2ax - a^2 \\ (d_2): y = 2bx - b^2 \end{cases}$$

Do $(d_1) \perp (d_2)$ nên

$$k_{(d_1)} \cdot k_{(d_2)} = -1 \Leftrightarrow (2a) \cdot (2b) = -1 \Rightarrow b = \frac{-1}{4a} \Rightarrow B\left(\frac{-1}{4a}; \frac{1}{16a^2}\right) \Rightarrow (d_2): y = \frac{-x}{2a} - \frac{1}{16a^2}.$$

$$d_1 \cap d_2 \text{ tại } E\left(\frac{4a^2 - 1}{8a}; \frac{-1}{4}\right) \Rightarrow \text{chiều dài } D = \frac{\sqrt{(4a^2 + 1)^3}}{8a} \text{ và chiều rộng } R = \frac{\sqrt{(4a^2 + 1)^3}}{16a^2}.$$

$$\text{Mà } D = 2.R \Rightarrow a = 1 \Rightarrow S_2 = \frac{(4a^2 + 1)^3}{128a^3} = \frac{125}{128} \text{ và suy ra } \Rightarrow \begin{cases} (d_1): y = 2x - 1 \\ (d_2): y = \frac{-x}{2} - \frac{1}{16} \end{cases} \text{ và } E\left(\frac{3}{8}; \frac{-1}{4}\right).$$

$$\text{Suy ra } S_1 = \int_{-\frac{1}{4}}^{\frac{3}{8}} \left[x^2 - \left(\frac{-x}{2} - \frac{1}{16} \right) \right] dx + \int_{\frac{3}{8}}^1 [x^2 - (2x - 1)] dx = \frac{125}{768}.$$

$$\text{Nhu vậy tỉ số } \frac{S_1}{S_2} = \frac{125}{768} \cdot \frac{128}{125} = \frac{128}{768} = \frac{1}{6}.$$

Câu 41: Cho hàm số $y = x^2$ có đồ thị (C), biết rằng tồn tại hai điểm A, B thuộc đồ thị (C) sao cho tiếp tuyến tại A, B và đường thẳng pháp tuyến của hai tiếp tuyến đó tạo thành một hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng. Gọi S_1 là diện tích giới hạn bởi đồ thị (C) và hai tiếp tuyến, S_2 là diện tích hình chữ nhật giới hạn bởi các tiếp tuyến và pháp tuyến tại A, B. Tính tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$?

A. $\frac{1}{6}$.

B. $\frac{1}{3}$.

C. $\frac{125}{768}$.

D. $\frac{125}{128}$.

Lời giải**Chọn A**

Đặt $A(a; a^2)$ và $B(b; b^2)$. Không mất tính tổng quát, ta xét $a > 0$ và $b < 0$

(d_1) là đường tiếp tuyến với (C) tại A và (d_2) là đường tiếp tuyến với (C) tại B

$$\Rightarrow \begin{cases} (d_1): y = 2ax - a^2 \\ (d_2): y = 2bx - b^2 \end{cases}$$

Do $(d_1) \perp (d_2)$ nên

$$k_{(d_1)} \cdot k_{(d_2)} = -1 \Leftrightarrow (2a) \cdot (2b) = -1 \Rightarrow b = \frac{-1}{4a} \Rightarrow B\left(\frac{-1}{4a}; \frac{1}{16a^2}\right)$$

$$\Rightarrow (d_2): y = \frac{-x}{2a} - \frac{1}{16a^2}$$

$$d_1 \cap d_2 \text{ tại } E\left(\frac{4a^2 - 1}{8a}; \frac{-1}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \text{chiều dài } D = \frac{\sqrt{(4a^2 + 1)^3}}{8a} \text{ và chiều rộng } R = \frac{\sqrt{(4a^2 + 1)^3}}{16a^2}$$

$$\text{Mà } D = 2.R \Rightarrow a = 1 \Rightarrow S_2 = \frac{(4a^2 + 1)^3}{128a^3} = \frac{125}{128} \text{ và suy ra } \begin{cases} (d_1): y = 2x - 1 \\ (d_2): y = \frac{-x}{2} - \frac{1}{16} \end{cases}$$

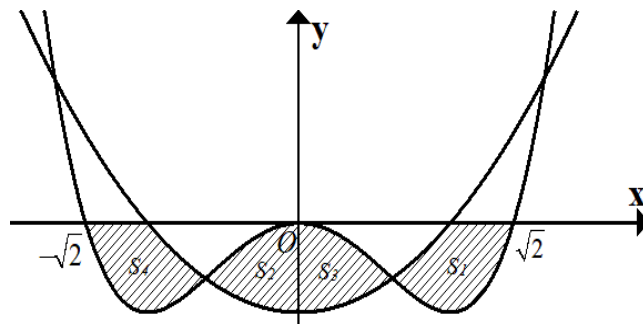
$$\text{Với } a = 1 \text{ suy ra } E\left(\frac{4a^2 - 1}{8a}; \frac{-1}{4}\right) \text{ có tọa độ } E\left(\frac{3}{8}; -\frac{1}{4}\right).$$

$$\text{Suy ra } S_1 = \int_{-\frac{1}{4}}^{\frac{3}{8}} \left[x^2 - \left(\frac{-x}{2} - \frac{1}{16} \right) \right] dx + \int_{\frac{3}{8}}^1 [x^2 - (2x - 1)] dx = \frac{125}{768}$$

$$\text{Như vậy tỉ số } \frac{S_1}{S_2} = \frac{125}{768} \cdot \frac{128}{125} = \frac{128}{768} = \frac{1}{6}$$

