NGUYỄN VŨ THANH

CHUYÊN ĐỀ BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI TOÁN THCS

SỐ HỌC

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

Chương 1.

SỐ TỰ NHIÊN

§ 1. KHÁI NIỆM VỀ TẬP HỢP – TẬP HỢP CON

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Các kí hiệu

$a \in A$ đọc là phần tử a thuộc tập hợp A

$a \notin A$ đọc là phần tử a không thuộc tập hợp A.

2. Cách cho một tập hợp

- Liệt kê tất cả các phần tử của tập hợp đó.
- Chỉ ra tính chất đặc trưng cho các phần tử của tập hợp đó

$$A = \{a / a \text{ có tính chất T}\}$$

- Để minh họa một tập hợp ta dùng sơ đồ Ven.

3. Tập hợp con

- A là tập hợp con của B, kí hiệu $A \subset B$, nếu $x \in A$ thì $x \in B$.
- Nếu $A \subset B$ và $B \subset A$ thì $A = B$.
- Tập rỗng, kí hiệu $\varnothing$, là tập hợp không có phần tử nào.

4. Tập hợp số tự nhiên **N** = {0; 1; 2; 3; ...}

- Tập hợp số tự nhiên **N** là một tập hợp sắp thứ tự.
- Mỗi số tự nhiên có một số tự nhiên liền sau duy nhất.
- Trong trường hợp **N** không có số tự nhiên lớn nhất.

B. CÁC DẠNG TOÁN

Bài 1.

Cho $A = \{x \mid x \in N,\ x \vdots 3 \text{ và } x < 100\}$

$B = \{x \mid x \in N,\ x \vdots 6 \text{ và } x < 100\}$

$C = \{x \mid x \in N,\ x \vdots 9 \text{ và } x < 100\}$

a) Viết các tập hợp A, B, C bằng cách liệt kê các phần tử của các tập hợp đó.

b) Xác định số phần tử của mỗi tập hợp.

c) Viết bao hàm thức có thể được giữa các tập hợp.

d) Xác định tập hợp các phần tử vừa thuộc B vừa thuộc C.

Giải :

a) Ta có : $A = \{0; 3; 6; 9; ... ; 99\}$; $B = \{0; 6; 12; ... ; 96\}$;

$C = \{0; 9; 18; ... ; 99\}$.

b) A có $\frac{99}{3} + 1 = 34$ (phần tử) ; B có $\frac{96}{6} + 1 = 17$ (phần tử) ;

C có $\frac{99}{9} + 1 = 12$ (phần tử) .

c) Vì $x \vdots 6$ thì $x \vdots 3$ nên $B \subset A$; Vì $x \vdots 9$ thì $x \vdots 3$ nên $C \subset A$.

d) $x \vdots 6$ và $x \vdots 9$ thì $x \vdots 18$ nên tập hợp vừa thuộc B vừa thuộc C là :

$\{0; 18; 36; 54; 72; 90\}$

Bài 2.

Một lớp học có 53 học sinh, trong đó có 40 học sinh thích môn Toán và 30 học sinh thích môn Văn. Hỏi :

a) Có nhiều nhất bao nhiêu học sinh thích cả hai môn Văn và Toán ?

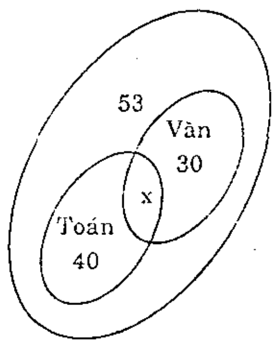
b) Có ít nhất bao nhiêu học sinh thích cả hai môn Văn và Toán.

c) Nếu chỉ có 3 học sinh không thích cả môn Văn lẫn môn Toán thì có bao nhiêu học sinh thích cả hai môn Văn lẫn Toán ?

Giải :

Gọi x là học sinh thích cả hai môn Văn và Toán.

a) Số học sinh nhiều nhất thích cả hai môn là 30 em (lúc đó 30 em thích môn Văn đều thích môn Toán).



b) Ta có : $40 + (30 - x) \le 53$

$70 - x \le 53$

$x \ge 17$

Vậy có ít nhất 17 học sinh thích cả hai môn Văn và Toán.

c) Ta có : $40 + (30 - x) = 53 - 3$

$70 - x = 50$

$x = 20.$

Vậy có 20 học sinh thích cả hai môn Văn và Toán.

Bài 3.

Cho tập hợp A = {a; b; c}

a) Viết các tập hợp con của A có 1 phần tử.

b) Viết các tập hợp con của A có 2 phần tử.

c) Tập hợp A có bao nhiêu tập con.

Giải :

a) Các tập hợp con của A có 1 phần tử là : {a} ; {b} ; {c}.

b) Các tập hợp con của A có 2 phần tử là : {a; b} , {b; c} , {c; a}.

c) A có các tập hợp con là : ∅ , {a} , {b} , {c} , {a; b} , {b; c} , {c; a} , A.

Vậy tập A đã cho có 8 tập hợp con.

Chú ý :

Người ta chứng minh được rằng : Nếu một tập hợp có n phần tử thì nó có 2^n tập hợp con.

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Xác định các tập hợp sau bằng cách liệt kê các phần tử của nó :
$A = \{x \mid x \in \mathbf{N} \text{ và } x < 15\}$; $B = \{x \mid x \in \mathbf{N} \text{ và } 12 < x < 20\}$;
$C = \{x \mid x \,\vdots\, 5 \text{ và } x \le 30\}$.

2. Xác định các tập hợp sau bằng cách dùng các kí hiệu chỉ ra tính chất đặc trưng của các phần tử của nó.
A : Tập hợp các số chẵn lớn hơn 100.
B : Tập hợp các số chia hết cho 5 và bé hơn 1000.
C : Tập hợp các số lẻ.

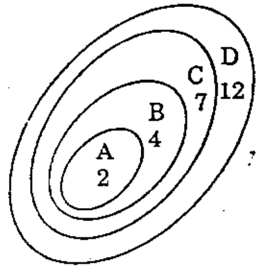
3. Trong một kì thi hội khỏe trường A có 12 học sinh giành được các giải thưởng trong đó : 7 học sinh giành được ít nhất hai giải, 4 học sinh giành được ít nhất 3 giải; 2 học sinh giành được số giải nhiều nhất, mỗi em 4 giải. Hỏi trường A giành được tất cả bao nhiêu giải ?

4. Cho tập hợp A = {1; 2; 3; 4; 5}. Viết các tập con của A mà mọi phần tử của nó đều là số lẻ.

HƯỚNG DẪN GIẢI – ĐÁP SỐ

1. A = {0; 1; 2; ... ; 14} ; B = {13; 14; ... ; 19} ;
C = {0; 5; 10; 15; 20; 25; 30}.

2. $A = \{x \mid x \in \mathbf{N}, x \,\vdots\, 2 \text{ và } x < 100\}$



$B = \{x \mid x \in \mathbf{N}, x \,\vdots\, 5 \text{ và } x < 1000\}$;
$C = \{x \mid x \in \mathbf{N} \text{ và } x \text{ không chia hết cho } 2\}$.

3. Gọi A, B, C, D lần lượt là tập hợp học sinh giành được 4 giải, ít nhất 3 giải, ít nhất 2 giải và ít nhất 1 giải. Ta có $A \subset B \subset C \subset D$.

Số học sinh giành đúng 4 giải là : 2

Số học sinh giành đúng 3 giải là : 4 - 2 = 2

Số học sinh giành đúng 2 giải là : 7 - 4 = 3

Số học sinh giành đúng 1 giải là : 12 - 7 = 5 .

Trường A giành được tất cả : 2.4 + 2.3 + 3.2 + 5 = 25 (giải).

4. {1} , {3} , {5} , {1; 3} , {1; 5} , {3; 5} , {1; 3; 5}.

§ 2. HỆ GHI SỐ

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Hệ thập phân :

Dùng 10 chữ số : 0; 1; 2; ... ; 9 và nguyên tắc : một đơn vị của mỗi hàng gấp 10 lần đơn vị của hàng thấp hơn liền sau để biểu diễn số tự nhiên.

Biểu diễn số tự nhiên có 2; 3; ... ; n chữ số ta viết như sau :

$$\overline{ab} = 10a + b$$

$$\overline{abc} = 100a + 10b + c$$

$$\overline{a_1a_2...a_n} = a_1.10^{n-1} + a_2 10^{n-2} + ... + a_{n-1}10 + a_n \quad (a_1 \neq 0)$$

2. Quy tắc nhân :

Giả sử một hành động H gồm các giai đoạn A, B, C, ... Ở giai đoạn A có m cách chọn; giai đoạn B có n cách chọn; giai đoạn C có p cách chọn ... thì có tất cả m.n.p cách chọn để thực hiện hành động H.

B. CÁC DẠNG TOÁN

Bài 4.

Một số có bốn chữ số với các chữ số hàng nghìn, trăm, chục, đơn vị lần lượt là bốn số tự nhiên liên tiếp. Hỏi số này sẽ tăng bao nhiêu đơn vị nếu ta viết các chữ số của nó theo thứ tự ngược lại ?

Giải :

Giả sử số đã cho là :

$$\overline{a(a+1)(a+2)(a+3)} = 1000a + 100(a+1) + 10(a+2) + (a+3) .$$

Số viết theo thứ tự ngược lại là :

$$\overline{(a+3)(a+2)(a+1)a} = 1000(a+3) + 100(a+2) + 10(a+1) + a .$$

Hiệu của chúng bằng : 3000 + 100 - 10 - 3 = 3087.

Bài 5.

Tìm số tự nhiên có chữ số tận cùng là 5. Biết rằng nếu xóa chữ số

tận cùng này thì được số mới nhỏ hơn số đầu là 2003 đơn vị.

Giải :

Gọi số cần tìm là $\overline{x5}$ với $x \in N^*$

Theo đề bài ta có : $\overline{x5} = x + 2003$

Khi đó : $10x + 5 = x + 2003$ hay $9x = 1998$ suy ra $x = 222$.

Vậy số cần tìm là 2225.

Bài 6.

Hiện nay tuổi cha gấp 4 lần tuổi con. Sau 20 năm nữa thì tuổi cha sẽ gấp đôi tuổi con. Hỏi tuổi cha và tuổi con hiện nay ?

Giải :

Nhận xét : Hiệu giữa tuổi cha và tuổi con không đổi theo thời gian.

Hiện nay hiệu giữa tuổi cha và tuổi con bằng 3 lần tuổi con. Sau 20 năm hiệu đó là tuổi mới của con. Nhưng tuổi mới bằng tuổi cũ cộng với 20. Vậy ba lần tuổi (hiện nay) của con bằng tuổi hiện nay của con cộng với 20. Vậy hai lần tuổi hiện nay của con là 20 năm. Hiện nay con 10 tuổi, cha 40 tuổi.

Bài 7.

Tìm số tự nhiên có hai chữ số sao cho khi đổi vị trí của hai chữ số rồi viết thêm số 0 vào bên phải hai chữ số đó thì được một số mới gấp 45 lần số ban đầu.

Giải :

Gọi số cần tìm là : $\overline{ab}$ $(a, b \in N^*\ ; a, b \leq 9)$

Theo đề bài ta có : $\overline{ba0} = 45\overline{ab}$

Suy ra : $100b + 10a = 45(10a + b)$ hay $100b + 10a = 450a + 45b$

Do đó : $440a = 55b$ hay $8a = b$.

Vì $0 < a, b \leq 9$ nên $a = 1$, $b = 8$.

Vậy số cần tìm là 18.

Bài 8.

Trong các số tự nhiên có ba chữ số, có bao nhiêu số không chứa chữ số 9 ?

Giải :

Số có ba chữ số có dạng $\overline{abc}$

Chữ số a có 8 cách chọn (từ 1 đến 8)

Chữ số b có 9 cách chọn (từ 0 đến 8).

Chữ số c có 9 cách chọn (từ 0 đến 8).

Vậy tất cả có : 8.9.9 = 648 (số) .

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Tìm số tự nhiên có hai chữ số biết rằng nếu viết chính số đó xen vào giữa hai chữ số của nó thì số đó tăng gấp 99 lần.
2. Hiện nay tuổi cha gấp 4 lần tuổi con và tổng số tuổi của cha và con là 50. Hỏi bao nhiêu năm nữa thì tuổi cha gấp ba lần tuổi con.
3. Tìm số tự nhiên có ba chữ số biết rằng trong hai cách viết : Viết thêm chữ số 5 vào đằng sau số đó hoặc viết thêm chữ số 1 vào đằng trước số đó thì cách viết thứ nhất cho số lớn gấp 5 lần so với cách viết thứ hai.
4. Tìm số có hai chữ số biết rằng số đó bằng thương trong phép chia 900 cho tổng các chữ số của nó.
5. Có bao nhiêu số có 3 chữ số mà tổng các chữ số của nó bằng 6 ?
6. Có bao nhiêu số tự nhiên có ba chữ số với các chữ số khác nhau ?
7. Viết liền nhau các số tự nhiên từ 1 đến 100, hỏi chữ số 5 được viết bao nhiêu lần ?
8. Tìm số tự nhiên nhỏ nhất có tổng các chữ số của nó bằng 21.
   a) Hỏi A có bao nhiêu chữ số ?
   b) Hãy xóa đi 100 chữ số trong số A để số còn lại là nhỏ nhất, lớn nhất ?

HƯỚNG DẪN GIẢI – ĐÁP SỐ

1. $\overline{aabb} = 99\overline{ab}$ suy ra 1100a + 11b = 990a + 99b hay 5a = 4b. Vậy $\overline{ab} = 45$.
2. Hiện nay tuổi cha là 40, tuổi con là 10. Hiệu giữa tuổi cha và tuổi con là 30 và bằng 2 lần tuổi mới của con. Vậy khi con 15 tuổi thì tuổi cha gấp 3 lần tuổi con.
3. Giả sử số cần tìm là $x = \overline{abc}$. Tìm x thỏa : $\overline{x5} = 5.\overline{1x}$. Suy ra :
   $$10x + 5 = 5(1000 + x) \text{ hay } x = 999.$$
4. Ta có $\overline{ab}.(a + b) = 900$, chú ý $a + b \le 18$ và $a + b = 900 : \overline{ab} > 9$.
   $\overline{ab}$ và a + b cùng chia hết cho 3, từ đó a + b = 12; 15; 18. Vậy $\overline{ab} = 75$.
5. 6 = 6 + 0 + 0 = 5 + 1 + 0 = 4 + 2 + 0 = 4 + 1 + 1 = 3 + 3 + 0 = 3 + 2 + 1 = 2 + 2 + 2 . Lập được 20 số.
6. Số có dạng $\overline{abc}$; a có 9 cách chọn ; b có 9 cách chọn ; c có 8 cách chọn. Vậy có tất cả 9.9.8 = 648 số.
7. Từ số 50 đến số 59 chữ số 5 được viết 11 lần. Trong mỗi chục khác chữ số 5 được viết 1 lần. Vậy chữ số 5 được viết 11 + 9 = 20 lần.
8. Số tự nhiên có tổng các chữ số bằng 21 phải có từ 3 chữ số trở lên (vì 9 + 9 = 18 < 21). Chữ số hàng trăm nhỏ nhất là 3 (vì 2 + 9 + 9 = 20 < 21).

Số cần tìm là 399.

9. a) Số A có $9 + 51.2 = 111$ (chữ số).

b) Số nhỏ nhất là 00000123450.

Số lớn nhất là 99999785960.

§ 3. CÁC PHÉP TÍNH TRONG N

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Tính chất phép cộng và nhân trong N

a) Giao hoán :

$$a + b = b + a \;;\; ab = ba .$$

b) Kết hợp :

$$(a + b) + c = a + (b + c) \;;\; (ab)c = a(bc) .$$

c) Có phần tử trung hòa :

$$a + 0 = 0 + a = a \;;\; a.1 = 1.a = a .$$

d) Phân phối :

$$a.(b+c) = a.b + a.c$$

2. Phép chia có dư

Với mỗi cặp $a, b \in N$, $b \neq 0$ tồn tại cặp duy nhất $q, r \in N$ sao cho $a = bq + r$ với $0 \leq r < b$.

Nếu $r = 0$ ta nói a chia hết cho b, kí hiệu $a \vdots b$.

Nếu $r \neq 0$ ta nói a không chia hết cho b, kí hiệu $a \not\vdots b$.

B. CÁC DẠNG TOÁN

Bài 9.

Cho ba chữ số 1, 2, 3. Tìm tổng của tất cả các số viết bằng cả ba chữ số đó, mỗi chữ số dùng một lần.

Giải :

Cách 1 :

Tổng phải tìm là : $123 + 132 + 213 + 231 + 312 + 321 = 1332$.

Cách 2 :

Mỗi chữ số đều được viết 2 lần ở hàng trăm, 2 lần ở hàng chục, 2 lần ở hàng đơn vị nên tổng phải tìm là :

$$222.(1+2+3)=222.6=1332.$$

Cách 3 : Mỗi số chẳng hạn 213 có duy nhất một số 231 sao cho :

$$213+231=444.$$

Vậy tổng sẽ là : $\frac{6}{2}.444=1332$.

Bài 10.

a) Tính $S=1+2+3+\ldots+n$.

b) Cho 100 số tự nhiên 1, 2, ... , 100. Có thể chọn được 71 số tự nhiên nhỏ nhất sao cho tổng của chúng bằng tổng của 29 số còn lại không ?

Giải :

a) Ta có : $S=\underbrace{1+2+\cdots+(n-1)+n}_{n\text{ số hạng}}$

$S=\underbrace{n+(n-1)+\cdots+2+1}_{n\text{ số hạng}}$

Suy ra : $S+S=\underbrace{(n+1)+(n+1)+\cdots+(n+1)}_{n\text{ số hạng }(n+1)}=n(n+1)$

Vậy : $S=\frac{n(n+1)}{2}$.

b) Áp dụng câu a) với $n=100$ ta có : $1+2+\ldots+100=\frac{100.101}{2}=5050$.

Tổng của 71 số tự nhiên nhỏ nhất là : $1+2+\ldots+71=\frac{71.72}{2}=2556$.

Mà $2556>2525=5050:2$ nên không thể chọn được 71 số tự nhiên nhỏ nhất sao cho tổng của chúng bằng tổng của 29 số còn lại.

Bài 11.

Tính số trang của một cuốn sách biết rằng để đánh số trang quyển sách phải dùng 3897 chữ số.

Giải :

Ta có 9 số có một chữ số, 90 số có hai chữ số (từ 10 đến 99) và 900 số có ba chữ số (từ 100 đến 999) nên ta phải dùng $9+90.2+900.3=2889$ chữ số để viết tất cả các số có một, hai, ba chữ số. Vì $2889<3897$ nên số trang của cuốn sách là một số có 4 chữ số.

Số các số có 4 chữ số đã viết là : $(3897-2889):4=1008:4=252$.

Số thứ 252 có 4 chữ số là số : $1000+252-1=1251$.

Vậy quyển sách có 1251 trang.

Bài 12.

Tìm một số có 6 chữ số tận cùng là chữ số 4, biết rằng khi chuyển chữ số 4 lên đầu còn các chữ số khác giữ nguyên thì ta được một số mới gấp 4 lần số cũ.

Giải :

Cách 1 : Gọi số cần tìm là : $\overline{abcde4}$ $(a \neq 0)$. Theo đề bài ta có : 4.4 = 16 nên e = 6.

$$\begin{array}{r} \overline{abcde4} \\ \times \quad 4 \\ \hline \overline{4abcde} \end{array}$$

Thay e = 6 ta có 6.4 = 24 nên d = 5 (có giữ 1).

Tiếp tục như thế ta được số phải tìm là 102564.

Cách 2 : Gọi số cần tìm là $\overline{x4}$ với x là số tự nhiên có 5 chữ số.

Theo đề bài ta có : $\overline{4x} = 4.\overline{x4}$. Suy ra : 400000 + x = 4(10x + 4) hay $39x = 399984$. Do đó x = 10256. Vậy số cần tìm là 10256.

Bài 13.

a) Hai số tự nhiên có tổng bằng 2003 thì tích của chúng bằng 6749 được không ?

b) Hai số tự nhiên có hiệu bằng 2002 thì tích của chúng có bằng 2006 được không ?

Giải :

a) Hai số tự nhiên có tổng bằng 2003 thì trong hai số đó phải có một số chẵn, khi đó tích của chúng phải là số chẵn nên không thể bằng 6749.

b) Gọi x, y là hai số thỏa : x - y = 2002

x, y phải cùng chẵn hoặc cùng lẻ. Nếu x, y cùng lẻ thì x.y là số lẻ. Nếu x, y cùng chẵn thì xy chia hết cho 4, mà 2006 không chia hết cho 4. Vậy xy không thể bằng 2006.

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Tính :
   S = 1 + 2 - 3 - 4 + 5 + 6 - 7 - 8 + ... + 993 + 994 - 995 - 996 + 997 + 998.
2. Cho bốn chữ số 5, 6, 7, 8. Tìm tổng của tất cả các số viết bằng cả bốn chữ số đó, mỗi chữ số dùng một lần.
3. Cần có bao nhiêu chữ số để đánh số trang của một quyển sách có :
   a) 358 trang;
   b) 1031 trang.

4. Tìm một số có 5 chữ số sao cho khi nhân số đó với 4 ta được một số mới được viết bằng chính các chữ số của nó nhưng theo thứ tự ngược lại.

5. Trên bảng viết các số 1, 2, 3, ... , 2003. Mỗi lần xóa đi hai số bất kì ta thay bằng hiệu của chúng. Chứng minh rằng dù có làm như thế bao nhiêu lần thì cũng không bao giờ thu được kết quả là số còn lại trên bảng là 0.

6. a) Tìm số tự nhiên nhỏ nhất khi nhân với số 12345679 ta được một số biểu diễn bằng toàn chữ số 5.

b) Tìm số tự nhiên nhỏ nhất khi nhân với số 333667 ta được một số biểu diễn bằng toàn chữ số 8.

7. Một số chẵn có 4 chữ số trong đó số tạo bởi chữ số hàng trăm và hàng chục gấp 3 lần chữ số hàng nghìn và gấp 2 lần chữ số hàng đơn vị. Tìm số đó.

HƯỚNG DẪN GIẢI – ĐÁP SỐ

1. $S = 1 + (2 - 3 - 4 + 5) + (6 - 7 - 8 + 9) + ... + (994 - 995 - 996 + 997) + 998 = 999$.

2. Tổng bằng 12.14443 = 173316.

3. a) Để đánh số trang từ 1 đến 358 ta dùng : 9 số có 1 chữ số phải dùng :

$$9 + 90.2 + 259.3 = 966 \text{ (chữ số)}.$$

b) 3017 chữ số.

4. Từ sơ đồ phép tính :

$$\begin{array}{r} abcde \\ \times \quad 4 \\ \hline edcba \end{array}$$

ta có số cần tìm là 21978.

5. Ta có : $1 + 2 + ... + 2005 = \dfrac{2005.2006}{2} = 2005.1003$ là một số lẻ.

Khi thay hai số bất kì bằng hiệu của chúng thì tổng giảm đi một số chẵn ((a + b) - (a - b) = 2b). Do đó tổng các số còn lại là số lẻ, không thể bằng 0.

6. a) Thực hiện phép chia 55...5 (n số 5) cho 12345679 cho đến khi chia hết thì được số 45.

b) 2664.

7. Gọi số cần tìm là $\overline{abcd}$ $(a \neq 0)$

Ta có $\overline{bc} = 3a = 2d$; d chẵn nên $d \in \{0; 2; 4; 6; 8\}$

$\overline{bc}$ chẵn và $\overline{bc} \leq 16$, $\overline{bc} \,\vdots\, 3$ nên $\overline{bc} = 00; 06; 12$.

Số cần tìm là 4126.

§ 4. LŨY THỪA

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Lũy thừa với số mũ tự nhiên : $a^n \quad (a, n \in N)$

- $a^0 = 1 \quad (a \neq 0)$
- $a^n = \underbrace{a.a\ldots a}_{n \text{ số } a}$

2. Các phép tính về lũy thừa

- $a^m.a^n = a^{m+n}$
- $a^m : a^n = a^{m-n} \quad (a \neq 0 \text{ và } m \geq a)$
- $(a^m)^n = a^{m.n}$

3. Lưu ý

$\overline{x0}^n = \overline{y0}$; $\overline{x1}^n = \overline{y1}$; $\overline{x5}^n = \overline{y5}$; $\overline{x6}^n = \overline{y6}$ (với $x, y \in N$)

B. CÁC DẠNG TOÁN

Bài 14.

a) So sánh 10^{30} và 2^{100}.

b) Số 2^{100} có bao nhiêu chữ số.

c) So sánh 333^{444} và 444^{333}.

Giải :

a) Đưa các lũy thừa về cùng số mũ rồi so sánh cơ số.

Ta có : $10^{30} = (10^3)^{10} = 1000^{10}$; $2^{100} = (2^{10})^{10} = 1024^{10}$;

$1000 < 1024$ suy ra $1000^{10} < 1024^{10}$ nên $10^{30} < 2^{100}$.

b) Ta chứng minh $2^{100} < 10^{31}$. Thật vậy :

$$2^{100} < 10^{31} \Leftrightarrow 2^{100} < 2^{31}.5^{31} \Leftrightarrow 2^{69} < 5^{31} \Leftrightarrow (2^9)^7.2^6 < (5^4)^7.5^3$$

$$\Leftrightarrow 512^7.64 < 625^7.125 \text{ (luôn đúng).}$$

Vậy $10^{30} < 2^{100} < 10^{31}$ do đó 2^{100} có 31 chữ số.

c) Ta có $333^{444} = (333^4)^{111}$ và $444^{333} = (444^3)^{111}$.

Ta so sánh 333^4 và 444^4.

$$333^4 = (3.111)^4 = 3^4.111^4 = 81.111^4$$

$$444^3 = (4.111)^3 = 4^3.111^3 = 64.111^3$$

Suy ra $333^4 > 444^3$ do đó $333^{444} > 444^{333}$.

Bài 15.

Hai số 2^{2003} và 5^{2003} viết liền nhau tạo thành một số. Hỏi số đó có bao nhiêu chữ số?

Giải :

Giả sử 2^{2003} có m chữ số và 5^{2003} có n chữ số thì hai số 2^{2003} và 5^{2003} khi viết liền nhau có m + n chữ số.

Vì 2^{2003} có m chữ số nên : $10^{m-1} < 2^{2003} < 10^{m}$ (1)

5^{2003} có n chữ số nên : $10^{n-1} < 5^{2003} < 10^{n}$ (2)

Nhân (1) và (2) theo từng vế ta được : $10^{m+n-2} < 10^{2003} < 10^{m+n}$

Suy ra m + n - 2 < 2003 < m + n, do đó m + n - 1 = 2003.

Vậy m + n = 2004.

Bài 16.

a) Hãy biểu diễn số $\overline{aa...a}$ (n chữ số a) trong hệ thập phân.

b) Chứng minh rằng số 111 ... 122 ... 2 (n chữ số 1 và n chữ số 2) là tích của hai số tự nhiên liên tiếp với $n \in N^*$.

Giải :

a) Ta có : $\overline{aa...a} = a.11...1 = \dfrac{a}{9}.99...9 = \dfrac{a(10^n - 1)}{9}$.

b) *Cách 1* : $11...122...2 = 11...1.10^n + 22...2 = 11...1(10^n + 2)$

$= \dfrac{10^n - 1}{3}.\dfrac{10^n + 2}{3}$ (tích của hai số tự nhiên liên tiếp)

Cách 2 : 11 ... 122 ... 2 = 11 ... 100 ... 0 + 22 ... 2 = 11 ...1 (100 ... 0 + 2)

= 11 ... 1 (99 ... 9 + 3) = 33 ... 3 × 33 ... 4.

Bài 17.

a) Tùy theo chữ số tận cùng của a hãy tìm chữ số tận cùng của a^n.

b) Tìm chữ số tận cùng của 2^{2003} và 3^{2003}.

Giải :

a) • Nếu a có chữ số tận cùng là 0; 1; 5; 6 thì a^n lần lượt có chữ số tận cùng là 0; 1; 5; 6.

• Nếu a có chữ số tận cùng là 2.

Vì $2^4 = 16$ nên 2^{4k} có chữ số tận cùng là 6 (với $k \in N^*$). Ta lấy n chia cho 4, giả sử n = 4k + r (r = 0; 1; 2; 3). Khi đó $a^n = a^{4k+r} = a^r.a^{4k}$.

• Nếu a có chữ số tận cùng là 3 hoặc 7.

Vì 3^4 và 7^4 có tận cùng là 1 nên 3^{4k} và 7^{4k} có chữ số tận cùng là 1.

Lấy n chia cho 4, giả sử n = 4k + r thì $a^n = a^{4k+r} = a^r.a^{4k}$ có chữ số tận cùng là chữ số tận cùng của a^r (r = 0; 1; 2; 3).

b) Ta có : 2003 = 4.500 + 3.

$2^{2003} = 2^{4.500+3} = 2^3.(2^4)^{500} = 8.16^{500}$ có chữ số tận cùng là 8

$3^{2003} = 3^{4.500+3} = 3^3.(3^4)^{500} = 27.81^{500}$ có chữ số tận cùng là 7.

Bài 18.

a) Chứng minh rằng $12^{2004} - 2^{1000}$ chia hết cho 10.

b) Chứng minh $A = 2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{60}$ chia hết cho 3; 7 và 15.

Giải :

a) $12^{2004} = 12^{4k}$ có chữ số tận cùng bằng 6.

$2^{1000} = 2^{4l}$ nên cũng có chữ số tận cùng bằng 6.

Vậy $12^{2004} - 2^{1000}$ chia hết cho 10.

- $A = (2 + 2^2) + (2^3 + 2^4) + ... + (2^{59} + 2^{60}) = 2(1+2) + 2^3(1+2) + ... + 2^{59}(1+2)$
  $= 3(2 + 2^3 + ... + 2^{59})$ chia hết cho 3.
- $A = (2 + 2^2 + 2^3) + (2^4 + 2^5 + 2^6) + ... + (2^{58} + 2^{59} + 2^{60})$
  $= 2(1 + 2 + 2^2) + 2^4(1 + 2 + 2^2) + ... + 2^{58}(1 + 2 + 2^2)$
  $= 7(2 + 2^4 + ... + 2^{58})$ chia hết cho 7.
- $A = (2 + 2^2 + 2^3 + 2^4) + (2^5 + 2^6 + 2^7 + 2^8) + ... + (2^{57} + 2^{58} + 2^{59} + 2^{60})$
  $= 15(2 + 2^5 + ... + 2^{57})$ chia hết cho 15.

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. So sánh :
   a) 13^{40} và 2^{161} ; b) 5^{300} và 3^{453} ; c) 5^{217} và 119^{72}.
2. Số 1000! = 1.2.3. ... 1000 có tận cùng bao nhiêu chữ số 0 ?
3. Biểu diễn số $100...01^2$ (n số 0) trong hệ thập phân.
4. Tìm chữ số tận cùng của các số sau :
   a) $19^{5^{2003}}$; b) 8^{2004} ; c) 7^{2003}.
5. Chứng minh rằng : $19^{2005} + 11^{2004}$ chia hết cho 10.
6. Chứng minh tổng $1 + 3 + 3^2 + ... + 3^{99}$ chia hết cho 40.
7. Tìm chữ số tận cùng của tổng $5 + 5^2 + ... + 5^{96}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI – ĐÁP SỐ

1. a) $2^{161} = 2.(2^4)^{40} = 2.16^{40} > 13^{40}$.
   b) $5^{300} = 25^{150} < 27^{151} = (3^3)^{151} = 3^{453}$.

c) $5^{217} = 5(5^3)^{72} = 5.125^{72} > 119^{72}$.

2. Tích của một số chẵn với một số chia hết cho 5 thì có tận cùng bằng 0. Từ 1 đến 1000 có 200 là bội của 5, có 40 số là bội của 25 ; có 8 số là bội của 125 và có 1 số là bội của 625. Vậy 1000! có tận cùng 249 chữ số 0.

3. *Cách 1:* $1\underbrace{00...0}_{n}1^2 = 1\underbrace{00...0}_{n}1 \times (1\underbrace{00...0}_{n+1} + 1) = 1\underbrace{0...0}_{n}1\underbrace{0...0}_{n+1} + 1\underbrace{0...0}_{n}1$

$$= 1\underbrace{00...0}_{n}2\underbrace{0...0}_{n}1.$$

Cách 2: $1\underbrace{00...0}_{n}1^2 = (10^{n+1} + 1)(10^{n+1} - 1) = 10^{2n+2} + 2.10^{n-1} + 1$.

4. a) $19^{5^{2003}} = 19^{4k+1} = 9.(19^4)^k$ có chữ số tận cùng là 9.

b) $8^{2004} = 8^{4k} = 4096^k$ có chữ số tận cùng là 6.

c) $7^{2003} = 7^3.(7^4)^{500}$ có chữ số tận cùng là 3.

5. $19^{2005} = 19.19^{4k}$ có chữ số tận cùng là 9 nên $19^{2005} + 11^{2004}$ có chữ số tận cùng là 0.

6. Nhân từng 4 số hạng của tổng ta được :

Tổng bằng $40(1 + 3^4 + 3^8 + ... + 3^{96})$ chia hết cho 40.

7. Tổng đã cho gồm 96 số hạng có chữ số tận cùng là 5 nên tổng 96 số có tận cùng là 0.

BÀI TẬP ÔN CHƯƠNG I

Bài 19.

Trong hệ thập phân, số A được viết bằng 100 chữ số 3, số B được viết bằng 100 chữ số 6. Hãy tính tích A.B.

Giải :

$A = \underbrace{33...3}_{100}$;

$B = \underbrace{66...6}_{100} = 3 \times \underbrace{22...2}_{100}$;

$$A.B = \underbrace{33...3}_{100} \times 3 \times \underbrace{22...2}_{100} = \underbrace{99...9}_{100}.\underbrace{22...2}_{100} = (10^{100} - 1)\underbrace{22...2}_{100}$$

$$= \underbrace{22...2}_{100}\underbrace{00...0}_{100} - \underbrace{22...2}_{100} = \underbrace{22...2}_{99}1\underbrace{77...7}_{99}8.$$

Bài 20.

Bạn Anh sinh năm nào biết rằng năm 2000 vừa qua tuổi của bạn Anh bằng tổng các chữ số của năm sinh.

Giải :

Giả sử bạn Anh sinh năm $\overline{19xy}$. Theo đề bài ta có :

$$2000 - \overline{19xy} = 1 + 9 + x + y$$

$$2000 - 1900 - 10x - y = 10 + x + y$$

$$11x + 2y = 90$$

Vì $y \le 9$ nên $2y \le 18$ suy ra $11x \ge 90 - 18 = 82$ do đó $x > 6$ mà x chẵn nên $x = 8$, $y = 1$.

Vậy Anh sinh năm 1981.

Bài 21.

Tìm hai chữ số tận cùng của 2^{2003}.

Giải :

Nhận xét : $2^{20} = 1048576$ và 76^n có hai chữ số tận cùng là 76 với $n \in N^*$ do đó 2^{20k} có hai chữ số tận cùng là 76 ($k \in N^*$).

Do đó : $2^{2003} = 2^3.(2^{20})^{100} = 8.(2^{20})^{100}$ có hai chữ số tận cùng là 08.

Bài 22.

Có bao nhiêu số tự nhiên đồng thời có mặt ở cả hai dãy sau :

$$1 ; 4 ; 7 ; 10 ; ... ; 301 ; \qquad (1)$$

$$2 ; 7 ; 12 ; 17 ; ... ; 502 . \qquad (2)$$

Giải :

Dãy (1) gồm các số chia cho 3 dư 1 và dãy (2) gồm các số chia cho 5 dư 2.

Gọi n là số có mặt đồng thời cả hai dãy (1) và (2) thì n - 1 chia hết cho 3 và n - 2 chia hết cho 5. Từ đó (n - 1) + 9 chia hết cho 3 và (n - 2) + 10 chia hết cho 5, suy ra n + 8 chia hết cho 15 vậy n = 15k - 8 mà $2 \le n \le 301$ nên $2 \le 15k - 8 \le 201$ từ đó $1 \le k \le 20$. Vậy có 20 số thỏa mãn yêu cầu.

Chương 2.

PHÉP CHIA HẾT TRONG TẬP SỐ NGUYÊN Z

§ 1. MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH CHIA HẾT

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Định lí về phép chia

a) Định lí :

Cho a, b $\in Z$ và $b \neq 0$, khi đó có hai số nguyên q, r duy nhất sao cho $a = bq + r$ với $0 \le r < |b|$, a là số bị chia, q là thương số và r là số dư.

Khi a chia cho b, thì dư có thể là 0; 1; 2; ... ; $|b| - 1$.

Đặc biệt nếu r = 0 thì a = bq, khi đó ta nói a chia hết cho b hay b là ước của a và kí hiệu $a \vdots b$ hay $b | a$.

Vậy :

$$a \vdots b \Leftrightarrow \text{có số nguyên q sao cho } a = bq.$$

b) Tính chất :

- Nếu $a \vdots b$ và $b \vdots c$ thì $a \vdots c$.
- Nếu $a \vdots b$, $a \vdots c$ và (b, c) = 1 thì $a \vdots bc$.
- Nếu $ab \vdots c$ và (b, c) = 1 thì $a \vdots c$.

2. Khái niệm đồng dư

a) Định nghĩa :

Cho số nguyên m > 0. Nếu hai số nguyên a và b có cùng số dư khi chia cho m thì ta nói a đồng dư với b theo mođun m và kí hiệu là $a \equiv b$ (mod m).

Vậy :

$$a \equiv b \pmod m \Leftrightarrow a - b \vdots m$$

Dấu "$\equiv$" gọi là đồng dư thức.

Thí dụ $18 \equiv 3 \pmod 5$ vì $18 - 3 = 15 \vdots 5$; $8 \not\equiv 3 \pmod 6$.

b) Tính chất :

- Cộng trừ theo từng vế của nhiều đồng dư theo cùng một mođun tức là :

Nếu $a \equiv b \pmod m$ và $c \equiv d \pmod m$ thì $a + c \equiv b + d \pmod m$ và $a - c \equiv b - d \pmod m$.

• Nhân từng vế các đồng dư thức có cùng modun, tức là : Nếu $a \equiv b \pmod m$ và $c \equiv d \pmod m$ thì $ac \equiv bd \pmod m$.

c) Hệ quả :

• Có thể thêm vào hay bớt cùng một số vào hai vế của một đồng dư thức, tức là : Nếu $a \equiv b \pmod m$ thì $a + c \equiv b + c \pmod m$ và $a - c \equiv b - c \pmod m$.

• Có thể nhân hai vế của cùng một đồng dư thức với một số nguyên khác 0, tức là : Nếu $a \equiv b \pmod m$ thì $ac \equiv bc \pmod m$.

• Có thể nâng hai vế của một đồng dư thức lên cùng một lũy thừa với bậc là số tự nhiên, tức là : Nếu $a \equiv b \pmod m$ thì $a^n \equiv b^n \pmod m$ với $n \in N$.

B. CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. SỬ DỤNG TÍNH CHẤT : "TRONG n SỐ NGUYÊN LIÊN TIẾP CÓ MỘT VÀ CHỈ MỘT SỐ CHIA HẾT CHO $n, n \geq 1$".

Chứng minh : Lấy n số nguyên liên tiếp chia cho n thì được n số dư khác nhau đôi một, trong n số dư khác nhau đôi một này có duy nhất một số dư bằng 0, tức là có duy nhất một số chia hết cho n.

Bài 23.

Chứng minh rằng :

a) Tích hai số chẵn liên tiếp chia hết cho 8.

b) Tích ba số nguyên liên tiếp chia hết cho 6.

c) Tích năm số nguyên liên tiếp chia hết cho 120.

Giải :

a) Hai số chẵn liên tiếp có dạng 2n và 2n + 2 (với $n \in Z$) do đó tích của chúng là 2n(2n+2) = 4n(n + 1). Mà n và n + 1 là hai số nguyên liên tiếp nên có một số chia hết cho 2, do đó $n(n+1) \vdots 2$ suy ra $4n(n+1) \vdots 8$. Vậy tích của hai số chẵn liên tiếp chia hết cho 8.

b) Ba số nguyên liên tiếp có một số chia hết cho 2 và một số chia hết cho 3 nên tích của chúng chia hết cho 6 (vì (2, 3) = 1).

c) Ta có 120 = 3.5.8.

Trong 5 số nguyên liên tiếp có một số chia hết cho 3 và một số chia hết cho 5 nên tích chia hết cho 3 và 5. Ta chứng minh trong 5 số nguyên liên tiếp có hai số chẵn liên tiếp nên tích chia hết cho 8 (câu a).

Thật vậy 5 số nguyên liên tiếp có dạng n, n + 1, n + 2, n + 3, n + 4.

• Nếu n là số chẵn thì n và n + 2 là hai số chẵn liên tiếp.

• Nếu n là số lẻ thì n + 1 và n + 3 là hai số chẵn liên tiếp.

Do đó tích 5 số nguyên liên tiếp chia hết cho 3.5.8 = 120.

Bài 24.

Chứng minh rằng với $m, n \in Z$ ta có :

a) $n^3 + 11n \vdots 6$

b) $mn(m^2 - n^2) \vdots 3$

c) $n(n+1)(2n+1) \vdots 6$.

Giải :

a) Ta có :

$$n^3 + 11n = n^3 - n + 12n = (n-1)n(n+1) + 12n.$$

Theo bài 23b) thì $(n-1)n(n+1) \vdots 6$ và $12n \vdots 6$ nên $n^3 + 11n \vdots 6$.

b) Ta có :

$$mn(m^2 - n^2) = mn\left[(m^2-1) - (n^2-1)\right] = mn(m^2-1) - mn(n^2-1).$$

Mà

$$m(m^2-1) = (m-1)m(m+1) \vdots 6$$

và

$$n(n^2-1) = (n-1)n(n+1) \vdots 6$$

nên

$$mn(m^2 - n^2) \vdots 6 \text{ với } m, n \in \mathbf{Z}.$$

c) $n(n+1)(2n+1) = n(n+1)(n+2+n-1) = n(n+1)(n+2) + (n-1)n(n+1) \vdots 6$.

Bài 25.

a) Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3, chứng minh rằng : $p^2 - 1 \vdots 24$.

b) Chứng minh rằng n và n^5 ***có chữ số tận cùng giống nhau.***

Giải :

a) p là số nguyên tố lớn hơn 3 thì p là số lẻ và p không chia hết cho 3.

Ta có :

$$p^2 - 1 = (p-1)(p+1).$$

p là số lẻ nên p - 1 và p + 1 là hai số chẵn liên tiếp nên :

$$(p-1)(p+1) \vdots 8 \text{ (bài 23a))} \quad (1)$$

Mặt khác, p - 1, p, p + 1 là ba số nguyên liên tiếp nên có một số chia hết cho 3 mà p không chia hết cho 3 nên p - 1 hoặc p + 1 chia hết cho 3 từ đó suy ra

$$(p-1)(p+1) \vdots 3 \quad (2)$$

Vì (3, 8) = 1 và từ (1) và (2) suy ra :

$$p^2 - 1 \vdots 24.$$

b) Để chứng minh n và n^5 có chữ số tận cùng giống nhau ta chứng minh hiệu $n^5 - n \vdots 10$. Ta có :

$$n^5 - n = n(n^4 - 1) = n(n^2 - 1)(n^2 + 1) = n(n^2 - 1)[(n^2 - 4) + 5]$$
$$= n(n^2 - 1)(n^2 - 4) + 5n(n^2 - 1)$$
$$= (n - 2)(n - 1)n(n + 1)(n + 2) + 5(n - 1)n(n + 1).$$

$(n - 2)(n - 1)n(n + 1)(n + 2)$ là tích của 5 số nguyên liên tiếp nên chia hết cho $2.5 = 10$ và $5(n - 1)n(n + 1) \vdots 10$. Do đó $n^5 - n \vdots 10$.