Câu 42: Cho hàm số $y = f(x) = x^4 - 2x^2$ và hàm số $y = g(x) = x^2 - m^2$, với $0 < m < \sqrt{2}$ là tham số thực

C. Gọi S_1, S_2, S_3, S_4 là diện tích các miền gạch chéo được cho trên hình vẽ. Ta có diện tích $S_1 + S_4 = S_2 + S_3$ tại m_0 . Chọn mệnh đề đúng.



A. $m_0 \in \left(\frac{1}{2}; \frac{2}{3}\right)$.

B. $m_0 \in \left(\frac{2}{3}; \frac{7}{6}\right)$.

C. $m_0 \in \left(\frac{7}{6}; \frac{5}{4}\right)$.

D. $m_0 \in \left(\frac{5}{4}; \frac{3}{2}\right)$.

Lời giải

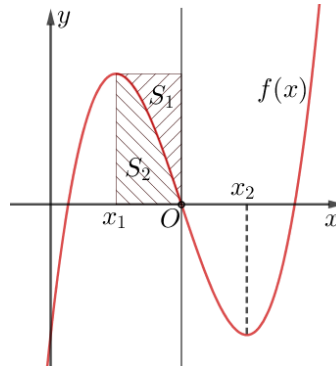
Chọn B

- ♦ Đề ý, hàm số $f(x)$ và $g(x)$ có đồ thị đối xứng qua trục tung. Do đó diện tích $\begin{cases} S_1 = S_4 \\ S_2 = S_3 \end{cases}$.
- ♦ Vì vậy, yêu cầu bài toán trở thành tìm m_0 để $S_1 = S_3$ (1).
- ♦ Gọi a là hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$, với điều kiện: $0 < a < m < \sqrt{2}$.
- ♦ Dựa vào đồ thị, ta có:

$$S_3 = \int_0^a (x^4 - 3x^2 + m^2) dx = \frac{a^5}{5} - a^3 + am^2 \quad (2).$$
- ♦
$$S_1 = \int_a^m (-x^4 + 3x^2 - m^2) dx + \int_m^{\sqrt{2}} (-x^4 + 2x^2) dx = \frac{a^5}{5} - a^3 + am^2 - \frac{2m^3}{3} + \frac{8\sqrt{2}}{15} \quad (3).$$
- ♦ Từ (1), (2), (3) ta có:

$$S_3 = S_1 \Leftrightarrow \frac{8\sqrt{2}}{15} - \frac{2}{3}m^3 = 0 \Leftrightarrow m = \sqrt[3]{\frac{4\sqrt{2}}{5}} \approx 1.04 \in \left(\frac{2}{3}; \frac{7}{6}\right).$$

Câu 43: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ.



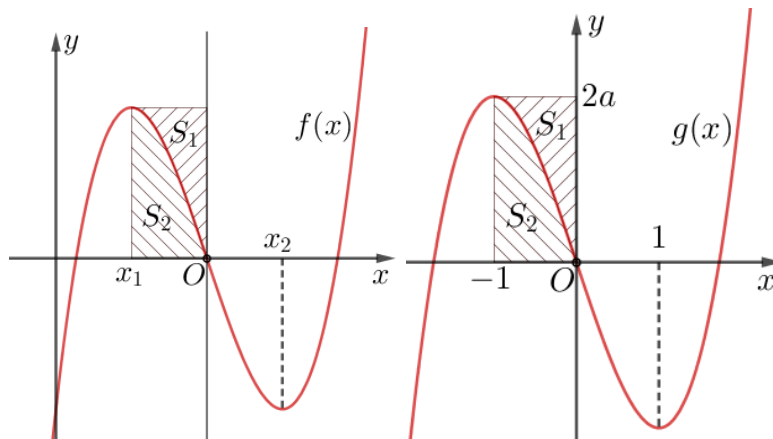
Biết hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại hai điểm x_1, x_2 thỏa mãn $x_2 = x_1 + 2$ và $f(x_1) + f(x_2) = 0$.

Gọi S_1 và S_2 là diện tích của hai hình phẳng được gạch trong hình vẽ. Tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$ bằng

- A. $\frac{3}{4}$. B. $\frac{5}{8}$. C. $\frac{3}{8}$. D. $\frac{3}{5}$.

Lời giải

Chọn D



Từ giả thiết của bài toán ta có điểm uốn I của đồ thị hàm số nằm trên trục hoành.

Tính tiến đồ thị theo vector $\overrightarrow{OI}$, ta thu được đồ thị hàm số $y = g(x)$ có điểm uốn là gốc tọa độ O và hai điểm cực trị $x_3 = -1$, $x_4 = 1$.

Khi đó $g'(x)$ là tam thức bậc hai có hai nghiệm ± 1 nên $g'(x) = 3a(x+1)(x-1) = 3a(x^2 - 1)$ với $a \neq 0$.

Từ đó ta có $g(x) = 3a\left(\frac{x^3}{3} - x\right) + b \Leftrightarrow g(x) = a(x^3 - 3x) + b$.

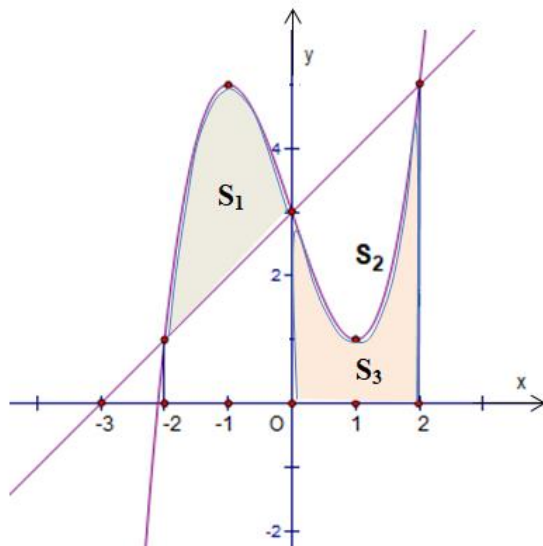
Do $g(x)$ đi qua gốc tọa độ O nên $b = 0$, suy ra $g(x) = a(x^3 - 3x)$.

Ta có $S_2 = \int_{-1}^0 a(x^3 - 3x) dx = a\left(\frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2}\right)\Big|_{-1}^0 = \frac{5a}{4}$.

Lại có $S_1 + S_2$ bằng diện tích của hình chữ nhật có hai kích thước 1 và $g(-1) = 2a$, suy ra $S_1 + S_2 = 2a$. Do đó $S_1 = 2a - \frac{5a}{4} = \frac{3a}{4}$.

Vậy $\frac{S_1}{S_2} = \frac{3}{5}$.

Câu 44: Cho hàm số bậc ba $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ và đường thẳng $d: g(x) = mx + n$ có đồ thị như hình vẽ. Gọi S_1, S_2, S_3 lần lượt là diện tích của các phần giới hạn như hình bên. Nếu $S_1 = 4$ thì tỷ số $\frac{S_2}{S_3}$ bằng.



A. $\frac{3}{2}$.

B. 1.

C. 2.

D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải:

Chọn B

• Dựa vào đồ thị như hình vẽ, ta có: $f(x) - g(x) = kx(x+2)(x-2)$.

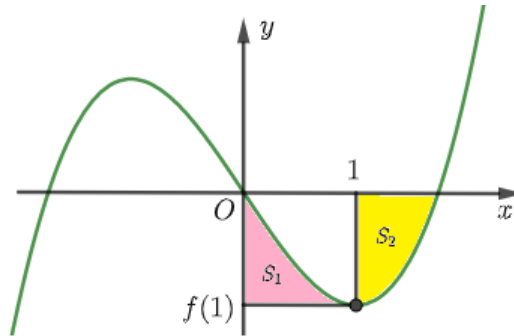
$g(x) = x + 3$

$S_1 = S_2 = \int_{-2}^0 kx(x+2)(x-2) dx = 4k$

$$S_2 + S_3 = \frac{(|g(0)| + |g(2)|) \cdot 2}{2} = \frac{(3+5) \cdot 2}{2} = 8$$

Vì $S_1 = 4 \Rightarrow S_2 = 4 \Rightarrow S_3 = 8 - 4 = 4$. Vậy $\frac{S_2}{S_3} = 1$.

Câu 45: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ, biết $f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm $x = 1$ và thỏa mãn $[f(x) + 1]$ và $[f(x) - 1]$ lần lượt chia hết cho $(x - 1)^2$ và $(x + 1)^2$. Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích như trong hình bên. Tính $2S_2 + 8S_1$



A. 4

B. $\frac{3}{5}$

C. $\frac{1}{2}$

D. 9

Lời giải

Chọn A

Đặt $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ theo giả thiết có $\begin{cases} f(x) + 1 = a(x-1)^2(x+m) \\ f(x) - 1 = a(x+1)^2(x+n) \end{cases}$.

$$\text{Do đó } \begin{cases} f(1) + 1 = 0 \\ f(-1) - 1 = 0 \\ f(0) = 0 \\ f'(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c + d + 1 = 0 \\ -a + b - c + d - 1 = 0 \\ d = 0 \\ 3a + 2b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = 0 \\ c = -\frac{3}{2} \\ d = 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x.$$

Với $x = 1 \Rightarrow f(1) = -1$

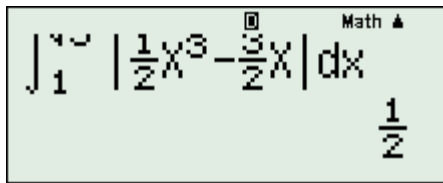
Ta có: $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{3} \end{cases}$