Nhận xét : Ta chứng minh được $n^5 - n \vdots 30$ với mọi $n \in Z$.

Bài 26.

a) Chứng minh rằng $\frac{n^5}{5} + \frac{n^3}{3} + \frac{7n}{15}$ là số nguyên với mọi $n \in Z$.

b) Chứng minh với n chẵn thì $\frac{n}{12} + \frac{n^2}{8} + \frac{n^3}{24}$ là số nguyên.

Giải :

a) Ta có :

$$\frac{7n}{15} = n - \frac{8n}{15} = n - \frac{n}{5} - \frac{n}{3},$$

do đó :

$$\frac{n^5}{5} + \frac{n^3}{3} + \frac{7n}{15} = \frac{n^5 - n}{5} + \frac{n^3 - n}{3} + n.$$

Ta chứng minh được $n^5 - n \vdots 10$ (Bài 25b) và $n^3 - n \vdots 6$ (bài 24b) do đó $\frac{n^5 - n}{5} + \frac{n^3 - n}{3} + n$ là số nguyên (đpcm).

b) Giả sử $n = 2m$ ($m \in Z$), ta có :

$$\frac{n}{12} + \frac{n^2}{8} + \frac{n^3}{24} = \frac{m}{6} + \frac{m^2}{2} + \frac{m^3}{3} = \frac{2m^3 + 3m^2 + m}{6} = \frac{m(m + 1)(2m + 1)}{6}.$$

Theo bài 24c) thì $m(m + 1)(2m + 1) \vdots 6$ nên $\frac{n}{12} + \frac{n^2}{8} + \frac{n^3}{24}$ là số nguyên.

Bài 27.

Cho m, n là hai số chính phương lẻ liên tiếp. Chứng minh rằng $mn - m - n + 1 \vdots 192$.

Giải :

m, n là hai số chính phương lẻ liên tiếp nên chúng có dạng :

$$m = (2k-1)^2 \text{ và } n = (2k+1)^2.$$

Do đó :

$$mn - m - n + 1 = (m-1)(n-1) = [(2k-1)^2 - 1][(2k+1)^2 - 1] =$$
$$= (4k^2 - 4k)(4k^2 + 4k) = 16k^2(k-1)(k+1).$$

Ta có : $(k-1)k(k+1) \vdots 3$ và $(k-1)k.k(k+1) \vdots 4$ nên $k^2(k-1)(k+1) \vdots 12$

Do đó : $mn - m - n + 1 = 16k^2(k-1)(k+1) \vdots 16.12 = 192$.

Bài 28.

Chứng minh rằng $ax^2 + bx + c$ là số nguyên với mọi x nguyên khi và chỉ khi 2a, a + b và c là các số nguyên.

Giải :

Ta có :

$$ax^2 + bx + c = ax^2 - ax + ax + bx + c = a(x^2 - x) + (a+b)x + c =$$
$$= 2a.\frac{x(x-1)}{2} + (a+b)x + c \qquad (1)$$

i) Giả sử $ax^2 + bx + c$ là số nguyên với mọi x nguyên, ta chứng minh 2a, a + b và c nguyên.

Thay x = 0 vào (1) ta có $c \in Z$ từ đó suy ra

$$2a\frac{x(x-1)}{2} + (a+b)x \qquad (2)$$

là số nguyên với mọi $x \in Z$.

Thay x = 1 vào (2) thì $a + b \in Z$, suy ra

$$2a\frac{x(x-1)}{2} \qquad (3)$$

là số nguyên với mọi $x \in Z$.

Cuối cùng thay x = 2 vào (3) ta được $2a \in Z$. Vậy $2a, a+b, c \in Z$.

ii) Ngược lại giả sử 2a, a + b, $c \in Z$ thì từ (1) và $\frac{x(x-1)}{2} \in Z$ ta có $ax^2 + bx + c \in Z$ với mọi $x \in Z$.

Bài 29.

Chứng minh rằng trong 1900 số tự nhiên liên tiếp có một số có tổng các chữ số chia hết cho 27.

Giải :

Giả sử 1900 số tự nhiên liên tiếp là

$$n, n+1, \dots, n+1899 \qquad (1)$$

Trong 1000 số tự nhiên liên tiếp n, n + 1, ... , n + 999 có một số chia hết cho 1000, giả sử số đó là n_0, khi đó n_0 có tận cùng bằng 3 chữ số 0 và giả sử tổng các chữ số của n_0 là k. Khi đó 27 số n_0 ; $n_0 + 1$; ... ; $n_0 + 9$; $n_0 + 19$; ... ; $n_0 + 99$; $n_0 + 199$; $n_0 + 299$; ... ; $n_0 + 899$ (2) có tổng các chữ số lần lượt là k, k + 1, ... , k + 26.

Trong 27 số tự nhiên liên tiếp k, k + 1, ... , k + 26 có một số chia hết cho 27 (đpcm). Chú ý rằng từ $n_0 + 899 \le n + 999 + 899 < n + 1899$ nên các số ở trong dãy (2) còn nằm trong dãy (1).

Vậy trong 1900 số tự nhiên liên tiếp có một số có tổng các chữ số chia hết cho 27.

Dạng 2. SỬ DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC MỞ RỘNG.

Với $n \in N$ ta có : $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + ... + ab^{n-2} + b^{n-1})$

Với n lẻ : $a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + ... - ab^{n-2} + b^{n-1})$

Suy ra :

- $a, b \in Z$ và $a \ne b$ thì $a^n - b^n \vdots (a-b)$ $(n \in N)$.
- $a, b \in Z$, n lẻ và $a \ne -b$ thì $a^n + b^n \vdots (a+b)$.
- $a, b \in Z$, n chẵn và $a \ne -b$ thì $a^n - b^n \vdots (a+b)$.

Bài 30.

Với n chẵn ($n \in N$) chứng minh rằng : $20^n + 16^n - 3^n - 1 \vdots 323$.

Giải :

Ta có : 323 = 17.19. Biến đổi

$$20^n + 16^n - 3^n - 1 = (20^n - 1) + (16^n - 3^n)$$

$20^n - 1 \vdots (20-1) = 19$ và n chẵn nên $16^n - 3^n \vdots (16+3) = 19$.

Do đó :

$$20^n + 16^n - 3^n - 1 \vdots 19 \qquad (1)$$

Mặt khác : $20^n + 16^n - 3^n - 1 = (20^n - 3^n) + (16^n - 1^n)$

$20^n - 3^n \vdots (20-3) = 17$ và n chẵn nên $16^n - 1^n \vdots (16+1) = 17$.

Do đó :

$$20^n + 16^n - 3^n - 1 \vdots 17 \qquad (2)$$

(17, 19) = 1 và từ (1), (2) suy ra : $20^n + 16^n - 3^n - 1 \vdots 323$.

Bài 31.

Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n ta có :

a) $11^{n+2} + 12^{2n+1} \vdots 133$.

b) $5^{n+2} + 26.5^n + 8^{2n+1} \vdots 59$.

c) $7.5^{2n} + 12.6^n \vdots 19$.

Giải :

a) Ta có : $11^{n+2} + 12^{2n+1} = 11^2.11^n + 12.12^{2n} = 121.11^n + 12.144^n$

$= (133-12).11^n + 12.144^n = 133.11^n + 12.(144^n - 11^n)$

Vì $133.11^n \vdots 133$ và $144^n - 11^n \vdots (144-11) = 133$ nên

$133.11^n + 12.(144^n - 11^n) \vdots 133$ hay $11^{n+2} + 12^{2n+1} \vdots 133$ (đpcm).

b) Ta có : $5^{n+2} + 26.5^n + 8^{2n+1} = 25.5^n + 26.5^n + 8.8^{2n} = 51.5^n + 8.64^n$

$= (59-8).5^n + 8.64^n = 59.5^n + 8.(64^n - 5^n) \vdots 59$

vì $64^n - 5^n \vdots (64-5) = 59$.

Vậy : $5^{n+2} + 26.5^n + 8^{2n+1} \vdots 59$.

c) Ta có :

$$7.5^{2n} + 12.6^n = 7.25^n + (19-7).6^n = 19.6^n + 7(25^n - 6^n) \vdots 19,$$

vì $25^n - 6^n \vdots (25-6) = 19$.

Bài 32.

Cho a, b là các số tự nhiên không chia hết cho 5. Chứng minh rằng $pa^{4m} + qb^{4m}$, chia hết cho 5 khi và chỉ khi p + q chia hết cho 5 (với $p, q, m \in N$).

Giải :

Ta có :

$$pa^{4m} + qb^{4m} = p(a^{4m} - 1) + q(b^{4m} - 1) + p + q \qquad (1)$$

Mà

$$a^{4m} - 1 = (a^4)^m - 1 \vdots a^4 - 1$$

$$a^4 - 1 = (a^2-1)(a^2+1) = (a^2-1)[(a^2-4)+5] =$$

$$= (a^2-1)(a^2-4) + 5(a^2-1) = (a-2)(a-1)(a+1)(a+2) + 5(a^2-1),$$

vì a - 2, a - 1, a , a + 1 , a + 2 là 5 số nguyên liên tiếp nên có ít nhất một số chia hết cho 5 mà a không chia hết cho 5 nên một trong các số a - 2, a - 1, a + 1 , a + 2 phải chia hết cho 5.

Vậy $a^4 - 1 \vdots 5$, từ đó $a^{4m} - 1$ và $b^{4m} - 1$ cùng chia hết cho 5. Do vậy từ (1) suy ra :

$$pa^{4m} + qb^{4m} \vdots 5 \Leftrightarrow p + q \vdots 5$$

Nhận xét : Bài toán này có thể áp dụng định lí Fermat để giải như sau :

Ta có (a, 5) = (b, 5) = 1 nên $a^4 \equiv 1 \pmod 5$ và $b^4 \equiv 1 \pmod 5$. Suy ra $pa^{4m} + qb^{4m} \equiv p + q \pmod 5$ (đpcm).

Bài toán tổng quát.

Cho p là số nguyên tố, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ là các số nguyên không chia hết cho p.

$p_1, p_2, ..., p_n$ và $k_1, k_2, ..., k_n$ là các số tự nhiên. Chứng minh rằng :
$p_1a_1^{(p-1)k_1} + p_2a_2^{(p-1)k_2} + ... + p_na_n^{(p-1)k_n}$ chia hết cho p khi và chỉ khi $p_1 + p_2 + ... + p_n$ chia hết cho p.

Bài 33.

Cho n là số nguyên dương và k là số tự nhiên lẻ. Chứng minh rằng :

a) $1^k + 2^k + ... + n^k \vdots (1 + 2 + ... + n)$.

b) $1^k + 2^k + ... + (2n)^k \vdots n(2n + 1)$.

Giải :

a) Đặt :

$$S = 1^k + 2^k + ... + n^k.$$

Ta viết lại :

$$S = n^k + (n-1)^k + ... + 1^k.$$

Suy ra :

$$2S = (1^k + n^k) + (2^k + (n-1)^k) + ... + (n^k + 1^k)$$

Vì k lẻ nên $1^k + n^k \vdots (n+1)$; $2^k + (n-1)^k \vdots (n+1), ...,$ cho nên

$$2S \vdots (n+1) \quad (1)$$

Mặt khác ta viết :

$$S = 1^k + 2^k + ... + (n-1)^k + n^k$$

$$S = (n-1)^k + (n-2)^k + ... + 1^k + n^k$$

Suy ra :

$$2S = [1^k + (n-1)^k] + [2^k + (n-2)^k] + ... + [(n-1)^k + 1^k] + 2.n^k$$

Vì k lẻ nên $1^k + (n-1)^k \vdots n$; $2^k + (n-2)^k \vdots n$; .... và $2.n^k \vdots n$ cho nên

$$2S \vdots n \quad (2)$$

Từ (1), (2) và (n, n + 1) = 1 suy ra : $2S \vdots n(n+1)$

n(n + 1) là số chẵn nên :

$$S \vdots \frac{n(n+1)}{2}.$$

Ta lại có

$$\frac{n(n+1)}{2} = 1 + 2 + ... + n \text{ (Bài 10a))}$$

do đó :

$$S \vdots (1 + 2 + ... + n) \text{ (đpcm).}$$

b) Trong câu a) thay n bởi 2n ta có :

$$1^k + 2^k + ... + (2n)^k \vdots \frac{2n(2n+1)}{2} = n(2n+1) \text{ (đpcm).}$$

Bài 34.

Cho $a_n = 2^{2n+1} + 2^{n+1} + 1$ *và* $b_n = 2^{2n+1} - 2^{n+1} + 1$. *Chứng minh rằng với mỗi số tự nhiên có một và chỉ một trong hai số* a_n, b_n *chia hết cho 5.*

Giải :

Ta có $a_n.b_n = (2^{2n+1} + 2^{n+1} + 1)(2^{2n+1} - 2^{n+1} + 1) = (2^{2n+1} + 1)^2 - (2^{n+1})^2$

$$= 4^{2n+1} + 2.2^{2n+1} + 1 - 2^{2n+2} = 4^{2n+1} + 1.$$

Vì 2n + 1 là số lẻ nên $4^{2n+1} + 1 \vdots (4+1) = 5$. Vậy $a_n.b_n \vdots 5$ suy ra $a_n \vdots 5$ hoặc $b_n \vdots 5$. Mà $a_n - b_n = 2.2^{n+1} = 2^{n+2}$ không chia hết cho 5 nên hai số a_n và b_n không thể đồng thời chia hết cho 5. Vậy trong hai số a_n, b_n chỉ có một số chia hết cho 5 với mỗi n là số tự nhiên.

Bài 35.

Cho số tự nhiên $n > 1$ *và* $2^n - 2 \vdots n$, *chứng minh rằng*

$$2^{2^n - 1} - 2 \vdots (2^n - 1).$$

Giải :

Theo giả thiết : $2^n - 2 \vdots n$ suy ra $2^n - 2 = n.k \quad (k \in N)$. Ta có :

$2^{2^n - 1} - 2 = 2(2^{2^n - 2} - 1) = 2(2^{nk} - 1) \vdots (2^n - 1)$, vì $2^{nk} - 1 = (2^n)^k - 1 \vdots (2^n - 1)$.

Bài 36.

Cho $A = (10^n + 10^{n-1} + ... + 10 + 1)(10^{n+1} + 5) + 1$. *Chứng minh rằng A là số chính phương nhưng không là lập phương của một số tự nhiên.*

Giải :

Ta có : $10^{n+1} - 1 = (10 - 1).(10^n + 10^{n-1} + ... + 10 + 1)$

Suy ra : $10^n + 10^{n-1} + ... + 10 + 1 = \frac{1}{9}(10^{n+1} - 1)$.

Do đó : $A = \frac{1}{9}(10^{n+1} - 1)(10^{n+1} + 5) + 1 = \frac{1}{9}(10^{2n+2} + 4.10^{n+1} - 5 + 9)$

$$= \frac{1}{9}(10^{2n+2} + 4.10^{n+1} + 4) = \left(\frac{10^{n+1} + 2}{3}\right)^2.$$

Vì $10^{n+1} + 2 \vdots 3$ nên A là một số chính phương.

Ta có $\frac{10^{n+1} + 2}{3}$ là số chẵn nên $A \vdots 4$.

$A = \left(\dfrac{10^{n+1}+2}{3}\right)^2 = \left[\dfrac{2(5.10^n+1)}{3}\right]^2$ chia hết cho 4 nhưng không chia hết cho 8 vì 5.10^n+1 là số lẻ. Vậy A không là lập phương của một số tự nhiên.

Bài 37.

Cho f(x) là đa thức với hệ số nguyên :

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \quad (a_i \in Z;\ i = n, 1, \ldots, n)$$

a, b là hai số nguyên khác nhau.

Chứng minh rằng : $f(a) - f(b) \vdots (a - b)$.

Áp dụng : Chứng minh rằng không có đa thứ P(x) nào với hệ số nguyên có thể có giá trị P(7) = 5 và P(15) = 9.

Giải :

Ta có $f(a) = a_n a^n + a_{n-1}a^{n-1} + \ldots + a_1 a + a_0$

$f(b) = a_n b^n + a_{n-1}b^{n-1} + \ldots + a_1 b + a_0$.

Suy ra $f(a) - f(b) = a_n(a^n - b^n) + a_{n-1}(a^{n-1} - b^{n-1}) + \ldots + a_1(a - b)$

Vì $a^k - b^k \vdots (a - b)$ với $k \in N$ nên $f(a) - f(b) \vdots (a - b)$.

Áp dụng : Giả sử có đa thức P(x) với hai số nguyên sao cho P(7) = 5 và $P(15) = 9$, khi đó $P(15) - P(7) \vdots (15 - 7) = 8 \Rightarrow 4 \vdots 8$ (vô lí). Vậy không có đa thức với hệ số nguyên nào có thể có giá trị P(7) = 5 và P(15) = 9.

Bài 38.

Cho f(x) là đa thức bậc lớn hơn 1 có hệ số nguyên . k, l là hai số tự nhiên nguyên tố cùng nhau. Chứng minh rằng $f(k + l) \vdots k.l$ khi và chỉ khi $f(k) \vdots l$ và $f(l) \vdots k$

Giải :

Áp dụng kết quả Bài 37 ta có :

$$f(k + l) - f(k) \vdots l \quad (1)$$

$$f(k + l) - f(l) \vdots k \quad (2)$$

Nếu $f(k + l) \vdots k.l$ thì $f(k + l) \vdots l$ và từ (1) suy ra $f(k) \vdots l$.

Tương tự $f(k + l) \vdots k$ và từ (2) suy ra $f(l) \vdots k$.

Ngược lại, nếu $f(k) \vdots l$ và $f(l) \vdots k$ thì từ (1) và (2) suy ra $f(k + l) \vdots k$ và $f(k + l) \vdots l$, vì $(k, l) = 1$ nên $f(k + l) \vdots k.l$ (đpcm).

Bài 39.

Cho f(x), g(x) là hai đa thức với hệ số nguyên thỏa điều kiện $F(x) = f(x^3) + xg(x^3)$ chia hết cho đa thức $x^2 + x + 1$. Chứng minh

rằng f(x), g(x) cùng chia hết cho (x – 1).

Giải :

Ta có :

$$F(x) = \left[f(x^3) - f(1)\right] + x\left[g(x^3) - g(1)\right] + f(1) + xg(1) \qquad (1)$$

Theo bài 37 ta có :

$$f(x^3) - f(1) \vdots (x^3 - 1) \vdots (x^2 + x + 1)$$
$$g(x^3) - g(1) \vdots (x^3 - 1) \vdots (x^2 + x + 1)$$

Theo giả thiết, $F(x) \vdots (x^2 + x + 1)$ nên từ (1) suy ra $f(1) + xg(1) \vdots (x^2 + x + 1)$. Mà $f(1) + xg(1)$ có bậc bé hơn hoặc bằng 1 nên $f(1) + xg(1) \equiv 0 \Rightarrow f(1) = g(1) = 0$. Theo Định lí Bézout suy ra $f(x) \vdots (x - 1)$ và $g(x) \vdots (x - 1)$.

Dạng 3. SỬ DỤNG PHÉP CHIA CÓ DƯ.

Để chứng minh biểu thức $A(n) \vdots p$ ta xét tất cả các số dư trong phép chia n cho p. Chia n cho p được các dư là 0, 1, 2, ... , p - 1. Đặc biệt nếu p lẻ ta có thể viết

$$n = k.p + r \text{ với } r = 0, \pm 1, \ldots, \pm \frac{p-1}{2}.$$

Chẳng hạn khi chia n cho 5 thì n có dạng :

$$n = 5k, n = 5k \pm 1, n = 5k \pm 2 \quad (k \in Z).$$

Bài 40. cmr

Tìm dư trong phép chia một số chính phương cho 3, cho 5.

Giải :

Số chính phương có dạng n^2 $(n \in N)$

1) Chia n cho 3 thì $n = 3k$ hoặc $n = 3k \pm 1$.

- Nếu $n = 3k$ thì $n^2 = 9k^2$ chia hết cho 3.
- Nếu $n = 3k \pm 1$ thì $n^2 (3k \pm 1)^2 = 9k^2 \pm 6k + 1$ chia 3 dư 1.

Vậy một số chính phương khi chia cho 3 có dư là 0 hoặc 1. Từ đó ta có

a/ kết quả sau : Một số có dạng 3k + 2 không thể là một số chính phương.

2) Chia n cho 5 thì $n = 5k$, $n = 5k \pm 1$, $n = 5k \pm 2$.

- Nếu $n = 5k$ thì $n^2 = 25k^2$ chia hết cho 5.
- Nếu $n = 5k \pm 1$ thì $n^2 (5k \pm 1)^2 = 25k^2 \pm 10k + 1$ chia 5 dư 1.
- Nếu $n = 5k \pm 2$ thì $n^2 = (5k \pm 2)^2 = 25k^2 \pm 20k + 4$ chia 5 dư 4.

Vậy một số chính phương khi chia cho 5 có dư là 0, 1 hoặc 4. Từ đó ta có b/ kết quả sau : Một số có dạng 5k + 2 hoặc 5k + 3 không thể là một số chính phương.

ghi nhớ $\forall n$: $n^2 \equiv 0 \pmod 3$ hoặc $n^2 \equiv 1 \pmod 3$
$n^2 \equiv 0 \pmod 5$ hoặc $n^2 \equiv \pm 1 \pmod 5$

Bài 41.

Chứng minh rằng tổng lũy thừa chẵn của ba số nguyên liên tiếp không thể là một số chính phương.

Giải :

Tổng lũy thừa 2k ($k \in \mathbf{N}^*$) của ba số nguyên liên tiếp có dạng

$$(n-1)^{2k} + n^{2k} + (n+1)^{2k}.$$

Trong ba số nguyên liên tiếp có một số chia hết cho 3, hai số còn lại có dạng $3k \pm 1$ nên tổng lũy thừa chẵn của ba số nguyên liên tiếp chia cho 3 có dư là 2 nên không thể là một số chính phương.

Bài 42.

Chứng minh rằng tổng bình phương của 5 số nguyên liên tiếp không thể là một số chính phương.

Giải :

Tổng bình phương của 5 số nguyên liên tiếp có dạng :

$$T = (n-2)^2 + (n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 = 5n^2 + 10 = 5(n^2 + 2).$$

Ta chứng minh $n^2 + 2$ không chia hết cho 5 với mọi n.

- Nếu $n \vdots 5$ thì $n^2 + 2$ chia cho 5 dư 2.
- Nếu $n = 5k \pm 1$ thì $n^2 + 2 = (5k \pm 1)^2 + 2$ chia cho 5 dư 3.
- Nếu $n = 5k \pm 2$ thì $n^2 + 2 = (5k \pm 2)^2 + 2$ chia cho 5 dư 1.

Vậy $n^2 + 2 \not\vdots\, 5$ nên T là số chia hết cho 5 nhưng không chia hết cho 25, do đó T không thể là một số chính phương.

Bài 43.

Tìm tất cả số tự nhiên n để $3^{2n} + 3^n + 1 \vdots 13$.

Giải :

- Với n = 3k ta có : $3^{2n} + 3^n + 1 = 3^{6k} + 3^{3k} + 1 = (27^{2k} - 1) + (27^k - 1) + 3$ chia cho 13 có dư là 3 vì $27^n - 1 \vdots (27 - 1) = 26$.
- Với n = 3k + 1 ta có :
$$3^{2n} + 3^n + 1 = 3^{6k+2} + 3^{3k+1} + 1 = 9(27^{2k} - 1) + 3(27^k - 1) + 13 \vdots 13.$$
- Với n = 3k + 2 ta có :
$$3^{2n} + 3^n + 1 = 3^{6k+4} + 3^{3k+2} + 1 = 81(27^{2k} - 1) + 9(27^k - 1) + 91 \vdots 13.$$

Vậy với n không chia hết cho 3 thì $3^{2n} + 3^n + 1 \vdots 13$.

Bài 44.

Chứng minh rằng $1^n + 2^n + 3^n + 4^n \vdots 5$ khi và chỉ khi n không chia hết cho 4 $(n \in N)$.

Giải :

- Nếu $n = 4k + 1$ hoặc $n = 4k + 3$ thì n là số lẻ nên ta có :

$$1^n + 2^n + 3^n + 4^n = (1^n + 4^n) + (2^n + 3^n) \vdots 5$$

- Nếu n = 4k thì :

$$1^n + 2^n + 3^n + 4^n = 1^{4k} + 2^{4k} + 3^{4k} + 4^{4k} \equiv 4 \pmod 5,$$

vì $2^4 \equiv 1 \pmod 5$; $3^4 \equiv 1 \pmod 5$ và $4^4 \equiv 1 \pmod 5$.

- Nếu n = 4k + 2 thì :

$$1^n + 2^n + 3^n + 4^n = 1 + 2^{4k+2} + 3^{4k+2} + 4^{4k+2} = (1 + 4^{2k+1}) + (9^{2k+1} + 16^{2k+1}) \vdots 5 ,$$

vì $1 + 4^{2k+1} \vdots (1+4) = 5$ và $9^{2k+1} + 16^{2k+1} \vdots (9 + 16) = 25$.

Bài 45.

Cho ba số nguyên x, y, z thỏa $x^2 + y^2 = z^2$. Chứng minh rằng $xyz \vdots 60$.

Giải :

Ta có : 60 = 3.4.5 .

a) Chứng minh $xy \vdots 3$. Thật vậy, nếu x và y cùng không chia hết cho 3 thì $x^2 \equiv 1 \pmod 3$, và $y^2 \equiv 1 \pmod 3$ suy ra $x^2 + y^2 \equiv 2 \pmod 3$. Khi đó z^2 chia cho 3 dư 2, vô lí (theo Bài 40).

Vậy $x \vdots 3$ hoặc $y \vdots 3$ suy ra $xyz \vdots 3$ (1)

b) Chứng minh $xyz \vdots 4$. $2xy = (x + y - z$ [illegible] $z)$ (*)

i) Nếu x, y cùng lẻ, giả sử x = 2k + 1, y = 2l + 1 thì

$$x^2 + y^2 = (2k+1)^2 + (2l+1)^2 = 4(k^2 + l^2 + k + l) + 2$$

là số chẵn, không chia hết cho 4 nên $x^2 + y^2$ không thể là số chính phương. Vậy trường hợp này không xảy ra.

ii) Nếu x, y cùng chẵn thì $xy \vdots 4 \Rightarrow xyz \vdots 4$.

ii) Giả sử x chẵn, y lẻ (trường hợp x lẻ, y chẵn chứng minh tương tự) :

Giả sử x = 2n, y = 2m + 1 khi đó z lẻ, đặt z = 2p + 1. Ta có :

$$z^2 = x^2 + y^2 \Leftrightarrow (2n)^2 + (2m+1)^2 = (2p+1)^2$$

$$\Leftrightarrow 4n^2 + 4m^2 + 4m + 1 = 4p^2 + 4p + 1$$

$$\Leftrightarrow n^2 = p(p+1) - m(m+1) \vdots 2 \Rightarrow n \vdots 2 \Rightarrow x \vdots 4 .$$

Vậy $xyz \vdots 4$. (2)

c) Chứng minh $xyz \vdots 5$.

i) Nếu $x \vdots 5$ hoặc $y \vdots 5$ thì $xyz \vdots 5$.

ii) Nếu x và y cùng không chia hết cho 5 thì x^2, y^2 chia cho 5 dư 1 hoặc 4 (Bài 40). Khi đó $x^2 + y^2$ chia cho 5 có dư là 0, 2 hoặc 3. Nhưng một số chính phương z^2 chia cho 5 chỉ có thể dư 0, 1 hoặc 4 nên $z \vdots 5$.

Vậy $xyz \vdots 5$. (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $xyz \vdots 3.4.5 = 60$ (đpcm).

Bài 43.

Trong 100 số tự nhiên từ 1 đến 100 cần chọn n số ($n \geq 2$) sao cho hai số phân biệt bất kì được chọn có tổng chia hết cho 6. Hỏi có thể chọn n số thỏa mãn điều kiện trên với n lớn nhất là bao nhiêu ?

Giải :

Giả sử hai số a, b được chọn và viết chúng dưới dạng

$$a = 6k + r \; ; \; b = 6l + s \text{ (với } r, s \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}).$$

Ta cần chọn $a + b \vdots 6$ tức là $r + s \vdots 6$. Các cặp (r, s) hoặc (s, r) có thể là (0, 0); (1, 5) ; (2, 4) và (3, 3). Nếu có ít nhất ba số a, b, c được chọn thì giả sử $c = 6p + t$ với $t \in \{0,1,2,3,4,5\}$ thì các cặp (t, r) ; (t, s) ; (r, t) hoặc (s, t) cũng phải thuộc các dạng trên. Nếu $r \neq s$ thì cặp (r, s) là (1, 5) hoặc (2, 4) vì $t + r \vdots 6$ nên $t = s$ nhưng lúc đó $t + s \not\vdots 6$.

Vậy chỉ có thể r = s = t, nghĩa là ba số được chọn hay mọi số được chọn phải có cùng số dư là 0 hoặc 3 khi chia cho 6. Trong 100 số từ 1 đến 100 có 16 số chia hết cho 6 và có 17 số chia hết cho 6 có dư là 3. Vậy n lớn nhất là 17.

Bài 44.

Tìm tất cả các số tự nhiên n để $n^{n+1}(n+1)^n$ chia hết cho 5.

Giải :

Gọi $A = n^{n+1} + (n+1)^n$

Lấy n chia cho 5 ta được n = 5k + r với $r \in \{0;1;2;3;4\}$

i) Nếu $r = 0$ hoặc $r = 4$ thì $A \not\vdots 5$.

ii) Nếu $r = 1$ thì $A \equiv 1 + 2^{5k+1} \pmod 5$.

Mà $2^{4k} \equiv 1 \pmod 5$ nên $A \equiv 1 + 2^{k+1} \pmod 5$

Giả sử k = 4t + s với $s \in \{0;1;2;3\}$ thì

$$A \equiv 1 + 2^{k+1} \equiv 1 + 2^{4t+s+1} \equiv 1 + 2^{s+1} \pmod 5$$

Để $A \vdots 5$ thì s = 1, khi đó k = 4t + 1 và n = 5k + 1 = 5(4t + 1) + 1 = 20t + 6 $t \in \mathbf{N}$.

iii) Nếu r = 2 thì :
$A \equiv 2^{5k+3} + 3^{5k+2} \equiv 2^{k+3} + 3^{k+2} \equiv 2^{k+3} + (-2)^{k+2} = 2^{k+2}(2 \pm 1) \equiv (\text{mod} 5)$.

iv) Nếu r = 3 thì :

$$A \equiv 3^{5k+4} + 4^{5k+3} \equiv 3^k + 4^{k+1} \equiv (-2)^k + (-1)^{k+1} \pmod 5$$

- $k = 2m$ thì $A \equiv 4^m - 1 \vdots 5 \Leftrightarrow m = 2l$ khi đó $k = 4l$ và $n = 5k + 3 = 20l + 3$.
- $k = 2m + 1$ thì $A \equiv -2^k + 1 \vdots 5$.

Vậy n = 20t + 6 hoặc n = 20t + 3 ($t \in N$).

Dạng 4. SỬ DỤNG NGUYÊN TẮC DIRICHLET.

Nguyên tắc ngăn kéo Dirichlet : "Nếu đem n + 1 vật xếp vào n ngăn kéo thì có ít nhất một ngăn kéo chứa từ hai vật trở lên".

Tổng quát : "Nếu đem nk + 1 vật xếp vào n ngăn kéo thì có ít nhất một ngăn kéo chứa từ k + 1 vật trở lên".

Bài 45.

a) Trong 11 số nguyên bất kì có thể tìm được 2 số có chữ số tận cùng giống nhau.

b) Trong 101 số nguyên bất kì có thể tìm được 2 số có hai chữ số tận cùng giống nhau.

c) Trong n + 1 số nguyên bất kì có hai số có hiệu của chúng chia hết cho n.

Giải :

a) Lấy 11 số nguyên đã cho chia cho 10 thì được 11 số dư nhận một trong 10 số : 0; 1; 2 ; ... ; 9. Theo nguyên tắc Dirichlet phải có hai số có cùng dư, hiệu hai số đó chia hết cho 10. Khi đó, hai số đó có chữ số tận cùng giống nhau.

Chú ý : Ở đây "vật" là 11 số dư khi chia 11 số nguyên cho 10 (tức là lấy các chữ số tận cùng của 11 số đó) còn "ngăn kéo" là các số dư 0, 1, ... , 9.

b) Tương tự câu a) lấy 101 số nguyên đã cho chia cho 100 (tức là lấy 2 chữ số tận cùng của chúng).

c) Tổng quát, lấy n + 1 số nguyên đã cho chia cho n thì được n + 1 số dư nhận một trong các số 0, 1, 2, ... , n – 1 nên theo nguyên tắc Dirichlet, phải có hai số có dư bằng nhau, hiệu hai số này chia hết cho n.

Bài 46.

Cho 10 số tự nhiên bất kì $a_1, a_2, \dots, a_{10}$. Chứng minh rằng tồn tại một số chia hết cho 10 hoặc tổng của một số số chia hết cho 10. Hãy phát biểu bài toán tổng quát.

Giải :

Xét 10 số mới như sau : $S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, \dots, S_{10} = a_1 + a_2 + \dots + a_{10}$ lấy 10 số $S_1, S_2, \dots, S_{10}$ chia cho 10.

- Nếu có một số $S_i \vdots 10$ $(i = 1, 2, \dots, 10)$ thì bài toán được chứng minh.
- Nếu S_i không chia hết 10 với mọi i, tức là $S_1, S_2, \dots, S_{10}$ chia cho 10 có các dư là một trong chín số : 1, 2, ... , 9. Theo nguyên tắc Dirichlet có hai số cùng dư khi chia cho 10, giả sử là S_k và S_l $(k > l)$. Khi đó :

$$S_k - S_l = a_{l+1} + a_{l+2} + \dots + a_k \vdots 10 \text{ (đpcm).}$$

Bài toán tổng quát.

Trong n số tự nhiên bất kì tồn tại một số tự nhiên chia hết cho n hoặc tổng của một số số chia hết cho n.

Bài 47.

Chứng minh rằng trong 8 số tự nhiên có 3 chữ số bao giờ cũng chọn được hai số mà khi viết liền nhau ta được một số có 6 chữ số và chia hết cho 7.

Giải :

Lấy 8 số đã cho chia cho 7 được 8 số dư nhận một trong 7 giá trị 0, 1, 2, ... , 6. Theo nguyên tắc Dirichlet có hai số cùng dư, giả sử là $\overline{abc}$ và $\overline{def}$ khi chia cho 7 có cùng dư là r. Giả sử $\overline{abc} = 7k + r$ và $\overline{def} = 7l + r$. Ta có :

$$\overline{abcdef} = 1000\overline{abc} + \overline{def} = 1000(7k + r) + 7l + r = 7(1000k + l) + 1001r \vdots 7 \text{ (đpcm).}$$

Bài 48.

Cho 4 số nguyên phân biệt a, b, c, d. Chứng minh rằng :

$$(a - b)(a - c)(a - d)(b - c)(b - d)(c - d) \vdots 12.$$

Giải :

Đặt $A = (a - b)(a - c)(a - d)(b - c)(b - d)(c - d)$

Bốn số nguyên a, b, c, d không chia cho 3 có hai số có cùng dư khi đó hiệu của chúng chia hết cho 3, hiệu là một trong các thừa số của A nếu $A \vdots 3$ (1).

Nếu a, b, c, d có hai số có cùng dư. Khi chia cho 4 thì $A \vdots 4$ còn nếu a, b, c, d có dư khác nhau khi chia cho 4 thì sẽ có hai số chẵn và hai số lẻ, lúc đó có hai hiệu chia hết cho 2, do đó $A \vdots 4$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $A \vdots 12$ (đpcm).

Bài 49.

Có hay không một số nguyên dương k để 29^k là một số có các chữ số tận cùng là 0001.

Giải :

Ta cần chứng minh tồn tại số nguyên k sao cho $29^k - 1 \vdots 10^4$. Thật vậy, lấy $10^4 + 1$ số : 29, $29^2, \ldots, 29^{10^4+1}$ chia cho 10^4, khi đó có hai số có hiệu chia hết cho 10^4, giả sử hai số đó là 29^n và 29^m $(n > m)$. Ta có $29^m - 29^n \vdots 10^4$ hay $29^m(29^{n-m} - 1) \vdots 10^4$.

Vì $(29^m, 10^4) = 1$ nên $29^{n-m} - 1 \vdots 10^4$ (đpcm).

Bài 50.

Chứng minh rằng trong 5 số nguyên bất kì có thể tìm được ba số có tổng chia hết cho 3.

Giải :

Lấy 5 số nguyên đã cho chia cho 3 được các dư 0, 1, 2.

- Nếu 5 số nguyên này khi chia cho 3 có đủ ba số dư 0, 1, 2. Giả sử $a_1 = 3k_1$, $a_2 = 3k_2 + 1$, $a_3 = 3k_3 + 2$ thì $a_1 + a_2 + a_3 = 3(k_1 + k_2 + k_3 + 1) \vdots 3$.
- Nếu 5 số nguyên này khi chia cho 3 chỉ có hai loại số dư thì theo nguyên tắc Dirichlet có ít nhất 3 số có cùng dư khi đó tổng của ba số này chia hết cho 3.
- Nếu 5 số nguyên này khi chia cho 3 chỉ có chung một số dư thì tổng ba số bất kì trong chúng chia hết cho 3.

Vậy trong 5 số nguyên bất kì có thể tìm được 3 số có tổng chia hết cho 3.

Bài 51.

Chứng minh rằng trong 52 số tự nhiên bất kì luôn tìm được một cặp gồm hai số sao cho tổng hoặc hiệu của chúng chia hết cho 100.

Giải :

Trong tập hợp các số dư trong phép chia 52 số cho 100 ta lấy ra từng cặp số sao cho tổng các cặp đó bằng 100 và lập thành các nhóm sau : (0, 0) ; (1, 99); (2, 98) ; ... ; (49, 51) và (50, 50). Ta có tất cả là 51 cặp mà có tới 52 số dư nên theo nguyên tắc Dirichlet ít nhất phải có hai số dư thuộc cùng một nhóm. Rõ ràng cặp số tự nhiên ứng với cặp số dư này là hai số tự nhiên có tổng hoặc hiệu chia hết cho 100.

Bài 52.

Chứng minh rằng trong 19 số tự nhiên liên tiếp bất kì luôn tồn tại một số có tổng các chữ số chia hết cho 10.

Giải :

Trước hết ta chứng minh rằng : với 19 số tự nhiên liên tiếp luôn tồn tại

10 số liên tiếp có chữ số hàng chục như nhau còn các chữ số hàng đơn vị liên tiếp từ 0 đến 9.

• Nếu trong 19 số tự nhiên liên tiếp có mặt 3 chữ số hàng chục khác nhau thì rõ ràng có một chữ số hàng chục (ở giữa hai hàng chục kia) cùng với các chữ số đơn vị liên tiếp từ 0 đến 9.

• Nếu trong 19 số tự nhiên liên tiếp chỉ có hai loại chữ số hàng chục khác nhau thì từ 19 = 2.9 + 1 suy ra có 10 số có cùng chữ số hàng chục và các chữ số đơn vị liên tiếp từ 0 đến 9. Tổng các chữ số của mỗi số trong 10 số tự nhiên nói trên cũng lập thành 10 số tự nhiên liên tiếp, vậy phải có một số chia hết cho 10.

Vậy trong 19 số tự nhiên liên tiếp luôn tồn tại một số có tổng các chữ số chia hết cho 10.

Bài 53.

Viết các số tự nhiên từ 1 đến 10 thành hàng ngang theo một thứ tự tùy ý, tiếp đó cộng mỗi một số trong các số đã cho với số thứ tự chỉ vị trí nó đứng (tính từ trái sang phải). Chứng minh rằng ít nhất cũng có hai tổng mà chữ số tận cùng của hai tổng đó như nhau.

Giải :

Gọi 10 số tự nhiên từ 1 đến 10 viết theo thứ tự từ trái sang phải là $a_1, a_2, \dots, a_{10}$. Ta lập dãy mới $b_1, b_2, \dots, b_{10}$ với $b_1 = a_1 + 1$; $b_2 = a_2 + 2$; ... ; $b_{10} = a_{10} + 10$.

b_i là tổng của a_i với vị trí thứ i mà nó đứng (i = 1, 2, ... , 10). Ta có :

$b_1 + b_2 + \dots b_{10} = a_1 + a_2 + \dots + a_{10} + 1 + 2 + \dots + 10 = 2(1 + 2 + \dots + 10) = 110$

Vì 110 là số chẵn nên không xảy ra trường hợp có 5 số b_i nào đó lẻ và 5 số b_j nào đó chẵn, hay nói cách khác số các b_i chẵn và số các b_j lẻ phải khác nhau.

Do đó số các b_i lẻ lớn hơn 5 hoặc số các b_j chẵn lớn hơn 5. Mà từ 1 đến 10 chỉ có 5 vị trí lẻ và 5 vị trí chẵn nên theo nguyên tắc Dirichlet phải có ít nhất hai số b_i lẻ tận cùng như nhau hoặc có hai số b_j chẵn có chữ số tận cùng như nhau.

Bài 54.

Trong một bảng vuông gồm có 5×5 ô vuông, người ta viết vào mỗi ô vuông một trong ba số 1 ; 0 hoặc – 1 sao cho mỗi ô có đúng một số. Chứng minh rằng trong các tổng của 5 số theo mỗi cột, mỗi hàng, mỗi đường chéo phải có ít nhất hai tổng số bằng nhau.

Giải :

Ta có 5 cột, 5 dòng, 2 đường chéo nên được 12 tổng. Mỗi ô nhận một trong ba giá trị 1 ; 0 hoặc – 1 nên mỗi tổng nhận các giá trị từ – 5 đến 5. Ta có 11 số nguyên từ – 5 đến 5 là – 5, – 4 , ..., – 1, 0, 1, ... , 5.

Vậy theo nguyên tắc Dirichlet phải có ít nhất hai tổng số bằng nhau.

Dạng 5. PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH QUY NẠP.

Giả sử cần chứng minh :

$$A(n) \vdots p \text{ với } n = 1, 2, \ldots \qquad (1)$$

Ta chứng minh (1) đúng với n = 1, tức là chứng minh $A(1) \vdots p$.

Giả sử (1) đúng với n = k, tức là ta có $A(k) \vdots p$

Ta chứng minh (1) đúng với n = k + 1, tức là phải chứng minh $A(k+1) \vdots p$.

Theo nguyên lí quy nạp, ta kết luận (1) đúng với mọi n = 1, 2, ...

Bài 55.

Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n ta có :

$$4^n + 15n - 1 \vdots 9 \qquad (1)$$

Giải :

- Với n = 1 ta có $4^1 + 15.1 - 1 = 18 \vdots 9$. Vậy (1) đúng với n = 1.
- Giả sử (1) đúng với n = k, tức là ta có :
  $4^k + 15k - 1 \vdots 9 \Rightarrow 4^k + 15k - 1 = 9m (m \in Z) \Rightarrow 4^k = 9m + 1 - 15k$ (2)
- Với n = k + 1, ta có :

$$4^{k+1} + 15(k+1) - 1 = 4.4^k + 15k + 14 = 4(9m + 1 - 15k) + 15k + 14 \text{ (theo (2))}$$
$$= 36m - 45k + 18 \vdots 9.$$

Vậy (1) đúng với n = k + 1, do đó (1) đúng với mọi $n \geq 1$.

Bài 56.

Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n ta có :

$$3^{2^{4n+1}} + 2 \vdots 11 \qquad (1)$$

Giải :

- Với n = 0 ta có $3^{2^1} + 2 = 11 \vdots 11$.
- Giả sử (1) đúng với n = k, tức là : $3^{2^{4k+1}} + 2 \vdots 11$.
- Với n = k + 1 ta có :

$$3^{2^{4(k+1)+1}} + 2 = 3^{2^{4k+5}} + 2 = 3^{2^{4k+1}.16} + 2 = \left(3^{2^{4k+1}}\right)^{16} + 2 = \left(3^{2^{4k+1}}\right)^{16} - 2^{16} + 2^{16} + 2$$

Mà $\left(3^{2^{4k+1}}\right)^{16}-2^{16}\vdots\left(3^{2^{4k+1}}+2\right)$ (vì 16 là số chẵn).