S_1 là diện tích giới hạn bởi đồ thị $y = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$, $y = -1$, $x = 0$, $x = 1$

$$\Rightarrow S_1 = \int_0^1 \left| \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x + 1 \right| dx = \frac{3}{8} \quad (1)$$

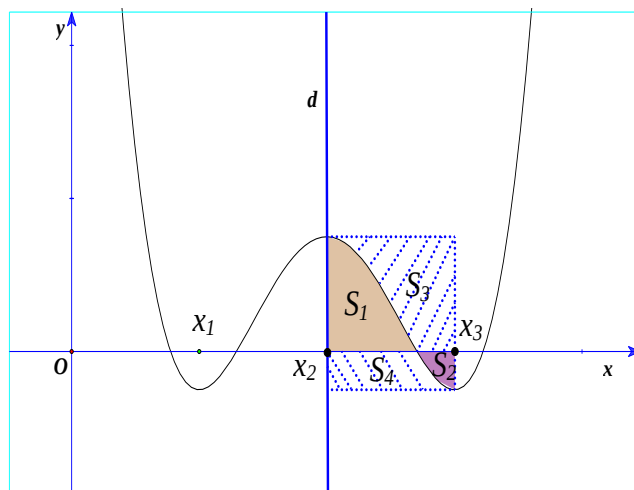
S_2 là diện tích giới hạn bởi đồ thị $y = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$, $y = 0$, $x = 1$, $x = \sqrt{3}$

$$\Rightarrow S_2 = \int_1^{\sqrt{3}} \left| \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x \right| dx = \frac{1}{2} (2)$$



$$\text{Từ (1), (2)} \Rightarrow 2S_2 + 8S_1 = 2 \cdot \frac{1}{2} + 8 \cdot \frac{3}{8} = 4.$$

Câu 46: Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị (C) như hình vẽ bên. Biết hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại các điểm x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_3 = x_1 + 2$, $f(x_1) + f(x_3) + \frac{2}{3}f(x_2) = 0$ và (C) nhận đường thẳng $d: x = x_2$ làm trục đối xứng. Gọi S_1, S_2, S_3, S_4 là diện tích của các miền hình phẳng được đánh dấu như hình bên. Tỉ số $\frac{S_1 + S_2}{S_3 + S_4}$ gần kết quả nào nhất



A. 0,60.

B. 0,55.

C. 0,65.

D. 0,70.

Lời giải**Chọn A**

Nhận thấy kết quả bài toán không đổi khi ta tịnh tiến đồ thị (C) sang bên trái sao cho đường thẳng $d: x = x_2$ trùng với trục tung khi đó (C) là đồ thị của hàm trùng phương $y = g(x)$ có ba điểm cực trị $x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1$. Suy ra $y = g(x) = k(x^4 - 2x^2) + c$ ($k > 0$)

$$\text{Lại có } f(x_1) + f(x_3) + \frac{2}{3}f(x_2) = 0 \Rightarrow -2k + 2c + \frac{2}{3}c = 0 \Leftrightarrow c = \frac{3}{4}k$$

$$\text{Suy ra: } y = g(x) = k(x^4 - 2x^2) + \frac{3}{4}k$$

$$\text{Khi đó: } S_1 + S_2 = k \int_0^1 \left| x^4 - 2x^2 + \frac{3}{4} \right| dx = \frac{28\sqrt{2} - 17}{60} k.$$

$$\text{Ta lại có: } g(0) - g(1) = k \Rightarrow S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = k \cdot 1 = k.$$

$$\text{Suy ra } S_3 + S_4 = k - \frac{28\sqrt{2} - 17}{60} k = \frac{77 - 28\sqrt{2}}{60} k \Rightarrow \frac{S_1 + S_2}{S_3 + S_4} = \frac{28\sqrt{2} - 17}{77 - 28\sqrt{2}} \approx 0,604$$

Câu 47: Cho parabol $(P): y = -4x^2$ và hai điểm A, B trên (P) sao cho đoạn $AB = 2$. Tìm diện tích lớn nhất của hình phẳng giới hạn bởi (P) và đường thẳng AB .

A. $\frac{16}{3}$.

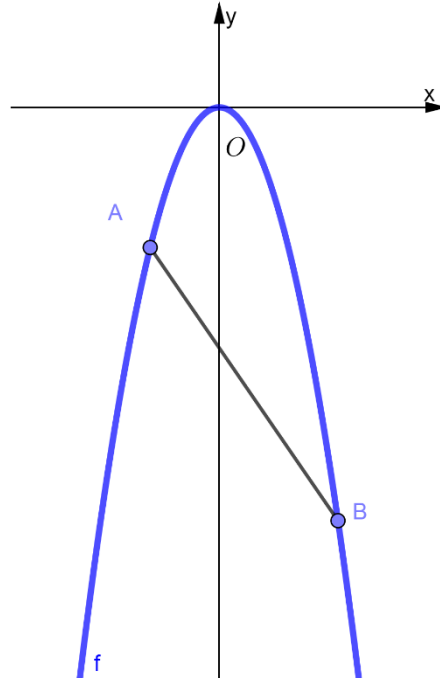
B. $\frac{4}{3}$.

C. $\frac{32}{3}$.

D. 4.

Lời giải

Chọn A



+) Giả sử $A(a; -4a^2) \in (P)$, $B(b; -4b^2) \in (P)$ và $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$

+) Phương trình đường thẳng AB là $y = -4(b+a)(x-a) - 4a^2$

$$y = -4(b+a)x + 4ab$$

+) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P) và đường thẳng AB là

$$\begin{aligned} S &= \int_a^b [-4x^2 + 4(a+b)x - 4ab] dx = \left[-\frac{4x^3}{3} + 2(a+b)x^2 - 4abx \right]_a^b = \frac{2}{3}b^3 - \frac{2}{3}a^3 + 2a^2b - 2ab^2 \\ &= \frac{2}{3}(b^3 - a^3 + 3a^2b - 3ab^2) = \frac{2}{3}(b-a)^3 \end{aligned}$$

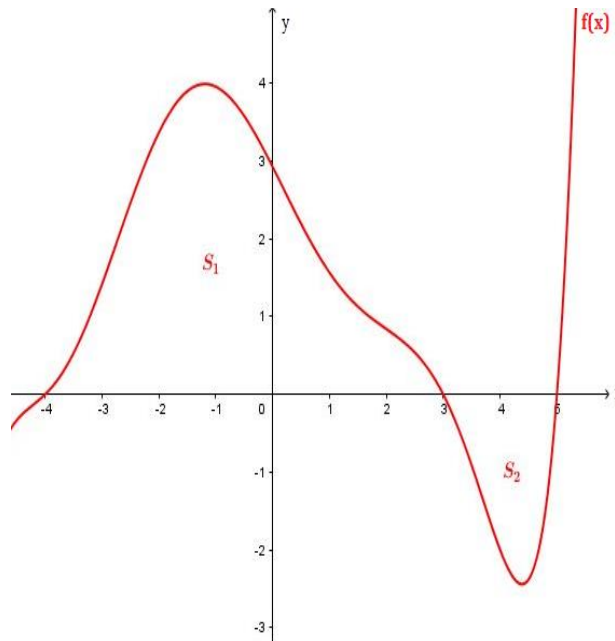
$$+) \text{ Mà } AB = 2 \Rightarrow (b-a)^2 + 16(b^2 - a^2)^2 = 4 \Leftrightarrow (b-a)^2 = \frac{4}{1+16(b+a)^2} \leq 4 \Rightarrow -2 \leq b-a \leq 2$$

Do đó $S \leq \frac{16}{3}$.

$$\text{Đấu bằng khi } \begin{cases} a+b=0 \\ b-a=2 \\ b-a=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \\ a=1 \\ b=-1 \end{cases}.$$

Vậy GTLN của S là $\frac{16}{3}$.

Câu 48: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị là đường cong tạo với trục Ox hai vùng có diện tích S_1, S_2 (như hình vẽ). Biết rằng $S_1 = 4S_2$ và $\int_{-4}^5 f(x)dx = 24$. Tính $S_1 + S_2$



A. 24.

B. 40.

C. 35.

D. Không thể xác định

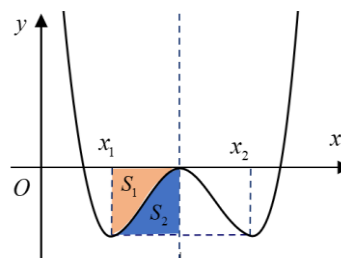
Lời giải**Chọn B**

Ta có: $S_1 = \int_{-4}^3 f(x)dx$ và $S_2 = -\int_3^5 f(x)dx$.

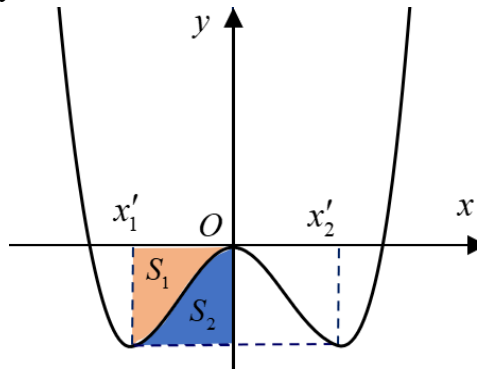
Vậy: $S_1 - S_2 = \int_{-4}^5 f(x)dx = 24$ và $S_1 = 4S_2$

$\Rightarrow S_1 = 32$ và $S_2 = 8$. $\Rightarrow S_1 + S_2 = 40$.

Câu 49: Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong như hình bên. Biết hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại hai điểm $x_1; x_2$ thỏa mãn $x_2 = x_1 + 2$ và đồ thị nhận đường thẳng $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ làm trục đối xứng. Gọi $S_1; S_2$ là diện tích của phần hình phẳng được in màu trong hình bên. Biết $\frac{S_1}{S_2} = \frac{a}{b}$, phân số $\frac{a}{b}$ tối giản, $a; b \in \mathbb{Z}$, tính $a + b$.