Theo giả thiết quy nạp :

$$3^{2^{4k+1}}+2\vdots 11 \text{ nên } \left(3^{2^{4k+1}}\right)^{16}-2^{16}\vdots 11.$$

Mặt khác :

$$2^{16}+2=2(2^{15}+1)\vdots 11.$$

Do đó :

$$3^{2^{4(k+1)+1}}+2\vdots 11.$$

Vậy $3^{2^{4n+1}}+2\vdots 11$ với mọi $n\in\mathbf{N}$.

Bài 57.

Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n\geq 1$ và k là số tự nhiên lẻ ta có $k^{2^n}-1\vdots 2^{n+2}$.

Giải :

- Với n = 1 ta có $k^2-1=(k-1)(k+1)\vdots 8$ (vì k - 1, k + 1 là hai số chẵn liên tiếp nên tích của chúng chia hết cho 8).
- Giả sử với n = m ta có :

$$k^{2^m}-1\vdots 2^{m+2}\Rightarrow k^{2^m}-1=2^{m+2}\cdot q \quad (q\in\mathbb{Z})\Rightarrow k^{2^m}=2^{m+2}\cdot q+1$$

- Với n = m + 1 ta có :

$$k^{2^{m+1}}-1=\left(k^{2^m}\right)^2-1=\left(2^{m+2}\cdot q+1\right)^2-1=2^{2m+4}q^2+2^{m+3}q$$
$$=2^{m+3}\left(2^{m+1}q^2+q\right)\vdots 2^{m+3}.$$

Vậy $k^{2^n}-1\vdots 2^{n+2}$ với mọi $n\geq 1$.

Bài 58.

Chứng minh rằng số được thành lập bởi 3^n chữ số giống nhau thì chia hết cho 3^n với n là số nguyên dương.

(Đề thi HSG Quốc gia 1979)

Giải :

Ta cần chứng minh : $\underbrace{\overline{aa...a}}_{3^n \text{ số a}}\vdots 3^n$ (1)

- Với n = 1 ta có $\overline{aaa}=111a\vdots 3$. Vậy (1) đúng với n = 1.
- Giả sử (1) đúng với n = k, tức là ta có : $\underbrace{\overline{aa...a}}_{3^k \text{ số a}}\vdots 3^k$.
- Ta chứng minh (1) đúng với n = k + 1, tức là phải chứng minh :

$$\underbrace{\overline{aaa...a}}_{3^{k-1}\text{ số a}} \vdots 3^{k-1}.$$

Ta có : $3^{k+1} = 3.3^k = 3^k + 3^k + 3^k$.

Do đó :

$$\underbrace{\overline{aa...a}}_{3^{k-1}\text{ số a}} = \overline{\underbrace{aa...a}_{3^k}\underbrace{a...a}_{3^k}\underbrace{a...a}_{3^k}} = \underbrace{\overline{aa...a}}_{3^k}.10^{2.3^k} + \underbrace{\overline{aa...a}}_{3^k}.10^{3^k} + \underbrace{\overline{aa...a}}_{3^k}$$

$$= \underbrace{\overline{aa...a}}_{3^k}(10^{2.3^k} + 10^{3^k} + 1) \vdots 3^{k+1},$$

vì theo giả thiết quy nạp $\underbrace{\overline{aa...a}}_{3^k} \vdots 3^k$ và $10^{2.3^k} + 10^{3^k} + 1 \vdots 3$.

Vậy (1) đúng với n = k + 1 do đó (1) đúng với mọi $n \geq 1$.

Bài 59.

Chứng minh rằng từ $2^{n+1} - 1$ số nguyên bất kì luôn tìm được 2^n số mà tổng của chúng chia hết cho 2^n ($n \in N^*$).

Giải :

• Với n = 1, ta chứng minh từ 3 số nguyên bất kì luôn tìm được hai số có tổng chia hết cho 2. Thật vậy, trong 3 số nguyên bất kì có ít nhất hai số có cùng tính chẵn, lẻ (nguyên tắc Dirichlet), khi đó tổng của hai số đó chia hết cho 2.

• Với n = k, giả sử từ $2^{k+1} - 1$ số nguyên bất kì luôn tìm được 2^k số có tổng chia hết cho 2^k.

• Với n = k + 1 ta có : $2^{k+2} - 1 = 2(2^{k+1} - 1) + 1$.

Theo giả thiết quy nạp, trong $2^{k+1} - 1$ số có 2^k số có tổng chia hết cho 2^k, giả sử tổng 2^k số đó là $S_1 = 2^k.l_1$ ($l_1 \in \mathbf{Z}$). Trong $2^{k+1} - 1$ số khác với $2^{k+1} - 1$ số ở trên ta lại có 2^k số có tổng chia hết cho 2^k, giả sử là $S_2 = 2^k.l_2$ ($l_2 \in \mathbf{Z}$). Như vậy ta đã có $2^k + 2^k = 2.2^k = 2^{k+1}$ số có tổng $S_1 + S_2 = 2^k(l_1 + l_2)$.

Như vậy còn lại $2^{k+2} - 1 - 2^{k+1} = 2^{k+1} - 1$ số. Lại theo giả thiết quy nạp , trong $2^{k+1} - 1$ số này luôn tìm được 2^k số có tổng chia hết cho 2^k, giả sử là $S_3 = 2^k.l_3$ ($l_3 \in \mathbf{Z}$).

Theo trên, với n = 1 ta được kết quả : trong 3 số nguyên l_1, l_2, l_3 có hai số có tổng chia hết cho 2, giả sử là $l_1 + l_2 \vdots 2$, khi đó tổng của 2^{k+1} số $S_1 + S_2 = 2^k(l_1 + l_2) \vdots 2^{k+1}$.

Vậy bài toán đúng với n = k + 1 nên đúng với mọi $n \in \mathbf{N}^*$.

Dạng 6. SỬ DỤNG ĐỒNG DƯ.

- $a \equiv b \pmod m \Leftrightarrow a - b \vdots m$
- Nếu $a \equiv b \pmod m$ và $c \equiv d \pmod m$ thì :

$$a \pm c \equiv b \pm d \pmod m,$$
$$ac \equiv bd \pmod m.$$

- ***Hệ quả :***

Nếu $a \equiv b \pmod m$ thì : $a \pm c \equiv b \pm c \pmod m$,

$$ac \equiv bc \pmod m,$$
$$a^n \equiv b^n \pmod m \ (n \in \mathbf{N}).$$

Bài 60.

Tìm dư trong phép chia 3^{2003} chia cho 13.

Giải :

Ta có : $3^3 = 27 \equiv 1 \pmod{13}$ và $2003 = 3 \times 667 + 2$.

Do đó : $3^{2003} = 3^{3\times667+2} = 3^2.(3^3)^{667}$

Ta có : $(3^3)^{667} \equiv 1 \pmod{13} \Rightarrow 3^2.(3^3)^{667} \equiv 9 \pmod{13}$.

Vậy dư trong phép chia 3^{2003} cho 13 là 9.

Bài 61.

Chứng minh rằng : $2^{2002} - 4 \vdots 31$.

Giải :

Ta có : $2^5 = 32 \equiv 1 \pmod{31}$ và $2002 = 5 \times 400 + 2$

Do đó :

$$2^{2002} - 4 = 2^{5.400+2} - 4 = 4.(2^5)^{400} - 4 = 4\left[(2^5)^{400} - 1\right] \equiv 4(1-1) = 0 \pmod{31}.$$

Vậy : $2^{2002} - 4 \vdots 31$.

Bài 62.

Chứng minh rằng : $2222^{5555} + 5555^{2222} \vdots 7$.

Giải :

Ta có : $2222 \equiv -4 \pmod 7$ và $5555 \equiv 4 \pmod 7$

Suy ra : $2222^{5555} + 5555^{2222} \equiv (-4)^{5555} + 4^{2222} \pmod 7$ (1)

Mà : $(-4)^{5555} + 4^{2222} = -4^{2222}(4^{3333} - 1) \vdots 4^3 - 1 = 63 \vdots 7$.

Vậy : $(-4)^{5555} + 4^{2222} \equiv 0 \pmod 7$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $2222^{5555} + 5555^{2222} \vdots 7$ (đpcm).

Bài 63.

Kí hiệu $a_1 + a_2 + ... + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$. *Chứng minh rằng* $\sum_{i=1}^{n} a_i(n^2+1)^{3i}$ *chia hết cho* n^2+n+1 *khi và chỉ khi* $\sum_{i=n}^{n} (-1)^i a_i$ *chia hết cho* $n^2 + n + 1$ *với* $a_1, a_2, ..., a_n \in Z$ *và* $n \in N^*$.

Giải :

Ta có : $n^2+1 \equiv -n \pmod{n^2+n+1} \Rightarrow (n^2+1)^3 \equiv -n^3 \pmod{n^2+n+1}$ (1)

Mà $n^3 - 1 \vdots (n^2+n+1)$ do đó $n^3 \equiv 1 \pmod{n^2+n+1}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra :

$(n^2+1)^3 \equiv -1 \pmod{n^2+n+1} \Rightarrow a_i(n^2+1)^{3i} \equiv a_i(-1)^i \pmod{n^2+n+1}$, $i = \overline{1,n}$.

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i(n^2+1)^{3i} \equiv \sum_{i=1}^{n} (-1)^i a_i \pmod{n^2+n+1}.$$

Bài 64.

Cho $a_1, a_2, ..., a_n \in Z$ *và* $\sum_{i=1}^{n} a_i \vdots 6$ *chứng minh rằng* $\sum_{i=1}^{n} a_i^3 \vdots 6$.

(Đề thi HSG Thành phố HCM 1991)

Giải :

Ta cần chứng minh : $n^3 \equiv n \pmod 6$.

Thật vậy, $n^3 - n = n(n^2-1) = (n-1)n(n+1) \vdots 6$, vì n - 1, n , n + 1 là ba số nguyên liên tiếp nên có một số chia hết cho 2 và có một số chia hết cho 3 nên tích chia hết cho 6.

Thay $n = a_i$ ta được $a_i^3 \equiv a_i \pmod 6 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i^3 \equiv \sum_{i=1}^{n} a_i \equiv 0 \pmod 6$ (đpcm).

Bài 65.

Chứng minh rằng : $\sum_{k=1}^{26} k.10^{3k} \vdots 13$.

Giải :

Ta có : $10^3 = 1000 \equiv -1 \pmod{13}$, vì 1001 = 13.77.

Suy ra : $10^{3k} \equiv (-1)^k \pmod{13} \Rightarrow k.10^{3k} \equiv k.(-1)^k \pmod{13}$.

Do đó :

$$\sum_{k=1}^{26} k.10^{3k} \equiv \sum_{k=1}^{26} k(-1)^k \pmod{13}.$$

Mà :

$$\sum_{k=1}^{26}(-1)^k\cdot k=-1+2-3+4-\cdots-25+26=(-1+2)+(-3+4)+\cdots+(-25+26)=13.$$

Vậy : $$\sum_{k=1}^{20}k.10^{3k}\equiv 0 \pmod{13} \text{ (đpcm).}$$

Dạng 7. TÌM CHỮ SỐ TẬN CÙNG CỦA MỘT SỐ.

a) Tìm một chữ số tận cùng của số a^n

- Nếu a có chữ số tận cùng là 0, 1, 5 hoặc 6 thì a^n lần lượt có chữ số tận cùng là 0, 1, 5 hoặc 6.
- Nếu a có chữ số tận cùng là 2, 3 hoặc 7, ta có nhận xét sau với $k\in N^*$:

$$2^{4k}\equiv 6 \pmod{10};$$
$$3^{4k}\equiv 1 \pmod{10};$$
$$7^{4k}\equiv 1 \pmod{10}.$$

Do đó để tìm chữ số tận cùng của a^n với a có tận cùng là 2, 3 hoặc 7 ta lấy n chia cho 4. Giả sử n = 4k + r với r ∈ {0, 1, 2, 3}.

- Nếu $a\equiv 2 \pmod{10}$ thì $a^n\equiv 2^n=2^{4k+r}\equiv 6.2^r \pmod{10}$.
- Nếu $a\equiv 3 \pmod{10}$ hoặc $a\equiv 7 \pmod{10}$ thì $a^n=a^{4k+r}\equiv a^r \pmod{10}$.

b) Tìm hai chữ số tận cùng của số a^n.

Ta có nhận xét sau :

$$2^{20}\equiv 76 \pmod{100};$$
$$3^{20}\equiv 01 \pmod{100};$$
$$6^5\equiv 76 \pmod{100};$$
$$7^4\equiv 01 \pmod{100}.$$

Mà :

$$76^n\equiv 76 \pmod{100} \text{ với } n\geq 1,$$
$$5^n\equiv 25 \pmod{100} \text{ với } n\geq 2.$$

Suy ra kết quả sau với $k\in N^*$:

$$a^{20k}\equiv 00 \pmod{100} \text{ nếu } a\equiv 0 \pmod{10},$$
$$a^{20k}\equiv 01 \pmod{100} \text{ nếu } a\equiv 1; 3; 7; 9 \pmod{10},$$
$$a^{20k}\equiv 25 \pmod{100} \text{ nếu } a\equiv 5 \pmod{10},$$
$$a^{20k}\equiv 76 \pmod{100} \text{ nếu } a\equiv 2; 4; 6; 8 \pmod{100}.$$

Vậy để tìm hai chữ số tận cùng của a^n ta lấy số mũ n chia cho 20.

c) Tìm ba chữ số tận cùng của số a^n.

Giả sử n = 100k + r với $0\leq r<100$, khi đó : $a^n=a^{100k+r}=(a^{100})^k.a^r$.

Giả sử : $a \equiv x \pmod{10}$, $x \in \{0, 1, 2, ..., 9\}$

Ta có : $a^{100} = (10k + x)^{100} \equiv x^{100} \pmod{1000}$

Vậy 3 chữ số tận cùng của a^{100} cũng chính là 3 chữ số tận cùng của x^{100}.

Dùng quy nạp với mọi $n \geq 1$, ta có :

$$625^n \equiv 625 \pmod{1000},$$

$$376^n \equiv 376 \pmod{1000}.$$

- Nếu x = 0 thì $x^{100} \equiv 000 \pmod{1000}$
- Nếu x = 5 thì $x^4 = 5^4 = 625 \Rightarrow x^{100} = (5^4)^{25} \equiv 625 \pmod{10^3}$
- Nếu x = 1; 3; 7; 9 ta có tương ứng :

$x^4 = 1; 81; 2401; 6561 \equiv 1 \pmod{40} \Rightarrow x^{100} = (40k+1)^{25} \equiv 1 \pmod{10^3}$

- Nếu x = 2; 4; 6; 8 thì $x^{100} \vdots 2^{100} \vdots 8$.

Ta có : $(x, 125) = 1$ nên $x^{100} \equiv 1 \pmod{125}$ (Định lí Euler).

Giả sử 3 chữ số tận cùng của x^{100} là $\overline{abc}$ ta có :

$$x^{100} = 1000k + \overline{abc} \Rightarrow \overline{abc} \vdots 8 \text{ và } \overline{abc} \equiv 1 \pmod{125}$$

Trong các số 1; 126; 376; 501; 626; 751; 876 (các số có 3 chữ số chia cho 125 dư 1) chỉ có duy nhất một số chia hết cho 8 là số 376. Vậy $x^{100} \equiv 376 \pmod{1000}$.

Do đó ta có kết quả sau :

$$a^{100k} \equiv 000 \pmod{10^3} \text{ nếu } a \equiv 0 \pmod{10}$$

$$a^{100k} \equiv 001 \pmod{10^3} \text{ nếu } a \equiv 1; 3; 7; 9 \pmod{10}$$

$$a^{100k} \equiv 625 \pmod{10^3} \text{ nếu } a \equiv 5 \pmod{10}$$

$$a^{100k} \equiv 376 \pmod{10^3} \text{ nếu } a \equiv 2; 4; 6; 8 \pmod{10}$$

Vậy để tìm ba chữ số tận cùng của a^n ta tìm 2 chữ số tận cùng của số mũ n.

Bài 66.

Chứng minh rằng 0,3 $(1983^{1983} - 1917^{1917})$ là một số nguyên.

(Đề thi HSG 1983)

Giải :

Ta có : $1983^{1983} \equiv 3^{4k+3} \pmod{10}$

Vì $3^{4k} \equiv 1 \pmod{10}$ nên $3^{4k+3} \equiv 3^3 \equiv 7 \pmod{10}$.

Mặt khác :

$$1917^{1917} \equiv 7^{4l+1} \equiv 7 \pmod{10} \text{ vì } 7^{4l} \equiv 1 \pmod{10}.$$

Vậy :

$$1983^{1983} - 1917^{1917} \vdots 10,$$

Từ đó suy ra số $0,3(1983^{1983} - 1917^{1917})$ là một số nguyên.

Bài 67.

Chứng minh rằng số $333^{555^{777}} + 777^{555^{333}}$ chia hết cho 10.

Giải :

Ta có : $555 \equiv -1 \pmod 4 \Rightarrow 555^{777} \equiv (-1)^{777} = -1 \equiv 3 \pmod 4$,

$555^{333} \equiv (-1)^{333} = -1 \equiv 3 \pmod 4$.

Do đó : $333^{555^{777}} = 3^{4k+3} \equiv 3^3.(3^4)^k \equiv 7 \pmod{10}$,

$777^{555^{333}} \equiv 7^{4l+3} = 7^3.(7^4)^l \equiv 3 \pmod{10}$.

Suy ra : $333^{555^{777}} + 777^{555^{333}} \equiv 0 \pmod{10}$ (đpcm).

Bài 68.

Chứng minh với mọi $n \in N^*$ ta có : $7^{2^{4n+1}} + 4^{3^{4n+1}} - 65 \,\vdots\, 100$.

Giải :

Ta có : $7^4 = 2401 \equiv 1 \pmod{100}$ và $4^{10} \equiv 76 \pmod{100}$.

Do đó : $7^{2^{4n+1}} = 7^{2.2^{4n}} = 7^{4k} \equiv 1 \pmod{100}$

$4^{3^{4n-1}} = 4^{3.81^n} = 4^{10l+3} = 4^3.(4^{10})^l \equiv 64.76 \equiv 64 \pmod{100}$

Suy ra : $7^{2^{4n-1}} + 4^{3^{4n+1}} - 65 \equiv 1 + 64 - 65 \equiv 0 \pmod{100}$ (đpcm).

Bài 69.

Tìm 3 chữ số tận cùng của $2^{9^{2003}}$.

Giải :

Trước hết ta tìm 2 chữ số tận cùng của 9^{2003}.

Ta có : $9^{2003} = 9^3.9^{2000} = 9^3.(3^{20})^{200} \equiv 29 \pmod{100}$

Suy ra : $2^{9^{2003}} = 2^{100k+29} = 2^{29}.(2^{100})^k \equiv 912.376 \equiv 912 \pmod{1000}$.

Vậy ba chữ số tận cùng của $2^{9^{2003}}$ là 912.

Dạng 8. ÁP DỤNG ĐỊNH LÍ FERMAT.

Với p là số nguyên tố ta có : $a^p \equiv a \pmod p$.

Đặc biệt, nếu (a, p) = 1 thì $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$.

Chứng minh :

Giả sử p nguyên tố và (a, p) = 1. Số dư khi chia a, 2a, ... , (p - 1)a cho p sẽ đôi một khác nhau và những số trong các số 1, 2, ... , p - 1.

Gọi $r_1, r_2, \dots, r_{p-1}$ là số dư tương ứng trong phép chia a, 2a, ..., (p - 1)a cho p. Ta có :

$$\begin{cases} a \equiv r_1 \pmod p \\ 2a \equiv r_2 \pmod p \\ \ldots \\ (p-1)a \equiv r_{p-1} \pmod p \end{cases}$$

Nhân tương ứng các đồng dư thức trên lại ta được :

$$1.2...(p-1)\,a^{p-1} \equiv r_1 r_2 ... r_{p-1} \pmod p$$

Mà $1.2...(p-1) = (p-1)!$ và $r_1 r_2 ... r_{p-1} = 1.2...(p-1) = (p-1)!$ nên :

$(p-1)!\,a^{p-1} \equiv (p-1)! \pmod p \Rightarrow a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$, vì $((p-1)!, p) = 1$.

Bài 70. $) \Rightarrow (p-1)!\,(a^{p-1}-1) \vdots\, p \Rightarrow (a^{p-1}-1) \vdots\, p$

Cho $a \in Z$; $m, n \in N^*$. Chứng minh rằng $a^{6n} + a^{6m} \vdots\, 7$ khi và chỉ khi $a \vdots\, 7$.

Giải :

Giả sử $a^{6n} + a^{6m} \vdots\, 7$ và $a \not\vdots\, 7$ ta có $(a, 7) = 1$.

Theo Định lí Fermat : $a^6 \equiv 1 \pmod 7 \Rightarrow a^{6n} \equiv 1 \pmod 7$ và $a^{6m} \equiv 1 \pmod 7 \Rightarrow a^{6n} + a^{6m} \equiv 2 \pmod 7$. Vô lí ! Vậy $a \vdots\, 7$.

Ngược lại, nếu $a \vdots\, 7$ thì $a^{6n} + a^{6m} \vdots\, 7$.

Bài 71.

Cho hai số nguyên tố khác nhau p và q. Chứng minh rằng

$$p^{q-1} + q^{p-1} - 1 \vdots\, p.q.$$

Giải :

Vì p, q nguyên tố và $p \neq q$ nên $(p, q) = 1$. Áp dụng Định lí Fermat ta có :

$p^{q-1} \equiv 1 \pmod q$ và $q^{p-1} \equiv 1 \pmod p \Rightarrow p^{q-1} - 1 \vdots\, q$ và $q^{p-1} - 1 \vdots\, p$.

Mặt khác $p^{q-1} \vdots\, p$ và $q^{p-1} \vdots\, q$ nên ta có :

$$p^{q-1} + q^{p-1} - 1 \vdots\, q \text{ và } p^{q-1} + q^{p-1} - 1 \vdots\, p$$

Mà $(p, q) = 1$ nên $p^{q-1} + q^{p-1} \vdots\, p.q$.

Bài 72.

Cho p là số nguyên tố lớn hơn 7. Chứng minh rằng $3^p - 2^p - 1$ chia hết cho 42p.

Giải :

Ta có : $42 = 6p.7 = 2.3.p.7$

- Ta có : $3^p - 2^p - 1 = (3^p - 1) - 2^p \vdots\, 2$, (1)

$3^p - 2^p - 1 = 3^p - (2^p + 1) \vdots\, 3$, (2) vì p là số lẻ nên $2^p + 1 \vdots (2+1) = 3$.

Áp dụng Định lí Fermat : $3^p \equiv 3 \pmod p$ và $2^p \equiv 2 \pmod p$

Do đó : $$3^p - 2^p - 1 = (3^p - 3) - (2^p - 2) \vdots p \quad (3)$$

• Một số nguyên tố p khi chia cho 6 chỉ có thể dư là 1 hoặc 5.

i) Nếu $p = 6k+1$ thì $3^p - 2^p - 1 = 3.(3^6)^k - 2.(2^6)^k - 1 \equiv 3 - 2 - 1 \equiv 0 \pmod 7$ (vì $3^6 \equiv 1 \pmod 7$ và $2^6 \equiv 1 \pmod 7$).

ii) Nếu $p = 6k + 5$ thì $3^p - 2^p - 1 = 3^5.3^{6k} - 2^5.2^{6k} - 1 \equiv 3^5 - 2^5 - 1 \equiv 0 \pmod 7$.

Vậy : $$3^p - 2^p - 1 \vdots 7 \quad (4)$$

Từ (1), (2), (3) và (4) suy ra $3^p - 2^p - 1 \vdots 2.3.7.p = 42p$ (đpcm).

Bài 73.

Chứng minh rằng : $3^{2^{4n+1}} + 2^{3^{4n+1}} + 5 \vdots 11$, với mọi $n \in N$.

Giải :

Theo Định lí Fermat, ta có : $3^{10} \equiv 1 \pmod{11}$ và $2^{10} \equiv 1 \pmod{11}$.

Ta tìm dư trong phép chia 2^{4n+1} và 3^{4n+1} cho 10, tức là tìm chữ số tận cùng của chúng.

Ta có : $2^{4n+1} = 2.16^n \equiv 2 \pmod{10} \Rightarrow 2^{4n+1} = 10k + 2$

$3^{4n+1} = 3.81^n \equiv 3 \pmod{10} \Rightarrow 3^{4n+1} = 10l + 3$ $(k, l \in \mathbf{N})$

Mà $3^{10k} \equiv 1 \pmod{11}$ và $2^{10l} \equiv 1 \pmod{11}$ nên :

$$3^{2^{4n+1}} + 2^{3^{4n+1}} + 5 \equiv 3^{10k+2} + 2^{10l+3} + 5 \equiv 3^2 + 2^3 + 5 \equiv 0 \pmod{11}$$

Vậy : $3^{2^{4n+1}} + 2^{3^{4n+1}} + 5 \vdots 11$, $\forall n \in \mathbf{N}$.

Bài 74.

Chứng minh rằng nếu (a, 240) = 1 thì $a^4 - 1 \vdots 240$.

Giải :

Ta có : $240 = 2^4.3.5$.

$$(a, 240) = 1 \Rightarrow (a, 2) = (a, 3) = (a, 5) = 1 \Rightarrow \begin{cases} a^2 - 1 \vdots 3 \\ a^4 - 1 \vdots 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^4 - 1 \vdots 3 \\ a^4 - 1 \vdots 5 \end{cases} \Rightarrow a^4 - 1 \vdots 15 \quad (1)$$

Mặt khác : $a^4 - 1 = (a-1)(a+1)(a^2+1) \vdots 16$, (2)

vì a - 1, a + 1 là hai số chẵn liên tiếp nên tích chia hết cho 8 và $a^2 + 1 \vdots 2$.

Từ (1) và (2) suy ra $a^4 - 1 \vdots 240$.

Bài 75.

Một số có 6n chữ số và chia hết cho 7. Chứng minh rằng nếu

chuyển chữ số tận cùng lên đầu của số đó thì được một số cũng chia hết cho 7.

Giải :

Gọi số ban đầu là N = 10A + a, với a là chữ số tận cùng của N và A có 6n - 1 chữ số. Sau khi chuyển a lên đầu ta được số $M = a.10^{6n-1} + A$.

Ta chứng minh $N - 3M \vdots 7$.

Thật vậy, ta có : $N - 3M = 7A - a(3.10^{6n-1} - 1)$

Áp dụng Định lí Fermat ta có :

$$10^6 \equiv 1 \pmod 7 \Rightarrow 10^{6n} \equiv 1 \pmod 7 \Rightarrow 3.10^{6n} \equiv 3 \equiv 10 \pmod 7$$
$$\Rightarrow 3.10^{6n-1} \equiv 1 \pmod 7$$

Vậy $N - 3M \vdots 7$, từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Bài 76.

Tìm số nguyên tố p sao cho $2^p + 1 \vdots p$.

Giải :

Áp dụng Định lí Fermat ta có : $2^p - 2 \vdots p$.

Từ đó suy ra : $3 = 2^p + 1 - (2^p - 2) \vdots p \Rightarrow p = 3$.

Ngược lại, với p = 3 ta có : $2^p + 1 = 2^3 + 1 = 9 \vdots 3$.

Vậy, với p = 3 thì $2^p + 1 \vdots p$.

Bài 77.

Cho số nguyên a, chứng minh rằng $a^2 + 1$ không có ước nguyên tố dạng 4k + 3, từ đó suy ra các phương trình sau không có nghiệm nguyên dương.

a) $4xy - x - y = z^2$; ***b)*** $x^2 - y^3 = 7$.

Giải :

Giả sử $a^2 + 1$ có ước nguyên tố p = 4k + 3 ($k \in N$). Khi đó :

$$a^{p-1} + 1 = a^{4k+2} + 1 = (a^2)^{2k+1} + 1 \vdots a^2 + 1 \vdots p \quad (1)$$

Mặt khác, theo Định lí Fermat :

$$a^{p-1} - 1 \vdots p \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra : $2 = a^{p-1} + 1 - (a^{p-1} - 1) \vdots p \Rightarrow p = 2$ không có dạng $4k + 3$, vô lí. Vậy $a^2 + 1$ không có ước nguyên tố dạng 4k + 3.

Áp dụng :

a) Ta có : $4xy - x - y = z^2 \Leftrightarrow (4x - 1)(4y - 1) = (2z)^2 + 1$.

Ta có 4x - 1 là số nguyên dương lớn hơn 2 có dạng 4k + 3 nên có ít nhất một ước nguyên tố dạng 4k + 3 (vì tích hai số dạng 4k + 1 cũng có dạng 4k + 1), nhưng $(2z)^2+1$ lại không có ước nguyên tố dạng 4k + 3 nên phương trình đã cho không có nghiệm nguyên dương.

b) Ta có : $x^2 - y^3 = 7 \Leftrightarrow x^2 + 1 = (y+2)(y^2 - 2y + 4)$.

Nếu y chẵn thì $(y+2)(y^2-2y+4) \vdots 4 \Rightarrow x^3 \equiv 3 \pmod 4$. Vô lí, vì số chính phương chia cho 4 chỉ dư 0 hoặc 1. Vậy y là số lẻ, nên có hai trường hợp xảy ra

- y có dạng 4k + 1 thì y + 2 có dạng 4k + 3. Khi đó $(y+2)(y^2-2y+4)$ có ước nguyên tố dạng 4k + 3 trong khi x^2+1 không có ước nguyên tố dạng 4k + 3.
- y có dạng 4k + 3 thì $y^2 - 2y + 4 \geq 3$ cũng có dạng 4k + 3.

Vậy phương trình đã cho không có nghiệm nguyên.

Bài 78.

Cho a, b là các số nguyên và p là số nguyên tố dạng 4k + 3. Chứng minh rằng nếu $a^2 + b^2 \vdots p$ thì $a \vdots p$ và $b \vdots p$. Từ đó suy ra phương trình $x^2 + 2x + 4y^2 = 37$ không có nghiệm nguyên dương.

Giải :

Giả sử p = 4k + 3 và $a^2 + b^2$ chia hết cho p.

Nếu a và b đều không chia hết cho p thì (a, p) = (b, p) = 1. Áp dụng Định lí Fermat ta có $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$ và $b^{p-1} \equiv 1 \pmod p$. Khi đó

$$a^{4k+2} + b^{4k+2} \equiv 2 \pmod p \quad (1)$$

Mà : $$a^{4k+2} + b^{4k+2} = (a^2)^{2k+1} + (b^2)^{2k+1} \vdots (a^2 + b^2) \vdots p \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $2 \vdots p$ hay p = 2, không có dạng 4k + 3, vô lí.

Vậy $a \vdots p$ và $b \vdots p$ (do $a^2 + b^2 \vdots p$).

Áp dụng : Ta có $x^2 + 2x + 4y^2 = 37 \Leftrightarrow (x+1)^2 + (2y)^2 = 38 \vdots 19$.

19 = 4.4 + 3 nên $x + 1 \vdots 19$ và $2y \vdots 19$, suy ra $(x+1)^2 + (2y)^2 \vdots 19^2 \Rightarrow 38 \vdots 19^2$ (vô lí). Vậy phương trình không có nghiệm nguyên dương.

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Dạng 1.

1. Chứng minh rằng :

a) Tích 4 số nguyên liên tiếp chia hết cho 24,

b) Tích 6 số nguyên liên tiếp chia hết cho 720,

c) Tích 3 số chẵn liên tiếp chia hết cho 48.

2. Cho a, b là hai số lẻ không chia hết cho 3 . Chứng minh rằng $a^2 - b^2 \vdots 24$.

3. Chứng minh rằng với mọi $m, n \in \mathbf{Z}$ ta có :

a) $n^2(n^2-1) \vdots 12$, b) $n^2(n^4-1) \vdots 60$,

c) $mn(m^4-n^4) \vdots 30$, d) $2n(16-n^4) \vdots 30$.

4. Chứng minh rằng :

a) $n^4+6n^3+11n^2+6n \vdots 24$ với mọi $n \in \mathbf{Z}$, *(Thi HSG toàn quốc 1975)*

b) $n^4-4n^3-4n^2+16n \vdots 384$ với n chẵn và n > 4 *(Thi HSG toàn quốc 1970)*

5. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên lẻ n :

a) $n^2+4n+3 \vdots 8$, b) $n^3+3n^2-n-3 \vdots 48$,

c) $n^{12}-n^8-n^4+1 \vdots 512$, d) $n^8-n^6-n^4+n^2 \vdots 1152$.

6. Chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbf{Z}$:

a) $3n^4-4n^3+21n^2-10n \vdots 24$, b) $n^5-5n^3+4n \vdots 120$.

7. Chứng minh rằng các biểu thức sau là số nguyên với mọi n nguyên :

a) $A = \dfrac{n^5}{120} + \dfrac{n^4}{12} + \dfrac{7n^3}{24} + \dfrac{5n^2}{12} + \dfrac{n}{5}$,

b) $B = \dfrac{n^9}{630} - \dfrac{n^7}{21} + \dfrac{13}{30}n^5 - \dfrac{82}{63}n^3 + \dfrac{32}{35}n$.

8. Chứng minh rằng tổng lập phương của ba số nguyên liên tiếp chia hết cho 9.

9. Chứng minh rằng biểu thức $A = (2^{3n+1}+2^n)(n^5-n)$ chia hết cho 30 với mọi $n \in \mathbf{N}$. *(Thi HSG Tp.HCM 1989)*

10. Cho a, b không chia hết cho 5. Chứng minh rằng $a^4 - b^4 \vdots 5$

(Thi HSG Tp.HCM 1990)

11. Chứng minh rằng tích của ba số nguyên liên tiếp, trong đó số ở giữa là lập phương của số tự nhiên chia hết cho 504.

12. Chứng minh rằng ax^3+bx^2+cx+d là số nguyên với mọi x nguyên khi và chỉ khi 6a, 2b, a + b + c, d là các số nguyên.

13. Chứng minh rằng trong 39 số tự nhiên liên tiếp bất kì luôn tồn tại một số có tổng các chữ số chia hết cho 11.

Dạng 2.

14. Cho n là số tự nhiên, chứng minh rằng :

a) $9.10^n+18 \vdots 27$, b) $9^{2n}+14 \vdots 5$,

c) $1^n+3^n+5^n+7^n \vdots 8$, với n lẻ.

15. Với $n \in \mathbf{N}$, chứng minh rằng :

a) $6^{2n}+19^n-2^{n+1} \vdots 17$, b) $6^{2n+1}+5^{n+2} \vdots 3$,

c) $3^{4n+1}+3^{2n}10-13 \vdots 64$, d) $16^n-15n-1 \vdots 225$,

e) $3^{3n+3} - 26n - 27 \vdots 169$, f) $10^{6n-4} + 10^{3n-2} + 1 \vdots 111$ $(n \geq 1)$.

16. Cho n là số nguyên dương lẻ, chứng minh rằng : $46^n + 296.13^n \vdots 1947$.

17. Với n là số nguyên dương, chứng minh rằng :

a) $7^{2n} - 48n - 1 \vdots 48^2$, b) $n^n - n^2 + n - 1 \vdots (n-1)^2$ $(n > 1)$.

18. Cho $n \in \mathbf{N}^*$, chứng minh rằng :

a) $3^{n+2} + 4^{2n+1} \vdots 13$, b) $4.3^{2n+2} + 32n - 36 \vdots 64$,

c) $6^{2n} + 3^{n+2} + 3^n \vdots 11$.

19. Cho f(x) là đa thức với hệ số nguyên và f(0), f(1) là các số lẻ. Chứng minh rằng f(x) không có nghiệm nguyên.

20. Cho $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$, với $a_i \in \mathbf{Z}$ (i = 0, 1, ... , n - 1). Giả sử $m \neq \pm 1$ là nghiệm của f(x). Chứng minh rằng $f(1) \vdots (1-m)$ và $f(-1) \vdots (1+m)$.

Dạng 3.

21. Chứng minh rằng :

a) $n^7 - n \vdots 42$.

b) Nếu n không chia hết cho 7 thì $n^3 - 1$ hoặc $n^3 + 1$ chia hết cho 7.

c) $mn(m^4 - n^4) \vdots 30$, với mọi $m, n \in \mathbf{Z}$.

22. Tìm số tự nhiên n để :

a) $2^{2n} + 2^n + 1 \vdots 7$, b) $3^n + 63 \vdots 72$

23. Chứng minh rằng $n(n^2+1)(n^2+4) \vdots 5$ với mọi $n \in \mathbf{Z}$.

24. a) Tìm tất cả số tự nhiên n để $2^n - 1$ chia hết cho 7.

b) Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì $2^n + 1$ không chia hết cho 7. *(Thi Toán Quốc tế 1964)*

25. Chứng minh rằng tổng bình phương của 7 số nguyên liên tiếp không thể là một số chính phương.

Dạng 4.

26. Chứng minh rằng có thể tìm được một số tự nhiên k sao cho $1983^k - 1 \vdots 10^5$. *(Thi HSG toàn quốc 1983)*

Tổng quát : Chứng minh rằng, nếu (n, m) = 1 thì có số tự nhiên k sao cho $m^k - 1 \vdots n$.

27. Chứng minh rằng có thể tìm được hai lũy thừa khác nhau của số 4 mà chúng có 3 chữ số tận cùng giống nhau.

28. Chứng minh rằng có thể tìm được một số có dạng 20032003...200300...0 và chia hết cho 2004.

29. Chứng minh rằng có thể tìm được một số tự nhiên mà 4 chữ số tận cùng của nó là 2002 và chia hết cho 2003.

30. Chứng minh rằng tồn tại số tự nhiên chỉ gồm toàn chữ số 2 và chia hết cho 2003.

31. Cho 5 số nguyên phân biệt a_1, a_2, a_3, a_4, a_5. Chứng minh rằng :

$$T = (a_1 - a_2)(a_1 - a_3)(a_1 - a_4)(a_1 - a_5)(a_2 - a_3)(a_2 - a_4)(a_2 - a_5)\times$$
$$\times(a_3 - a_4)(a_3 - a_5)(a_4 - a_5)$$

chia hết cho 288.

32. Chứng minh rằng với ba số nguyên tố lớn hơn 3 bất kì luôn tìm được hai số có tổng hoặc hiệu chia hết cho 12.

Dạng 5.

33. Chứng minh rằng với mọi $n \ge 1$, ta có :

a) $10^n + 18^n - 28 \vdots 27$, b) $3^{3n+3} - 26n - 27 \vdots 169$,

c) $16^n - 15n - 1 \vdots 225$, d) $6^{2n+1} + 5^{n+2} \vdots 31$.

34. Chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbf{N}^*$:

a) $2^{2^{6n+2}} + 3 \vdots 19$, b) $2^{2^{2n+1}} + 3 \vdots 7$.

35. Chứng minh rằng nếu $x + \dfrac{1}{x} \in \mathbf{Z}$ thì $x^n + \dfrac{1}{x^n} \in \mathbf{Z}$ với mọi số tự nhiên n.

36. Chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbf{N}^*$: $(n+1)(n+2)...(n+n) \vdots 2^n$.

37. Chứng minh rằng tích của k số nguyên liên tiếp chia hết cho k!.

Dạng 6.

38. Chứng minh rằng :

a) $222^{333} + 333^{222} \vdots 13$,

b) $3^{105} + 4^{105} \vdots 13$ nhưng không chia hết cho 11.

39. Chứng minh rằng $3^n \equiv -1 \pmod{10}$ khi và chỉ khi $3^{n+4} \equiv -1 \pmod{10}$.

40. Chứng minh rằng $2^{70} + 3^{70} \vdots 13$.

41. Cho $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbf{Z}$. Chứng minh rằng, nếu $\sum_{i=1}^{n} a_i \vdots 30$ thì $\sum_{i=1}^{n} a_i^5 \vdots 30$.

42. Tìm dư trong phép chia :

a) $5^{70} + 7^{50}$ cho 12, b) $10^{10} + 10^{10^2} + ... + 10^{10^{10}}$ cho 7.

Dạng 7.

43. Chứng minh rằng :

a) $9^{9^{9^9}} - 9^{9^9} \vdots 10$, b) $7^{7^{7^7}} - 7^{7^7} \vdots 10$.

44. Cho p, k, n là các số nguyên dương. Chứng minh rằng $n^{p+4k} - n^p \vdots 10$.

45. Tìm chữ số tận cùng của thương trong phép chia $3^{2^{1930}} + 2^{9^{1945}} - 19^{5^{1960}}$ cho 7.

46. Tìm ba chữ số tận cùng của số $3^{2^{2003}}$.

Dạng 8.

47. Chứng minh rằng :

a) $1^{2002} + 2^{2002} + \dots + 2002^{2002} \vdots 11$, b) $220^{119^{69}} + 119^{69^{220}} + 69^{220^{119}} \vdots 102$.

48. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n ta có :

a) $2^{2^{6n+2}} + 3 \vdots 19$, b) $2^{2^{2n+1}} + 3 \vdots 7$,

c) $2^{2^{4n+1}} + 7 \vdots 11$.

49. Tìm số tự nhiên nhỏ nhất gồm toàn chữ số 9 và chia hết cho các số 3, 7, 11, 13, 17.

50. Chứng minh rằng dãy $2^n - 3$ $(n \geq 2)$ có vô số số hạng chia hết cho 5 và vô số số hạng chia hết cho 13 nhưng không có số hạng nào chia hết cho 65.

51. a) Cho a, b là hai số nguyên thỏa $a^2 + b^2 \vdots 7$. Chứng minh $a \vdots 7$ và $b \vdots 7$.

b) Chứng minh rằng nếu $a^2 + b^2 \vdots 21$ thì $a^2 + b^2 \vdots 441$.

HƯỚNG DẪN GIẢI – ĐÁP SỐ

1. a) Chú ý rằng trong 4 số nguyên liên tiếp có 2 số chẵn liên tiếp nên tích chia hết cho 8.

b) 720 = 5.9.16, trong 6 số nguyên liên tiếp có 3 số chẵn và có ít nhất một số chia hết cho 4 trong các số đó.

c) $2n(2n+2)(2n+4) = 8n(n+1)(n+2) \vdots 8.6 = 48$.

2. $a^2 - b^2 = (a^2 - 1) - (b^2 - 1) = (a-1)(a+1) - (b-1)(b+1)$; $a-1$, $a+1$ là hai số chẵn liên tiếp nên tích chia hết cho 8 .

3. a) $n^2(n^2-1) = (n-1)n(n+1)n \vdots 3$ và $n^2(n^2-1) \vdots 4$.

b) $n^2(n^4-1) = n^2(n^2-1)(n^2+1) = n^2(n^2-1)(n^2-4) + 5n^2(n^2-1)$.

c) $m^4 - n^4 = (m^4-1) - (n^4-1)$ và chứng minh $m(m^4-1) \vdots 5$.

d) $2n(16-n^4) = 32(n-n^5) + 30n^5$.

4. a) $n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n = n(n+1)(n+2)(n+3)$.

b) $n = 2k$ và $384 = 2^7.3$.

5. a) $n^2 + 4n + 3 = (n+1)(n+3)$.

b) $n^3 + 3n^2 - n - 3 = (n-1)(n+1)(n+3)$.

c) $n^{12} - n^8 - n^4 + 1 = (n^2+1)^2(n^4+1)(n^2-1)^2$.

d) $n^8 - n^6 - n^4 + n^2 = n^2(n^2-1)^2(n^2+1)$.

6. a) $3n^4 - 14n^3 + 21n^2 - 10n = n(n-1)(3n-5)(n-2) =$

$= 3(n+1)n(n-1)(n-2) - 8n(n-1)(n-2)$.

b) $n^5 - 5n^3 + 4n = n(n^2 - 1)(n^2 - 4)$.

7. a) $A = \dfrac{x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}{120}$; $120 = 3.5.8$.

b) $B = \dfrac{1}{630}(x-4)(x-3)(x-2)(x-1)x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$; $630 = 2.5.7.9$.

8. $(n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3 = 3(n^3 + 2n) = 3(n-1)n(n+1) + 9n$.

9. Chứng minh $n^5 - n = n(n-1)(n+1)(n^2+1) \vdots 30$.

10. $a^4 - b^4 = (a^4 - 1) - (b^4 - 1) = (a-1)(a+1)(a^2+1) - (b-1)(b+1)(b^2+1)$.

11. $(n^3 - 1)n^3(n^3 + 1) \vdots 7.8.9$.

12. $ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x^3 - x) + b(x^2 - x) + (a+b+c)x + d$

$$= 6a.\frac{x^3 - x}{6} + 2b.\frac{x^2 - x}{2} + (a+b+c)x + d.$$

Chứng minh : $x^3 - x \vdots 6$ và $x^2 - x \vdots 2$.

13. Từ 20 số đầu tiên của dãy ta tìm được hai số mà chữ số hàng đơn vị là 0 và trong hai số đó ít nhất có một số có hai chữ số hàng chục khác 9, giả sử đó là số n. Khi đó các số n, n + 1, ... n + 9, n + 19 là 11 số có tổng các chữ số là 11 số tự nhiên liên tiếp nên có một số có tổng các chữ số chia hết cho 11.

14. a) $9.10^n + 18 = 27 + 9.(10^n - 1)$, b) $9^{2n} + 14 = (81^n - 1) + 15$,

c) $1^n + 7^n \vdots 8$ và $3^n + 5^n \vdots 8$.

15. a) $6^{2n} + 19^n - 2^{n+1} = (36^n - 2^n) + (19^n - 2^n)$,

b) $6^{2n+1} + 5^{n+2} = 31.5^n + 6(36^n - 5^n)$,

c) $3^{4n+1} + 3^{2n}.10 - 13 = (3^{2n} - 1)(3.3^{2n} + 13) = (9^n - 1)\left[3(9^n - 1) + 16\right]$.

d) $16^n - 1 - 15n = 15(16^{n-1} + 16^{n-2} + \cdots + 16 + 1) - 15n$

$$= 15\left[(16^{n-1} - 1) + (16^{n-2} - 1) + \cdots + (16 - 1) + (1 - 1)\right],$$

e) $3^{3n+3} - 26n - 27 = 27(27^n - 1) - 26n = (26+1)(27^n - 1) - 26n =$

$= 26(27^n - 1) + 26(27^{n-1} + 27^{n-2} + \cdots + 27 + 1 - n) = 26(27^n - 1) +$

$+ 26\left[(27^{n-1} - 1) + (27^{n-2} - 1) + \cdots + (27 - 1)\right] \vdots 13^2 = 169$,

f) $1000 \equiv 1 \pmod{111} \Rightarrow 10^6 \equiv 1 \pmod{111}$.

$10^5(10^{6n-4} + 10^{6n-5} + 1) = 10.10^{6n} + 10^{6n} + 10^5 \equiv 10 + 1 + 100 \equiv 0 \pmod{111}$

16. $1947 = 33.59$; $46^n + 296.13^n = (46^n - 13^n) + 297.13^n = (46^n + 13^n) + 295.13^n$.

17. a) $7^{2n} - 48n - 1 = (49^n - 1) - 48n = 48\left[(49^{n-1} - 1) + (49^{n-2} - 1) + \cdots + (49 - 1)\right]$.

b) $n^n - n^2 + n - 1 = (n-1)\left[(n^{n-1} - 1) + (n^{n-2} - 1) + \cdots + (n - 1)\right]$.

18. a) $3^{n+2} + 4^{2n+1} = 9.3^n + 4.16^n = 13.3^n + 4(16^n - 3^n)$.

b) $4.3^{2n+2} + 32n - 36 = 36(9^n - 1) + 32n = 8.4\left[(9^n + 9^{n-1} + \cdots + 9) - n\right] \vdots 64$.

c) $6^{2n} + 3^{n+2} + 3^n = 36^n + 10.3^n = 11.3^n + 36^n - 3^n$.

19. Giả sử $f(n) = 0$, $n \in \mathbf{Z}$. Ta có :

$f(n) - f(1) \vdots (n-1) \Rightarrow n - 1$ lẻ

$f(n) - f(0) \vdots n \Rightarrow n$ lẻ. Vô lí.

20. $f(1) - f(m) \vdots (1-m)$ và $f(-1) - f(m) \vdots (1+m)$.

21. a) $n = 7k \pm r$ với $r = 0; 1; 2; 3$. Do đó $n^3 = 7m$ hoặc $n^3 = 7m \pm 1$.

b) $n \not\vdots 7 \Rightarrow n^3 = 7k \pm 1$.

c) Chứng minh $mn(m^2 - n^2)(m^2 + n^2) \vdots 5$.

$n = 5k \pm r$ với $r = 0; 1; 2 \Rightarrow n^2 \equiv 0; \pm 1 \pmod 5$.

22. a) $n = 3k + r$ ($r = 0; 1; 2$) từ $2^{2n} + 2^n + 1 \vdots 7$ suy ra $r = 1; 2$.

b) $n = 2k$ ($k \geq 1$).

23. $n = 5k \pm r$ với $r = 0; 1; 2$.

24. a) $n = 3k + r$ với $r = 0; 1; 2$, giả thiết suy ra $r = 0$.

b) Xét $n = 3k + r$, $r = 0; 1; 2$.

25. $(n-3)^2 + (n-2)^2 + (n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 + (n+3)^2 = 7(n^2+4)$ chia hết cho 7 nhưng không chia hết cho 49.

26. Lấy 10^5 số $1983, 1983^2, ..., 1983^{10^5}$ chia cho 10^5 có 2 số có cùng số dư, hiệu của hai số này chia hết cho 10^5.

$1983^n - 1983^m = 1983^m(1983^{n-m} - 1) \vdots 10^5 \Rightarrow 1983^{n-m} - 1 \vdots 10^5 (n > m)$.

27. Lấy 1001 số $4, 4^2, ..., 4^{1001}$ chia cho 1000.

28. Lấy 2004 số 2003, 20032003, ... , 2003...2003 (2004 số 2003) chia cho 2004.

29. Lấy 2003 số 2002, 20022002, ... , 2002...2002 chia cho 2003. Ta chứng minh trong dãy này có một số chia hết cho 2003.

30. Lấy 2004 số $2, 2^2, ..., 2^{2004}$ chia cho 2003.

31. $288 = 2^5.3^2$.

a) Trong 4 số đã cho nào đó có hai số có hiệu chia hết cho 3, giả sử $a_1 - a_2 \vdots 3$. Trong 4 số còn lại a_2, a_3, a_4, a_5 cũng có một hiệu chia hết cho 3. Vậy tích chia hết cho 9.

b) Tróng 5 số có ít nhất 3 số có cùng tính chẵn, lẻ (nguyên tắc Dirichlet $5 = 2.2 + 1$)

- Nếu có 4 số có cùng tính chẵn, lẻ thì có 6 hiệu chia hết cho 2 suy ra tích chia hết cho 2^5.

- Nếu có đúng 3 số có cùng tính chẵn, lẻ, giả sử là a_1, a_2, a_3. Khi đó a_4, a_5 cũng cùng tính chẵn, lẻ nhưng khác tính chẵn, lẻ với a_1. Vậy có 4 hiệu $a_1 - a_2, a_1 - a_3, a_2 - a_3, a_4 - a_5$ chia hết cho 2. Lí luận để có một hiệu chia hết cho 4. Vậy tích chia hết cho 2^5.

32. Số nguyên tố lớn hơn 3 khi chia cho 12 có thể dư là 1; 5; 7; 11. Các dư này chia thành hai nhóm (1; 11) và (5; 7).

33. Giải tương tự Bài 55.

34. Giải tương tự Bài 56.

35. $x^{k+1} + \frac{1}{x^{k+1}} = \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x^k + \frac{1}{x^k}\right) - \left(x^{k-1} + \frac{1}{x^{k-1}}\right).$

36. Với $n = k + 1 : (k + 2)(k + 3) \ldots (2k + 2) = 2(k + 1)(k + 2) \ldots (k + k) \vdots 2^{k+1}$.

37. Chứng minh bằng quy nạp theo $k : (n + 1)(n + 2) \ldots (n + k) \vdots (1.2 \ldots k)$.

38. a) $222 \equiv 1 \pmod{13}$; $333 \equiv 8 \pmod{13}$; $8^{222} \equiv 64^{111} \equiv -1 \pmod{13}$;

b) $3^3 = 27 \equiv 1 \pmod{13}$; $4^3 = 64 \equiv -1 \pmod{13}$.

39. $3^n \equiv -1 \pmod{10} \Leftrightarrow 3^4.3^n \equiv -3^4 \pmod{10} \Leftrightarrow 3^{n+4} \equiv -1 \pmod{10}$,

(vì $(10, 81) = 1$).

40. $2^6 = 64 \equiv -1 \pmod{13}$; $3^3 = 27 \equiv 1 \pmod{13}$.

41. Chứng minh $n^5 - n \vdots 30$.

42. a) $25 \equiv 1 \pmod{12}$; $49 \equiv 1 \pmod{12}$.

b) $10^{10} \equiv 4 \pmod 7$ và $4^{10} \equiv 4 \pmod 7$.

43. a) $9 \equiv -1 \pmod{10} \Rightarrow 9^{2k+1} \equiv -1 \pmod{10}$.

b) $7^{7^7} = 4k + 3$; $7^{4k+3} = 7^3.(7^4)^k \equiv 7 \pmod{10}$.

44. $n^{p+4k} - n^p = n^p(n^{4k} - 1) \vdots n(n^4 - 1) \vdots 10$.

45. $3^{2^{1930}} = 3^{4k} \equiv 1 \pmod{10}$; $2^{9^{1945}} = 2^{4k+1} = 2.(2^4)^k \equiv 2 \pmod{10}$;

$9^{5^{1980}} = 9^{2k+1} = 9.81^k \equiv 9 \pmod{10}$.

Vậy $3^{2^{1930}} + 2^{9^{1945}} - 19^{5^{1980}}$ có chữ số tận cùng là 4 nên thương trong phép chia số đó cho 7 có chữ số tận cùng là 2.

b) Chứng minh số đã cho chia hết cho 7.

$3^{2^{1930}} = 4^{2^{1930}} = 2^{2^{1931}} = 2^{3k+2} \equiv 4 \pmod 7$; $2^{9^{1945}} = 2^{3k} \equiv 1 \pmod 7$;

$19^{5^{1980}} = (-2)^{5^{1980}} = -2^{5^{1980}} \pmod 7$. Mà $2^{5^{1980}} = 2^{3k+1} \equiv 2 \pmod 7$.

Vậy : $3^{2^{1930}} + 2^{9^{1945}} - 19^{5^{1980}} \equiv 4 + 1 + 2 \equiv 0 \pmod 7$.

46. Tìm hai chữ số tận cùng của 2^{2003}.

47. a) $a^{11} \equiv a \pmod{11} \Rightarrow a^{2002} \equiv a \pmod{11}$

$\Rightarrow 1^{2002} + 2^{2002} + \cdots + 2002^{2002} \equiv 1 + 2 + \cdots + 2002 = 1001.2003 \equiv 0 \pmod{11}$.

b) $102 = 2.3.17$. Áp dụng Định lí Fermat để tìm dư $220^{119^{69}}$, $119^{69^{220}}$, $69^{220^{119}}$ cho 7.

48. a) $2^{6n+2} = 4.(2^3)^{2n} = 4(9-1)^{2n} \equiv 4 \pmod{18}$.

b) $2^{2n+1} = 2.4^n = 2.(3+1)^n \equiv 2 \pmod 6$.

c) $2^{4n+1} = 2.16^n \equiv 2 \pmod{10}$.

49. Ta có BCNN(2, 6, 10, 12, 16) = 16.5.3 = 240. Áp dụng Định lí Fermat : $10^{240} \equiv 1 \pmod{3.7.11.13.17}$.

50. Với n = 4k + 3 thì $2^n - 3 \vdots 5$; với n = 2k + 4 thì $2^n - 3 \vdots 13$. Nhưng $12k + 4 \vdots 4$ không có dạng 4k + 3

51 a) $a = 7k \pm r \quad r = 0; 1; 2; 3$.

b) Chứng minh nếu $a^2 + b^2 \vdots 3$ thì $a \vdots 3$ và $b \vdots 3$.

§ 2. CÁC DẤU HIỆU CHIA HẾT

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Biểu diễn số tự nhiên trong hệ thập phân

$$N = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0} = 10^n a_n + 10^{n-1} a_{n-1} + \cdots + 10a_1 + a_0$$

Đặc biệt :

$$\overline{aa\ldots a} = a.\underbrace{11\ldots1}_{n \text{ số } 1} = \frac{a}{9}\underbrace{(99\ldots9)}_{n \text{ số } 9} = \frac{a}{9}(10^n - 1).$$

2. Các dấu hiệu chia hết

a) Ta có :

$$N = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0} = 10^n a_n + 10^{n-1} a_{n-1} + \ldots + 10a_1 + a_0 \equiv a_0 \pmod{10}.$$

Do đó :

$$N \equiv a_0 \pmod 2 \; ; \; N \equiv a_0 \pmod 5.$$

Vậy :

$$N \vdots 2 \Leftrightarrow a_0 \vdots 2 \Leftrightarrow a_0 \in \{0; 2; 4; 6; 8\},$$

$$N \vdots 5 \Leftrightarrow a_0 \vdots 5 \Leftrightarrow a_0 \in \{0; 5\},$$

$$N \vdots 10 \Leftrightarrow a_0 = 0.$$

b) Vì $10^k \equiv 1 \pmod 3$ và $10^k \equiv 1 \pmod 9$ với $k \in \mathbf{N}$ nên :

$$N = \overline{a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0} = 10^n a_n + 10^{n-1} a_{n-1} + \cdots + 10a_1 + a_0$$

$$\equiv a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0 \pmod 3$$

và :

$$N \equiv a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0 \pmod 9.$$

Vậy :

$$N \vdots 3 \Leftrightarrow a_0 + a_1 + \ldots + a_n \vdots 3$$

$$N \vdots 9 \Leftrightarrow a_0 + a_1 + \ldots + a_n \vdots 9$$

Ta kí hiệu $S(N) = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$ là tổng các chữ số của N thì

$$N \equiv S(N) \pmod 3 \text{ và } N \equiv S(N) \pmod 9.$$

c) Ta có :

$$N = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0} = 10^n a_n + 10^{n-1} a_{n-1} + \ldots + 10^2 a_2 + \overline{a_1 a_0} \equiv \overline{a_1 a_0} \pmod{100}$$

Vậy :

$$N \equiv \overline{a_1 a_0} \pmod 4 \text{ và } N \equiv \overline{a_1 a_0} \pmod{25}.$$

Do đó :

$$N \vdots 4 \Leftrightarrow \overline{a_1 a_0} \vdots 4 \text{ và } N \vdots 25 \Leftrightarrow \overline{a_1 a_0} \vdots 25$$

d) Tương tự $N \equiv \overline{a_2 a_1 a_0} \pmod{1000}$ nên :

$$N \vdots 8 \Leftrightarrow \overline{a_2 a_1 a_0} \vdots 8$$

$$N \vdots 125 \Leftrightarrow \overline{a_2 a_1 a_0} \vdots 125$$

e) Dấu hiệu chia hết cho 11 :

$$N = \overline{a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1 a_0} = a_0 + 10 a_1 + 10^2 a_2 + \cdots + 10^n a_n$$

Ta có :

$$10 \equiv -1 \pmod{11} \Rightarrow 10^k \equiv (-1)^k \pmod{11}, \ k = 0, 1, \ldots, n$$

Do đó :

$$N \equiv a_0 - a_1 + a_2 - \cdots + (-1)^n a_n \pmod{11}$$

$$\equiv (a_0 + a_2 + a_4 + \cdots) - (a_1 + a_3 + a_5 + \cdots) \pmod{11}$$

Một số chia hết cho 11 khi và chỉ khi hiệu của tổng các chữ số ở vị trí chẵn và tổng các chữ số ở vị trí lẻ (tính từ phải sang trái) chia hết cho 11.

Thí dụ :

a) $2002 \vdots 11$ vì $(2 + 0) - (0 + 2) = 0 \vdots 11$

b) Số $\underbrace{\overline{abcabc\ldots abc}}_{2n \text{ số } \overline{abc}} \vdots 11$ vì $n(c + a + b) - n(b + c + a) = 0 \vdots 11$.

B. CÁC DẠNG TOÁN

Bài 79.

Cho dãy số 49, 4489, 444889, ... được lập nên bằng cách thêm 48 vào giữa số đứng trước nó. Chứng minh rằng tất cả các số hạng của dãy đều là số chính phương.

Giải :

Số hạng tổng quát của dãy có dạng :

$$a_n = \underbrace{44\ldots4}_{n \text{ số } 4}\underbrace{88\ldots8}_{n-1 \text{ số } 8}9 = \underbrace{44\ldots4}_{n}\underbrace{88\ldots8}_{n} + 1 = \underbrace{44\ldots4}_{n}.10^n + \underbrace{88\ldots8}_{n} + 1 =$$

$$= 4.\frac{10^n - 1}{9}.10^n + 8.\frac{10^n - 1}{9} + 1 =$$

$$= \frac{1}{9}(4.10^{2n} - 4.10^n + 8.10^n - 8 + 9) = \frac{1}{9}(4.10^{2n} + 4.10^n + 1) = \left(\frac{2.10^n + 1}{3}\right)^2$$

Vì $2.10^n \vdots 3$ nên $\frac{2.10^n + 1}{3} \in \mathbf{N}$, do đó a_n là số chính phương.

Bài 80.

Với những số nguyên nào của x ($0 \le x \le 9$) thì các số $\overline{\underbrace{44...4}_{n}\underbrace{xx...x}_{n}}$ và $\overline{\underbrace{11...1}_{n}\underbrace{xx...x}_{n}}$ đồng thời là tích của hai số tự nhiên liên tiếp với mọi số tự nhiên $n \ge 1$.

Giải :

Với n = 1 hai số $\overline{4x}$ và $\overline{1x}$ đồng thời là tích của hai số tự nhiên liên tiếp chỉ với x = 2 (42 = 6.7 ; 12 = 3.4).

Ta sẽ chứng minh với x = 2 thì kết quả đúng với mọi $n \ge 1$. Ta có :

$$\underbrace{44...4}_{n}\underbrace{22...2}_{n} = \underbrace{44...4}_{n}.10^n + \underbrace{22....2}_{n} = 4.\frac{10^n - 1}{9}.10^n + 2.\frac{10^n - 1}{9} =$$

$$= 2\frac{10^n - 1}{9}(2.10^n + 1) = \frac{2.10^n - 2}{3}.\frac{2.10^n + 1}{3}$$

là tích của hai số tự nhiên liên tiếp.

Tương tự :

$$\underbrace{11...1}_{n}\underbrace{22...2}_{n} = \frac{10^n - 1}{9}.10^n + 2.\frac{10^n - 1}{9} = \frac{10^n - 1}{9}(10^n + 2)$$

$$= \frac{10^n - 1}{3}\left(\frac{10^n - 1}{3} + 1\right)$$

cũng là tích của hai số tự nhiên liên tiếp với mọi $n \ge 1$.

Bài 81.

Cho a, b là hai số nguyên lẻ. Chứng minh rằng $a^3 - b^3 \vdots 2^n$ khi và chỉ khi $a - b \vdots 2^n$.

Giải :

Ta có : $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$.

Nếu $a - b \vdots 2^n$ thì $(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3 \vdots 2^n$.

Ngược lại nếu $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2) \vdots 2^n$ thì $a - b \vdots 2^n$ vì $a^2 + ab + b^2$

là số lẻ nên hai số a^2+ab+b^2 và 2^n nguyên tố cùng nhau.

Bài 82.

Cho $a_1, a_2, ..., a_{2003}$ là các số nguyên và $b_1, b_2, ..., b_{2003}$ là các số nguyên đó lấy theo thứ tự khác ($b_1, b_2, ..., b_n$ gọi là một hoán vị của $a_1, a_2, ..., a_n$). Chứng minh rằng tích $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)...(a_{2003} - b_{2003})$ là một số chẵn.

Giải :

Ta có :

$$(a_1-b_1)+(a_2-b_2)+\cdots+(a_{2003}-b_{2003})=$$
$$=(a_1+a_2+\cdots+a_{2003})-(b_1+b_2+\cdots+b_{2003})=0.$$

Số thừa số của tích là số lẻ còn tổng của chúng bằng 0 là số chẵn nên tất cả các thừa số không thể cùng lẻ (vì tổng lẻ các số lẻ là số lẻ) nên có ít nhất một thừa số $a_i - b_i$ chẵn suy ra tích là một số chẵn.

Bài 83.

Cho n số $a_1, a_2, ..., a_n$, mỗi số nhận giá trị 1 hoặc -1 và $a_1a_2 + a_2a_3 + ... + a_na_1 = 0$. Chứng minh rằng $n \vdots 4$.

Giải :

Vì mỗi số $a_1, a_2, ..., a_n$ nhận giá trị 1 hoặc -1 nên các số $a_1a_2, a_2a_3, ..., a_na_1$ cũng nhận giá trị 1 hoặc -1.

Theo giả thiết, $a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_na_1=0$ nên số các số hạng của tổng ở vế trái nhận giá trị 1 và số các số hạng nhận giá trị -1 là bằng nhau nên n là số chẵn, đặt n = 2m. Ta lại có $(a_1a_2)(a_2a_3)\cdots(a_na_1)=(a_1a_2\cdots a_n)^2=1$, do đó số hạng nhận giá trị -1 là số chẵn, tức là m = 2k. Vậy n = 2m = 4k $\vdots 4$ (đpcm).

Bài 84.

Tìm các chữ số x, y thỏa :

a) $\overline{135x4y} \vdots 45$; ***b) $\overline{1234xy} \vdots 72$.***

Giải :

a) Ta có $\overline{135x4y} \vdots 45 \Leftrightarrow \overline{135x4y} \vdots 5$ và $\overline{135x4y} \vdots 9$.

i) $\overline{135x4y} \vdots 5 \Leftrightarrow y=0$ hoặc y = 5.

• Với $y=0$: $\overline{135x40} \vdots 9 \Leftrightarrow 1+3+5+x+4=x+13 \vdots 9 \Leftrightarrow x+4 \vdots 9 \Leftrightarrow x=5$.

Ta có số 135540.

• Với y = 5 : $\overline{135x45} \vdots 9 \Leftrightarrow 1+3+5+x+4+5 \vdots 9 \Leftrightarrow x \vdots 9 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 9$.

Ta có hai số 135045 và 135945.

b) Ta có $\overline{1234xy} = 123400 + \overline{xy} = 72.1713 + 64 + \overline{xy}$.

$$\overline{1234xy} \vdots 72 \Leftrightarrow \overline{xy} + 64 \vdots 72.$$

Vì $64 \le 64 + \overline{xy} \le 163$ nên $64 + \overline{xy} = 72$ hoặc $64 + \overline{xy} = 144$ suy ra $\overline{xy} = 08$ hoặc $\overline{xy} = 80$.

Ta có hai số thoả đề bài là 123408, 123480.

Bài 85.

Chứng minh rằng một số gồm một số chẵn các chữ số trong đó chữ số đầu tiên và cuối cùng là 1, các chữ số còn lại là 0 luôn luôn chia hết cho 11.

Giải :

Số đã cho có dạng $\underbrace{100...01}_{2n \text{ chữ số}}$ gồm 2 số 1 và 2n - 2 số 0 ở giữa. Ta có tổng các chữ số đứng ở vị trí lẻ và tổng các chữ số đứng ở vị trí chẵn cùng bằng 1 nên hiệu của chúng bằng 0 chia hết cho 11, vậy 100...01 chia hết cho 11.

Bài 86.

Tìm các chữ số x, y để $\overline{7x36y5} \vdots 1375$.

Giải :

Ta có : 1375 = 125.11

$$\overline{7x36y5} \vdots 125 \Leftrightarrow \overline{6y5} \vdots 125 \Leftrightarrow y = 2;$$

$$\overline{7x3625} \vdots 11 \Leftrightarrow (5+6+x)-(2+3+7) = 12 - x \vdots 11 \Leftrightarrow x = 1.$$

Vậy số cần tìm là 713625.

Bài 87.

Tổng các chữ số của một số không thay đổi khi nhân số đó với 5. Chứng minh rằng số đó chia hết cho 9.

Giải :

Gọi số đã cho là N và S(N) là tổng các chữ số của N.

Ta có : $N \equiv S(N) \pmod 9$ và $5N \equiv S(5N) \pmod 9$. Theo đề bài thì $S(5N) = S(N)$, do đó : $5N - N \equiv S(5N) - S(N) = 0 \pmod 9 \Leftrightarrow 4N \vdots 9 \Rightarrow N \vdots 9$ (đpcm).

Bài 88.

Tìm số tự nhiên n biết tổng các chữ số của n bằng

$$S(n) = n^2 - 2003n + 5.$$

Giải :

Gọi S(n) là tổng các chữ số của n. Ta luôn có : $0 < S(n) \le n$.

Cách 1 :

- Nếu $1 \le n \le 2002$ thì $(n - 1)(n - 2002) = n^2 - 2003n + 2002 \le 0$. Suy ra $n^2 - 2003n + 5 < 0$, vô lí.
- Nếu $n = 2003$ thì $S(2003) = 2003^2 - 2003.2003 + 5 = 2 + 0 + 0 + 3$ thỏa yêu cầu.
- Nếu $n > 2003$ thì $n - 2003 \ge 1$, khi đó :

$$n^2 - 2003n + 5 = n(n - 2003) + 5 > n \text{, vô lí.}$$

Vậy, với n = 2003 thì $S(n) = n^2 - 2003n + 5$.

Cách 2 :

$$\text{Ta có : } 0 < S(n) \le n \Leftrightarrow \begin{cases} n^2 - 2003n + 5 > 0 \\ n^2 - 2003n + 5 \le n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n^2 - 2003n + 2002 > 0 \\ n^2 - 2004n < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (n-1)(n-2002) > 0 \\ n(n-2004) < 0 \end{cases} \Rightarrow 2002 < n < 2004 \Rightarrow n = 2003.$$

Thử lại, với n = 2003 thì $S(n) = n^2 - 2003n + 5$.

Bài 89.

Tìm số tự nhiên n biết tích các chữ số của n bằng $n^2 - 10n - 22$.

Giải :

Một số có n chữ số bao giờ cũng không nhỏ hơn tích các chữ số của nó. Thật vậy, ta có :

$$\overline{a_0a_1...a_{n-1}} = 10^{n-1}a_0 + 10^{n-2}a_1 + \cdots + a_{n-1} \ge 10^{n-1}a_0 > 9^{n-1}a_0 \ge a_0a_1...a_{n-1}$$

Theo đề bài, ta có :

$$0 \le n^2 - 10^n - 22 \le n \Rightarrow \begin{cases} n^2 - 10n - 22 \ge 0 \\ n^2 - 11n - 20 \le 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n(n-10) \ge 22 \\ n(n-11) \le 22 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 12 \le n < 13 \Rightarrow n = 12.$$

Thử lại, với n = 12 thì $1.2 = 12^2 - 10.12 - 22$ (thỏa).

Vậy n = 12 là số tự nhiên cần tìm.

Bài 90.

Tìm số tự nhiên n thỏa n + S(n) = 94 với S(n) là tổng các chữ số của n.

Giải :

Vì n + S(n) = 94 nên n < 94, do đó n có hai chữ số, suy ra $S(n) \le 18$. Theo đề bài $n = S(n) = 94$ suy ra $n = 94 - S(n) \ge 94 - 18 = 76$.

Gọi $n = \overline{ab}$ ta có : $\overline{ab} + a + b = 94 \Leftrightarrow 11a + 2b = 94$.

- Với a = 7 thì $b = \dfrac{94-77}{2} \notin N$ (loại)
- Với a = 8 thì $b = \dfrac{94-88}{2} = 3$.

Vậy số cần tìm là 83.

Bài 91.

Tìm số tự nhiên n sao cho n + S(n) + S(S(n)) = 60, với S(n) là tổng các chữ số của n.

(Đề thi HSG Tp.HCM 1990)

Giải :

Vì $S(n) \geq 1$ nên $n \leq 59 \Rightarrow S(n) \leq 14 \Rightarrow S(S(n)) \leq 9$. Do đó :

$$n = 60 - S(n) - S(S(n)) \geq 60 - 14 - 9 = 37.$$

Vậy : $$37 \leq n \leq 59 \qquad (1)$$

Mặt khác, vì $n \equiv S(n) \pmod 9$ và $S(n) \equiv S(S(n)) \pmod 9$ nên

$60 = n + S(n) + S(S(n)) \equiv n + n + n \pmod 9 \Rightarrow 3n \equiv 6 \pmod 9 \Rightarrow n \equiv 2 \pmod 3$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $n \in \{38, 41, 44, 47, 50, 53, 56, 59\}$.

Thử lại ta thấy n = 44, n = 47, n = 50 thỏa đề bài.

Bài 92.

Cho a là tổng các chữ số của $(2^9)^{2003}$, b là tổng các chữ số của a. Tìm tổng các chữ số của b.

Giải :

Gọi S(n) là tổng các chữ số của n. Ta có :

$n = (2^9)^{2003} = (2^3)^{3.2003} < 10^{6009} \Rightarrow$ n có không quá 6009 chữ số.

Khi đó :

$a = S(n) \leq 9.6009 = 54081 \Rightarrow b = S(a) \leq 5 + 4.9 = 41 \Rightarrow S(b) \leq 4 + 9 = 13$.

Mà $n \equiv S(n) \equiv S(b) \pmod 9$ và $n = 8^{3.2003} = 8^{2k+1} \equiv -1 \equiv 8 \pmod 9$ nên $S(b) = 8$. Vậy tổng các chữ số của b là 8.

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Cho a là chữ số khác 0, tính tổng : $S = a + \overline{aa} + \overline{aaa} + \cdots + \underbrace{\overline{aa...a}}_{n \text{ số } a}$.

2. Chứng minh rằng các số sau là số chính phương :

$A = \underbrace{11...1}_{2n \text{ số } 1} + \underbrace{44...4}_{n \text{ số } 4} + 1$; $\qquad B = \underbrace{11...1}_{n}\underbrace{55...5}_{n-1 \text{ số } 5}6$;

$C = \underbrace{44...4}_{2n} + \underbrace{22...2}_{n+1} + \underbrace{88...8}_{n} + 7$; $D = \underbrace{11...1}_{2n} + \underbrace{11...1}_{n-1} - \underbrace{66...6}_{n} + 8$.

3. Cho $N = \overline{dcba}$. Chứng minh rằng :

a) $N \vdots 4$ khi và chỉ khi $a + 2b \vdots 4$;

a) $N \vdots 8$ khi và chỉ khi $a + 2b + 4c \vdots 8$;

c) $N \vdots 16$ khi và chỉ khi $a + 2b + 4c + 8d \vdots 16$ (với b chẵn).

4. Tìm chữ số x để $\overline{2x78} \vdots 17$.

5. Chứng minh rằng :

a) $2x + 3y \vdots 17 \Leftrightarrow 9x + 5y \vdots 17 \, (x, y \in Z)$;

b) $a + 4b \vdots 13 \Leftrightarrow 10a + b \vdots 13 \, (a, b \in Z)$;

c) $3a + 2b \vdots 17 \Leftrightarrow 10a + b \vdots 17 \, (a, b \in Z)$.

6. Chứng minh rằng nếu $a^2 + b^2 \vdots 5$ thì hai số 2a + b, 2b - a hoặc hai số 2a - b , 2b + a chia hết cho 5.

7. Chứng minh rằng nếu một số có ba chữ số mà chữ số hàng chục và chữ số hàng đơn vị giống nhau và tổng ba chữ số đó chia hết cho 7 thì số đã cho chia hết cho 7.

8. Số N có 6 chữ số. Chứng minh rằng $N \vdots 7$ khi và chỉ khi hiệu giữa số tạo bởi 3 chữ số đầu và số tạo bởi ba chữ số sau của N chia hết cho 7.

9. Chứng minh rằng nếu viết theo thứ tự ngược lại những chữ số của một số nguyên bất kì thì hiệu giữa số cũ và số mới chia hết cho 9.

10. Chứng minh rằng $\overline{abcd} \vdots 29 \Leftrightarrow a + 3b + 9c + 27d \vdots 29$.

11. a) Tổng các chữ số của một số bằng 123456789 thì số đó có chia hết cho 9 không ? Tại sao ?

b) Chứng minh rằng một số gồm 27 chữ số 1 thì chia hết cho 27.

c) Tìm chữ số a để $\overline{1aaa1}$ chia hết cho 11.

12. Chứng minh rằng :

a) $2n + \underbrace{11...1}_{n}$ chia hết cho 3 ; b) $10^n + 72n - 1$ chia hết cho 81 ;

c) $\underbrace{11...1}_{81 \text{ số } 1}$ chia hết cho 81.

HƯỚNG DẪN GIẢI – ĐÁP SỐ

1. Áp dụng : $\overline{aa \,...\, a} = \dfrac{a(10^n - 1)}{9}$.

$$S = \frac{a}{9}\left(\frac{10^{n+1} - 10}{9} - n\right).$$

2. a) $A = \frac{10^{2n}-1}{9} + 4\cdot\frac{10^n-1}{9} + 1 = \frac{1}{9}(10^{2n} + 4\cdot 10^n + 4) = \left(\frac{10^n+2}{3}\right)^2$;

b) $B = \underbrace{11...1}_{n}\underbrace{55...5}_{n} + 1 = \frac{10^n-1}{9}\cdot 10^n + 5\cdot\frac{10^n-1}{9} + 1 = \left(\frac{10^n+2}{3}\right)^2$;

c) $C = 4\cdot\frac{10^{2n}-1}{9} + 2\cdot\frac{10^{n+1}-1}{9} + 8\cdot\frac{10^n-1}{9} + 7 = \left(\frac{2\cdot 10^n+7}{3}\right)^2$;

d) $D = \frac{10^{2n}-1}{9} + \frac{10^{n+1}-1}{9} + 6\cdot\frac{10^n-1}{9} + 8 = \left(\frac{10^n+8}{3}\right)^2$.

3. a) $N \vdots 4 \Leftrightarrow \overline{ba} \vdots 4 \Leftrightarrow 10b + a \vdots 4 \Leftrightarrow 2b + a \vdots 4$ (vì $8b \vdots 4$);

b) $N \vdots 8 \Leftrightarrow \overline{cba} \vdots 8 \Leftrightarrow 100c + 10b + a \vdots 8 \Leftrightarrow a + 2b + 4c \vdots 8$;

c) $N \vdots 16 \Leftrightarrow 1000d + 100c + 10b + a \vdots 16 \Leftrightarrow 8d + 4c + 2b + a \vdots 16$

(vì $992d + 96c + 8b \vdots 16$ do b chẵn).

4. $\overline{2x78} = 17(122 + 6x) + 2(2 - x) \vdots 17 \Leftrightarrow x = 2$.

5. a) $4(2x + 3y) + (9x + 5y) = 17(x + y) \vdots 17$;

b) $10a + b - 10(a + 4b) = -39b \vdots 13$;

c) $3(10a + b) - 10(3a + 2b) = -17b \vdots 17$.

6. $a^2 + b^2 = (a^2 - 4b^2) + 5b^2 \Rightarrow (a - 2b)(a + 2b) \vdots 5$.

- Nếu $a - 2b \vdots 5$ thì từ $2(2b - a) + 2a + b = 5b \vdots 5 \Rightarrow 2a + b \vdots 5$;
- Nếu $a + 2b \vdots 5$ thì từ $2(a + 2b) - (2a - b) = 5b \vdots 5 \Rightarrow 2a - b \vdots 5$.

7. $\overline{abb} = 100a + 11b = 98a + 7b + 2(a + 2b) \vdots 7$.

8. $\overline{abcdef} = 1000\overline{abc} + \overline{def} = 1001\overline{abc} + \overline{def} - \overline{abc}$; $1001 \vdots 7$.

9. Áp dụng $N \equiv S(N)$ (mod 9).

10. $1000(a + 3b + 9c + 27d) - \overline{abcd} \vdots 29$.

11. a) Tổng các chữ số của số 123456789 là $1 + 2 + 3 + \dots + 9 = \frac{9.10}{2} = 45 \vdots 9$ suy ra $123456789 \vdots 9$, *do đó số đã cho chia hết cho 9*;

b) $\underbrace{11...1}_{27} = \underbrace{11...1}_{9}.10^{8} + \underbrace{11...1}_{9}.10^9 + \underbrace{11...1}_{9} = \underbrace{11...1}_{9}(10^{18} + 10^9 + 1) \vdots 27$,

vì $\underbrace{11...1}_{9} \vdots 9$ và $10^{18} + 10^9 + 1 \vdots 3$;

c) Tổng các chữ số ở vị trí lẻ là 1 + a + 1 = a + 2 và tổng các chữ số ở vị trí chẵn là a + a = 2a ; $\overline{1aaa1} \vdots 11 \Leftrightarrow 2a - (a + 2) = a - 2 \vdots 11 \Leftrightarrow a = 2$.

12. a) $\underbrace{11...1}_{n} \equiv n \pmod 3 \Rightarrow 2n + \underbrace{11...1}_{n} \equiv 3n \equiv 0 \pmod 3$;

b) $10^n + 72n - 1 = 10^n - 1 + 72n = \underbrace{99...9}_{n} + 72 = 9(\underbrace{11...1}_{n} + 8n) \vdots 81$, vì $\underbrace{11...1}_{n} + 8n \equiv n + 8n \equiv 0 \pmod 9$;

c) $\underbrace{11...1}_{81} = \underbrace{11...1}_{9}(1 + 10^9 + 10^{18} + \cdots + 10^{72}) \vdots 81$.

§ 3. CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN TÍNH CHIA HẾT

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Nếu $a \not\vdots b$ và b là ước của c thì $a \not\vdots c$.
2. Nếu $a \vdots c$ và $b \not\vdots c$ thì $a \pm b \not\vdots c$.
3. p là số nguyên tố và $ab \vdots p$ thì $a \vdots p$ hoặc $b \vdots p$.
4. Một số chính phương chia hết cho số nguyên tố p thì nó chia hết cho p^2. Như vậy, nếu $n \vdots p$ mà $n \not\vdots p^2$ thì n không là số chính phương.
5. Nếu có số nguyên n sao cho $m^2 < n < (m+n)^2$ thì n không thể là số chính phương.

B. CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. CÁC BÀI TOÁN CHỨNG MINH KHÔNG CHIA HẾT.

Bài 93.

Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n ta có :

a) $9^n + 1$ không chia hết cho 100.

b) $n^2 + n + 2$ không chia hết cho 15.

Giải :

a) Ta có : $9^n + 1 \equiv 2 \pmod 4) \Rightarrow 9^n + 1 \not\vdots 4 \Rightarrow 9^n + 1 \not\vdots 100$.

b) Ta chứng minh $n^2 + n + 2 \not\vdots 3$ với mọi n.

Cách 1 :

- Với n = 3k thì $n^2 + n + 2 = 9k^2 + 3k + 2 \not\vdots 3$.
- Với n = 3k + 1 thì $n^2 + n + 2 = (3k+1)^2 + (3k+1) + 2 \equiv 1 \pmod 3$.
- Với n = 3k + 2 thì $n^2 + n + 2 = (3k+2)^2 + (3k+2) + 2 \equiv 2 \pmod 3$.

Vậy $n^2 + n + 2 \not\vdots 3$ nên $n^2 + n + 2 \not\vdots 15$ với mọi $n \in \mathbf{N}$.

Cách 2 :

Ta có : $n^2 + n + 2 = (n^2 - 1) + n + 3 = (n-1)(n+1) + n + 3$.

- Nếu $n \vdots 3$ thì $(n-1)(n+1) \not\vdots 3$ do đó $n^2 + n + 2 \not\vdots 3$.
- Nếu $n \not\vdots 3$ thì $n - 1 \vdots 3$ hoặc $n + 1 \vdots 3$ khi đó $(n-1)(n+1) \not\vdots 3 \Rightarrow n^2 + n + 2 \not\vdots 3$.

Cách 3 :

Giả sử $n^2 + n + 2 = 3k$ với $k \in \mathbf{N}$. Khi đó phương trình $n^2 + n + 2 - 3k = 0$ có nghiệm nguyên n. Ta có $\Delta = 1 - 4(2 - 3k) = 12k - 7 = 3(4k - 3) + 2$ không thể là số chính phương (vì một số chính phương chia cho 3 dư 0 hoặc 1). Vậy phương trình không có nghiệm nguyên, do đó $n^2 + n + 2 \not\vdots 3$ với mọi $n \in \mathbf{N}$.

Bài 94.

Chứng minh rằng :

a) $n^2 + n + 1$ ***không chia hết cho 9 với mọi*** $n \in N$ ***;***

b) $n^2 + 11n + 39$ ***không chia hết cho 49 với mọi*** $n \in N$ ***.***

Giải :

a) *Cách 1 :*

- Nếu $n \vdots 3$ thì $n^2 + n + 1 \equiv 1 \pmod 3 \Rightarrow n^2 + n + 1 \not\vdots 9$.
- Nếu n = 3k + 1 thì $n^2 + n + 1 = (3k + 1)^2 + (3k + 1) + 1 = 9(k^2 + k) + 3 \not\vdots 9$.
- Nếu n = 3k + 2 thì $n^2 + n + 1 = (3k + 2)^2 + (3k + 2) + 1 \equiv 1 \pmod 3$, suy ra $n^2 + n + 1 \not\vdots 9$.

Vậy $n^2 + n + 1 \not\vdots 9, \forall n \in \mathbf{N}$.

Cách 2 :

Giả sử $n^2 + n + 1 \vdots 9$, khi đó $n^2 + n + 1 \vdots 3$. Ta có :

$$n^2 + n + 1 = (n + 2)(n - 1) + 3 \vdots 3 \Rightarrow (n + 2)(n - 1) \vdots 3.$$

Vì 3 là số nguyên tố nên $n + 2 \vdots 3$ hoặc $n - 1 \vdots 3$, nhưng hiệu $n + 2 - (n - 1) = 3 \vdots 3$ nên n + 2 và n - 1 đồng thời chia hết cho 3. Khi đó $(n + 2)(n - 1) \vdots 9$ mà $(n + 2)(n - 1) + 3 \vdots 9 \Rightarrow 3 \vdots 9$, vô lí.

Vậy $n^2 + n + 1 \not\vdots 9, \forall n \in \mathbf{N}$.

Cách 3 :

Giả sử $n^2 + n + 1 = 9k$ $(k \in \mathbf{N})$, suy ra phương trình $n^2 + n + 1 - 9k = 0$ có nghiệm nguyên. Ta có $\Delta = 1 - 4(1 - 9k) = 36k - 3$ chia hết cho 3 nhưng không chia hết cho 9 nên Δ không là số chính phương, vô lí.

Vậy $n^2 + n + 1 \not\vdots 9, \forall n \in \mathbf{N}$.

b) Giả sử $n^2 + 11n + 39 \vdots 49$. Ta có :

$$n^2 + 11n + 39 = (n + 9)(n + 2) + 21 \vdots 7 \Rightarrow (n + 9)(n + 2) \vdots 7$$

$$\Rightarrow n + 9 \vdots 7 \text{ và } n + 2 \vdots 7 \text{ (vì } n + 9 - (n + 2) = 7)$$

$$\Rightarrow (n + 9)(n + 2) \vdots 49.$$

Mà $(n + 9)(n + 2) + 21 \vdots 49 \Rightarrow 21 \vdots 49$, vô lí. Vậy $n^2 + 11n + 39 \not\vdots 49, \forall n \in \mathbf{N}$.