A. $a + b = 13$.B. $a + b = 7$.C. $a + b = 15$.D. $a + b = 9$.**Lời giải****Chọn C**

Kết quả bài toán không đổi khi ta tịnh tiến theo trục Ox sang trái $\frac{x_1+x_2}{2}$ đơn vị, ta sẽ được đồ thị mới như hình vẽ dưới đây



Gọi hàm số mới là $g(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e, a \neq 0$; do đồ thị hàm số $y = f(x)$ nhận đường thẳng $x = \frac{x_1+x_2}{2}$ làm trục đối xứng nên đồ thị hàm $y = g(x)$ nhận trục Oy làm trục đối xứng vì vậy $y = g(x)$ làm hàm số chẵn suy ra $b = d = 0$; mặt khác $g(0) = e = 0$ từ đó $g(x) = ax^4 + cx^2$. Do $x_2 = x_1 + 2$ nên $x'_2 = x'_1 + 2$ mà $x'_2 + x'_1 = 0$ suy ra $x'_1 = -1; x'_2 = 1$ từ đó ta có $g'(1) = g'(-1) = 0 \Leftrightarrow 4a + 2c = 0 \Leftrightarrow c = -2a$ ta được $g(x) = ax^4 - 2ax^2, a > 0$ (1)

Ta có diện tích hình chữ nhật là $S_1 + S_2 = 1, a = a$; mà $S_1 = \int_{-1}^0 |ax^4 - 2ax^2| dx = a \int_{-1}^0 |x^4 - 2x^2| dx = \frac{7a}{15}$ suy ra $S_2 = a = S_1 = \frac{7a}{15}$ từ đó tỷ số $\frac{S_1}{S_2} = \frac{7}{8} = \frac{a}{b}$ suy ra $a + b = 15$.

Câu 50: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm xác định, liên tục trên khoảng $(-1; +\infty)$ đồng thời thỏa mãn các điều kiện $f'(x) < 0 \forall x \in (-1, +\infty), f'(0) = -1$ và $[f'(x)]^2 = f''(x), f(3) = -\ln 4$. Khi đó diện tích giới hạn bởi đồ thị $(C): y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 2, x = 3$ bằng bao nhiêu?

A. $8\ln 2 - \ln 3 - 1$.

B. $8\ln 2 - 3\ln 3 - 1$.

C. $4\ln 2 - 3\ln 3 - 1$.

D. $8\ln 2 + 3\ln 3 - 1$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Với } x \in (-1; +\infty), \text{ ta có: } [f'(x)]^2 = f''(x) \Leftrightarrow -1 = -\frac{f''(x)}{[f'(x)]^2} \Leftrightarrow -1 = \left[\frac{1}{f'(x)} \right]'$$

$$\Leftrightarrow -x + C_1 = \frac{1}{f'(x)} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{-x + C_1}.$$

Mà $f'(0) = -1$ nên $C_1 = -1$.

$$\text{Vậy } f'(x) = \frac{1}{-x-1} \Rightarrow f(x) = \int \frac{1}{-x-1} dx = -\ln|x+1| + C_2$$

$$\text{Có: } f(3) = -\ln 4 \Rightarrow -\ln(4) + C_2 = -\ln(4) \Rightarrow C_2 = 0$$

$$\text{Vậy: } f(x) = -\ln(x+1).$$

$$\text{Khi đó: } S = \int_2^3 |-\ln(x+1)| dx = \left| \int_2^3 \ln(x+1) dx \right| = 8\ln 2 - 3\ln 3 - 1.$$

Câu 51: Cho parabol $(P): y = x^2 - kx + k - 4$, với k là tham số. Gọi S diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol (P) và trục hoành, giá trị nhỏ nhất của S là

A. $4\sqrt{3}$.

B. 4.

C. $4\sqrt{5}$.

D. 5.

Lời giải

Chọn A

+ Phương trình hoành độ giao điểm của parabol và trục hoành là: $x^2 - kx + k - 4 = 0$.

(P) cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi

$$(-k)^2 - 4(k - 4) > 0 \Leftrightarrow k^2 - 4k + 16 > 0 \text{ đúng với mọi } k \in \mathbb{R}.$$

Vậy (P) luôn cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt

Giả sử $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$ là các hoành độ giao điểm. Ta có: $x_1 + x_2 = k, x_1 x_2 = k - 4$,

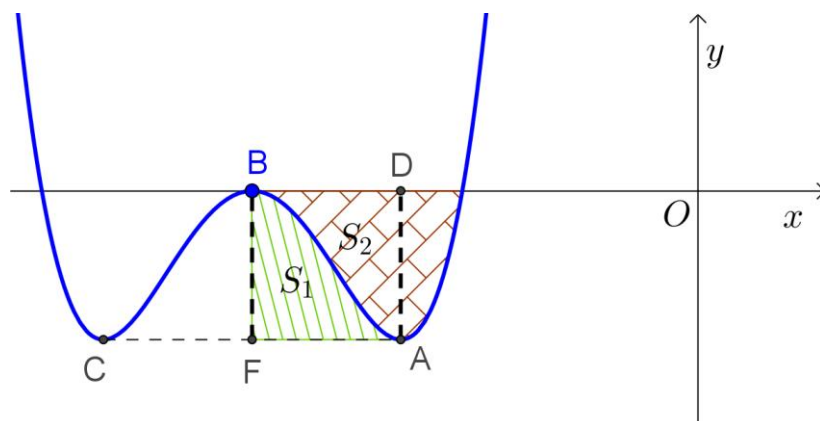
$$x_2 - x_1 = \sqrt{k^2 - 4k + 16}.$$

+ Diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol (P) và trục hoành là:

$$\begin{aligned} S &= \int_{x_1}^{x_2} |x^2 - kx + k - 4| dx = \left| \left(\frac{x^3}{3} - \frac{kx^2}{2} + kx - 4x \right) \right|_{x_1}^{x_2} \\ &= \left| \left(\frac{x_2^3}{3} - \frac{kx_2^2}{2} + kx_2 - 4x_2 \right) - \left(\frac{x_1^3}{3} - \frac{kx_1^2}{2} + kx_1 - 4x_1 \right) \right| \\ &= \left| (x_2 - x_1) \left[\frac{(x_2 + x_1)^2 - x_2 x_1}{3} - \frac{k(x_2 + x_1)}{2} + k - 4 \right] \right| \\ &= \frac{(\sqrt{k^2 - 4k + 16})^3}{6} = \frac{(\sqrt{(k-2)^2 + 12})^3}{6} \geq 4\sqrt{3} \end{aligned}$$

Do đó: $\min S = 4\sqrt{3}$ khi $k = 2$.

Câu 52: Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên.

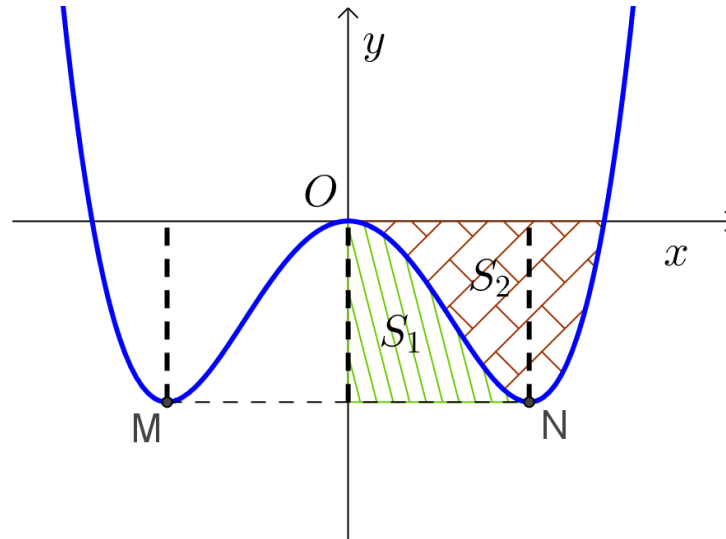


Biết đồ thị hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại ba điểm $C(x_1; y_1), B(x_2; y_2), A(x_3; y_3)$ ($x_1 < x_2 < x_3$) thỏa: $x_1 = x_3 - 2$ và hình vuông $BFAD$ có diện tích bằng 1. Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích của hai hình phẳng được gạch trên hình vẽ bên. Tính tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$

- A. $\sqrt{2}$. B. $\frac{1}{15}$. C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. D. $\frac{\sqrt{2}}{15}$.

Lời giải

Chọn C



$$S_{BFAD} = 1 \Leftrightarrow BD^2 = 1 \Leftrightarrow BD = 1 \Rightarrow x_3 - x_2 = 1 \quad (1)$$

$$\text{Ta lại có: } x_1 = x_3 - 2 \Leftrightarrow x_1 + 1 = x_3 - 1 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1), (2)} \Rightarrow x_1 + 1 = x_2 = x_3 - 1$$

Tịnh tiến đồ thị sang bên phải trục hoành sao cho $B \equiv O(0; 0)$

Khi đó: đồ thị hàm số có ba điểm cực trị lần lượt là $M(-1; -1); O(0; 0); N(1; -1)$

* Phương trình $f(x)$ có dạng: $f(x) = a(x^4 - 2x^2)$ ($a > 0$)

$$\text{Phương trình hoành độ giao điểm với trục hoành: } a(x^4 - 2x^2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \sqrt{2} \\ x = -\sqrt{2} \end{cases}$$

$$* S_1 = \int_0^1 a(x^4 - 2x^2 + 1) dx = \frac{8a}{15}$$

$$S_2 = -\int_0^{\sqrt{2}} a(x^4 - 2x^2) dx = \frac{8a\sqrt{2}}{15}$$

$$\text{Và } \frac{S_1}{S_2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

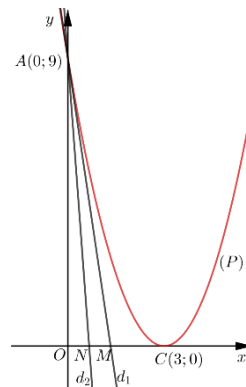
Câu 53: Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = (x - 3)^2$, trục tung và trục hoành. Gọi k_1, k_2 ($k_1 > k_2$) là hệ số góc của hai đường thẳng cùng đi qua điểm $A(0; 9)$ và chia (H) làm ba phần có diện tích bằng nhau. Tính $k_1 - k_2$.