Nhận xét : 2, 9 là nghiệm của hệ $\begin{cases} x + y = 11 \\ x - y = 7 \end{cases}$.

Bài 95.

Gọi $N = 2.3.5 \ldots p_n$ là tích của n số nguyên tố đầu tiên ($n > 1$). Chứng minh rằng các số nguyên liên tiếp $N - 1, N, N + 1$ không có số nào là số chính phương.

Giải :

i) Rõ ràng N là số chẵn nhưng không chia hết cho 4 nên N không thể là một số chính phương.

ii) Nếu N + 1 là số chính phương thì :

$$N + 1 = k^2 (k \in \mathbf{N}) \Rightarrow N = (k-1)(k+1) \vdots 4 \text{ (vì k lẻ), vô lí.}$$

Vậy N + 1 cũng không là số chính phương.

iii) Vì $N \vdots 3$ nên $N - 1 \equiv 2 \pmod 3$ nên N - 1 không thể là số chính phương.

Bài 96.

Chứng minh rằng tổng bình phương của n số nguyên liên tiếp không thể là số chính phương với n = 3, 4, 5, 6, 7.

Giải :

1) Với $n = 3$: $S = (a-1)^2 + a^2 + (a+1)^2 = 3a^2 + 2 \equiv 2 \pmod 3$. S không thể là số chính phương (vì số chính phương chia hết cho 3 dư 0 hoặc 1).

2) Với $n = 4$: $S = (a-2)^2 + (a-1)^2 + a^2 + (a+1)^2 = 4a^2 - 4a + 6 \equiv 2 \pmod 4$ suy ra $S \vdots 2$ nhưng $S \not\vdots 4$ nên S không thể là số chính phương.

3) Với n = 5 : Xem Bài 42.

4) Với $n = 6$: $S = (a-3)^2 + (a-2)^2 + (a-1)^2 + a^2 + (a+1)^2 + (a+2)^2 =$

$$= 6a^2 - 6a + 19 = 6a(a-1) + 19 \equiv 3 \pmod 4.$$

Suy ra S không thể là số chính phương vì số chính phương chia cho 4 dư 0 hoặc 1.

5) Với n = 7 :

$$S = (a-3)^2 + (a-2)^2 + (a-1)^2 + a^2 + (a+1)^2 + (a+2)^2 + (a+3)^2 = 7(a^2 + 4).$$

Giả sử $a = 7k + r$ với $r = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$, suy ra $a^2 + 4 \equiv r^2 + 4 \pmod 7$.

Với $r = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$ thì $r^2 + 4 \equiv 4, 5, 1, 6 \pmod 7 \Rightarrow a^2 + 4 \not\vdots 7, \forall a \in \mathbf{N}$.

Vậy $S \vdots 7$ nhưng $S \not\vdots 49$ nên S không thể là số chính phương.

Dạng 2. TÌM SỐ TỰ NHIÊN n THỎA ĐIỀU KIỆN VỀ CHIA HẾT.

Giả sử tìm $n \in \mathbf{N}$ sao cho $A(n) \vdots B(n)$.

Biến đổi điều kiện $A(n) \vdots B(n) \Leftrightarrow k \vdots B(n)$ (với k là số tự nhiên không phụ thuộc n), từ đó tìm n.

Thử lại các giá trị tìm được của n để có $A(n) \vdots B(n)$.

Bài 97.

a) Tìm số nguyên dương n sao cho $n^2 + 1$ chia hết cho $n + 1$.

b) Tìm số nguyên n để $3n - 8$ chia hết cho $n - 4$.

Giải :

a) Giả sử $n^2 + 1 \vdots (n+1)$, khi đó $n^2 + 1 = (n^2 - 1) + 2 \vdots (n+1)$.

Vì $n^2 - 1 = (n-1)(n+1) \vdots (n+1)$ nên $2 \vdots (n+1)$ suy ra n = 1.

Với n = 1 thì $n^2 + 1 = 2 \vdots 2$. Vậy n = 1.

b) Giả sử $3n - 8 \vdots (n-4)$, khi đó :

$3n - 8 = 3(n-4) + 4 \vdots (n-4) \Leftrightarrow 4 \vdots (n-4) \Leftrightarrow n - 4 = \pm 1; \pm 2; \pm 4$

$\Leftrightarrow n \in \{5, 3, 6, 2, 8, 0\}$.

Bài 98.

Tìm số nguyên dương n thỏa điều kiện $(n + 5)(n + 6) \vdots 6n$.

Giải :

Ta có : $P = (n+5)(n+6) = n^2 + 11n + 30 = 12n + (n^2 - n + 30)$.

$P \vdots 6n \Leftrightarrow n^2 - n + 30 \vdots 6n$.

Vì $n^2 - n \vdots n$ nên $30 \vdots n$ và $30 \vdots 6$ nên $n^2 - n \vdots 3$.

Vậy n là ước dương của 30 và n chia cho 3 dư 0 hoặc 1. Suy ra $n \in \{1, 3, 6, 10, 15, 30\}$.

Trong các giá trị trên chỉ có $n \in \{1, 3, 10, 30\}$ thỏa điều kiện bài toán.

Bài 99.

Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho (n - 1)! chia hết cho n.

Giải :

Ta có (n - 1)! = 1.2.3 ... (n - 1).

- Nếu n là số nguyên tố thì $(n - 1)! \not\vdots\, n$.
- Nếu n là hợp số có dạng n = a.b với $a \neq b$ và $1 < a < n$, $1 < b < n$ thì trong tích 1.2.3... (n - 1) có hai thừa số a và b nên tích $(n-1)! \vdots n$.
- Nếu n là hợp số có dạng $n = p^2$ (p là số nguyên tố)

i) Nếu p > 2 thì $p^2 - 1 \geq 2p$ do đó $2p^2 = p(2p)$ là ước của $(p^2 - 1)!$ suy ra $p^2 = n$ là ước của (n - 1)!.

ii) Nếu p = 2 thì n = 4 không là ước của 3!.

Vậy $(n-1)! \vdots n$ khi n là hợp số khác 4.

Dạng 3. CÁC BÀI TOÁN VỀ SỐ CHÍNH PHƯƠNG.

Bài 100.

Chứng minh rằng, số chính phương có chữ số lẻ ở hàng chục thì chữ số hàng đơn vị luôn bằng 6.

Giải :

Giả sử số chính phương có dạng $(10n+b)^2$ với $b, n \in \mathbf{N}$ và $0 \le b \le 9$. Khi đó :

$$(10n+b)^2 = 100n^2 + 20nb + b^2 = 20n(5n+b) + b^2 .$$

Chữ số hàng chục của 20n(5n + b) là số chẵn nên theo đề bài chữ số hàng chục của b^2 phải là số lẻ, suy ra $b = 4$ hoặc b = 6, khi đó $b^2 = 16$ hoặc $b^2 = 36$. Vậy chữ số hàng đơn vị của $(10n+b)^2$ luôn bằng 6.

Bài 101.

Tìm một số có hai chữ số, biết rằng tổng của nó và số viết theo thứ tự ngược lại là một số chính phương.

Giải :

Giả sử $\overline{ab}$ là số có hai chữ số sao cho $\overline{ab} + \overline{ba}$ là số chính phương. Ta có :

$$\overline{ab} + \overline{ba} = 10a + b + 10b + a = 11(a+b) \vdots 11 .$$

Vì $\overline{ab} + \overline{ba}$ là số chính phương nên $\overline{ab} + \overline{ba} \vdots 121$, từ đó suy ra $a + b \vdots 11$. Mà $0 < a + b \le 18$ nên a + b = 11.

Vậy các số cần tìm là 29, 38, 47, 56, 65, 74, 83, 92.

Bài 102.

Tìm một số có hai chữ số biết rằng hiệu bình phương của nó và số viết theo thứ tự ngược lại là một số chính phương.

Giải :

Giả sử $\overline{ab}$ là số có hai chữ số sao cho $\overline{ab}^2 - \overline{ba}^2$ là số chính phương. Ta có :

$$\overline{ab}^2 - \overline{ba}^2 = (10a+b)^2 - (10b+a)^2 = 99(a^2 - b^2) \vdots 11 .$$

Vì $\overline{ab}^2 - \overline{ba}^2$ là số chính phương nên $\overline{ab}^2 - \overline{ba}^2 \vdots 121$, suy ra :

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) \vdots 11 \Rightarrow a + b \vdots 11 \text{ (vì } 0 < a - b \le 8)$$

Mà $0 < a + b \le 18$ nên a + b = 11 (*)

Từ (*) suy ra $\overline{ab}^2 - \overline{ba}^2 = 9.11.11(a-b)$ là số chính phương nên a - b = 1 hoặc a - b = 4.

- Nếu a - b = 1 thì từ (*) suy ra a = 6, b = 5. Thử lại : $65^2 - 56^2 = 33^2$.

- Nếu a - b = 4 thì từ (*) suy ra $a = \frac{15}{2}$ (loại).

Vậy số cần tìm là 65.

Bài 103.

Tìm số chính phương có 4 chữ số mà hai chữ số đầu giống nhau và hai chữ số cuối giống nhau.

Giải :

Giả sử $\overline{xxyy}$ là một số chính phương. Ta có :

$\overline{xxyy} = 1000x + 100x + 10y + y = 1100x + 11y = 11(100x + y) \vdots 11$

Do $\overline{xxyy}$ là số chính phương nên :

$$\overline{xxyy} \vdots 121 \Rightarrow 100x + y \vdots 11 \Rightarrow x + y \vdots 11 \text{ (vì } 99x \vdots 11)$$

Do $0 < x + y \leq 18$ nên x + y = 11. Khi đó :

$$\overline{xxyy} = 11(100x + y) = 11(99x + 11) = 11^2(9x + 1)$$

Suy ra : $9x + 1$ là số chính phương $\Rightarrow x = 7, y = 4$.

Thử lại : $7744 = 88^2$. Vậy số cần tìm là 7744.

Bài 104.

Tìm số chính phương $\overline{abcd}$ biết rằng $\overline{ab} - \overline{cd} = 1$.

Giải :

Giả sử : $n^2 = \overline{abcd} = 100\overline{ab} + \overline{cd} = 100(\overline{cd} + 1) + \overline{cd} = 101\overline{cd} + 100$, suy ra :

$$101\overline{cd} = n^2 - 10^2(n - 10)(n + 10).$$

Vì n < 100 và 101 là số nguyên tố nên n + 10 = 101 $\Rightarrow n = 91$.

Thử lại : $\overline{abcd} = 91^2 = 8281$ có 82 - 81 = 1. Vậy số cần tìm là 8281.

Bài 105.

Cho $\overline{abc}$ là số nguyên tố, chứng minh rằng phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ không có nghiệm hữu tỉ.

Giải :

Giả sử phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có nghiệm hữu tỉ, khi đó

$$\Delta = b^2 - 4ac = m^2 \ (m \in N).$$

Ta có :

$$4a.\overline{abc} = 4a(100a + 10b + c) = 400a^2 + 40ab + 4ac$$
$$= 400a^2 + 40ab + b^2 - (b^2 - 4ac) = (20a + b)^2 - m^2$$
$$= (20a + b - m)(20a + b + m).$$

Do $\overline{abc}$ là số nguyên tố nên $20a + b - m \vdots \overline{abc}$ hoặc $20a + b + m \vdots \overline{abc}$ suy ra $20a + b + m \geq \overline{abc}$.

Vì $b^2 - 4ac = m^2 \Rightarrow b > m$, do đó :

$$\overline{abc} = 100a + 10b + c > 20a - 2b > 20a + b + m \text{, vô lí.}$$

Vậy Δ không thể là số chínnh phương nên phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ không có nghiệm hữu tỉ.

Bài 106.

Chứng minh rằng nếu tích hai số nguyên tố cùng nhau là số chính phương thì mỗi số sẽ là số chính phương.

Giải :

Giả sử (a, b) = 1 và $ab = c^2$ $(c \in \mathbb{N})$. Ta chứng minh a, b đều là các số chính phương.

Gọi $d = (a, c)$ khi đó $a = a_1d$, $c = c_1d$; $(a_1, c_1) = 1$. Từ đó suy ra :

$$a_1db = c_1^2d^2 \Rightarrow a_1b = c_1^2d$$

- $a_1b \vdots c_1^2 \Rightarrow b \vdots c_1^2$ vì $(a_1, c_1) = 1$.
- $c_1^2d^2 \vdots b \Rightarrow c_1^2 \vdots b$ vì (b, d) = (b, a) = 1.

Vậy $b = c_1^2$ và $a = \left(\dfrac{c}{c_1}\right)^2 = d^2$ (đpcm).

Nhận xét :

Ta có thể phân tích a, b ra thừa số nguyên tố rồi từ $ab = c^2$ và (a, b) = 1 suy ra a, b là các số chính phương.

Bài 107.

Chứng minh rằng nếu x, y là các số nguyên thỏa mãn hệ thức $2x^2 + x = 3y^2 + y$ thì x - y, 2x + 2y + 1 và 3x + 3y + 1 là các số chính phương.

(Vô địch Toán Ba Lan)

Giải :

Ta có :

$2x^2 + x = 3y^2 + y \Leftrightarrow 2(x^2 - y^2) + x - y = y^2 \Leftrightarrow (x - y)(2x + 2y + 1) = y^2$ (1)

Ta chứng minh : (x - y, 2x + 2y + 1) = 1.

Thật vậy, gọi d = (x - y, 2x + 2y + 1) thì $d \mid x - y$ và $d \mid 2x + 2y + 1$ suy ra $d \mid 2x - 2y$ và $d \mid 2x + 2y + 1$, suy ra $d \mid 2x + 2y + 1 - (2x - 2y) = 4y + 1$ (2)

Mặt khác, từ (1) suy ra : $d^2 \mid y^2 \Rightarrow d \mid y$ (3)

Từ (1) và (2) suy ra $d|1$ hay $d = 1$. Vậy $(x - y, 2x + 2y + 1) = 1$.

Theo Bài 106 thì $x - y$ và $2x + 2y + 1$ là các số chính phương.

Mặt khác, từ giả thiết suy ra $(x - y)(3x + 3y + 1) = x^2$ và chứng minh được $(x - y, 3x + 3y + 1) = 1$ suy ra $3x + 3y + 1$ là số chính phương.

Bài 108.

Chứng minh rằng tích của 4 số nguyên dương liên tiếp không thể là một số chính phương.

Giải :

Tích 4 số tự nhiên liên tiếp có dạng : $T = n(n + 1)(n + 2)(n + 3)$.

Ta có :

$$T = [n(n + 3)][(n + 1)(n + 2)] = (n^2 + 3n)(n^2 + 3n + 2) = (n^2 + 3n)^2 + 2(n^2 + 3n).$$

Với $n \geq 1$ ta có $(n^2 + 3n)^2 < T < (n^2 + 3n + 1)^2$, suy ra T không thể là một số chính phương vì $(n^2 + 3n)^2$ và $(n^2 + 3n + 1)^2$ là hai số chính phương liên tiếp.

Bài 109.

Tìm số nguyên tố p sao cho tổng tất cả các ước dương của p^4 là một số chính phương.

Giải :

Các ước dương của p^4 là $1, p, p^2, p^3, p^4$.

Giả sử : $1 + p + p^2 + p^3 + p^4 = n^2 \quad (n \in \mathbf{N})$.

Ta có : $4n^2 = 4p^4 + 4p^3 + 4p^2 + 4p + 4 \qquad (1)$

Suy ra : $4p^4 + 4p^3 + p^2 < 4n^2 < 4p^4 + p^2 + 4 + 4p^3 + 4p + 8p^2$

Hay : $(2p^2 + p)^2 < (2n)^2 < (2p^2 + p + 2)^2$

Suy ra : $(2n)^2 = (2p^2 + p + 1)^2 \qquad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra :

$$4p^4 + 4p^3 + 4p^2 + 4p + 4 = (2p^2 + p + 1)^2 \Leftrightarrow p^2 - 2p - 3 = 0 \Leftrightarrow p = 3.$$

Với $p = 3$, ta có : $1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 = 11^2$.

Vậy số nguyên tố cần tìm là $p = 3$.

Bài 110.

Tìm số hữu tỉ x sao cho $x^2 + x + 6$ là số chính phương.

Giải :

Giả sử $x = \frac{p}{q}$ với $(p, q) = 1$ và $q > 0$ sao cho : $\frac{p^2}{q^2} + \frac{p}{q} + 6 = n^2$ với $n \in \mathbf{N}$.

Suy ra : $p^2 = q(-p-6q-n^2q)\vdots q \Rightarrow q = 1$.

Vậy : $x = p \in \mathbf{Z}$.

Khi đó :

$$p^2 + p + 6 = n^2 \Leftrightarrow 4p^2 + 4p + 24 = 4n^2 \Leftrightarrow (2n)^2 - (2p+1)^2 = 23$$
$$\Leftrightarrow (2n-2p-1)(2n+2p+1) = 23.$$

Phân tích : 23 = 1.23 = (- 1).(- 23) = 23.1 = (- 23).(- 1).

Giải ra ta được : p = 5, n = 6.

Bài 111.

Chứng minh rằng nếu $T = 2 + 2\sqrt{12n^2+1}$ là số tự nhiên thì T là số chính phương.

Giải :

Nếu T là số tự nhiên thì $12n^2+1$ là số chính phương lẻ.

Giả sử $12n^2+1 = (2k-1)^2 \Rightarrow 3n^2 = k(k-1)\vdots 3 \Rightarrow k\vdots 3$ hoặc $k-1\vdots 3$.

i) Nếu $k\vdots 3$ thì từ $3n^2 = k(k-1)$ suy ra $n^2 = \frac{k}{3}(k-1)$ vì $\left(\frac{k}{3}, k-1\right) = 1$ nên $\frac{k}{3} = c^2$ và $k-1 = d^2$ (Bài 106 với $c, d \in \mathbf{N}$).

Từ đó suy ra $3c^2 = d^2+1 \Rightarrow d^2 = 3c^2 - 1 \equiv 2 \pmod 3$, vô lí.

ii) Nếu $k-1\vdots 3$ thì từ $3n^2 = k(k-1)$ suy ra $n^2 = k.\frac{k-1}{3}$ vì $\left(k, \frac{k-1}{3}\right) = 1$ nên $k = m^2$, $\frac{k-1}{3} = p^2$ $(m, p \in \mathbf{N})$.

Khi đó $T = 2 + 2(2k - 1) = 4k = 4m^2 = (2m)^2$ là số chính phương.

Bài 112.

Cho n là số tự nhiên và d là ước nguyên dương của $2n^2$. Chứng minh rằng n^2+d không là số chính phương.

Giải :

Giả sử : $$n^2 + d = m^2 \quad (m \in \mathbf{N}) \qquad (1)$$

d là ước dương của $2n^2$ nên $2n^2 = k.d$ $(k \in \mathbf{N}) \Rightarrow d = \frac{2n^2}{k}$.

Thay $d = \frac{2n^2}{k}$ vào (1) ta được :

$$n^2 + \frac{2n^2}{k} = m^2 \Leftrightarrow n^2k^2 + 2n^2k = m^2k^2.$$

Từ đó suy ra $k^2 + 2k = \left(\frac{mk}{n}\right)^2$ là số chính phương.

Nhưng $k^2 < k^2 + 2k < (k+1)^2$ ta gặp mâu thuẫn. Vậy $n^2 + d$ không thể là số chính phương.

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Dạng 1.

1. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n ta có : $21^{2n+1} + 17^{2n+1} + 15$ không chia hết cho 19.
2. Chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbf{N}$ ta có :
   a) $n^2 + 3n + 5$ không chia hết cho 121;
   b) $n^2 + 3n + 4$ không chia hết cho 49;
   c) $n^2 + 5n + 16$ không chia hết cho 169.
3. Có thể biểu diễn số 2002 thành hiệu các bình phương của hai số tự nhiên được không ? Tại sao ?
4. Tổng bình phương của hai số lẻ có thể là số chính phương được không ?
5. Hình vuông có cạnh là số tự nhiên có thể có diện tích bằng 11...1 (2004 số 1) được không ? Tại sao ?
6. Chứng minh rằng $3^n + 4$ không thể là số chính phương với mọi $n \in \mathbf{N}$.
7. Chứng minh rằng số có dạng $\overline{abcabc}$ không thể là số chính phương.

Dạng 2.

8. Tìm tất cả số tự nhiên n thỏa một trong các điều kiện sau :
   a) $n + 11 \vdots (n-1)$; b) $7n \vdots (n-3)$;
   c) $n^2 + 2n + 6 \vdots (n+4)$.
9. Tìm $n \in \mathbf{Z}$ để :
   a) $n^2 + n + 1 \vdots (n+1)$; b) $n^3 - 8n^2 + 2n \vdots (n^2 + 1)$;
   c) $2n + 1 \vdots (n^2 + n + 1)$.

Dạng 3.

10. Chứng minh rằng mọi số chính phương lẻ đều có chữ số hàng chục là chữ số chẵn.
11. Chứng minh rằng một số chính phương lớn hơn 100 có chữ số tận cùng là 5 thì chữ số hàng trăm là số chẵn.
12. Tìm các chữ số x, y, z, t thỏa :
    a) $\overline{xxyy} = \overline{xx}^2 + \overline{yy}^2$; b) $\overline{xy}^2 = \overline{yx}^2 + \overline{tz}^2$.

13. Tìm số chính phương có 4 chữ số mà 3 chữ số cuối cùng giống nhau.

14. Tìm số có hai chữ số $\overline{xy}$ sao cho $2\overline{xy}+1$ và $3\overline{xy}+1$ là hai số chính phương.

15. Tìm $\overline{abcd}$ biết rằng a, $\overline{cd}$, $\overline{ad}$ và $\overline{abcd}$ đều là số chính phương.

16. Chứng minh rằng với mọi số nguyên x, y

$$A = (x + y)(x + 2y)(x + 3y)(x + 4y) + y^4$$

là số chính phương.

17. Tìm một số điện thoại có 4 chữ số biết rằng nó là một số chính phương và nếu ta thêm vào mỗi chữ số của nó một đơn vị thì cũng được một số chính phương.

18. Cho N = 1.2.3 + 2.3.4 + ... + n(n + 1)(n + 2), chứng minh rằng 4N + 1 là số chính phương với mọi số nguyên dương n.

19. Chứng minh rằng tích của 4 số tự nhiên liên tiếp cộng với 1 là số chính phương.

20. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n thì $n^4+2n^3+2n^2+2n+1$ không thể là số chính phương.

21. Xác định số tự nhiên n để $a_n=n^4+2n^3+2n^2+n+7$ là số chính phương.

22. Tồn tại hay không số nguyên dương vừa là tích của hai số tự nhiên liên tiếp vừa là tích của 4 số tự nhiên liên tiếp.

23. p là số chính phương có n + 4 chữ số trong đó n chữ số đầu và 4 chữ số cuối đều là các số chính phương. Tìm số lớn nhất của p.

24. Chứng minh rằng tích 8 số nguyên dương liên tiếp không thể là số chính phương.

25. Cho dãy số $a_1, a_2, \ldots, a_n$, biết rằng :

$$a_1=1,\ a_2=-1 \text{ và } a_n=-a_{n-1}-2a_{n-3}\ (n\ge 4).$$

Chứng minh rằng với $n\ge 2$ thì $A_n=2^{n+1}-7a_{n-1}^2$ là số chính phương.

HƯỚNG DẪN GIẢI - ĐÁP SỐ

1. $21^{2n+1}+17^{2n+1} \vdots (21+17)=38$.

2. a) $n^2+3n+5=(n+7)(n-4)+33$.

b) $n^2+3n+4=(n+5)(n-2)+14$.

c) $n^2+5n+16=(n+9)(n-4)+52$.

3. 2002 là số chẵn nhưng không chia hết cho 4 nên 2002 không viết thành hiệu các bình phương của hai số tự nhiên.

4. $(2n+1)^2+(2m+1)^2\equiv 2 \pmod 4$ nên tổng bình phương của hai số lẻ không thể là số chính phương.

5. 11...1 (2004 số 1) chia hết cho 3 nhưng không chia hết cho 9.

6. Xét dư của số chính phương khi chia cho 8.

7. $\overline{abcabc} = 1001\overline{abc} = 7.11.13\overline{abc}$; $\overline{abc}$ không thể đồng thời chia hết cho 7, 11, 13.

8. a) $n + 11 = (n-1) + 12 \vdots (n-1) \Leftrightarrow 12 \vdots (n-1)$.

b) $7n = 7(n-3) + 21 \vdots (n-3) \Leftrightarrow 21 \vdots (n-3)$.

c) $n^2 + 2n + 6 = (n+4)(n-2) + 14 \vdots (n+4) \Leftrightarrow 14 \vdots (n+4)$.

9. a) $n^2 + n + 1 = n(n+1) + 1 \vdots (n+1) \Leftrightarrow 1 \vdots (n+1)$.

b) $n^3 - 8n^2 + 2n = (n^2+1)(n-8) + n + 8 \vdots (n^2+1) \Leftrightarrow n + 8 \vdots (n^2+1)$

$\Leftrightarrow n = -8$ hoặc $n + 8 \geq n^2 + 1$

c) $2n + 1 \vdots (n^2 + n + 1) \Leftrightarrow 2n + 1 \geq n^2 + n + 1$.

10. $(10n + b)^2 = 20n(5n + b) + b^2$; b lẻ nên b^2 là một trong các giá trị : 1, 9, 25, 49, 81. Các số này có chữ số hàng chục là chữ số chẵn.

11. $(10n+5)^2 = 100n^2 + 100n + 25 = 100n(n+1) + 25$; n(n + 1) là số chẵn.

12. Chứng minh $x + y \vdots 11$

a) $8833 = 88^2 + 33^2$; b) $65^2 = 56^2 + 33^2$.

13. Số tận cùng của một số chính phương chỉ có thể là 0, 1, 4, 5, 6, 9. Một số chính phương chẵn thì chia hết cho 4, lẻ thì chia cho 4 dư 1.

$1144 = 38^2$.

14. Dựa vào chữ số tận cùng của số chính phương, y = 5 hoặc y = 0.

$\overline{xy} = 40$ thì $2\overline{xy} + 1 = 81$, $3\overline{xy} + 1 = 121$.

15. Học sinh tự làm.

16. $A = (x^2 + 5xy + 4y^2)(x^2 + 5xy + 6y^2) + y^4 = (x^2 + 5xy + 5y^2)^2$.

17. Gọi $\overline{abcd} = x^2$, $\overline{(a+1)(b+1)(c+1)(d+1)} = y^2 \Rightarrow y^2 - x^2 = 1111 = 11.101$;

$\overline{abcd} = x^2 = 2025$.

18. Ta có : $k(k+1)(k+2) = \frac{1}{4}k(k+1)(k+2)(k+3) - \frac{1}{4}(k-1)k(k+1)(k+2)$ suy ra

$N = \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3) \Rightarrow 4N + 1 = (n^2 + 3n + 1)^2$.

19. $n(n+1)(n+2)(n+3) + 1 = (n^2 + 3n + 1)^2$.

20. $(n^2 + n)^2 < n^4 + 2n^3 + 2n^2 + 2n + 1 < (n^2 + n + 1)^2$.

21. Ta có $a_n > (n^2 + n)^2$; $a_n < (n^2 + n + 1)^2 \Leftrightarrow (n-2)(n+3) > 0 \Leftrightarrow n > 2$.

Với n > 2 thì a_n không thể là số chính phương. Vậy n = 0, 1, 2.

Thử trực tiếp với n = 2 thì $a_2 = 49$ là số chính phương.

22. Giả sử :

$n(n+1) = m(m+1)(m+2)(m+3)$ $(n, m \in \mathbf{N}^*) \Leftrightarrow n^2 + n - 1 = (m^2 + 3m + 1)^2$

Mà $n^2 < n^2 + n + 1 < (n+1)^2$. Vậy không tồn tại số thỏa mãn yêu cầu bài toán.

23. Giả sử $p = A^2 = 10^4B^2 + C^2 \Rightarrow (A - 100B)(A + 100B) = C^2$;
$200B = (A + 100B) - (A - 100B) \leq C^2 - 1 \leq 99^2 - 1 = 9800 \Rightarrow B \leq 49$;
$p = 10^4 49^2 + 99^2 = 1901^2$.

24. Giả sử :
$T = n(n+1) \ldots (n+7) = (n^2 + 7n)(n^2 + 7n + 6)(n^2 + 7n + 10)(n^2 + 7n + 12)$.
Đặt $m = n^2 + 7n + 6$ thì T chẵn và $(m^2 + 2m - 22)^2 < T < (m^2 + 2m - 20)^2$.

25. Bằng quy nạp, chứng minh $A_n = (2a_n + a_{n-1})^2$, $n \geq 2$.

§ 4. PHÉP CHIA CÓ DƯ

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Tìm dư trong phép chia số nguyên A cho số nguyên m.

- Phân tích A ra thừa số nguyên tố : $A = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_n^{\alpha_n}$ với p_i là số nguyên tố và $\alpha_i \in \mathbf{N}^*$, i = 1, 2, ... , n.

- Theo tính chất đồng dư : $a \equiv b \pmod m$ và $c \equiv d \pmod m$ suy ra $ac \equiv bd \pmod m$, ta chỉ cần tìm dư trong phép chia $p_i^{\alpha_i}$ cho m.

2. Tìm dư trong phép chia a^n cho m ($a \in \mathbf{Z}; n, m \in \mathbf{N}^*$).

• *Trường hợp 1 :* m = p là số nguyên tố.

Áp dụng Định lí Fermat : $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$ với (a, p) = 1, lấy mũ n chia cho p - 1, giả sử n = (p - 1)k + r ; $0 \leq r < p - 1$. Khi đó $a^n = a^{(p-1)k+r} \equiv a^r \pmod p$; $r \in \{0, 1, \ldots, p-2\}$.

• *Trường hợp 2 :* m = p.q với p, q là hai số nguyên tố khác nhau.

Giả sử a^n chia cho p có dư là r_1 và a^n chia cho q có dư là r_2 với $0 \leq r_1 < p$, $0 \leq r_2 < q$. Tìm dư trong phép chia a^n sao cho p.q.

i) Nếu $r_1 = r_2$ thì $a^n \equiv r_1 \pmod{p.q}$ vì khi đó : $a^n - r_1 \vdots p$ và $a^n - r_1 \vdots q$ nên $a^n - r_1 \vdots p.q$.

ii) Nếu $r_1 \neq r_2$, giả sử $a^n \equiv r_0 \pmod{p.q}$, $0 \leq r_0 < p.q$, suy ra :

$$\begin{cases} r_0 \equiv r_1 \pmod p \\ r_0 \equiv r_2 \pmod q \end{cases} \Rightarrow \quad r_0 = r_1 + pt,\ t \in \mathbf{Z}.$$

Tìm $t \in \mathbf{Z}$ để $r_1 + pt \equiv r_2 \pmod q$.

Cho t lần lượt các giá trị từ 0 đến q - 1 thì $r_1 + pt$ có q dư khác nhau đôi một khi chia cho q (bạn đọc tự kiểm tra).

Vậy có duy nhất t_0 để $r_1 + pt_0 \equiv r_2 \pmod{q}$.

• *Trường hợp 3 :* $m = p^2$ với p là số nguyên tố.

Giả sử (a, p) = 1, khi đó theo Định lí Fermat : $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

Ta chứng minh $a^{p(p-1)} \equiv 1 (\text{mod } p^2)$. Thật vậy, theo công thức :

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-p})$$

ta có :

$$a^{p(p-1)} - 1 = (a^{p-1})^p - 1^p = (a^{p-1} - 1)(a^{(p-1)(p-1)} + a^{(p-1)(p-2)} + \cdots + a^{p-1} + 1)$$

Ta có $a^{(p-1)k} \equiv 1 \pmod{p}$ với k = 0, 1, ... , p – 1 suy ra $a^{p-1} - 1 \vdots p$ và $a^{(p-1)(p-1)} + a^{(p-1)(p-2)} + \cdots + a^{p-1} + 1 \vdots p$. Do đó $a^{p(p-1)} \equiv 1 (\text{mod}\, p^2)$.

Để tìm dư trong phép chia a^n cho p^2 ta tìm dư trong phép chia n cho p(p - 1).

Nhận xét : Vì (p, p - 1) = 1 nên tìm dư của n cho p(p - 1) ta áp dụng cách tìm ở trường hợp 2.

• *Trường hợp 4 :* m nguyên bất kì và (a, m) = 1.

1. Hàm Euler :

Cho m là số nguyên dương, ta gọi $\varphi(m)$ là số các số nhỏ hơn m và nguyên tố cùng nhau với m, $\varphi(m)$ được gọi là hàm Euler. Chẳng hạn,

$\varphi(4) = 2$ vì có hai số 1 và 3 nguyên tố cùng nhau với 4 ; (1, 4) = (3, 4) = 1.

$\varphi(5) = 4$ vì có bốn số 1, 2, 3, 4 nguyên tố cùng nhau với 5 ; (1, 5) = (2, 5) = (3, 5) = (4, 5) = 1.

2. Công thức tính $\varphi(m)$:

- Phân tích m ra thừa số nguyên tố : $m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$ với p_i là số nguyên tố ; $\alpha_i = \mathbf{N}^*$, i = 1, 2, ... , k.

- Ta có

$$\varphi(m) = m\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

Chẳng hạn

$$4 = 2^2 \Rightarrow \varphi(4) = 4.\left(1 - \frac{1}{2}\right) = 2 ;$$

$$\varphi(5) = 5\left(1 - \frac{1}{5}\right) = 4 .$$

p là số nguyên tố thì :

$$\varphi(p) = p\left(1 - \frac{1}{p}\right) = p - 1 ;$$

$$\varphi(p^2) = p^2\left(1 - \frac{1}{p}\right) = p(p-1) .$$

3. Định lí Euler :

Với (a, m) = 1 thì $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod m$.

Chứng minh :

Giả sử $n_1, n_2, ..., n_{\varphi(m)}$ là các số nhỏ hơn m và nguyên tố cùng nhau với m ; $(n_i, m) = 1, i = 1,2,...,\varphi(m)$.

Do (a, m) = 1 nên $(n_i \cdot a, m) = 1$, giả sử r_i là dư trong phép chia $n_i \cdot a$ cho m ta có : $n_i \cdot a \equiv r_i \pmod m$ $i = 1,2,...,\varphi(m)$ và $0 \le r_i < m$.

Mặt khác, $(r_i, m) = (n_i \cdot a, m) = 1 \Rightarrow r_i$ là một trong các số $n_1, n_2, ..., n_{\varphi(m)}$, đồng thời các r_i khác nhau đôi một, vì nếu có $r_i = r_j$ thì $(n_i - n_j)a \vdots m$, vô lí . Vậy $n_1n_2 \cdots n_{\varphi(m)} \cdot a^{\varphi(m)} \equiv r_1r_2 \cdots r_{\varphi(m)} = n_1n_2 \cdots n_{\varphi(m)} \pmod m$ suy ra $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod m$ vì $(n_1n_2 \cdots n_{\varphi(m)}, m) = 1$. (đpcm)

Để tìm dư trong phép chia a^n cho m với (a, m) = 1 ta tìm dư trong phép chia mũ n cho $\varphi(m)$, giả sử $n = \varphi(m) \cdot q + r, 0 \le r < \varphi(m)$. Khi đó $a^n = a^{\varphi(m) \cdot q + r} \equiv a^r \pmod m$.

B. CÁC DẠNG TOÁN

Bài 113.

Tìm dư trong phép chia 2004^{2004} cho 11.

Giải :

Ta có : $2004 \equiv 2 \pmod{11} \Rightarrow 2004^{2004} \equiv 2^{2004} \pmod{11}$.

Mà $2^{10} \equiv 1 \pmod{11}$ nên $2^{2004} = 2^4.(2^{10})^{200} \equiv 2^4 \equiv 5 \pmod{11}$.

Vậy dư trong phép chia 2004^{2004} cho 11 là 5.

Bài 114.

Tìm tất cả các số tự nhiên n mà khi chia cho 11 có dư là 7 và chia cho 5 có dư là 4.

Giải :

Giả sử : n = 11t + 7 , $t \in Z$ và $n = 55k + r_0$ $(r_0 \le 0 < 55)$.

Chọn $t \in \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4\}$ sao cho $11t + 7 \equiv 4 \pmod 5$.

Với t = 2 thì $11t + 7 = 29 \equiv 4 \pmod 5$.

Vậy $r_0 = 11t_0 + 7 = 29$ và n = 5.11k + 29 = 55k + 29.

Bài 115.

Tìm dư trong phép chia 2^{2003} cho 35.

Giải :

Ta có : $2^4 \equiv 1 \pmod 5 \Rightarrow 2^{2003} = 2^{4.500+3} \equiv 2^3 \equiv 3 \pmod 5$;

$2^3 \equiv 1 \pmod 7 \Rightarrow 2^{2003} = 2^{3.667+2} \equiv 4 \pmod 7$.

Gọi r_0 là dư trong phép chia 2^{2003} cho 35 thì $r_0 = 7t + 4$ với $t \in \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4\}$.

Với t = 2 thì $r_0 = 18 \equiv 3 \pmod 5$.

Vậy $r_0 = 18$ và dư trong phép chia 2^{2003} cho 35 là 18.

Bài 116.

Tìm dư trong phép chia $15^{15^{15}}$ cho 49.

Giải :

Ta có : p = 7 ; (p - 1)p = 6.7 = 42 ; $15^{42} \equiv 1 \pmod{49}$.

Ta tìm dư trong phép chia 15^{15} cho 42.

Ta có $15^{15} \equiv 1 \pmod 7$; $15^{15} \equiv 3^{15} \pmod 6$ mà $3^{15} = 3.3^{14} = 3(2k+1) \equiv 3 \pmod 6 \Rightarrow 15^{15} \equiv 3 \pmod 6$.

Gọi r_0 là dư trong phép chia 15^{15} cho 42 thì : $r_0 = 7t + 1$ với $t \in \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5\}$. Với t = 2 thì $r_0 = 15 \equiv 3 \pmod 6$. Vậy $15^{15} \equiv 15 \pmod{42}$.

Do đó : $15^{15^{15}} = 15^{42k+15} \equiv 15^{15} \pmod{49}$.

Ta có $15^{15} = (15^3)^5 \equiv (-6)^5 \equiv 15 \pmod{49}$.

Bài 117.

Tìm dư trong phép chia 109^{345} cho 14.

Giải :

Ta có : $109 \equiv 11 \pmod{14} \Rightarrow 109^{345} \equiv 11^{345} \pmod{14}$;

$$14 = 2.7 \Rightarrow \varphi(14) = 14\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{7}\right) = 6.$$

Theo Định lí Euler : $11^{\varphi(14)} \equiv 1 \pmod{14} \Leftrightarrow 11^6 \equiv 1 \pmod{14}$.

Suy ra $11^{345} = 11^{6 \times 57 + 3} \equiv 11^3 \equiv 1 \pmod{14}$.

Vậy dư trong phép chia 109^{345} cho 14 là 1.

Bài 118.

Tìm dư trong phép chia $11^{11^{11}}$ cho 30.

Giải :

Ta có $30 = 2.3.5 \Rightarrow \varphi(30) = 30\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right) = 8 \Rightarrow 11^8 \equiv 1 \pmod{30}$.

Ta có $11^{11} \equiv 3^{11} \pmod 8$; $3^{11} = (3^2)^5.3 \equiv 3 \pmod 8 \Rightarrow 11^{11} = 8k + 3$.

Vậy $11^{11^{11}} = 11^{8k+3} \equiv 11^3 \equiv 11 \pmod{30}$.

Do đó dư trong phép chia $11^{11^{11}}$ cho 30 là 11.

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Tìm dư trong phép chia $3^{2^{2003}}$ cho 11.

2. Chứng minh rằng :

a) $1890^{1930} + 1945^{1975} + 1 \vdots 7$;

b) $3^{2^{1990}} + 2^{9^{1945}} - 19^{5^{1980}} \vdots 7$.

3. Tìm dư trong phép chia $3^{2^{4n+1}}$ cho 55.

4. Tìm dư trong phép chia :

a) 2^{1000} cho 25 ;

b) 2^{2003} cho 49.

5. Tìm dư trong phép chia $3.5^{75} + 4.7^{100}$ cho 132.

HƯỚNG DẪN GIẢI – ĐÁP SỐ

1. Áp dụng Định lí Fermat tìm chữ số tận cùng của 2000^3.

2. Áp dụng Định lí Fermat tìm dư từng số hạng của tổng.

3. Tìm dư của $3^{2^{4n+1}}$ cho 5 và 11 rồi áp dụng cách tìm dư ở trường hợp 2.

4. a) p = 5 ; (p - 1)p = 20 ; $2^{1000} \equiv (2^{20})^{50} \equiv 1 \pmod{25}$.

b) p = 7 ; (p - 1)p = 42 ; $2003 \equiv 29 \pmod{42}$.

5. $132 = 2^2.3.11 \Rightarrow \varphi(132) = 132\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{11}\right) = 40$; $5^{40} \equiv 1 \pmod{132}$;

$7^{40} \equiv 1 \pmod{132}$.

SỐ NGUYÊN TỐ

§ 1. ƯỚC CHUNG LỚN NHẤT – BỘI CHUNG NHỎ NHẤT

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Số các ước của một số tự nhiên

Giả sử n được phân tích ra thừa số nguyên tố là : $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_k^{\alpha_k}$ với p_i nguyên tố và $\alpha_i \in \mathbf{N}^*$ thì số các ước của n là $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)...(\alpha_k + 1)$.

2. Ước chung lớn nhất

$$d = (a, b) \Leftrightarrow \begin{cases} d \mid a \text{ và } d \mid b \\ d \text{ là bội của mọi ước chung của a và b} \end{cases}$$

Nếu d = 1 ta nói a, b là hai số nguyên tố cùng nhau.

Tính chất :

i) $d = (a, b) \Leftrightarrow \left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1$;

ii) $(ka, kb) = k(a, b)$;

iii) $\begin{cases} (a, c) = 1 \\ ab \,\vdots\, c \end{cases} \Rightarrow b \,\vdots\, c$;

iv) $\begin{cases} a \,\vdots\, n \text{ , } a \,\vdots\, m \\ (n, m) = 1 \end{cases} \Rightarrow a \,\vdots\, n \cdot m$.

v) $(a, b) = (a, c) = 1 \Rightarrow (a, bc) = 1$;

vi) $(a, b, c) = ((a, b), c)$.

3. Thuật toán Euclid để tìm ƯCLN

a) Trường hợp $b \mid a$ thì $(a, b) = b$

b) Trường hợp $b \nmid a$, giả sử $a = bq + c$ thì $(a, b) = (b, c)$.

Thuật toán Euclid.

Giả sử :

$a = bq + r_1, \ 0 < r_1 < b$

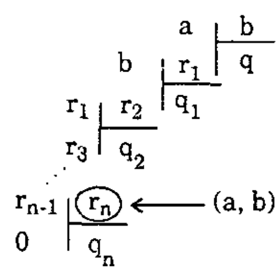
$b = r_1 q_1 + r_2, \ 0 < r_2 < r_1$

$r_1 = r_2 q_2 + r_3, \ 0 < r_3 < r_2$

...

$r_{n-2} = r_{n-1} q_{n-1} + r_n, \ 0 < r_n < r_{n-1}$

$r_{n-1} = r_n q_n$



Thuật toán Euclid phải kết thúc với số dư $r_{n+1} = 0$.

Theo b) ta có : $(a, b) = (b, r_1) = (r_1, r_2) = \cdots = (r_{n-1}, r_n) = r_n$.

Vậy ƯCLN của a, b là dư cuối cùng khác 0 trong thuật toán Euclid.

4. Bội chung nhỏ nhất

$$m = [a,b] \Leftrightarrow \begin{cases} m \vdots a \text{ và } m \vdots b \\ m \text{ là ước của mọi bội chung của a và b} \end{cases}$$

Tính chất :

i) $[ka, kb] = k[a, b]$; ii) $[a, b, c] = [[a, b], c]$;

iii) $(a, b)\cdot[a, b] = a.b$.

5. Phân số tối giản

$$\frac{a}{b} \text{ là phân số tối giản} \Leftrightarrow (a, b) = 1 .$$

Tính chất :

i) Mọi phân số khác 0 đều có thể đưa về dạng tối giản.

ii) Dạng tối giản của một phân số là duy nhất.

iii) Tổng (hiệu) của một số nguyên và một phân số tối giản là một phân số tối giản.

B. CÁC DẠNG TOÁN

Bài 119.

Tìm số ước của số 18^{96}.

Giải :

Ta có : $18^{96} = (3^2.2)^{96} = 3^{192}.2^{96}$.

Vậy số ước số của 18^{96} là $(96 + 1)(192 + 1) = 97.193 = 18721$.

Bài 120.

Chứng minh rằng một số tự nhiên lớn hơn 0 là số chính phương khi và chỉ khi số ước số của nó là số lẻ.

Giải :

Giả sử $n = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_k^{\alpha_k}$ với p_i nguyên tố và $\alpha_i \in N^*$.

n là số chính phương $\Leftrightarrow \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ là các số chẵn

$\Leftrightarrow (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)... (\alpha_k + 1)$ là số lẻ.

Bài 121.

Một số tự nhiên n là tổng bình phương của 3 số tự nhiên liên tiếp. Chứng minh rằng n không thể có đúng 17 ước số.

Giải :

Tổng bình phương của 3 số tự nhiên liên tiếp có dạng :

$$n = (m-1)^2 + m^2 + (m+1)^2 = 3m^2 + 2$$

không thể là số chính phương.

Nếu n có đúng 17 ước số thì n là số chính phương (Bài 120), vô lí. Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Bài 121.

Tìm UCLN của hai số :

a) n và n + 1 ;

b) 2n + 1 và 3n + 1 ;

c) $\overline{ab} + \overline{ba}$ và 33 với a + b không chia hết cho 3.

Giải :

a) Giả sử d = (n, n + 1) thì d là ước của n + 1 và d là ước của n, do đó d là ước của (n + 1) - n = 1. Vậy d = 1.

b) Giả sử d = (2n + 1, 3n + 1) $\Rightarrow$ d | 3(2n + 1) - 2(3n + 1) = 1 $\Rightarrow$ d = 1.

c) Ta có : $\overline{ab} + \overline{ba} = 10a + b + 10b + a = 11(a+b)$; $33 = 11.3$. Vì $a + b \not\vdots\, 3$ nên $(\overline{ab} + \overline{ba}, 33) = 11$.

Bài 122.

a) Tìm hai số a, b biết a + b = 66, (a, b) = 6 và trong hai số a, b có một số chia hết cho 5.

b) Tìm a, b biết ab = 75 và (a, b) = 5.

Giải :

a) Vì (a, b) = 6 nên a = 6k , b = 6l với (k, l) = 1.

Từ a + b = 66 suy ra 6k + 6l = 66 $\Leftrightarrow$ k + l = 11.

Vì trong hai số a, b có một số chia hết cho 5 nên giả sử $k \vdots 5 \Rightarrow k = 5$ hoặc k = 10, khi đó l = 6 hoặc l = 1.

Vậy a = 30, b = 36 hoặc a = 60, b = 6.

b) Vì (a, b) = 5 nên a = 5k, b = 5l với (k, l) = 1.

Từ ab = 75 suy ra 25kl = 75 $\Leftrightarrow$ k.l = 3.

Vậy k = 3, l = 1 hoặc k = 1, l = 3. Từ đó, hai số cần tìm là 5 và 15.

Bài 123.

Chứng minh rằng (a, b) = (5a + 3b, 13a + 8b).

Giải :

Giả sử d là ước chung của a và b, ta chứng minh d là ước chung của 5a + 3b và 13a + 8b.

Thật vậy, d là ước chung của a nên d | 5a và d | 13a, d là ước của b nên d | 13b và d | 8b. Vậy d | 5a + 3b và d | 13a + 8b.

Ngược lại, giả sử $d' | 5a + 3b$ và $d' | 13a + 8b$ suy ra :

$$d' | 5(13a + 8b) - 13(5a + 3b) = b.$$

Đồng thời : $d' | 8(5a + 3b) - 3(13a + 8b) = a.$

Vậy $d' | a$ và $d' | b$.

Tóm lại mọi ước chung của a và b cũng là ước chung của $5a + 3b$ và $13a + 8b$ và ngược lại.

Vậy $(a, b) = (5a + 3b, 13a + 8b)$.

Bài 124.

Tìm UCLN của :

a) $\underbrace{11...1}_{2004 \text{ số } 1}$ ***và 11111111 ;***

b) 123456789 và 987654321.

Giải :

a) Gọi $a = \underbrace{11...1}_{2004 \text{ số } 1}$; $b = 11111111$. Ta có $2000 \vdots 8$ nên $\underbrace{11...1}_{2000 \text{ số } 1} \vdots b$. Do đó

$a = \underbrace{11...1}_{2000 \text{ số } 1}0000 + 1111 = b.q + 1111 \Rightarrow (a, b) = (b, 1111) = 1111$ (vì $b \vdots 1111$).

b) Gọi $a = 987654321$; $b = 123456789$. Ta có :

$$a = 8b + 9 \Rightarrow (a, b) = (b, 9) = 9 \text{ (vì } b \vdots 9\text{)}.$$

Bài 125.

Cho a, b, c là 3 số tự nhiên nguyên tố cùng nhau từng đôi một. Chứng minh (ab + bc + ca, abc) = 1.

Giải :

Giả sử $d = (ab + bc + ca, abc) \neq 1 \Rightarrow d | ab + bc + ca$ và $d | abc$. Gọi p là ước nguyên tố của d thì $p | ab + bc + ca$ và $p | abc$.

Giả sử $p | a \Rightarrow p | ab + ca \Rightarrow p | bc \Rightarrow p | b$ hoặc $p | c$.

Vậy $(ab + bc + ca, abc) = 1$.

Bài 126.

Cho $a \in Z$, tìm (a, a + 2).

Giải :

Giả sử $d = (a, a + 2) \Rightarrow d | a$ và $d | a + 2 \Rightarrow d | a + 2 - a = 2 \Rightarrow d = 1$ hoặc $d = 2$.

- Với a lẻ thì $(a, a + 2) = 1$.
- Với a chẵn thì $(a, a + 2) = 2$.

Bài 127.

Cho a, m là các số nguyên lớn hơn 1. Chứng minh rằng :

$$(1+a+a^2+\cdots+a^{m-1},\ a-1) = (m,\ a-1).$$

Giải :

Giả sử $d \mid (1+a+\cdots+a^{m-1})$ và $d \mid (a-1)$, suy ra :

$$d \mid (a^{m-1}-1)+(a^{m-2}-1)+\cdots+(a-1)+m \Rightarrow d \mid m.$$

Vậy $d \mid m$ và $d \mid a-1$.

Ngược lại, nếu $d \mid m$ và $d \mid a-1$ thì $d \mid (a^{m-1}+\cdots+a+1)$.

Vậy $(1+a+\cdots+a^{m-1}a-1)=(m,a-1)$.

Bài 128.

Chứng minh rằng nếu a, b, c là các số lẻ thì

$$\left(\frac{a+b}{2},\frac{b+c}{2},\frac{c+a}{2}\right)=(a,b,c).$$

Giải :

Giả sử $d \mid a$, $d \mid b$, $d \mid c$ thì d lẻ.

Ta có : $a+b \vdots d$ và $a+b \vdots 2 \Rightarrow a+b \vdots 2d$ (do $(2, d) = 1$) $\Rightarrow \frac{a+b}{2} \vdots d$.

Tương tự : $\frac{b+c}{2} \vdots d$ và $\frac{c+a}{2} \vdots d$.

Vậy d là ước của $\frac{a+b}{2},\frac{b+c}{2},\frac{c+a}{2}$.

Ngược lại, giả sử d là ước của $\frac{a+b}{2},\frac{b+c}{2},\frac{c+a}{2}$ thì d là ước của $\frac{a+b}{2}+\frac{a+c}{2}-\frac{b+c}{2}=a$.

Tương tự $d \mid b$ và $d \mid c$.

Vậy : $\left(\frac{a+b}{2},\frac{b+c}{2},\frac{c+a}{2}\right)=(a,b,c)$.

Bài 129.

Tổng các số tự nhiên $a_1,a_2,\ldots,a_{49}$ bằng 999. Hỏi ước số chung lớn nhất của chúng có thể nhận giá trị lớn nhất bằng bao nhiêu ?

Giải :

Giả sử $d = (a_1,a_2,\ldots,a_{49})$, khi đó $a_1+a_2+\cdots+a_{49}=999 \vdots d$, suy ra d là ước của $999=3^3.37$.

Vì $d \mid a_k$ $(k = 1, 2, ..., 49)$ nên $a_k \geq d, \forall k \Rightarrow 999 = a_1 + a_2 + \cdots + a_{49} \geq 49d$

$\Rightarrow d \leq \frac{99}{49} < 21$. Vậy d chỉ có thể nhận các giá trị 1, 3, 9.

Giá trị d lớn nhất bằng 9 khi $a_1 = a_2 = \cdots = a_{48} = 9$; $a_{49} = 567$ (vì 9.48 + 567 = 999).

Bài 130.

Cho (a, b) = 1, tìm (11a + 2b, 18a + 5b).

Giải :

Giả sử d = (11a + 2b, 18a + 5b), khi đó $d \mid 18a + 5b$ và $d \mid 11a + 2b$, suy ra $d \mid 11(18a + 5b) - 18(11a + 2b) = 19b \Rightarrow$ $d \mid 19$ hoặc $d \mid b$.

i) Nếu $d \mid b$ thì từ $d \mid 5(11a + 2b) - 3(18a + 5b) = a - 5b \Rightarrow d \mid a \Rightarrow d \mid (a, b) = 1 \Rightarrow d = 1$.

ii) Nếu $d \mid 19$ thì d = 1 hoặc d = 19.

Vậy (11a + 2b, 18a + 5b) bằng 1 hoặc bằng 19.

Bài 131.

Cho (m, n) = 1. Tìm $(m+n, m^2+n^2)$.

Giải :

Giả sử $d = (m+n, m^2+n^2)$ khi đó $d \mid m + n$ và $d \mid m^2 + n^2$ suy ra $d \mid (m+n)^2 - (m^2 - n^2) = 2mn$.

d) m + n và $d \mid 2mn$ suy ra

$d \mid 2m(m+n) - 2mn = 2m^2$ và $d \mid 2n(m+n) - 2mn = 2n^2$.

Do đó $d \mid (2m^2, 2n^2) = 2(m^2, n^2) = 2 \Rightarrow d = 1$ hoặc d = 2.

- Nếu m, n cùng lẻ thì d = 2.
- Nếu m, n khác tính chẵn lẻ thì d = 1.

Bài 132.

Chứng minh rằng các phân số sau tối giản với mọi $n \in Z$.

a) $\frac{21n+4}{14n+3}$; *b)* $\frac{2n+1}{2n(n+1)}$.

Giải :

a) Giả sử d = (21n + 4, 14n + 3), khi đó $d \mid 21n + 4$ và $d \mid 14n + 3$ suy ra $d \mid 2(21n + 4)$ và $d \mid 3(14n + 3) \Rightarrow d \mid 3(14n + 3) - 2(21n + 4) = 1 \Rightarrow d = 1$.

Vậy $\frac{21n+4}{14n+3}$ là phân số tối giản.

b) Giả sử $d = (2n+1, 2n^2+2n)$ suy ra $d \mid 2n^2 + 2n - n(2n+1) = n$.

Từ $d|2n+1$ và $d|n$ suy ra $d|2n+1-2n=1 \Rightarrow d=1$.

Vậy $\frac{2n+1}{2n^2+2n}$ là phân số tối giản.

Bài 133.

Tìm $n \in Z$ để một trong các phân số sau tối giản.

a) $\frac{18n+3}{21n+7}$; *b)* $\frac{2n+3}{n+7}$.

Giải :

a) Ta có : $\frac{18n+3}{21n+7}=\frac{3(6n+1)}{7(3n+1)}$. Mà (3, 7) = (3, 3n +1) = (6n +1, 3n +1) = 1 nên để $\frac{18n+3}{21n+7}$ là phân số tối giản ta phải có (6n + 1, 7) = 1.

Mặt khác, 6n + 1 = 7n - (n - 1), do đó :

$$(6n+1, 7)=1 \Leftrightarrow (n-1, 7)=1 \Leftrightarrow n \neq 7k+1 \ (k \in \mathbf{Z}).$$

Vậy, với n chia cho 7 không dư 1 thì $\frac{18n+3}{21n+7}$ là phân số tối giản.

b) Ta có $\frac{2n+3}{n+7}=2-\frac{11}{n+7}$ tối giản $\Leftrightarrow$ (n + 7, 11) = 1 $\Leftrightarrow$ $n \neq 11k-7$ $(k \in \mathbf{Z})$.

Bài 134.

Tìm hai số tự nhiên a, b thỏa : a + b = 128 và (a, b) = 16.

Giải :

Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $a \le b$.

Vì (a, b) = 16 nên $a=16a_1$, $b=16b_1$ với $(a_1,b_1)=1$.

Từ a + b = 128 suy ra $16(a_1+b_1)=128 \Leftrightarrow a_1+b_1=8$. Với điều kiện $a_1 \le b_1$ và $(a_1,b_1)=1$ ta có $a_1=1, b_1=8$ hoặc $a_1=3, b_1=5$. Từ đó ta có a = 16, b = 112 hoặc a = 48, b = 80.

Bài 135.

Tìm một số có 3 chữ số, biết rằng khi bớt số đó đi 8 đơn vị thì được một số chia hết cho 7, nếu bớt số đó đi 9 đơn vị thì được một số chia hết cho 8, nếu bớt số đó đi 10 đơn vị thì được một số chia hết cho 9.

Giải :

Gọi n là số có 3 chữ số thỏa yêu cầu, ta có $100 \le n < 1000$. Theo đề bài :

$$n-8 \vdots 7 \Rightarrow n-1 \vdots 7;$$

$$n - 9 \vdots 8 \Rightarrow n - 1 \vdots 8;$$
$$n - 10 \vdots 9 \Rightarrow n - 1 \vdots 9.$$

Từ đó suy ra n - 1 chia hết cho BCNN (7, 8, 9) = 504. Mà $99 \le n - 1 < 999$ nên n – 1 = 504 $\Leftrightarrow$ n = 505. Số cần tìm là 505.

Bài 136.

Tìm BCNN của ba số nguyên dương liên tiếp n, n + 1 và n + 2.

Giải :

Ta có :

$$[n, n + 1, n + 2] = [[n, n + 1], n + 2] = [n(n + 1), n + 2]$$

(vì (n, n + 1) = 1 nên [n, n + 1] = n(n + 1)).

$$[n(n+1), n+2] = \frac{n(n+1)(n+2)}{(n(n+1), n+2)}.$$

Ta có (n + 1, n + 2) = 1 nên (n(n + 1), n + 2) = (n, n + 2) = (n, 2).

i) Nếu n chẵn thì (n, 2) = 2, khi đó $[n, n+1, n+2] = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{2}$;

ii) Nếu n lẻ thì (n, 2) = 1, khi đó [n, n + 1, n + 2] = n(n + 1)(n + 2).

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Chứng minh rằng một số tự nhiên có ba chữ số tận cùng là 136 thì có ít nhất 4 ước số dương.
2. Chứng minh rằng nếu $|kn - lm| = 1$ thì $(ma + nb, ka + lb) = (a, b)$.
3. Cho (a, b) = d tìm (a + b, a - b).
4. Tìm ƯCLN của tất cả các số có 9 chữ số được viết bởi các chữ số 1, 2, 3, ..., 9 và trong mỗi số đó các chữ số đều khác nhau.
5. Tìm a, b biết :

   a) a + b = 342 và (a, b) = 36 ;   b) 7a = 11b và (a, b) = 45 ;

   c) ab = 864 và (a, b) = 6.
6. Dùng thuật toán Euclid để chứng minh : $(n^4 + 3n^2 + 1, n^3 + 2n) = 1$.
7. Cho (a, b) = 1 tìm ƯCLN của :

   a) a - b và ab ;   b) ab và $a^2 + b^2$;

   c) 2a + b và a(a + b).
8. Chứng minh các phân số sau tối giản với $n \in \mathbf{Z}$:

   a) $\dfrac{12n+1}{30n+2}$;   b) $\dfrac{15n^2+8n+6}{30n^2+21n+13}$.
9. Tìm $n \in \mathbf{Z}$ để phân số $\dfrac{13+n}{n-2}$ tối giản.

10. Chứng minh rằng nếu $5n^2 + 1 \vdots 6$ thì $\frac{n}{2}$ và $\frac{n}{3}$ tối giản.

11. Tìm số tự nhiên nhỏ nhất để các phân số sau tối giản :

$$\frac{7}{n+9}, \frac{8}{n+10}, \dots, \frac{31}{n+33}.$$

12. Tìm các số tự nhiên a, b biết :

a) ab = 360, [a, b] = 60 ; b) (a, b) + [a, b] = 55.

13. Tìm số tự nhiên nhỏ nhất khi chia cho 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 có dư lần lượt là 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

14. Tìm dư trong phép chia [123456789, 987654321] cho 11.

15. Chứng minh rằng (a, b) = (a + b ; [a, b]).

16. Chứng minh rằng với a > 1, ta có : $(a^m - 1, a^n - 1) = a^{(m,n)} - 1$.

HƯỚNG DẪN GIẢI – ĐÁP SỐ

1. Số có 3 chữ số tận cùng 136 thì chia hết cho 8 nên có ít nhất 4 ước số dương là 1, 2, 4, 8.

2. $d \mid a$, $d \mid b$ thì $d \mid ma + nb$, $d \mid ka + lb$;

$d \mid ma + nb$, $d \mid ka + lb$ thì $d \mid k(ma + nb) - m(ka + lb) = \pm b \Rightarrow d \mid b$.

Tương tự $d \mid a$.

3. (a + b, a - b) bằng d hoặc 2d.

4. Ta có 123456798 - 123456789 = 9 nên ƯCLN phải tìm chỉ có thể là 1, 3 hoặc 9, mà tất cả các số đã cho đều chia hết cho 9 nên ƯCLN phải tìm là 9.

5. a) a = 36, b = 398 hoặc a = 180, b = 252 (với $a \le b$) ;

b) a = 495 , b = 315 ;

c) 6 và 144 hoặc 18 và 48.

6. Ta có : $n^4 + 3n^2 + 1 = (n^3 + 2n)n + n^2 + 1$

$n^3 + 2n = (n^2 + 1)n + n$

$n^2 + 1 = n.n + 1$

$n = 1.n + 0.$

Vậy : $(n^4 + 3n^2 + 1, n^3 + 2n) = 1$.

7. a) $d = (a - b, ab) \Rightarrow d \mid a(a - b) + ab = a^2$. Tương tự $d \mid b^2$.

Suy ra $d \mid (a^2, b^2) = 1 \Rightarrow d = 1$.

b) $d = (ab, a^2 + b^2) \Rightarrow d \mid ab$ và $d \mid a^2 + b^2$

$\Rightarrow d \mid a(a^2 + b^2) - ab^2 = a^3$ và $d \mid b(a^2 + b^2) - ba^2 = b^3$

$\Rightarrow d \mid (a^3, b^3) = 1 \Rightarrow d = 1$.

c) $d = (2a - b, a^2 + ab) \Rightarrow \begin{cases} d \mid a(2a+b) - (a^2+ab) = a^2 \\ d \mid b(2a+b) - 2(a^2+ab) = b^2 - 2a^2 \end{cases}$

$$\Rightarrow d \mid (a^2, b^2) = 1 \Rightarrow d = 1.$$

8. $d = 12n + 1, 30n + 2 \Rightarrow d \mid 5(12n + 1) - 2(30n + 2) = 1 \Rightarrow d = 1.$

9. $\dfrac{n+13}{n-2} = 1 + \dfrac{15}{n-2}$ tối giản $\Leftrightarrow (15, n - 2) = 1.$

$$\Leftrightarrow n - 2 \text{ không chia hết cho 3 và 5}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} n \neq 3k + 2 \\ n \neq 5l + 2 \end{cases}$$

10. Chứng minh n lẻ và không chia hết cho 3.

11. Các số đã cho có dạng $\dfrac{k}{k+(n+2)}$ (k = 7, 8, ... , 31). Mà $\dfrac{k+(n+2)}{k} = 1 + \dfrac{n+2}{k}$ tối giản $\Leftrightarrow (n + 2, k) = 1 \Leftrightarrow n + 2$ nguyên tố cùng nhau với 7, 8, ... , 31 và n + 2 nhỏ nhất $\Leftrightarrow n + 2 = 37 \Leftrightarrow n = 35.$

12. a) a = 6, b = 60 hoặc a = 12, b = 30 ($a \leq b$) ;

b) Các cặp (a, b) với $a \leq b$ cần tìm là : (1, 54), (2, 27), (5, 50), (10, 25) và (11, 44).

13. $n + 1 \vdots [2,3,4,5,6,7,8,9] = 5.7.8.9 = 2520$. Vậy n = 2519.

14. a = 123456789, b = 987654321. Ta có b - 8a = 9 và $a, b \vdots 9$ nên (a, b) = 9;

$[a,b] = \dfrac{ab}{9} = \dfrac{a}{9}.b$ mà $\dfrac{a}{9} = 11k + 3, b = 11l + 5 \Rightarrow \dfrac{a}{9}.b = 11m + 4.$

15. $(k, l) = 1$ thì $(k + l, kl) = 1$.

16. Dùng thuật toán Euclid.

§ 2. SỐ NGUYÊN TỐ - HỢP SỐ

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

- Số nguyên tố là số nguyên lớn hơn 1 và chỉ có hai ước dương là 1 và chính nó. Chẳng hạn 2, 3, 5, 7, 11, ... là các số nguyên tố.
- Hợp số là số nguyên lớn hơn 1 và có nhiều hơn hai ước dương.
- Ước nguyên tố nhỏ nhất của một hợp số a là một số không vượt quá $\sqrt{a}$.

Hệ quả.

Số a > 1 không có ước nguyên tố nào từ 2 đến $\sqrt{a}$ thì a là một số nguyên tố.

- Tập hợp số nguyên tố là vô hạn.

B. CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. SỬ DỤNG CÁC TÍNH CHẤT CỦA PHÉP CHIA SỐ NGUYÊN.

i) Trong n số nguyên liên tiếp có một và chỉ một số chia hết cho n.

ii) Mọi số nguyên tố lớn hơn 2 đều có dạng $4n \pm 1$.

ii) Mọi số nguyên tố lớn hơn 3 đều có dạng $6n \pm 1$.

Bài 137.

Cho p là số nguyên tố và một trong hai số 8p + 1, 8p - 1 là số nguyên tố, hỏi số thứ ba là số nguyên tố hay hợp số ?

Giải :

Với p = 3 ta có 8p + 1 = 25 là hợp số, còn 8p - 1 = 23 là số nguyên tố.

Với $p \neq 3$ ta có 8p - 1, 8p, 8p + 1 là 3 số nguyên liên tiếp nên có một số chia hết cho 3. Do p là nguyên tố khác 3 nên 8p không chia hết cho 3, do đó 8p - 1 hoặc 8p + 1 có một số chia hết cho 3. Vậy số thứ ba là hợp số.

Bài 138.

Hai số $2^n - 1$ và $2^n + 1$ (n > 2) có thể đồng thời là số nguyên tố được không ? Tại sao ?

Giải :

Trong ba số nguyên liên tiếp $2^n - 1$, 2^n, $2^n + 1$ có một số chia hết cho 3, nhưng 2^n không chia hết cho 3, do đó $2^n - 1$ hoặc $2^n + 1$ có một số chia hết cho 3 và lớn hơn 3. Vậy $2^n - 1$, $2^n + 1$ không đồng thời là số nguyên tố.

Bài 139.

Chứng minh rằng nếu p và p + 2 là hai số nguyên tố lớn hơn 3 thì tổng của chúng chia hết cho 12.

Giải :

Ta có : p + (p + 2) = 2(p + 1).

- p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p là số nguyên tố lẻ suy ra :

$$p + 1 \vdots 2 \Rightarrow 2(p+1) \vdots 4 \qquad (1)$$

- p, p + 1, p + 2 là 3 số nguyên liên tiếp nên có một số chia hết cho 3, mà p và p + 2 không chia hết cho 3 nên :

$$p + 1 \vdots 3 \Rightarrow 2(p+1) \vdots 3 \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra : $2(p+1) \vdots 12$. (đpcm)

Bài 140.

Tìm số nguyên tố p sao cho p + 10 và p + 14 là các số nguyên tố.

Giải :

Với p = 3 thì p + 10 = 13 và p + 14 = 17 là các số nguyên tố .

Với p > 3 thì $p = 3k \pm 1$.

- Nếu p = 3k + 1 thì p + 14 = 3k + 15 ⋮ 3;
- Nếu p = 3k - 1 thì p + 10 = 3k + 9 ⋮ 3.

Vậy với p = 3 thì p + 10 và p + 14 là số nguyên tố.

Bài 141.

a) Tìm ba số lẻ liên tiếp đều là các số nguyên tố.

b) Tìm số nguyên tố p sao cho p vừa là tổng vừa là hiệu của hai số nguyên tố.

Giải :

a) Trong ba số lẻ liên tiếp có một số chia hết cho 3 . Vậy trong ba số nguyên tố đã cho phải có một số bằng 3 và ba số nguyên tố lẻ liên tiếp là 3, 5, 7.

b) Giả sử $p = p_1 + p_2 = p_3 - p_4$ với p_1, p_2, p_3, p_4 là các số nguyên tố. Vì p_1, p_2 là số nguyên tố nên p > 2, suy ra p lẻ. Trong hai số p_1, p_2 phải có một số chẵn, trong hai số p_3, p_4 cũng phải có một số chẵn. Chẳng hạn $p_2 = p_4 = 2$. Khi đó : $p = p_1 + 2 = p_3 - 2 \Rightarrow p_1 + 4 = p_3$. Ta có $p_1, p_1 + 2, p_1 + 4$ là các số nguyên tố lẻ liên tiếp nên theo câu a) $p_1 = 3$ từ đó p = 5.

Thử lại : 5 = 3 + 2 = 7 - 2.

Bài 142.

Tìm số tự nhiên k để dãy : k +1, k + 2, ... , k + 10 chứa nhiều số nguyên tố nhất.

Giải :

- Với k = 0 ta có dãy 1, 2, 3, ..., 10 chứa 4 số nguyên tố là 2, 3, 5, 7.
- Với k = 1 ta có dãy 2, 3, 4, ..., 11 chứa 5 số nguyên tố là 2, 3, 5, 7, 11.
- Với k = 2 ta có dãy 3, 4, 5, ... , 12 chứa 4 số nguyên tố là 3, 5, 7, 11.
- Với $k \geq 3$ dãy k + 1, k + 2, ... , k + 10 chứa 5 số lẻ liên tiếp, các số lẻ này đều lớn hơn 3 nên có một số chia hết cho 3, mà 5 số chẵn trong dãy hiển nhiên không là số nguyên tố. Vậy trong dãy có ít hơn 5 số nguyên tố.

Tóm lại với k = 1 thì dãy k + 1, k + 2, ... , k + 10 chứa nhiều số nguyên tố nhất.

Bài 143.

Ta gọi p, q là hai số nguyên tố liên tiếp, nếu giữa p và q không có số nguyên tố nào khác. Tìm ba số nguyên tố liên tiếp p, q, r sao cho $p^2+q^2+r^2$ cũng là số nguyên tố.

Giải :

Nếu các số nguyên tố p, q, r đều khác 3 thì p, q, r có dạng $3k\pm1$ suy ra p^2, q^2, r^2 chia cho 3 đều dư là 1. Khi đó $p^2+q^2+r^2 \vdots 3$ và $p^2+q^2+r^2>3$ nên $p^2+q^2+r^2$ là hợp số.

Vậy p = 3, q = 5, r = 7, khi đó $p^2+q^2+r^2=3^2+5^2+7^2=83$ là số nguyên tố.

Bài 144.

Tìm ba số nguyên tố p, q, r sao cho $p^q+q^p=r$.

Giải :

Giả sử có ba số nguyên tố p, q, r sao cho $p^q+q^p=r$. Khi đó r > 3 nên r là số lẻ, suy ra p, q không cùng tính chẵn lẻ. Giả sử p = 2 và q là số lẻ. Khi đó ta có $2^q+q^2=r$. Nếu q không chia hết cho 3 thì $q^2\equiv1$ (mod 3). Mặt khác, vì q lẻ nên $2^q\equiv-1$ (mod 3), từ đó suy ra $2^q+q^2 \vdots 3 \Rightarrow r \vdots 3$, vô lí. Vậy $q=3$, lúc đó $r=2^3+3^2=17$ là số nguyên tố.

Vậy p = 2, q = 3, r = 17 hoặc p = 3, q = 2, r = 17.

Bài 145.

a) Chứng minh rằng số dư trong phép chia một số nguyên tố cho 30 chỉ có thể là 1 hoặc là số nguyên tố. Khi chia cho 60 thì kết quả ra sao ?

b) Chứng minh rằng nếu tổng của n lũy thừa bậc 4 của các số nguyên tố lớn hơn 5 là một số nguyên tố thì (n, 30) = 1.

Giải :

a) Giả sử p là số nguyên tố và p = 30k + r với 0 < r < 30. Nếu r là hợp số thì r có ước nguyên tố $q\le\sqrt{30}\Rightarrow q=2;3;5$. Nhưng với q = 2; 3; 5 thì q lần lượt chia hết cho 2; 3; 5, vô lí. Vậy r = 1 hoặc r là số nguyên tố.

Khi chia cho 60 thì kết quả không còn đúng nữa, chẳng hạn p = 109 = 60.1 + 49, 49 là hợp số.

b) Số nguyên tố p khi chia cho 30 chỉ có thể dư là 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29.

- Với r = 1, 11, 19, 29 thì $p^2\equiv1$ (mod 30).

- Với r = 7, 13, 17, 23 thì $p^2 \equiv 19 \pmod{30}$.

Suy ra $p^4 \equiv 1 \pmod{30}$.

Giả sử $p_1, p_2, ..., p_n$ là các số nguyên tố lớn hơn 5 .

Khi đó $q = p_1^4 + p_2^4 + \cdots + p_n^4 \equiv n \pmod{30} \Rightarrow q = 30k + n$ là số nguyên tố nên (n, 30) = 1.

Nhận xét : Với p là số nguyên tố lớn hơn 5 ta có thể chứng minh $p^4 \equiv 1$ (mod 30) bằng cách áp dụng Định lí Fermat.

Ta có $p^2 \equiv 1 \pmod 2$, $p^2 \equiv 1 \pmod 3$, $p^4 \equiv 1 \pmod 5 \Rightarrow p^4 \equiv 1 \pmod{30}$.

Bài 146.

Tìm tất cả các bộ ba số nguyên tố a, b, c sao cho abc < ab + bc + ca.

Giải :

Vì a, b, c có vai trò như nhau nên giả sử $a \le b \le c$.

Khi đó $ab + bc + ca \le 3bc \Rightarrow abc < 3bc \Rightarrow a < 3 \Rightarrow a = 2$ (vì a là số nguyên tố). Với a = 2 ta có 2bc < 2b + 2c + bc $\Rightarrow bc < 2(b + c) \le 4c \Rightarrow b < 4 \Rightarrow b = 2$ hoặc $b = 3$.

- Nếu b = 2 thì 4c < 2 + 4c thỏa với c là số nguyên tố bất kì.
- Nếu b = 3 thì 6c < 6 + 5c $\Rightarrow c < 6 \Rightarrow c = 3$ hoặc c = 5.

Vậy các cặp số (a, b, c) cần tìm là (2, 2, p), (2, 3, 3), (2, 3, 5) và các hoán vị của chúng, với p là số nguyên tố.

Bài 147.

Cho dãy số nguyên dương $a_1, a_2, ..., a_n$ được xác định như sau : $a_1 = 2$, a_n là ước nguyên tố lớn nhất của $a_1a_2...a_{n-1} + 1$ với $n \ge 2$. Chứng minh rằng $a_k \ne 5$ với mọi k.

Giải :

Ta có $a_1 = 2, a_2 = 3$, giả sử với $n \ge 3$ nào đó mà có số 5 là ước nguyên tố lớn nhất của số $A = 2.3.a_3...a_{n-1} + 1$ thì A không thể chia hết cho 2, cho 3. Vậy chỉ có thể xảy ra $A = 5^m$ với $m \ge 2$, suy ra $A - 1 = 5^m - 1 \vdots 4$.

Mà $A - 1 = 2.3.a_3...a_{n-1}$ không chia hết cho 4 do $a_3, ..., a_{n-1}$ là các số lẻ, vô lí. Vậy A không có ước nguyên tố lớn nhất là 5, tức là $a_k \ne 5, \forall k \in \mathbf{N}^*$.

Bài 148.

Tìm tất cả các số nguyên tố p để $2^p + p^2$ cũng là số nguyên tố.

Giải :

Với p = 2 ta có $2^p + p^2 = 12$ không là số nguyên tố.

Với p = 3 : $2^p + p^2 = 12$ không là số nguyên tố.

Với p > 3 ta có $p^2 + 2^p = (p^2 - 1) + (2^p + 1)$. Vì p lẻ và p không chia hết cho 3 nên $p^2 - 1 \vdots 3$ và $2^p + 1 \vdots 3$, do đó $2^p + p^2$ là hợp số.

Vậy, với p = 3 thì $2^p + p^2$ là số nguyên tố.

Dạng 2. ÁP DỤNG ĐỊNH LÍ FERMAT.

p là số nguyên tố và (a, p) = 1 thì $a^{p-1} \equiv 1$ (mod p).

Bài 149.

Cho $n \in N^*$, chứng minh rằng: $2^{2^{10n+1}} + 19$ và $2^{3^{4n+1}} + 3^{2^{4n+1}} + 5$ là những hợp số.

Giải :

a) Ta chứng minh $2^{2^{10n+1}} + 19 \vdots 23$ với mọi $n \geq 1$.

Ta có : $2^{10} \equiv 1$ (mod 1) $\Rightarrow 2^{10n+1} \equiv 2 \pmod{22} \Rightarrow 2^{10n+1} = 22k + 2\ (k \in \mathbf{N})$.

Theo Định lí Fermat :

$2^{22} \equiv 1 \pmod{23} \Rightarrow 2^{2^{10n+1}} = 2^{22k+2} \equiv 4 \pmod{23} \Rightarrow 2^{2^{10n+1}} + 19 \vdots 23$.

Mặt khác : $2^{2^{10n+1}} + 19 > 23$ nên $2^{2^{10n+1}} + 19$ là hợp số với mọi $n \in \mathbf{N}^*$.

b) Ta chứng minh $2^{3^{4n+1}} + 3^{2^{4n+1}} + 5 \vdots 11$ với $n \geq 1$.

Bài 150.

Tìm số nguyên tố p sao cho $2^p + 1$ chia hết cho p.

Giải :

Giả sử p là số nguyên tố thỏa : $2^p + 1 \vdots p$.

Theo Định lí Fermat :

$2^p \equiv 2 \pmod{p} \Rightarrow 2^p - 2 \vdots p \Rightarrow 3 = (2^p + 1) - (2^p - 2) \vdots p \Rightarrow p = 3$.

Với p = 3 ta có $2^p + 1 = 9 \vdots 3$.

Bài 151.

Cho p là số nguyên tố lớn hơn 2. Chứng minh rằng có vô số số tự nhiên n thỏa $n.2^n - 1$ chia hết cho p.

Giải :

Ta có $2^{p-1} \equiv 1$ (mod p), ta tìm n = (p - 1) sao cho $n.2^n \equiv 1$ (mod p).

Ta có : $n.2^n = m(p-1).2^{m(p-1)} \equiv m(p-1) \pmod{p} \Rightarrow n.2^n \equiv -m \equiv 1 \pmod{p}$

$\Rightarrow m = kp - 1\ (k \in \mathbf{N}^*)$.

Vậy, với $n = (kp - 1)(p - 1)$ $(k \in N^*)$ thì $n.2^n - 1 \vdots p$.

Bài 152.

Cho p là số nguyên tố, chứng minh rằng số $2^p - 1$ chỉ có ước nguyên tố có dạng 2pk + 1.

Giải :

Gọi q là ước nguyên tố của $2^p - 1$ thì q lẻ, nên theo Định lí Fermat :

$2^{q-1} - 1 \vdots q \Rightarrow (2^p - 1, 2^{q-1} - 1) = 2^{(p, q-1)} - 1 \vdots q \Rightarrow q - 1 \vdots p$, vì nếu $(q - 1, p) = 1$ thì $1 \vdots q$, vô lí.

Mặt khác, q - 1 chẵn suy ra $q - 1 \vdots 2p \Rightarrow q = 2pk + 1$.

Bài 153.

Giả sử p là số nguyên tố lẻ và $m = \frac{9^p - 1}{8}$. Chứng minh rằng m là hợp số lẻ không chia hết cho 3 và $3^{m-1} \equiv 1 \pmod m$.

Giải :

Ta có : $m = \frac{3^p - 1}{2} \cdot \frac{3^p + 1}{4} = a \cdot b$ với $a = \frac{3^p - 1}{2}$, $b = \frac{3^p + 1}{4}$.

a, b đều là các số nguyên lớn hơn 1 nên m là hợp số.

Mà $m = 9^{p-1} + 9^{p-2} + \cdots + 9 + 1$ và p lẻ nên m lẻ và $m \equiv 1 \pmod 3$. Theo Định lí Fermat, ta có : $9^p - 9 \vdots p$.

$(p, 8) = 1$ nên $9^p - 9 \vdots 8p \Rightarrow m - 1 \vdots \frac{9^p - 9}{8} \vdots p$.

Vì $m - 1 \vdots 2$ nên $m - 1 \vdots 2p$, khi đó : $3^{m-1} - 1 \vdots 3^{2p} - 1 \vdots \frac{9^p - 1}{8} = m$ (đpcm).

Dạng 3. PHƯƠNG PHÁP PHÂN TÍCH.

Bài 154.

Tìm $n \in N^*$ để :

a) $n^4 + 4$ là số nguyên tố.

b) $n^{2003} + n^{2002} + 1$ là số nguyên tố.

Giải :

a) Ta có :

$$n^4 + 4 = (n^4 + 4n^2 + 4) - 4n^2 = (n^2 + 2)^2 - (2n)^2 = (n^2 - 2n + 2)(n^2 + 2n + 2)$$

Nếu $n^4 + 4$ là số nguyên tố thì $n^2 - 2n + 2 = 1 \Leftrightarrow n = 1$.

Thử lại : Với n = 1 thì $n^4 + 4 = 5$ là số nguyên tố .

Vậy, với n = 1 thì $n^4 + 4$ là số nguyên tố.

b) Ta có : $n^{2003} + n^{2002} + 1 = n^2(n^{2001} - 1) + n(n^{2001} - 1) + n^2 + n + 1$.

Với n > 1 ta có :

$$n^{2001} - 1 \vdots n^3 - 1 \vdots n^2 + n + 1 ,$$

do đó : $n^{2003} + n^{2002} + 1 \vdots n^3 + n + 1$ và $n^2 + n + 1 > 1$ nên $n^{2003} + n^{2002} + 1$ là hợp số.

Với n = 1 thì $n^{2003} + n^{2002} + 1 = 3$ là số nguyên tố.

Bài 155.

a) Tìm các số nguyên tố p để 2p + 1 là lập phương của một số tự nhiên.

b) Tìm các số nguyên tố p để 13p + 1 là lập phương của một số tự nhiên.

Giải :

a) Giả sử $2p + 1 = n^3$ (với $n \in \mathbf{N}$) ; n là số lẻ nên $n = 2m + 1$ ($m \in \mathbf{N}$), khi đó

$$2p + 1 = (2m + 1)^3 \Rightarrow p = m(4m^2 + 6m + 3) .$$

Vì p là số nguyên tố nên m = 1, suy ra p = 13.

Thử lại : $2p + 1 = 2.13 + 1 = 27 = 3^3$. Vậy p = 13.

b) Giả sử $13p + 1 = n^3 (n \in \mathbf{N})$; $p \geq 2$ suy ra $n \geq 3$.

$$13p + 1 = n^3 \Rightarrow 13p = (n - 1)(n^2 + n + 1) .$$

13 và p là các số nguyên tố, mà n - 1 > 1 và $n^2 + n + 1 > 1$ nên n - 1 = 13 hoặc n - 1 = p.

i) Với n - 1 = 13 thì n = 14, khi đó $13p = n^3 - 1 = 2743 \Rightarrow p = 211$ là số nguyên tố.

ii) Với n - 1 = p thì $n^2 + n + 1 = 13 \Rightarrow n = 3$, khi đó p = 2 là số nguyên tố.

Vậy, với p = 2, p = 211 thì 13p + 1 là lập phương của một số tự nhiên.

Bài 156.

Tìm tất cả các số nguyên x, y thỏa $x^2 - 2y^2 = 1$.

Giải :

Giả sử x, y là các số nguyên tố thỏa : $x^2 - 2y^2 = 1$. Khi đó $x^2 = 2y^2 + 1$, suy ra x là số lẻ, đặt x = 2n + 1 ($n \in \mathbf{N}^*$) . Ta có :

$$(2n + 1)^2 = 2y^2 + 1 \Rightarrow 4n^2 + 4n + 1 = 2y^2 + 1 \Rightarrow y^2 = 2(n^2 + n) \vdots 2 \Rightarrow y \vdots 2 ,$$

mà y là số nguyên tố nên suy ra $y = 2$.

Với y = 2, ta có x = 3.

Thử lại với x = 3, y = 2 thì $x^2 - 2y^2 = 1$.

Bài 157.

Tìm các số nguyên tố x, y, z thỏa $x^y + 1 = z$.

Giải :

Vì x, y là các số nguyên tố nên $x \ge 2, y \ge 2$ suy ra $z \ge 5$.

z là số nguyên tố lẻ nên x^y là số chẵn suy ra $x = 2$, khi đó $z = 2^y + 1$.

Nếu y lẻ thì $2^y + 1 \vdots 3$ suy ra $z \vdots 3$, vô lí. Vậy y chẵn, suy ra $y = 2$, $z = 2^2 + 1 = 5$.

Vậy các số nguyên tố cần tìm là $x = y = 2$; $z = 5$.

Bài 158.

Chứng minh rằng nếu $1 + 2^n + 4^n$ ($n \in N^*$) là số nguyên tố thì $n = 3^k$ với $k \in N$.

Giải :

Đặt $n = 3^k.m$ với (m, 3) = 1. Giả sử m > 1, xét hai trường hợp :

i) $m = 3l + 1$ ($l \in N^*$). Ta có :

$1 + 2^n + 4^n = 1 + 2^{3^k(3l+1)} + 4^{3^k(3l+1)} = 1 + a^{3l+1} + a^{6l+2}$ (với $a = 2^{3^k}$), suy ra $1 + 2^n + 4^n = a(a^{3l} - 1) + a^2(a^{6l} - 1) + a^2 + a + 1 \vdots a^2 + a + 1 \Rightarrow 1 + 2^n + 4^n$ là hợp số.

ii) $m = 3l + 2$ ($l \in N^*$). Ta có :

$$1 + 2^n + 4^n = 1 + 2^{3^k(3l+2)} + 4^{3^k(3l+2)} = 1 + a^{3l+2} + a^{6l+4}$$

$$= a(a^{6l+3} - 1) + a^2(a^{3l} - 1) + a^2 + a + 1 \vdots a^2 + a + 1 \text{ (với } a = 2^{3^k}\text{)},$$

suy ra $1 + 2^n + 4^n$ là hợp số.

Vậy m = 1 tức là $n = 3^k$.

Bài 159.