A. $\frac{13}{2}$.

B. 7.

C. $\frac{25}{4}$.

D. $\frac{27}{4}$.

Lời giải**Chọn D**

Gọi $d_1: y = k_1x + 9$, $d_2: y = k_2x + 9$ ($k_1 > k_2$).

Gọi $M = d_1 \cap Ox \Rightarrow M\left(-\frac{9}{k_1}; 0\right)$; $N = d_2 \cap Ox \Rightarrow N\left(-\frac{9}{k_2}; 0\right)$ ($-\frac{9}{k_2} < -\frac{9}{k_1}$)

Giao điểm của $(P): y = (x-3)^2$ với hai trục tọa độ lần lượt là $C(3; 0)$, $A(0; 9)$.

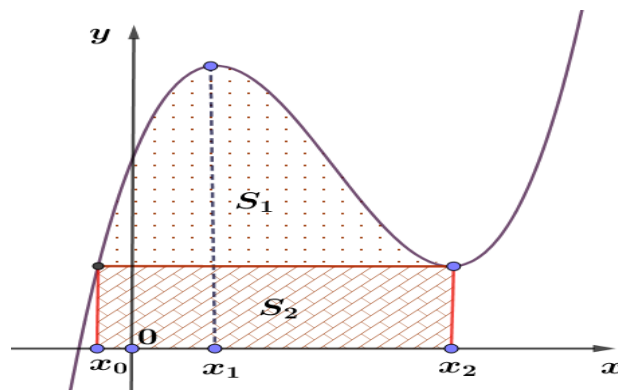
Theo giả thiết ta có $S_{\triangle AON} = S_{\triangle ANM} \Leftrightarrow OM = 2ON \Leftrightarrow -\frac{9}{k_1} = -\frac{18}{k_2} \Leftrightarrow k_2 = 2k_1$.

Lại có $S_{(H)} = 3S_{\triangle AON} \Leftrightarrow \int_0^3 (x-3)^2 dx = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot OA \cdot ON \Leftrightarrow 9 = -\frac{243}{2k_2} \Leftrightarrow k_2 = -\frac{27}{2}$.

Suy ra $k_1 = -\frac{27}{4} \Rightarrow k_1 - k_2 = \frac{27}{4}$.

Câu 54: Hàm số bậc ba $f(x)$ có đồ thị là đường cong ở hình bên dưới. Gọi x_1, x_2 lần lượt là hai điểm cực trị thỏa mãn $x_2 = x_1 + 2$ và $f(x_1) - 3f(x_2) = 0$. Đường thẳng song song với trục và qua điểm cực tiểu của đồ thị hàm số tại điểm thứ hai có hoành độ x_0 và $x_1 = x_0 + 1$.

Tính tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$ (S_1, S_2 lần lượt là diện tích hình phẳng được gạch ở hình bên dưới).



A. $\frac{9}{8}$.

B. $\frac{5}{8}$.

C. $\frac{3}{8}$.

D. $\frac{3}{5}$.

Lời giải**Chọn A**

+) Gọi $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, a > 0$.

$$\Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c.$$

+) Theo giả thiết ta có $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$

$$f'(x) = 3a(x - x_1)(x - x_2) = 3a(x - x_1)(x - x_1 - 2)$$

$$= 3a(x - x_1)^2 - 6a(x - x_1)$$

$$\Rightarrow f(x) = \int f'(x) dx = a(x - x_1)^3 - 3a(x - x_1)^2 + C$$

+) Ta có

$$f(x_1) - 3f(x_2) = 0 \Leftrightarrow f(x_1) - 3f(x_1 + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow C - 3(8a - 12a + C) = 0 \Leftrightarrow -2C + 12a = 0 \Leftrightarrow C = 6a$$

$$\text{Do đó } f(x) = a(x - x_1)^3 - 3a(x - x_1)^2 + 6a.$$

+) S_2 là diện tích hình chữ nhật có cạnh là $x_2 - x_0 = 3$ và $f(x_2) = 8a - 12a + 6a = 2a$ nên $S_2 = 6a$.

+) S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường

$$x = x_0 = x_1 - 1, x = x_2 = x_1 + 2, y = f(x_2) = 2a \text{ và } f(x) = a(x - x_1)^3 - 3a(x - x_1)^2 + 6a.$$

Nên suy ra

$$S_1 = \int_{x_1-1}^{x_1+2} [f(x) - 2a] dx = \int_{x_1-1}^{x_1+2} [a(x - x_1)^3 - 3a(x - x_1)^2 + 4a] dx$$

$$= \left[\frac{1}{4} a(x - x_1)^4 - a(x - x_1)^3 + 4ax \right]_{x_1-1}^{x_1+2} = \frac{27a}{4}.$$

$$\text{Vậy } \frac{S_1}{S_2} = \frac{27a}{4 \cdot 6a} = \frac{9}{8}.$$