Cho a, b, c, d $\in N^*$ thỏa ab = cd. Chứng minh rằng : $A = a^n + b^n + c^n + d^n$ là hợp số với mọi $n \in N$.

Giải :

Giả sử (a, c) = t, khi đó : $a = ta_1$, $c = tc_1$ với $(a_1, c_1) = 1$.

Từ ab = cd suy ra $a_1b = c_1d \Rightarrow b \vdots c_1$.

Đặt : $b = kc_1 \Rightarrow c_1d = a_1.kc_1 \Rightarrow d = ka_1$.

Khi đó :

$$A = a^n + b^n + c^n + d^n = t^n a_1^n + k^n c_1^n + t^n c_1^n + k^n a_1^n = (k^n + t^n)(a_1^n + c_1^n).$$

Vì k, t, $a_1, c_1 \in N^*$ nên A là hợp số.

Bài 160.

Tìm tất cả các số nguyên tố p dạng $\frac{n(n+1)}{2}-1$ $(n \geq 1)$.

Giải :

Ta có :

$$p = \frac{n(n+1)}{2} - 1 = \frac{n^2+n-2}{2} = \frac{(n-1)(n+2)}{2}.$$

Với n = 2 ta có p = 2 ;

Với n = 3 ta có p = 5 ;

Với n > 3 thì $\frac{n-1}{2} > 1$ và n + 2 > 1 nên p là hợp số.

Vậy với n = 2, n = 3 thì p là số nguyên tố có dạng $\frac{n(n+1)}{2} - 1$.

Bài 161.

Tìm tất cả các số có hai chữ số $\overline{ab}$ sao cho $\frac{ab}{|a-b|}$ là số nguyên tố.

Giải :

Vì a, b có vai trò như nhau nên có thể giả sử a > b.

Giả sử $\frac{ab}{a-b} = p$ với p là số nguyên tố. (*)

Suy ra $ab \vdots p \Rightarrow a \vdots p$ hoặc $b \vdots p \Rightarrow p \in \{2, 3, 5, 7\}$.

Ta có : (*) $\Leftrightarrow ab = ap - bp \Leftrightarrow (a+p)(p-b) = p^2 \Leftrightarrow \begin{cases} a+p = p^2 \\ p-b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = p^2 - p \\ b = p-1. \end{cases}$

- Với p = 2 ta có $\overline{ab} = 21$ hoặc $\overline{ab} = 12$.
- Với p = 3 ta có $\overline{ab} = 62$ hoặc $\overline{ab} = 26$.
- Với p = 5 hoặc p = 7 ta có a có hai chữ số (loại).

Vậy các số $\overline{ab}$ cần tìm là 12, 21, 26, 62.

Bài 162.

Cho các số $p = b^c + a$, $q = a^b + c$, $r = c^a + b$ là các số nguyên tố (a, b, $c \in N^*$). Chứng minh rằng ba số p, q, r có ít nhất hai số bằng nhau.

Giải :

Ba số a, b, c có ít nhất hai số có cùng tính chẵn lẻ.

Giả sử a, b cùng chẵn hoặc cùng lẻ, khi đó $p = b^c + a$ là số nguyên tố chẵn, vậy p = 2.

Từ đó suy ra a = b = 1, q = c + 1 và r = c + 1 nên q = r.

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Dạng 1.

1. Tìm số nguyên tố p sao cho p + 6, p + 8, p + 12, p + 14 là các số nguyên tố.

2. Chứng minh rằng nếu n và n^2+2 là các sóo nguyên tố thì n^3+2 cũng là số nguyên tố.

3. Chứng minh rằng nếu a, a + k, a + 2k $(a, k \in \mathbf{N}^*)$ là các số nguyên tố lớn hơn 3 thì $k \vdots 6$.

4. Cho p, q là hai số nguyên tố, chứng minh rằng $p^2 - q^2 \vdots 24$.

5. Một số nguyên tố p chia cho 42 có dư là một hợp số r. Tìm r.

6. Chứng minh rằng số $\underbrace{11...1}_{n}2\underbrace{11...1}_{n}$ là hợp số với $n \geq 1$.

7. Tìm n sao cho 10101 ... 0101 (n chữ số 0 và n + 1 chữ số 1 xen kẽ nhau) là số nguyên tố.

Dạng 2.

8. Cho $n \in \mathbf{N}^*$, chứng minh các số sau là hợp số :

a) $A = 2^{2^{2n+1}} + 3$; b) $B = 2^{2^{4n+1}} + 7$;

c) $C = 2^{2^{6n+2}} + 13$.

9. p là số nguyên tố lớn hơn 5, chứng minh $p^4 \equiv 1 \pmod{240}$.

10. Chứng minh rằng dãy $a_n = 10^n + 3$ có vô số hợp số.

11. Chứng minh rằng với mỗi số nguyên tố p có vô số số dạng $2^n - n$ chia hết cho p.

Dạng 3.

12. Tìm $n \in \mathbf{N}^*$ để $n^3 - n^2 + n - 1$ là số nguyên tố.

13. Tìm các số $x, y \in \mathbf{N}^*$ sao cho $x^4 + 4y^4$ là số nguyên tố.

14. Tìm tất cả các số nguyên tố p có dạng $\dfrac{n(n+1)(n+2)}{6} + 1$ $(n \geq 1)$.

15. Cho $n \in \mathbf{N}^*$, chứng minh $A = n^4 + 4^n$ là hợp số với n > 1.

HƯỚNG DẪN GIẢI – ĐÁP SỐ

1. p = 5.

2. n = 3.

3. Số nguyên tố lớn hơn 3 có dạng $6l + 1$ hoặc $6l + 5$. Do đó 3 số a, a + k, a + 2k phải có ít nhất 2 số có cùng một dạng, hiệu là k hoặc 2k chia hết cho 6, suy ra $k \vdots 3$.

4. Chứng minh $p^2 - 1 = (p-1)(p+1) \vdots 24$.

5. p = 42k + r = 2.3.7k + r (0 < r < 42) ; p là số nguyên tố nên r không chia hết cho 2, 3, 7. Các hợp số từ 1 đến 41 chỉ có số 25 là không chia hết cho 2, 3, 7. Vậy r = 25.

6. $\underbrace{11...1}_{n}2\underbrace{11...1}_{n} = \underbrace{11...1}_{n+1}\underbrace{0...0}_{n} + \underbrace{11...1}_{n+1} = \underbrace{11...1}_{n+1}(10^n + 1)$.

7. $p = 1010...101 = \dfrac{(10^{n+1}-1)(10^{n+1}+1)}{9.11}$

n = 1 : p = 101 là số nguyên tố.

n > 1 : p là hợp số.

8. Chứng minh $A \vdots 7$, $B \vdots 11$, $C \vdots 29$.

9. $240 = 2^4.3.5$.

10. $n = 6k + 4,\ k \in \mathbf{N}$.

11. p = 2 lấy n chẵn ; p > 2 lấy $n = (pk - 1)(p - 1)$, $k \in \mathbf{N}^*$.

12. $n^3 - n^2 + n - 1 = (n-1)(n^2+1)$; n = 2.

13. $x^4 + 4y^4 = (x^4 + 4x^2y^2 + 4y^4) - 4x^2y^2 = (x^2 + 2y^2)^2 - (2xy)^2$

$$= \left(x^2 - 2xy + 2y^2\right)\left(x^2 + 2xy + 2y^2\right).$$

x = y = 1 thì $x^4 + 4y^4 = 5$ là số nguyên tố.

14. $p = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{6} + 1 = \dfrac{(n+3)(n^2+2)}{6}$.

Với $n \geq 4$ thì n + 3 > 6 và $n^2 + 2 > 17$.

n + 3 và $n^2 + 2$ hoặc một số chẵn, một số chia hết cho 3 ; hoặc một trong hai số chia hết cho 6, khi đó p là hợp số với n = 1; 2; 3 thì p = 2; 5; 11 là các số nguyên tố.

15. n chẵn thì $A \vdots 2$

n lẻ, đặt n = 2k + 1 ($k \in \mathbf{N}^*$), ta có :

$$n^4 + 4^n = n^4 + 4^{2k+1} = (n^2 + 2^{2k+1})^2 - 2.n^2.2^{2k+1}$$

$$= (n^2 + 2^{2k+1} - n.2^{k+1})(n^2 + 2^{2k+1} + n.2^{k-1})$$

$$= \left[(n - 2^k)^2 + 2^{2k}\right]\left[(n + 2^k)^2 + 2^{2k}\right]$$

là hợp số.

BÀI TẬP ÔN CHƯƠNG 2 VÀ 3

Bài 163.

Tổng của các số nguyên dương liên tiếp bằng 2000. Hãy xác định các số ấy.

Giải :

Giả sử tổng của n số nguyên dương liên tiếp, bắt đầu từ số nguyên dương k bằng 2000. Ta có :

$$k + (k+1) + (k+2) + \ldots + (k+n-1) = 2000 \Leftrightarrow nk + \frac{n(n-1)}{2} = 2000$$

$$\Leftrightarrow n(2k+n-1) = 4000 = 2^5.5^3$$

n và n - 1 có tính chẵn lẻ khác nhau nên n và 2k + n - 1 có tính chẵn lẻ khác nhau.

i) Nếu n lẻ, 2k + n - 1 chẵn, khi đó ta có : $n = 5^a$ với a = 0, 1, 2, 3.

Với a = 0, ta có n = 1, k = 2000 ;

Với a = 1, ta có n = 5, k = 398 ;

Với a = 2, ta có n = 25, k = 68 ;

Với a = 3, ta có n = 125, $2k + 124 = \frac{4000}{125} = 32$ (loại).

ii) Nếu n chẵn, 2k + n − 1 lẻ, khi đó $n = 2^5.5^a$, $2k + n - 1 = 5^{3-a}$ với a = 0, 1, 2, 3.

Thử trực tiếp như trên ta thấy với a = 0, n = 32, k = 47.

Bài 164.

Cho $n \in N^*$, chứng minh rằng nếu 2n + 1 và 3n + 1 là hai số chính phương thì n chia hết cho 40.

Giải :

Giả sử $2n + 1 = m^2$ và $3n + 1 = k^2$ $(m, k \in N^*)$.

m lẻ $\Rightarrow 2n = m^2 - 1 = (m-1)(m+1) \vdots 4 \Rightarrow n$ chẵn $\Rightarrow$ k lẻ.

Từ $3n + 1 = k^2$ suy ra $3n = k^2 - 1 = (k-1)(k+1) \vdots 8$ (do k - 1, k + 1 là hai số chẵn liên tiếp), do đó $n \vdots 8$. (1)

Một số chính phương khi chia cho 5 chỉ có thể dư 0, 1, 4.

Nếu $n \equiv 1 \pmod 5$ thì $2n + 1 \equiv 3 \pmod 5$, vô lí.

Nếu $n \equiv 2 \pmod 5$ thì $3n + 1 \equiv 2 \pmod 5$, vô lí.

Nếu $n \equiv 3 \pmod 5$ thì $2n + 1 \equiv 2 \pmod 5$, vô lí.

Nếu $n \equiv 4 \pmod 5$ thì $3n + 1 \equiv 3 \pmod 5$, vô lí.

Vậy : $n \vdots 5$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $n \vdots 40$.

Bài 165.

Chứng minh rằng nếu hiệu các lập phương của hai số nguyên liên tiếp là bình phương của một số tự nhiên n thì n là tổng của hai số chính phương liên tiếp.

Giải :

Giả sử $n^2 = (k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$, suy ra :

$$4n^2 = 12k^2 + 12k + 4 = 3(2k+1)^2 + 1 \Rightarrow (2n-1)(2n+1) = 3(2k+1)^2$$

i) Nếu $2n - 1 \vdots 3$ thì do (2n - 1, 2n + 1) = 1 và $\frac{2n-1}{3} \cdot (2n+1) = (2k+1)^2$ là số chính phương nên :

$$\begin{cases} 2n - 1 = 3t^2 \\ 2n + 1 = s^2 \end{cases}$$

với st = 2k + 1 ; (s, t) = 1 và s không chia hết cho 3.

Vì s lẻ, không chia hết cho 3 nên $s = 6m \pm 1$. Khi đó

$$2n + 1 = s^2 = (6m \pm 1)^2 = 36m^2 \pm 12m + 1 \Rightarrow 3t^2 = 2n - 1 = 36m^2 \pm 12m - 2 \text{ (vô lí).}$$

ii) Nếu $2n + 1 \vdots 3$, tương tự như trên ta có :

$$\begin{cases} 2n - 1 = t^2 \\ 2n + 1 = 3s^2 \end{cases}$$

t lẻ không chia hết cho 3, nên $t = 6l \pm 1$. Khi đó

$$2n - 1 = t^2 = (6l \pm 1)^2 = 36l^2 \pm 12l + 1 \Rightarrow n = 18l^2 \pm 6l + 1 = (3l)^2 + (3l \pm 1)^2 \text{ (đpcm).}$$

Bài 166.

Cho m, $n \in N^*$, chứng minh rằng nếu $mn + 1 \vdots 24$ thì $m + n \vdots 24$.

Giải :

Giả sử : $mn + 1 = 24k$ ($k \in \mathbf{N}^*$) (1)

i) Chứng minh $m + n \vdots 3$.

Nếu $m \equiv 1 \pmod 3$ và $n \equiv 1 \pmod 3$ thì $mn + 1 \equiv 2 \pmod 3$, vô lí.

Nếu $m \equiv -1 \pmod 3$ và $n \equiv -1 \pmod 3$ thì $mn + 1 \equiv 2 \pmod 3$, vô lí.

Nếu $n \equiv 1 \pmod 3$ và $m \equiv -1 \pmod 3$ thì $m + n \vdots 3$.

ii) Chứng minh $m + n \vdots 8$.

Từ (1) suy ra m, n là hai số lẻ.

Xét : $A = mn + 1 + m + n = (m + 1)(n + 1)$;

$B = mn + 1 - m - n = (m - 1)(n - 1)$

Suy ra : $A.B = (m^2 - 1)(n^2 - 1)$.

Mà $m^2 - 1 = (m-1)(m+1) \vdots 8$ (vì m - 1, m + 1 là hai số chẵn liên tiếp) ; $n^2 - 1 \vdots 8$ do đó $A.B \vdots 64$. Suy ra $A \vdots 8$ hoặc $B \vdots 8$ từ đó $m + n \vdots 8$ (đpcm).

Bài 167.

p là số nguyên tố lớn hơn 3 và p^n có 20 chữ số ($n \in N$). Chứng minh rằng trong các chữ số p^n có ít nhất 3 chữ số trùng nhau.

Giải :

Giả sử trong 20 chữ số của p^n không có 3 chữ số trùng nhau thì mỗi chữ số trong 10 số 0, 1, 2, ... , 9 của số p^n gặp đúng 2 lần (nếu không thì p^n có không tới 20 chữ số). Do đó tổng các chữ số của p^n là :

$$2(0 + 1 + 2 + ... + 9) = 90 \Rightarrow p^n \vdots 3 \Rightarrow p \vdots 3 \text{, vô lí.}$$

Bài 168.

Tại các ô của bảng 100×100 ta viết vào số nguyên sao cho hiệu của hai số cạnh nhau bất kì không vượt quá 20. Chứng minh rằng tìm được ít nhất 3 ô có cùng viết 1 số.

Giải :

Gọi m là số nhỏ nhất trong các số viết trên bảng. Vì hiệu của 2 số bất kì không vượt quá 20 nên số lớn nhất có thể viết trên bảng không vượt quá

$$m + (199 - 1).20 = m + 3960.$$

Vậy số lượng các số khác nhau trên bảng không vượt quá 3961 số.

Vì trên bảng có 10000 số và 10000 > 3961 × 2 nên theo nguyên tắc Dirichlet tồn tại 3 ô viết cùng một số.

Bài 169.

Chứng minh rằng trong 15 số tự nhiên lớn hơn 1 không vượt quá 2004 và đôi một nguyên tố cùng nhau tìm được một số là số nguyên tố.

Giải :

Giả sử $n_1, n_2, ..., n_{15}$ là các số thỏa yêu cầu bài toán. Giả sử tất cả chúng đều là hợp số. Gọi p_i là ước nguyên tố nhỏ nhất của n_i (i = 1; 2; ... ; 15). Gọi p là số lớn nhất trong các số $p_1, p_2, ..., p_{15}$. Do các số $n_1, n_2, ..., n_{15}$ đôi một nguyên tố cùng nhau nên các số $p_1, p_2, ..., p_{15}$ khác nhau tất cả.

Số nguyên tố thứ 15 là số 47 (2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47) ta có $p \geq 47$. Đối với số n có ước nguyên tố nhỏ nhất là p thì $p \leq \sqrt{n}$ suy ra $n \geq p^2 \geq 47^2 > 2004$, vô lí.

Vậy trong 15 số $n_1, n_2, ..., n_{15}$ tìm được một số nguyên tố.

Bài 170.

Cho số tự nhiên $n \geq 2$, với n nhỏ nhất nào để tìm được các số nguyên $a_1, a_2, ..., a_n$ thỏa điều kiện

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = a_1 a_2 \cdots a_n = 2002.$$

Giải :

Ta có : 2002 = 2.7.11.13.

2002 chẵn nhưng không chia hết cho 4 nên trong các số $a_1, a_2, ... a_n$ chỉ có đúng một số chẵn. Vì tổng $a_1 + a_2 + ... + a_n = 2002$ chẵn nên ngoài một số chẵn trên phải có một số chẵn các số lẻ. Do đó n là số lẻ.

• Với n = 3 giả sử $a_1 \geq a_2 \geq a_3$ khi đó $a_1 \geq \frac{2002}{3}$ và a_1 là ước của 2002 nên $a_1 = 2002$ hoặc $a_1 = 1001$.

- Nếu $a_1 = 2002$ thì $|a_2| = |a_3| = 1$ và a_2, a_3 cùng dấu.

- Nếu $a_1 = 1001$ thì $|a_2| \leq 2$ và $|a_3| \leq 2$. Khi đó $a_1 + a_2 + a_3 < 2002$, vô lí.

• Với n = 5 chọn $a_1 = 2002$, $a_2 = a_3 = 1$, $a_4 = a_5 = -1$.

Vậy n nhỏ nhất cần tìm là n = 5.

Bài 171.

Tìm 3 số tự nhiên đôi một khác nhau và lớn hơn 1 thỏa điều kiện : Tích hai số bất kì trong ba số ấy cộng với 1 chia hết cho số thứ ba.

Giải :

Giả sử a, b, $c \in \mathbf{N}$ và $2 \leq a < b < c$ thỏa :

$$ab + 1 \vdots c \,;\; ac + 1 \vdots b \,;\; bc + 1 \vdots a.$$

Suy ra :

$$(ab+1)(ac+1)(bc+1) \vdots abc \Rightarrow ab + bc + ca + 1 \vdots abc \Rightarrow ab + bc + ca + 1 \geq abc$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{abc} \geq 1.$$

Nếu $b \geq 4$ thì $c \geq 5$, khi đó :

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{abc} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{40} = \frac{39}{40} < 1, \text{ vô lí.}$$

Vậy $3 \leq b < 4$, suy ra b = 3, a = 2.

Từ $ab + 1 = 7 \vdots c \Rightarrow c = 7$.

Thử lại (a, b, c) = (2, 3, 7) thỏa điều kiện.

Bài 172.

Tìm số nguyên tố $\overline{abcd}$ sao cho $\overline{ab}$, $\overline{ac}$ là số nguyên tố và $b^2 = \overline{cd} + b - c$.

Giải :

Vì $\overline{abcd}, \overline{ab}, \overline{ac}$ nguyên tố nên b, c, d lẻ và khác 5. Ta có

$$b^2 = \overline{cd} + b - c \Leftrightarrow b(b-1) = 9c + d \geq 10 \Rightarrow b \geq 4 \Rightarrow b = 7 \text{ hoặc } b = 9.$$

i) Với b = 7 : 9c + d = 42 $\Rightarrow d \vdots 3 \Rightarrow d = 3$ hoặc d = 9.

- Nếu d = 3 thì $c = \frac{39}{9} \notin \mathbb{N}$ (loại).

- Nếu d = 9 thì $c = \frac{33}{9} \notin \mathbb{N}$ (loại).

ii) Với b = 9 thì 9c + d = 72 $\Rightarrow d = 9, c = 7$.

$\overline{a9}$ và $\overline{a7}$ nguyên tố $\Rightarrow a = 1$.

Vậy số $\overline{abcd} = 1979$ thỏa yêu cầu bài toán.

Chương 4.

PHƯƠNG TRÌNH NGHIỆM NGUYÊN

§ 1. NGHIỆM NGUYÊN CỦA PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

Phương trình bậc nhất hai ẩn có dạng :

$$ax + by = c \ \ (a \neq 0 ;\ b \neq 0 ;\ a, b, c \in \mathbf{Z}) \qquad (1)$$

1. Định lí về sự tồn tại nghiệm nguyên

a) Định lí :

Phương trình (1) có nghiệm nguyên $\Leftrightarrow (a, b) \mid c$.

Chứng minh : Giả sử (x_0, y_0) là nghiệm nguyên của (1) ta có $ax_0 + by_0 = c$, nếu $d = (a, b)$ thì $d \mid ax_0 + by_0 = c$. Ngược lại, giả sử $d = (a, b) \mid c$ thì $c = dc_1$ và ta có hai số nguyên x_1, y_1 sao cho

$$\underline{d = ax_1 + by_1} \Rightarrow dc_1 = a(a_1c_1) + b(y_1c_1) = c.$$

Vậy (1) có nghiệm nguyên.

b) Hệ quả :

Nếu (a, b) = 1 thì phương trình (1) luôn có nghiệm nguyên.

Thí dụ : Phương trình 32x + 40y = 38 không có nghiệm nguyên vì $(32, 40) = 8 \nmid 38$.

2. Tìm nghiệm nguyên của phương trình (1)

Giả sử $d = (a, b) \mid c$. Chia hai vế của (1) cho d ta được :

$$\frac{a}{d}x + \frac{b}{d}y = \frac{c}{d} \text{ với } \left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1.$$

Để tìm nghiệm nguyên của (1) ta có thể giả sử rằng (a, b) = 1.

a) Định lí :

Nếu (x_0, y_0) là một nghiệm nguyên của phương trình ax + by = c với (a, b) = 1 thì (1) có vô số nghiệm nguyên và nghiệm tổng quát của (1) được cho bởi công thức :

$$\begin{cases} y = x_0 + bt \\ y = y_0 - at \end{cases} \text{ với } t \in \mathbf{Z} \ ;\ (x_0, y_0) \text{ gọi là nghiệm nguyên của (1)}$$

Chứng minh : Mọi cặp số $(x_0 + bt, y_0 - at)$ với $t \in \mathbf{Z}$ đều là nghiệm nguyên của (1). Thật vậy, ta có : $a(x_0 + bt) + b(y_0 - at) = ax_0 + by_0 = c$.

Mọi nghiệm (x_1, y_1) của (1) đều có dạng : $x_1 = x_0 + bt$; $y_1 = y_0 - at$. Thật vậy, từ hai đẳng thức $ax_0 + by_0 = c$ và $ax_1 + by_1 = c$ suy ra :

$$a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0) = 0 \Rightarrow x_1 - x_0 \vdots b \text{ (vì } (a, b) = 1)$$

$$\Rightarrow x_1 - x_0 = bt \Rightarrow x_1 = x_0 + bt.$$

Khi đó $abt + b(y_1 - y_0) = 0 \Rightarrow y_1 = y_0 - at$. Vậy nghiệm nguyên tổng quát của (1) có dạng : $x = x_0 + bt$; $y = y_0 - at$ hay $x = x_0 - bt$; $y = y_0 + at$.

b) Thí dụ :

Tìm $x \in \mathbf{Z}$ để $\dfrac{5x-1}{7} \in \mathbf{Z}$.

Ta tìm x, $y \in \mathbf{Z}$ thỏa : $5x - 1 = 7y \Leftrightarrow 5x - 7y = 1$.

Cách 1.

Ta có : $$5x = 7y + 1 \Rightarrow x = y + \frac{2y+1}{5}$$

Đặt : $$2y + 1 = 5t,\ t \in \mathbf{Z}. \quad (1)$$

Ta có : $$x = \frac{5t-1}{2} + t = \frac{7t-1}{2} = 3t + \frac{t-1}{2}. \quad (2)$$

Đặt : $$t - 1 = 2m \Rightarrow t = 2m + 1.$$

Thay $t = 2m + 1$ vào (1) và (2) ta được : $x = 7m + 3$; $y = 5m + 2$ với $m \in \mathbf{Z}$.

Vậy $x \equiv 3 \pmod 7$ thì $\dfrac{5x-1}{7} \in \mathbf{Z}$.

Cách 2.

Phương trình $5x - 7y = 1$ có nghiệm riêng là $x = 3$, $y = 2$ nên nghiệm nguyên tổng quát là :

$$\begin{cases} x = 3 + 7m \\ y = 2 + 5m \end{cases} \quad m \in \mathbf{Z}$$

Chú ý : Nếu (x_0, y_0) là nghiệm riêng của phương trình $ax + by = 1$ thì (cx_0, cy_0) là nghiệm riêng của phương trình $ax + by + c$.

3. Tìm nghiệm riêng của phương trình ax + by = 1 với (a, b) = 1.

Thuật chia Euclid để tìm UCLN(a, b).

Giả sử : $a = bq_0 + r_1$; $b = r_1q_1 + r_2$; ... ; $r_{k-1} = r_kq_k + 1$.

Lấy các "thương" trong dãy phép chia của thuật toán rồi tính :

$$m = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{\dots + \cfrac{1}{q_k}}}} = \frac{p}{q}$$

Nghiệm riêng của $ax + by = 1$ thỏa

$$\begin{cases}|x_0| = p \\ |y_0| = q\end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases}|x_0| = q \\ |y_0| = p\end{cases}$$

Thử từng trường hợp để xác định dấu của x_0, y_0.

Thí dụ : Tìm nghiệm nguyên của phương trình $5x - 7y = 3$.

Trước hết tìm nghiệm riêng của $5x - 7y = 1$.

Thuật toán Euclid cho 7 và 5 :

$$7 = 5.1 + 2 \; ; \; 5 = 2.2 + 1$$

Tính $m = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

$x_0 = 3, y_0 = 2$ là nghiệm riêng của $5x - 7y = 1 \Rightarrow (9,6)$ là nghiệm riêng của $5x - 7y = 3$.

$\Rightarrow 5x - 7y = 5.9 - 7.6$

Nghiệm nguyên tổng quát của $5x - 7y = 3$ là :

$$\begin{cases}x = 9 + 7t \\ y = 6 + 5t\end{cases} \text{ hay } \begin{cases}x = 2 + 7m \\ y = 1 + 5m\end{cases} \quad m \in \mathbf{Z}$$

$\Rightarrow 5(x - 9) = 7(y - 6)$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x - 9 = 7t \\ y - 6 = 5t\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x = 9 + 7t \\ y = 6 + 5t\end{cases}$

B. CÁC DẠNG TOÁN

Bài 173.

Tìm nghiệm nguyên của các phương trình sau :

a) $\boldsymbol{x - 3y = 5}$; **(1)**

b) $\boldsymbol{2x - 5y = 10}$; **(2)**

c) $\boldsymbol{11x - 20y = 49}$. **(3)**

Giải :

a) *Cách 1 :* Đặt y = t ta có x = 5 + 3t, vậy nghiệm nguyên tổng quát của phương trình là :

$$\begin{cases}x = 5 + 3t \\ y = t\end{cases} \quad t \in \mathbf{Z}.$$

Cách 2 : Ta có x = 5, y = 0 là nghiệm riêng của (1) nên nghiệm nguyên tổng quát là :

$$\begin{cases}x = 5 + 3t \\ y = 0 + t\end{cases} \quad t \in \mathbf{Z}.$$

b) *Cách 1 :* Ta có $(2) \Leftrightarrow x = \frac{5y + 10}{2} \Leftrightarrow x = 2y + 5 + \frac{y}{2}$.

$\frac{y}{2} \in \mathbf{Z}$ nên đặt $y = 2t$, $t \in \mathbf{Z}$, khi đó $x = 5t + 5$.

Vậy nghiệm nguyên tổng quát của (2) là :

$$\begin{cases} x = 5 + 5t \\ y = 2t \end{cases} \quad t \in \mathbf{Z}.$$

Cách 2. Ta có x = 5, y = 0 là nghiệm riêng của (2) nên nghiệm nguyên tổng quát của (2) là :

$$\begin{cases} x = 5 + 5t \\ y = 0 + 2t \end{cases} \quad t \in \mathbf{Z}.$$

c) *Cách 1.* $(3) \Leftrightarrow x = \dfrac{20y + 49}{11} = 4 + 2y + \dfrac{5 - 2y}{11}$.

Đặt : $\dfrac{5 - 2y}{11} = t \in \mathbf{Z} \Rightarrow 2y = 5 - 11t \Rightarrow y = 2 - 5t + \dfrac{1 - t}{2}$.

Đặt : $\dfrac{1 - t}{2} = m \in \mathbf{Z} \Rightarrow t = 1 - 2m \Rightarrow y = 2 - 5(1 - 2m) + m = 11m - 3$.

Khi đó : $x = 4 + 2(11m - 3) + \dfrac{5 - 2(11m - 3)}{11} = 20m - 1$.

Vậy nghiệm nguyên tổng quát của (3) là :

$$\begin{cases} x = 20m - 1 \\ y = 11m - 3 \end{cases} \quad m \in \mathbf{Z}.$$

Cách 2 : Ta có (- 1 ; - 3) là nghiệm riêng của (3) nên nghiệm nguyên tổng quát của (2) là :

$$\begin{cases} x = -1 + 20m \\ y = -3 + 11m \end{cases} \quad m \in \mathbf{Z}.$$

Bài 174.

Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho :

a) $n \vdots 9$ ***và*** $n + 1 \vdots 25$ ***;***

b) $n \vdots 21$ ***và*** $n + 1 \vdots 165$ ***;***

c) $n \vdots 9$ ***,*** $n + 1 \vdots 25$ ***và*** $n + 2 \vdots 4$ ***.***

(Thi HSG miền Bắc 1974)

Giải :

a) Giả sử n = 9x, n + 1 = 25y với $x, y \in \mathbf{N}$. Khi đó :

$$25y - 9x = 1. \qquad (1)$$

x = 11, y = 4 là nghiệm riêng của (1) nên (1) có nghiệm nguyên tổng quát là :

$$\begin{cases} x = 11 + 25t \\ y = 4 + 9t \end{cases} \quad t \in \mathbf{Z}.$$

Vậy n = 99 + 225t với $t \in \mathbf{N}$.

b) Giả sử n = 21x, n + 1 = 165y, $x, y \in \mathbf{N} \Rightarrow 165y - 21x = 1$ không có nghiệm nguyên vì $(165, 21) = 3 \nmid 1$.

c) Theo a) ta có n = 99 + 225t, khi đó :

$$n + 2 = 101 + 225t = 4k \Leftrightarrow 4k - 225t = 101 \qquad (2)$$

Ta có k = - 56, t = - 1 là nghiệm riêng của phương trình 4k - 225t = 1 nên (- 56.101, - 100) là nghiệm riêng của (2). Vậy nghiệm riêng tổng quát của (2) là

$$\begin{cases} k = -5656 + 225m \\ t = -101 + 4m \end{cases}$$

$t \geq 0 \Rightarrow m \geq 26$. Vậy $n = -22626 + 900m$, $m \geq 26$.

Bài 175.

Tìm nghiệm nguyên dương của các phương trình :

a) 5x + 4y = 3 ; *(1)*

b) 3x + 7y = 55 . *(2)*

Giải :

a) *Cách 1 :* Ta có x = 3, y = - 3 là nghiệm riêng của (1) nên nghiệm nguyên tổng quát của (1) là :

$$\begin{cases} x = 3 - 4t \\ y = -3 + 5t \end{cases} \quad t \in \mathbf{Z}.$$

Ta tìm $t \in \mathbf{Z}$ để

$$\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - 4t > 0 \\ -3 + 5t > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{3}{5} < t < \frac{3}{4}.$$

Không tìm được t nguyên thỏa $\frac{3}{5} < t < \frac{3}{4}$. Vậy (1) không có nghiệm nguyên dương.

Cách 2. Vì $x, y \in \mathbf{N}^*$ nên $x, y \geq 1 \Rightarrow 5x + 4y \geq 9$. Phương trình không có nghiệm nguyên dương.

b) Ta có x = 16, y = 1 là nghiệm riêng của (2) nên (2) có nghiệm nguyên tổng quát là :

$$\begin{cases} x = 16 + 7t \\ y = 1 - 3t \end{cases} \quad t \in \mathbf{Z}.$$

Ta tìm $t \in \mathbf{Z}$ để :

$$\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16 + 7t > 0 \\ 1 - 3t > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{16}{7} < t < \frac{1}{3}.$$

Ta tìm được $t = -2 ; -1 ; 0$, từ đó ta có 3 nghiệm nguyên dương là :

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 7 \end{cases} ; \quad \begin{cases} x = 9 \\ y = 4 \end{cases} ; \quad \begin{cases} x = 16 \\ y = 1. \end{cases}$$

Bài 176.

Tìm số tự nhiên nhỏ nhất chia hết cho 7 và khi chia cho 2, 3, 4, 5,

6 luôn có số dư là 1.

Giải :

Gọi n là số tự nhiên cần tìm thì n = 7x và n - 1 = [2, 3, 4, 5, 6].y .
BCNN [2, 3, 4, 5, 6] = 60. Khi đó :

$$\begin{cases} n = 7x \\ n - 1 = 60y \end{cases} \Rightarrow 7x - 60y = 1 \qquad (1)$$

Thuật chia Euclid cho 60 và 7 :

$$60 = 7.8 + 4$$
$$7 = 4.1 + 3$$
$$4 = 3.1 + 1$$

Thương $m = 8 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}} = \dfrac{17}{2}$.

Thử trực tiếp ta thấy x = - 17, y = - 2 là nghiệm riêng của (1) nên (1) có nghiệm nguyên tổng quát là :

$$\begin{cases} x = -17 + 60t \\ y = -2 + 7t \end{cases} \quad t \in \mathbf{Z}$$

Khi đó n = 7x = - 119 + 420t , $t \in \mathbf{Z}$.

Với t = 1 thì n = 301 là số tự nhiên nhỏ nhất chia hết cho 7 và chia cho 2, 3, 4, 5, 6 có dư là 1.

Bài 177.

Tìm các chữ số x, y sao cho khi chia $\overline{xxxxx}$ cho $\overline{yyyy}$ có thương là 16 dư là r, còn khi chia $\overline{xxxx}$ cho $\overline{yyy}$ cũng có thương là 16 nhưng số dư nhỏ hơn r là 2000.

Giải :

Theo đề bài ta có :

$$\overline{xxxxx} = 16\overline{yyyy} + r \qquad (1)$$

$$\overline{xxxx} = 16\overline{yyy} + r - 2000 \qquad (2)$$

Lấy (1) trừ (2) theo từng vế ta được :

$$\overline{x0000} = 16.\overline{y000} + 2000 \Leftrightarrow 10x = 16y + 2 \Leftrightarrow 5x - 8y = 1 \qquad (3)$$

x = 5, y = 3 là nghiệm riêng của (3) nên (3) có nghiệm nguyên tổng quát là :

$$\begin{cases} x = 5 + 8t \\ y = 3 + 5t \end{cases} \quad t \in \mathbf{Z}$$

Vì $0 < x, y \le 9$ nên t = 0 từ đó suy ra x = 5 ; y = 3.

Bài 178.

Cho $m \in Z$, biện luận theo m nghiệm nguyên của các phương trình sau :

a) $6x - 11y = m + 2$ ***(1)***

b) $15x + 24y = m - 1$ ***(2)***

Giải :

a) Ta có (6, 11) = 1 nên phương trình (1) luôn có nghiệm nguyên .

x = 2, y = 1 là nghiệm riêng của 6x - 11y = 1 nên x = 2m + 4 và y = m + 2 là nghiệm riêng của (1). Vậy nghiệm nguyên tổng quát của (1) là :

$$\begin{cases} x = 2m + 4 + 11t \\ y = m + 2 + 6t \end{cases} \quad t \in Z$$

b) (2) có nghiệm nguyên $\Leftrightarrow (15, 25) = 5 \mid (m - 1) \Leftrightarrow m = 5k + 1 \ (k \in Z)$. Khi *đó :*

$$(2) \Leftrightarrow 3x + 5y = k \qquad (3)$$

Ta có (- 3, 2) là nghiệm riêng của 3x + 5y = 1 nên (- 3k, 2k) là nghiệm riieng của (3).

(3) có nghiệm nguyên tổng quát là :

$$\begin{cases} x = -3k + 5t \\ y = 2k - 3t \end{cases} \quad t \in Z$$

Biện luận :

Nếu $m \not\equiv (1) \pmod 5$ thì (2) không có nghiệm nguyên.

Nếu $m \equiv 1 \pmod 5$ thì nghiệm nguyên tổng quát của (2) là :

$$\begin{cases} x = -3k + 5t \\ y = 2k - 3t \end{cases} \text{ với } t \in Z \text{ và } k = \frac{m-1}{5}.$$

Bài 179.

a) Trên đường thẳng $8x - 13y + 6 = 0$, hãy tìm các điểm nguyên (là điểm có tọa độ là các số nguyên) nằm giữa hai đường thẳng $x = -10$ và $x = 50$.

b) Chứng minh rằng trong hình chữ nhật giới hạn bởi các đường thẳng $x = 6$, $x = 42$, $y = 2$, $y = 17$ không có điểm nguyên nào thuộc đường thẳng $3x + 5y = 7$.

Giải :

a) Ta có (5, 3) là nghiệm riêng của phương trình 8x - 13y = 1 nên (- 30, - 18) là nghiệm riêng của phương trình 8x - 13y = - 6. Nghiệm nguyên tổng quát của phương trình 8x - 13y = - 6 là :

$$\begin{cases} x = -30 + 13t \\ y = -18 + 8t \end{cases} \quad t \in \mathbf{Z}.$$

Để các điểm nguyên nằm giữa hai đường thẳng x = - 10 và x = 50 ta phải tìm t nguyên thỏa :

$$-10 < -30 + 13t < 50 \Leftrightarrow 20 < 13t < 80 \Leftrightarrow t \in \{2,3,4,5,6\}.$$

Khi đó ta tìm được 5 điểm nguyên là : (- 4 ; - 2) ; (9, 6) ; (22 ; 14) ; (35 ; 22) ; (48 ; 30).

b) (- 1, 2) là nghiệm riêng của phương trình 3x + 5y = 7, nên nghiệm nguyên tổng quát của phương trình đó là :

$$\begin{cases} x = -1 + 5t \\ y = 2 - 3t \end{cases} \quad t \in \mathbf{Z}.$$

Ta tìm t nguyên thỏa hệ :

$$\begin{cases} 6 < -1 + 5t < 42 \\ 2 < 2 - 3t < 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{7}{5} < t < \dfrac{43}{5} \\ -5 < t < 0 \end{cases}.$$ Không có t nguyên.

Vậy trên đường thẳng 3x + 5y = 7 không có điểm nguyên nào nằm trong hình chữ nhật đã cho.

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Tìm nghiệm nguyên của phương trình sau :

a) 3x - y = 13 ; b) 23x + 53y = 109 ;

c) 12x - 5y = 21 ; d) 12x + 17y = 41.

2. Tìm nghiệm nguyên dương của các phương trình sau :

a) 4x + 11y = 47 ; b) 12x - 7y = 45 ;

c) 3x + 2y = 555.

3. Tìm nghiệm nguyên của các phương trình sau :

a) 5x + 3y = 2 ; b) 38x + 117y = 15 ;

c) 21x - 17y = - 3.

4. Tìm tất cả số tự nhiên n để 5n + 2 chia hết cho 17.

5. Tìm các số nguyên khi chia cho 19 có dư là 4 và chia cho 11 có dư là 1.

6. Tìm số nguyên n sao cho 3n - 1 chia hết cho 7 và 7n - 1 chia hết cho 5.

7. Cho $n \in \mathbf{Z}$, tìm nghiệm nguyên các phương trình sau :

a) 3x - (m - 2)y = m + 1 ; b) 5x + (3m + 1)y = m + 1 ;

c) 3x + (2m - 1)y = m + 1. (1)

8. Giải bài toán cổ :

"Trăm trâu, trăm cỏ,

Trâu đứng ăn năm,

Trâu nằm ăn ba,

Lụ khụ trâu già,

Ba con một bó"

Hỏi có bao nhiêu trâu đứng, trâu nằm, trâu già ?

9. Trên trục hoành hãy tìm tất cả những điểm nguyên mà tại đó ta dựng được các đường thẳng cùng phương với trục tung và cắt các đường thẳng $x = 2 + 5y$, $x = 1 + 8y$ tại các điểm nguyên.

$3x + (2m-1)y = m+1 \quad (1)$

HƯỚNG DẪN GIẢI – ĐÁP SỐ

Bài 7c/144 : $d = (3, 2m-1) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} d=1 \\ d=3 \end{array}\right.$

1. a) $x = t$, $y = 3t - 13$;

b) $x = 53t - 16$, $y = 9 - 23t$; • $d = 1$ $(m; -1)$ là nghiệm riêng

c) $x = 5t - 2$, $y = 12t - 9$; $3x + (2m-1)y = 3m - (2m-1)$

d) $x = 17t + 2$, $y = 1 - 12t$. $3(x - m) = -(2m-1)(y+1)$

2. a) $\begin{cases} x = 20 - 11t \\ y = -3 + 4t \end{cases}$ $x > 0, y > 0 \Rightarrow t = 1$; $(9,1)$. $\Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 = (2m-1)t \\ y + 1 = -3t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \\ y = \end{cases}$

b) $\begin{cases} x = 2 + 7t \\ y = -3 + 12t \end{cases}$ $x > 0, y > 0 \Rightarrow t \in \mathbf{N}^*$. • $d = 3$ • $m+1 \not\vdots\, 3$ pt VN

c) $\begin{cases} x = 10t - 555 \\ y = 555 - 9t \end{cases}$ $t \in \{56, 57, 58, 59, 60, 61\}$. • $m + 1 \,\vdots\, 3 \Rightarrow m = 3k+1$

pt trở thành

$x + (2k-1)y = k$

3. a) $x = 3t - 2$, $y = 4 - 5t$;

b) $(-40, 13)$ là nghiệm riêng ;

c) $(-4, -5)$ là nghiệm riêng. $\Leftrightarrow \begin{cases} x = k - (2k-1)t \\ y = t \end{cases}$

4. $5n + 2 = 17m$, $n = -14 + 17t$ $(t \geq 1)$.

5. $n = 209t + 23$; $t \in \mathbf{N}$.

6. $\begin{cases} 3n - 1 = 7u \\ 7n - 1 = 5v \end{cases} \Rightarrow n = -2 + 35t,\ t \in \mathbf{Z}$. $\Rightarrow 49u - 15v = -4$ $u_0 = -1$, $v_0 = -3$ $\Rightarrow \begin{cases} u = 15t - 1 \\ v = 49 - 3 \end{cases}$

7. a) Điều kiện để phương trình có nghiệm nguyên là $d = (3, m - 2) \mid (m + 1)$ ta có $d = 1$ hoặc $d = 3$.

Với $d = 1$: $(1; -1)$ là nghiệm riêng

Với $d = 3$: $m = 3k - 1$; $x - (k - 1)y = k$ có nghiệm riêng $(1 ; -1)$.

8. Gọi x là số trâu đứng, y là số trâu nằm, $100 - (x + y)$ là số trâu già, $x, y \in \mathbf{N}^*$; $x, y < 100$. Ta có phương trình :

$$5x + 3y + \frac{100 - x - y}{3} = 100 \Leftrightarrow 7x + 4y = 100.$$

Đáp số $(x, y, z) = (4, 18, 78)$; $(8, 11, 81)$; $(12, 4, 84)$.

9. Tìm $x \in \mathbf{Z}$ thoả $x = 2 + 5y = 1 + 8z$ với $y, z \in \mathbf{Z}$.

§ 2. PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT NHIỀU ẨN

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

Phương trình bậc nhất nhiều ẩn có dạng :

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = c \quad (a_k, c \in \mathbf{Z}) \qquad (2)$$

1. Định lí :

$$(2) \text{ có nghiệm nguyên } \Leftrightarrow (a_1, a_2, ..., a_n) \mid c.$$

2. Cách giải :

Đưa (2) về một trong hai dạng sau :

a) Có một hệ số của một ẩn bằng 1, giả sử $a_1 = 1$, khi đó

$$x_1 = -a_2x_2 - a_3x_3 - \cdots - a_nx_n \,;\; x_2, x_3, \ldots, x_n \in \mathbf{Z}.$$

Nghiệm nguyên của (2) là $(-a_2x_2 - \cdots - a_nx_n \,; x_2 ;... ; x_n) ; x_2,...,x_n \in \mathbf{Z}$.

b) Có hai hệ số nguyên tố cùng nhau, giả sử $(a_1, a_2) = 1$.

$$(2) \Leftrightarrow a_1x_1 + a_2x_2 = c - a_3x_3 - \cdots - a_nx_n.$$

Tìm nghiệm nguyên x_1, x_2 theo $x_3, \ldots, x_n$.

B. CÁC DẠNG TOÁN

Bài 180.

Giải phương trình trên tập số nguyên :

$$6x + 15y + 10z = 3 \qquad (1)$$

Giải :

Cách 1 :

$$(1) \Leftrightarrow x + 10(y+z) + 5(x+y) = 3.$$

Đặt $u = y + z$; $v = x + y$. Khi đó :

$$(1) \Leftrightarrow x + 10u + 5v = 3.$$

Nghiệm nguyên tổng quát của (1) là :

$$\begin{cases} x = 3 - 10u - 5v \\ y = -3 + 10u + 4v \\ z = 3 - 9u - 6v. \end{cases}$$

Cách 2 :

$$(1) \Leftrightarrow 6(x+z) + 15y = 3 - 4z$$

Đặt $u = x + z$, ta có phương trình :

$$15y + 4z = 3 - 6u$$

(- 1, 4) là nghiệm riêng của $15y + 4z = 1$ nên $(-3 + 6u\,,\ 12 - 24u)$ là nghiệm riêng của phương trình 15y + 4z = 3 - 6u, do đó nghiệm tổng quát là

$$\begin{cases} y=-3+6u+4t \\ z=12-24u-15t \end{cases} \quad (u,\ t\in \mathbf{Z})$$

Từ u = x + z suy ra x = u - z = u - (12 - 24u - 15t) = - 12 + 25u + 15t.

Vậy nghiệm nguyên của phương trình đã cho là :

$$\begin{cases} x=-12+25u+15t \\ y=-3+6u+4t \\ z=12-24u-15t \end{cases} \quad (u,\ t\in \mathbf{Z})$$

Bài 181.

Tìm tất cả các số nguyên x và y sao cho cả hai số 3x - y + 1 và 2x + 3y - 1 đều chia hết cho 7.

Giải :

Ta tìm nghiệm nguyên của hệ :

$$\begin{cases} 3x-y+1=7u & (1) \\ 2x+3y-1=7v & (2) \end{cases}$$

Nhân (1) với 3 rồi cộng với (2) ta được :

$$11x + 2 = 7(3u + v).$$

Đặt z = 3u + v ta có phương trình 11x - 7z = - 2 có nghiệm nguyên tổng quát là :

$$\begin{cases} x=-4+7t \\ z=-6+11t \end{cases} \quad t\in \mathbf{Z}.$$

Từ 3x - y + 1 = 7u $\Rightarrow y=3x+1-7u=-11+7(3t-u)\equiv 3 \pmod 7$.

Thử lại với $x\equiv 3 \pmod 7$ và $y\equiv 3 \pmod 7$ thì 3x - y + 1 và 2x + 3y - 1 đều chia hết cho 7.

Bài 182.

Giải các hệ phương trình sau trên tập các số nguyên

a) $\begin{cases} 3x+2y=1 \\ 3x+6y+2z=-1 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} 3x+2y=1 \\ 3x+6y+(m+1)z=m-2 \end{cases}$.

Giải :

a) Phương trình 3x + 2y = 1 có nghiệm nguyên là :

$$\begin{cases} x=1+2t \\ y=-1-3t \end{cases} \quad t\in \mathbf{Z}.$$

Thay vào phương trìnnh thứ hai của hệ ta được : $z-6t=1$ có nghiệm nguyên là

$$\begin{cases} z = 7 + 6k \\ t = 1 + k \end{cases}$$

Từ đó ta có :

$$\begin{cases} x = 1 - 2(1+k) \\ y = -1 - 3(1+k) \\ z = 7 + 6k \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x = 1 + 2l \\ y = -1 - 3l \\ z = 1 + 6l \end{cases} \quad (l = 1 + k \in \mathbf{Z})$$

b) Thay nghiệm nguyên của phương trình thứ nhất là :

$$\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -1 - 3t \end{cases}$$

vào phương trình thứ hai của hệ ta được :

$$(m + 1)z - 12t = m + 1.$$

Đặt $d = (m + 1, 12) \mid m + 1$ nên nghiệm nguyên tổng quát là :

$$\begin{cases} z = 1 + \dfrac{12}{d}l \\ t = \dfrac{m+1}{d}l \end{cases} \quad l \in \mathbf{Z} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 1 + \dfrac{2(m+1)}{d}l \\ y = -1 - \dfrac{3(m+1)}{d}l \\ z = 1 + \dfrac{12}{d}l \end{cases} \quad l \in \mathbf{Z}, \text{ với } d = (m + 1, 12).$$

Bài 183.

Trên trục hoành hãy tìm tất cả các điểm nguyên mà tại đó ta dựng được đường vuông góc với trục hoành cắt cả 3 đường thẳng $x - 5y = 2$, $x - 8y = 1$, $x - 11y = 3$ tại các điểm nguyên.

Giải :

Ta tìm các số nguyên x, y_1, y_2, y_3 thỏa hệ :

$$x = 2 + 5y_1 = 1 + 8y_2 = 3 + 11y_3.$$

Ta có :

$$\begin{cases} 8y_2 - 5y_1 = 1 & (1) \\ 5y_1 - 11y_3 = 1 & (2) \end{cases}$$

Nghiệm nguyên tổng quát của (1) là

$$\begin{cases} y_2 = -3 + 5t_1 \\ y_1 = -5 + 8t_1 \end{cases}; \ t_1 \in \mathbf{Z}$$

Nghiệm nguyên của (2) là :

$$\begin{cases} y_1 = -2 + 11t_2 \\ y_3 = -1 + 5t_2 \end{cases}; t_2 \in Z$$

Ta có : $y_1 = -5 + 8t_1 = -2 + 11t_2 \Leftrightarrow 8t_1 - 11t_2 = 3$. Phương trình này có nghiệm nguyên

$$\begin{cases} t_1 = -1 + 11k \\ t_2 = -1 + 8k \end{cases}; \quad k \in \mathbf{Z}$$

Thay t_1, t_2 vào y_1, y_2, y_3 ta được :

$$\begin{cases} y_1 = -13 + 88k \\ y_2 = -8 + 55k \\ y_3 = -6 + 40k \end{cases}; \quad k \in \mathbf{Z}$$

Vậy : $x = 2 + 5y_1 = -63 + 440k$; $k \in \mathbf{Z}$.

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Giải các hệ sau trên tập số nguyên :

a) $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 3x - 2y + 3z = 5 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 2x + 3y - 5z = 2 \\ 3x - 5y + 2z = 3 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} 3x - 5y - 3z = 1 \\ 2x - 3y + 3z = -3. \end{cases}$

2. Trong tất cả các số tự nhiên từ 200 đến 500 những số nào chia cho 4, 5, 7 có dư lần lượt là 3, 4, 5.

3. Tìm số tự nhiên nhỏ nhất khi chia cho 7, 5, 3, 11 được dư lần lượt là 3, 2, 1, 9.

4. Hãy tìm tất cả những điểm nguyên mà tại đó ta dựng được những đường thẳng vuông góc với hai trục tọa độ cắt cả ba đường thẳng sau tại các điểm nguyên : $2x - 3y = 4$; $5x - 7y = 2$; $3x + 5y = 3$.

HƯỚNG DẪN GIẢI – ĐÁP SỐ

1. a) $\begin{cases} x = -1 - 9t \\ y = -1 - 6t; \ t \in \mathbf{Z}. \\ z = 2 + 5t \end{cases}$

b) $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \quad ; t \in \mathbf{Z}. \\ z = t \end{cases}$

c) $\begin{cases} x = 6 - 24t \\ y = 4 - 15t; \ t \in \mathbf{Z}. \\ z = -1 + 5t \end{cases}$

2. Giải hệ $x = 4x_1 + 3 = 5x_2 + 4 = 7x_3 + 5$ với $x, x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{Z}$, suy ra $x = 19 + 140t$, $t \in \mathbf{Z}$ ta được hai số 299, 439.

3. 262.

4. Giải hai hệ :

$$\begin{cases}2x-3y_1=4\\5x-7y_2=2\\3x+5y_3=3\end{cases};\quad \begin{cases}2x_1-3y=4\\5x_2-7y=2\\3x_3+5y=3\end{cases},$$

ta được : $x = 41 + 105u$; $y = 24 + 30v$, với $u, v \in \mathbf{Z}$.

§ 3. MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP GIẢI PHƯƠNG TRÌNH NGHIỆM NGUYÊN

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Số 2 là số nguyên tố chẵn duy nhất.
2. Phương trình được đưa về dạng $f(x).g(x) = k$ với $f(x)$, $g(x)$ là các đa thức hệ số nguyên. Ta phân tích k ra thừa số nguyên tố rồi giải các hệ
$$\begin{cases}f(x)=m\\g(x)=n\end{cases}\text{ với } m.n=k$$
3. Phương trình đối xứng với các ẩn của x, y, z, ...
Khi tìm nghiệm nguyên dương ta có thể giả sử $1 \le x \le y \le z \le \cdots$
4. Không tồn tại số chính phương nằm giữa hai số chính phương liên tiếp.

B. CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. SỬ DỤNG PHÉP CHIA HẾT VÀ CHIA CÓ DƯ

Hai vế của phương trình nghiệm nguyên khi chia cho cùng một số có số dư khác nhau thì phương trình đó không có nghiệm nguyên.

Bài 184.

Tìm nghiệm nguyên của phương trình :

$$x^2 = 2y^2 \qquad (1)$$

Giải :

Rõ ràng $x = y = 0$ là nghiệm của (1).

Nếu $x_0, y_0 \neq 0$ và (x_0, y_0) là nghiệm của (1). Gọi $d = (x_0, y_0)$, suy ra $\left(\frac{x_0}{d}, \frac{y_0}{d}\right) = 1$.

Ta có :

$$x_0^2 = 2y_0^2 \Rightarrow \left(\frac{x_0}{d}\right)^2 = 2.\left(\frac{y_0}{d}\right)^2 \Rightarrow \frac{x_0}{d} \text{ chẵn} \Rightarrow 2\left(\frac{y_0}{d}\right)^2 \vdots 4 \Rightarrow \frac{y_0}{d} \text{ chẵn, vô lí.}$$

Vậy phương trình (1) chỉ có nghiêm nguyên duy nhất là (0, 0).

Bài 185.

Chứng minh rằng phương trình $x^2 - y^2 = k$ có nghiệm nguyên khi và chỉ khi $k \not\equiv 2$ (mod 4).

Giải :

Giả sử phương trình $x^2 - y^2 = k$ có nghiệm nguyên.

- Nếu $x, y \equiv 0$ hoặc $x, y \equiv 1$ (mod 2) thì $k = x^2 - y^2 \vdots 4$.
- Nếu $x \equiv 0$ (mod 2), $y \equiv 1$ (mod 2) thì $k = x^2 - y^2 \equiv -1$ (mod 4).
- Nếu $x \equiv 1$ (mod 2), $y \equiv 0$ thì $k = x^2 - y^2 \equiv 1$ (mod 4).

Vậy $k \not\equiv 2$ (mod 4).

Ngược lại, giả sử $k \not\equiv 2$ (mod 4).

i) k chẵn thì k = 4m khi đó x = m + 1, y = m - 1 là nghiệm nguyên của phương trình.

ii) k lẻ thì k = 2n + 1 khi đó x = n + 1, y = n là nghiệm nguyên của phương trình.

Vậy $x^2 - y^2 = k$ có nghiệm nguyên $\Leftrightarrow k \not\equiv 2$ (mod 4).

Bài 186.

Tìm nghiệm nguyên của phương trình : $x^2 - 2y^2 = 5$.

Giải :

i) Nếu $x \vdots 5$ thì từ $2y^2 = x^2 - 5 \vdots 5 \Rightarrow y \vdots 5 \Rightarrow x^2 - 2y^2 \vdots 25$, vô lí.

ii) Nếu $x \not\vdots 5$ thì $y \not\vdots 5$. Ta có $x^2 \equiv \pm 1$ (mod 5) và $y^2 \equiv \pm 1$ (mod 5) suy ra $x^2 - 2y^2 \equiv \pm 1, \pm 3$ (mod 5).

Vậy phương trình đã cho không có nghiệm nguyên.

Bài 187.

Chứng minh rằng tổng bình phương của ba số nguyên trong phép chia cho 8 không thể có dư là 7, từ đó suy ra phương trình $4x^2 + 25y^2 + 144z^2 = 2007$ không có nghiệm nguyên.

Giải :

Giả sử $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 7$ (mod 8), mà $x \equiv 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, 4$ (mod 8) nên $x^2 \equiv 0, 1, 4$ (mod 8) suy ra $y^2 + z^2 \equiv 7, 6, 3$ (mod 8). Nhưng $y^2 + z^2 \equiv 0, 1, 2, 4, 5$

(mod 8), vô lí. Vậy $x^2+y^2-z^2 \not\equiv 7 \pmod 8$.

Phương trình đã cho có thể viết $(2x)^2+(5y)^2+(12z)^2=8\times 125+7$. Từ đó suy ra phương trình không có nghiệm nguyên.

Bài 188.

Giải phương trình sau trên tập số nguyên $x_1^4+x_2^4+\cdots+x_7^4=2008$.

Giải :

i) Nếu x = 2k thì $x \vdots 16$.

ii) Nếu x = 2k + 1 thì $x^4-1=(x-1)(x+1)(x^2+1) \vdots 16$, vì $(x-1)(x+1) \vdots 8$ và $x^2+1 \vdots 2$.

Vậy $x^4 \equiv 0;1 \pmod{16}$. Do đó khi chia tổng $x_1^4+x_2^4+\cdots+x_7^4$ cho 16 có số dư không vượt quá 7, trong khi $2008 \equiv 8 \pmod{16}$. Suy ra phương trình đã cho không có nghiệm nguyên.

Bài 189.

Tìm nghiệm nguyên của phương trình sau : $19x^2+28y^2=729$.

Giải :

Ta có : $19x^2+28y^2=729 \Leftrightarrow 18x^2+27y^2+x^2+y^2=3\times 243 \vdots 3$

$$\Rightarrow x^2+y^2 \vdots 3 \Rightarrow x \vdots 3 \text{ và } y \vdots 3$$

(xét các dư khi chia x, y cho 3).

Đặt x = 3u, y = 3v $(u, v \in \mathbf{Z})$. Khi đó ta có :

$$19.(3u)^2+28.(3v)^2=729 \Leftrightarrow 19u^2+28v^2=81.$$

Tương tự, ta được : $u=3u_1$, $v=3v_1$ $(u_1, v_1 \in Z)$ và $19u_1^2+28v_1^2=9$, vô lí.

Vậy phương trình đã cho không có nghiệm nguyên.

Bài 190.

Giải phương trình nghiệm nguyên : $7x^2+13y^2=1820$.

(Thi HSG Quốc gia 1994)

Giải :

Ta có : 1820 = 7.13.20. Từ $7x^2+13y^2=1820$ suy ra $x \vdots 13$ và $y \vdots 7$.

Đặt x = 13u , y = 7v $(u, v \in \mathbf{Z})$. Phương trìnnh đã cho trở thành :

$$13u^2+7v^2=20 \qquad (1)$$

Suy ra $u^2 \le \frac{20}{13}$ và $v^2 \le \frac{20}{7}$. Vì $u, v \in \mathbf{Z}$ nên $|u| \le 1$ và $|v| \le 1$.

Thử lại chỉ có $|u|=|v|=1$ là thỏa (1). Vậy (1) có 4 nghiệm (u, v) là (1, 1), (1, - 1) , (- 1, 1) và (- 1, - 1).

Từ đó phương trình đã cho có 4 nghiệm nguyên (x, y) là : (13, 7), (- 13, 7), (13, - 7), (- 13, - 7).

Dạng 2. PHƯƠNG PHÁP PHÂN TÍCH

Tìm nghiệm nguyên của phương trình :

$$a(x + y) + b = cxy \text{ (với } a, b, c \in \mathbf{Z}) \qquad (1)$$

Ta có : $(1) \Leftrightarrow cxy - ax - ay = b \Leftrightarrow y(cx-a) - \frac{a}{c}(cx-a) = \frac{a^2}{c} + b$

$$\Leftrightarrow (cx-a)(cy-a) = a^2 + bc.$$

Phân tích $a^2 + bc = m.n$ với $m, n \in \mathbf{Z}$, sau đó lần lượt giải các hệ

$$\begin{cases} cx - a = m \\ cy - a = n \end{cases}$$

Thí dụ : Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình :

$$2(x + y) + 16 = 3xy.$$

Ta có : $2(x+y)+16 = 3xy \Leftrightarrow 3xy - 2x - 2y = 16$

$$\Leftrightarrow y(3x-2) - \frac{2}{3}(3x-2) = 16 + \frac{4}{3}$$

$$\Leftrightarrow (3x-2)(3y-2) = 52.$$

Giả sử $x \le y$ khi đó $1 \le 3x - 2 \le 3y - 2$ và 52 = 1.52 = 2.26 = 4.13. Ta có các hệ sau :

$$\begin{cases} 3x - 2 = 1 \\ 3y - 2 = 52 \end{cases} ; \begin{cases} 3x - 2 = 2 \\ 3y - 2 = 26 \end{cases} ; \begin{cases} 3x - 2 = 4 \\ 3y - 2 = 13 \end{cases}.$$

Giải ra ta được các nghiệm nguyên dương của phương trình là : (1, 18), (18, 1), (2, 5), (5, 2).

Bài 191.

Tìm nghiệm nguyên của phương trình :

$$(2x + 5y + 1)(2^{|x|} + y + x^2 + x) = 105.$$

Giải :

Vì 105 là số lẻ nên 2x + 5y + 1 lẻ suy ra y chẵn. Mà $x^2 + x = x(x+1)$ chẵn nên $2^{|x|}$ lẻ $\Rightarrow x = 0$.

Với x = 0 ta có phương trình $(5y+1)(y+1) = 21.5$.

Do (5y + 1, 5) = 1 nên

$$\begin{cases} 5y + 1 = 21 \\ y + 1 = 5 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} 5y + 1 = -21 \\ y + 1 = -5 \end{cases} \Rightarrow y = 4.$$

Thử lại x = 0, y = 4 là nghiệm nguyên của phương trình.

Bài 192.

Tìm nghiệm nguyên của các phương trình sau :

a) $x + y = xy$ ***;***

b) $p(x + y) = xy$ ***với p là số nguyên tố.***

Giải :

a) Ta có $x + y = xy \Leftrightarrow xy - x - y + 1 = 1 \Leftrightarrow (x-1)(y-1) = 1$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-1=1 \\ y-1=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x-1=-1 \\ y-1=-1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases} \\ \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \end{array}\right. .$$

Vậy phương trình có hai nghiệm nguyên (0, 0) và (2, 2).

b) Ta có thể giả sử $x \le y$.

Ta có : $p(x+y) = xy \Leftrightarrow xy - px - py + p^2 = p^2 \Leftrightarrow (x-p)(y-p) = p^2$

Mà : $p^2 = p.p = (-p)(-p) = 1.p^2 = (-p^2).(-1)$.

Từ đó phương trình đã cho có các nghiệm nguyên (x, y) là : (2p, 2p) ; (0, 0) ; $(p + 1,\ p^2 + p)$; $(p^2 + p,\ p + 1)$; $(p - p^2,\ p - 1)$; $(p - 1,\ p - p^2)$.

Bài 193.

Tìm tất cả các tam giác vuông có các cạnh là số nguyên và có diện tích bằng chu vi.

Giải :

Gọi x, y, z là các cạnh của tam giác vuông : $1 \le x \le y < z$. Ta có :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 & (1) \\ xy = 2(x+y+z) & (2) \end{cases}$$

Từ (1) ta có :

$$z^2 = (x+y)^2 - 2xy = (x+y)^2 - 4(x+y+z) \Rightarrow (x+y)^2 - 4(x+y) + 4 = z^2 + 4z + 4$$

$$\Rightarrow (x+y-2)^2 = (z+2)^2$$

$$\Rightarrow x+y-2 = z+2 \ (\text{do } x+y \ge 2).$$

Thay z = x + y - 4 vào (2) ta được :

$$(x-4)(y-4) = 8 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-4=1 \\ y-4=8 \end{cases} \\ \begin{cases} x-4=2 \\ y-4=4 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=5 \\ y=12 \end{cases} \\ \begin{cases} x=6 \\ y=8 \end{cases} \end{array}\right. .$$

Bài 194.

Tìm số có hai chữ số mà số ấy là bội của tích hai chữ số của chính nó.

Giải :

Giả sử số cần tìm là $\overline{ab}$. Ta có :

$$\overline{ab} = kab\ (0 < a, b \le 9) \Rightarrow 10a + b = kab \Rightarrow b = a(kb - 10) \vdots a \qquad (1)$$

Đặt b = ma thay vào (1) ta được :

$$m = mak - 10 \Rightarrow 10 = m(ka - 1) \Rightarrow m = 1; 2; 5.$$

- Với m = 1, ka = 11 thì a = b = 1.
- Với m = 2, ka = 6 thì a = 1; 2; 3 tương ứng có b = 2; 4; 6.
- Với m = 3, ka = 3 thì a = 1, b = 5.

Thử lại ta có các số cần tìm là 11, 12, 15, 24, 36.

Dạng 3. PHƯƠNG TRÌNH ĐỐI XỨNG

Để tìm nghiệm nguyên dương của phương trình đối xứng ta giả sử $1 \le x \le y \le z \ldots$ rồi chặn trên một ẩn.

Bài 195.

Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình :

$$x + y + z = xyz \qquad (1)$$

Giải :

Vì x, y, z có vai trò như nhau nên ta giả sử $1 \le x \le y \le z$. Từ (1) suy ra :

$$1 = \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} \le \frac{3}{x^2} \Rightarrow x^2 \le 3 \Rightarrow x = 1.$$

Với x = 1 ta có : $1 + y + z = yz \Leftrightarrow (y-1)(z-1) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} y - 1 = 1 \\ z - 1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ z = 3. \end{cases}$

Vậy (1) có nghiệm nguyên dương (x, y, z) là (1, 2, 3) và các hoán vị của nó.

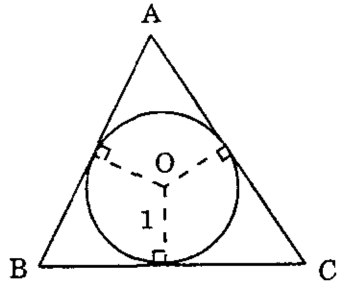
Bài 196.

Một tam giác có số đo độ dài của đường cao là những số nguyên dương và đường tròn nội tiếp tam giác có bán kính bằng 1. Chứng minh rằng tam giác đó là tam giác đều.

Giải :

Đặt a = BC, b = CA, c = AB. Gọi x, y, z là độ dài các đường cao ứng với các cạnh a, b, c của tam giác.

Bán kính đường tròn nội tiếp bằng 1 nên x, y, z > 2. Giả sử $x \geq y \geq z > 2$.



Diện tích ΔABC: $S = \frac{1}{2}ax = \frac{1}{2}by = \frac{1}{2}cz$ (1)

Mặt khác :

$$S = S_{AOB} + A_{AOC} + S_{BOC} = \frac{1}{2}(a+b+c) \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra :

$$ax = by = cz = a + b + c \Rightarrow a+b+c = \frac{a}{\frac{1}{x}} = \frac{b}{\frac{1}{y}} = \frac{c}{\frac{1}{z}} = \frac{a+b+c}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} = 1 \leq \frac{3}{z} \Rightarrow z \leq 3 \Rightarrow z = 3.$$

Thay z = 3 vào $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} = 1$ ta được :

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y} = \frac{2}{3} \Rightarrow 3(x+y) = 2xy \Leftrightarrow (2x-3)(2y-3) = 9$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x-3=9 \\ 2y-3=1 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x-3=3 \\ 2y-3=3 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=6 \\ y=2 \text{ (loại)} \end{cases} \\ \begin{cases} x=3 \\ y=3 \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy x = y = z = 3, khi đó a = b = c tức ΔABC đều.

Bài 197.

Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình :

$$5(x+y+z+t) + 10 = 2xyzt \quad (1)$$

Giải :

Giả sử $x \geq y \geq z \geq t \geq 1$, khi đó

$$(1) \Leftrightarrow 2 = \frac{5}{xyz} + \frac{5}{xzt} + \frac{5}{xyt} + \frac{5}{yzt} + \frac{10}{xyzt} \leq \frac{30}{t^3} \Rightarrow t^3 \leq 15 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=2 \end{array}\right.$$

• Với t = 1, ta có :

$$5(x+y+z) + 15 = 2xyz \Rightarrow 2 = \frac{5}{xy} + \frac{5}{yz} + \frac{5}{zx} + \frac{15}{xyz} \leq \frac{30}{z^2}$$

$$\Rightarrow z^2 \leq 15 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} z=1 \\ z=2 \\ z=3 \end{array}\right.$$

i) Với z = 1, ta có :

$$5(x+y) + 20 = 2xy \Leftrightarrow (2x-5)(2y-5) = 65$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}2x-5=65\\2y-5=1\end{cases}\\ \begin{cases}2x-5=13\\2y-5=5\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=35\\y=3\end{cases}\\ \begin{cases}x=9\\y=5\end{cases}\end{array}\right. .$$

Ta có các nghiệm (35 ; 3 ; 1 ; 1) , (9 ; 5 ; 1 ; 1) và các hoán vị của chúng.

ii) Với z = 2, z = 3 phương trình không có nghiệm nguyên dương.

• Với t = 2, ta có :

$$5(x + y + z) + 20 = 4xyz \Rightarrow 4 = \frac{5}{xy} + \frac{5}{yz} + \frac{5}{zx} + \frac{20}{xyz} \le \frac{35}{z^2} \Rightarrow z^2 \le \frac{35}{4} < 9$$

$$\Rightarrow z = 2\,(\text{vì } z \ge t = 2)$$

Khi đó $5(x+y)+30 = 8xy \Rightarrow (8x-5)(8y-5) = 265$.

Do $x \ge y \ge z \ge 2$ nên $8x-5 \ge 8y-5 \ge 11$, mà 265 = 53.5. Trường hợp này phương trình không có nghiệm nguyên dương.

Bài 198.

Tìm 12 số nguyên dương sao cho tổng của chúng bằng tích của chúng.

Giải :

Gọi các số nguyên dương cần tìm là $x_1, x_2, \dots, x_{12}$. Ta có phương trình :

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{12} = x_1x_2\cdots x_{12} \quad (1)$$

Giả sử $x_1 \ge x_2 \ge \cdots \ge x_{12} \ge 1$, khi đó $x_1x_2\cdots x_{12} \le 12x_1 \Rightarrow x_2x_3\cdots x_{12} \le 12$.

Vì $12 < 2^4$ nên không thể có quá 3 số lớn hơn 1.

Vậy (1) không thể có quá 4 số lớn hơn 1.

i) Nếu $x_1 = x_2 = \cdots = x_{12} = 1$ thì (1) không thỏa.

ii) Nếu $x_1 > x_2 = \cdots = x_{12} = 1$ thì (1) trở thành $x_1 + 11 = x_1$, vô lí .

iii) Nếu $x_1 \ge x_2 > x_3 = x_4 = \cdots = x_{12} = 1$ thì (1) trở thành :

$$x_1 + x_2 + 10 = x_1x_2 \Leftrightarrow (x_1 - 1)(x_2 - 1) = 11$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x_1 - 1 = 11\\x_2 - 1 = 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_1 = 12\\x_2 = 2\end{cases}$$

(1) có nghiệm : $x_1 = 12, x_2 = 2, x_3 = \cdots = x_{12} = 1$ (*)

iv) Nếu $x_1 \ge x_2 \ge x_3 > x_4 = x_5 = \cdots = x_{12} = 1$ thì (1) trở thành :

$$x_1x_2x_3 = 9 + x_1 + x_2 + x_3 .$$

Giải phương trình này ta được $x_1 = 12, x_2 = 2, x_3 = 1$. Vô lí, vì $x_3 > x_4 = 1$.

v) $x_1 \ge x_2 \ge x_3 \ge x_4 > x_5 = x_6 = \cdots = x_{12} = 1$ thì (1) trở thành :

$$x_1x_2x_3x_4 = 8 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4$$

Suy ra :

$$1 = \frac{8}{x_1x_2x_3x_4} + \frac{1}{x_1x_2x_3} + \frac{1}{x_2x_3x_4} + \frac{1}{x_3x_4x_1} + \frac{1}{x_4x_1x_2} \le \frac{12}{x_4^3} \Rightarrow x_4^3 \le 12 \Rightarrow x_4 = 2.$$

Khi đó : $2x_1x_2x_3 = 10 + x_1 + x_2 + x_3 \Rightarrow 2 = \frac{10}{x_1x_2x_3} + \frac{1}{x_1x_2} + \frac{1}{x_2x_3} + \frac{1}{x_3x_1} \le \frac{13}{x_3^2}$

$$\Rightarrow x_3^2 \le \frac{13}{2} \Rightarrow x_3 = 2\ ;$$

$$4x_1x_2 = 12 + x_1 + x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = 2.$$

Vậy phương trình có thêm nghiệm : $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 2$;

$$x_5 = x_6 = x_7 = \cdots = x_{12} = 1 \qquad (**)$$

Từ (*) và (**) phương trình có nghiệm (12, 2, 1, ... , 1), (2, 2, 2, 2, 1, ... , 1) và các hoán vị của nó.

(Bạn đọc có thể tính xem phương trình có bao nhiêu nghiệm ?)

Dạng 4. PHƯƠNG PHÁP LOẠI TRỪ

Tính chất : Nếu có số nguyên m sao cho $m^2 < n < (m+1)^2$ thì n không thể là số chính phương.

Bài 119.

Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình :

$$1! + 2! + \cdots + x! = y^2.$$

Giải :

Với $x \ge 5$ thì x! có chữ số tận cùng là 0 nên :

$$1! + 2! + 3! + 4! + 5! + \cdots + x! = 33 + 5! + \cdots + x!$$

có chữ số tận cùng là 3 nên không thể là một số chính phương, vậy với $x \ge 5$ thì phương trình đã cho không có nghiệm nguyên dương.

Với $1 \le x < 5$, bằng cách thử trực tiếp x = 1, 2, 3, 4 phương trình có nghiệm (1, 1) và (3, 3).

Bài 200.

Tìm nghiệm nguyên của phương trình : $1 + x + x^2 = y^2$.

Giải :

- Ta có : $x^2 < y^2 < (x+1)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 < 1 + x + x^2 \\ 1 + x + x^2 < x^2 + 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 0.$

Vậy, với x > 0 phương trình có nghiệm nguyên.

- Ta có : $(x+1)^2 < y^2 < x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x + 1 < 1 + x + x^2 \\ 1 + x + x^2 < x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x < -1.$

Vậy, với $x < -1$ phương trình cũng không có nghiệm nguyên.

• Với $x = 0$ ta có $y = \pm 1$

• Với $x = -1$ ta có $y = \pm 1$

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm nguyên : (0 ; 1), (0 ; - 1), (- 1 ; 1), (- 1 ; - 1).

Bài 201.

Tìm nghiệm nguyên của phương trình : $x^2 + (x+1)^2 = y^4 + (y+1)^4$.

Giải :

Khai triển và rút gọn hai vế ta được :

$$x(x+1) = y^4 + 2y^3 + 3y^2 + 2y \Leftrightarrow x^2 + x = y^2(y+1)^2 + 2y(y+1)$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x + 1 = (y^2 + y + 1)^2 \qquad (1)$$

i) Nếu $x > 0$ thì từ $x^2 < 1 + x + x^2 < (x+1)^2$ suy ra $1 + x + x^2$ không là số chính phương nên (1) không có nghiệm nguyên.

ii) Nếu $x < -1$ thì từ $(x+1)^2 < x^2 + x + 1 < x^2$ cũng suy ra (1) không có nghiệm nguyên.

iii) Nếu $x = 0$ hoặc $x = -1$ thì từ (1) suy ra $y^2 + y + 1 = \pm 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 0 \\ y = -1 \end{array}\right.$.

Phương trình có 4 nghiệm nguyên : (0 ; 0), (0 ; - 1), (- 1 ; 0), (- 1 ; - 1).

Bài 202.

Tìm nghiệm nguyên của phương trình : $x^6 + 3x^3 + 1 = y^4$.

Giải :

Rõ ràng $x = 0$, $y = \pm 1$ là nghiệm nguyên của phương trình.

• Với $x > 0$, ta có :

$(x^3 + 1)^2 = x^6 + 2x^3 + 1 < x^6 + 3x^3 + 1 = y^4 < (x^3 + 2)^2 \Rightarrow x^3 + 1 < y^2 < x^3 + 2$, vô lí.

• Với $x \le -2$ thì $(x^3 + 2)^2 < y^4 < (x^3 + 1)^2 \Rightarrow |x^3 + 2| < y^2 < |x^3 + 1|$, vô lí.

• Với $x = -1$ thì $y^4 = -1$, vô lí.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm nguyên (0 ; 1) và (0 ; - 1).

Dạng 5. PHƯƠNG PHÁP XUỐNG THANG

Bài 203.

Tìm nghiệm nguyên của phương trình : $x^3 - 3y^3 - 9z^3 = 0$. ***(1)***

Giải :

Giả sử (x_0, y_0, z_0) là nghiệm nguyên của phương trình.

Khi đó $x_0 \vdots 3$, đặt $x_0 = 3x_1$. Thay $x_0 = 3x_1$ vào (1) ta được :

$$9x_1^3 - y_0^3 - 3z_0^3 = 0 \Rightarrow y_0 \vdots 3.$$

Đặt $y_0 = 3y_1 \Rightarrow z_0 \vdots 3$, khi đó :

$9x_1^3 - 27y_1^3 - 9z_0^3 = 0 \Rightarrow 3x_1^3 - 9y_1^3 - z_0^3 = 0 \Rightarrow z_0 \vdots 3.$

Đặt $z_0 = 3z_1$, khi đó : $x_1^3 - 3y_1^3 - 9z_1^3 = 0$.

Vậy $\left(\frac{x_0}{3}, \frac{y_0}{3}, \frac{z_0}{3}\right)$ cũng là nghiệm của phương trình.

Quá trình này tiếp tục thì được $\left(\frac{x_0}{3^k}, \frac{y_0}{3^k}, \frac{z_0}{3^k}\right)$ là các nghiệm nguyên của (1) với mọi k, điều này chỉ xảy ra khi $x_0 = y_0 = z_0 = 0$. Vậy (0, 0, 0) là nghiệm nguyên duy nhất của phương trình đã cho.

Bài 204.

Tìm nghiệm nguyên của phương trình : $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 2xyzt$ *(1)*

Giải :

Giả sử (x_0, y_0, z_0, t_0) là nghiệm nguyên của (1), khi đó

$$x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 + t_0^2 = 2x_0y_0z_0t_0$$

là số chẵn nên trong các số x_0, y_0, z_0, t_0 phải có chẵn số lẻ (0, 2 hoặc 4)

i) Nếu x_0, y_0, z_0, t_0 đều lẻ thì

$$x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 + t_0^2 \not\vdots 4,$$

trong khi đó :

$$2x_0y_0z_0t_0 \not\vdots 4.$$

ii) Nếu trong các số x_0, y_0, z_0, t_0 có hai số lẻ thì

$$x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 + t_0^2 \equiv 2 \pmod 4$$

trong khi đó

$$2x_0y_0z_0t_0 \vdots 4.$$

Vậy x_0, y_0, z_0, t_0 phải là các số chẵn, đặt :

$$x_0 = 2x_1,\ y_0 = 2y_1,\ z_0 = 2z_1,\ t_0 = 2t_1$$

phương trình trở thành

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + t_1^2 = 8x_1y_1z_1t_1.$$

Lí luận tương tự ta có :

$$x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 + t_2^2 = 32x_2y_2z_2t_2,$$

với $x_2 = \frac{x_1}{2}$, $y_2 = \frac{y_1}{2}$, $z_2 = \frac{z_1}{2}$, $t_2 = \frac{t_1}{2}$.

Tiếp tục ta có :

$$x_n = \frac{x_0}{2^n},\ y_n = \frac{y_0}{2^n},\ z_n = \frac{z_0}{2^n},\ t_n = \frac{t_0}{2^n}.$$

là số nguyên với mọi n, suy ra $x_0 = y_0 = z_0 = t_0 = 0$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất (0, 0, 0, 0).

Bài 205.

Tìm nghiệm nguyên của phương trình : $x^2 + y^2 + z^2 = x^2y^2$. *(1)*

Giải :

• Nếu x, y đều lẻ thì $x^2 \equiv 1 \pmod 4$ và $y^2 \equiv 1 \pmod 4$. Khi đó $x^2.y^2 \equiv 1$ (mod 4).

Từ (1) ta cũng có z lẻ nên $z^2 \equiv 1 \pmod 4 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 \equiv 3 \pmod 4$, vô lí.

• Giả sử x chẵn (y chẵn lí luận tương tự), khi đó $y^2 + z^2 \vdots 4$ suy ra y và z đều chẵn. Đặt $x = 2x_1$, $y = 2y_1$, $z = 2z_1$, thay vào phương trình ta được :

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 4x_1^2y_1^2.$$

Tiếp tục ta có $\frac{x}{2^n}, \frac{y}{z^n}, \frac{z}{z^n}$ là số nguyên với mọi n. Vậy x = y = z = 0.

Dạng 6. CÁC DẠNG KHÁC

Bài 206.

Tìm nghiệm nguyên của phương trình : $3x^2 + 5y^2 = 12$ *(1)*

Giải :

Ta có : $(1) \Leftrightarrow 3(x^2 + 1) = 5(3 - y^2)$

Do (3, 5) = 1 nên $x^2 + 1 \vdots 5$ và $3 - y^2 \vdots 3$.

Đặt : $x^2 + 1 = 5k$, $3 - y^2 = 3l$. Ta có :

$$3.5k = 5.3l \Rightarrow k = l \quad (k, l \in \mathbf{Z})$$

$$\begin{cases} x^2 = 5k - 1 \geq 0 \\ y^2 = 3 - 3l \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k \geq \frac{1}{5} \Rightarrow k = l = 1. \\ l \leq 1 \end{cases}$$

Vậy : $x = \pm 2, y = 0$. Phương trình có hai nghiệm nguyên (2, 0) và (- 2, 0).

Bài 207.

Tìm nghiệm nguyên của phương trình : $x^2 - 4xy + 5y^2 = 16$.

Giải :

Ta có : $x^2 - 4xy + 5y^2 = 16 \Leftrightarrow (x - 2y)^2 + y^2 = 16$.

Vì $16 = 4^2 + 0^2$ nên $\begin{cases} x - 2y = \pm 4 \\ y = 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x - 2y = 0 \\ y = \pm 4 \end{cases}$

Phương trình có 4 nghiệm nguyên (4 ; 0), (- 4 ; 0), (8 ; 4) và (- 8 ; - 4).

Bài 208.

Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình : $z^2 = x\ \ y$.

Giải :

Gọi d = (z, x) thì x = d.u, z = d.v với u, v > 0 và (u, v) = 1.

Từ $xy = z^2$ suy ra $d.u.y = (dv)^2 \Rightarrow u.y = dv^2 \vdots d l \Rightarrow d \vdots u$ (vì (u, v) = 1).

Đặt $d = t.u$, từ đó ta có $x = tu^2$, $z = tuv$ và $y = \dfrac{z^2}{x} = tv^2$.

Ngược lại, $x = tu^2$, $y = tv^2$, $z = tuv$ với (u, v) = 1, $t \in \mathbf{N}^*$ là nghiệm nguyên dương của phương trình đã cho.

Bài 209.

Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình : $z^2 = x^2 + y^2$.

Giải :

Nếu x, y cùng lẻ thì $z^2 = x^2 + y^2 \equiv 2 \pmod 4$, vô lí. Giả sử x chẵn, khi đó

$$x^2 = (z - y)(z + y).$$

Theo kết quả Bài 209 ta có :

$$\begin{cases} z + y = tu^2 \\ z - y = tv^2 \\ x = tuv \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = tuv \\ y = \dfrac{t(u^2 - v^2)}{2} \\ z = \dfrac{t(u^2 + v^2)}{2} \end{cases} \qquad (1)$$

i) Nếu u, v lẻ, vì x chẵn nên t phải chẵn.

ii) Nếu u, v có tính chẵn lẻ khác nhau thì $u^2 - v^2$ lẻ. Để y nguyên thì t phải chẵn.

Tóm lại t = 2d ($d \in \mathbf{Z}$).

Thay t = 2d vào (1) và đơn giản ta được :

$$\begin{cases} x = 2duv \\ y = d(u^2 - v^2) \\ z = d(u^2 + v^2) \end{cases}$$

Đổi vai trò x, y cho nhau ta được thêm nghiệm :

$$\begin{cases} x = d(u^2 - v^2) \\ y = 2duv \\ z = d(u^2 + v^2) \end{cases} \quad \text{với } (u, v) = 1.$$

Bài 210.

Tìm nghiệm nguyên của phương trình : $3(x^2 + xy + y^2) = x + 8y$.

Giải :

Phương trình đã cho được viết lại : $3x^2 + (3y - 1)x + 3y^2 - 8y = 0$ (1)

(1) có nghiệm khi và chỉ khi :

$$\Delta = (3y - 1)^2 - 12(3y^2 - 8y) \geq 0 \Leftrightarrow -27y^2 + 90y + 1 \geq 0 .$$

Do y nguyên nên $0 \leq y \leq 3 \Leftrightarrow y \in \{0, 1, 2, 3\}$.

Với y = 0 ta có x = 0.

Với y = 1 ta có x = 1.

Với y = 2, y = 3 ta không tìm được x nguyên.

Vậy phương trình có hai nghiệm nguyên là (0, 0) và (1, 1).

Bài 211.

Tìm nghiệm nguyên của bất phương trình :

$$x^2 + y^2 + z^2 < xy + 3y + 2z - 3 \qquad (1)$$

Giải :

Ta có : (1) $\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - xy - 3y - 2z + 3 < 0$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - xy - 3y - 2z + 3 \leq -1$ (vì $x, y, z \in \mathbf{Z}$)

$$\Leftrightarrow \left(x^2 - xy + \frac{y^2}{4}\right) + 3\left(\frac{y^2}{4} - y + 1\right) + z^2 - 2t + 1 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{y}{2} - 1\right)^2 + (z - 1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{y}{2} = 0 \\ \frac{y}{z} - 1 = 0 \\ z - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{cases}$$

Vậy bất phương trình có nghiệm nguyên duy nhất là (1, 2, 1).

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Dạng 1.

1. Tìm số nguyên tố p để 4p + 1 là số chính phương.
2. Tìm các chữ số x, y, z thỏa : $x^2 - 2y^2 = 1$.

3. Tìm các chữ số x, y, z thỏa : $\overline{xyz} + \overline{xzy} = \overline{zzz}$.

4. Chứng minh rằng phương trình $x^2 + y^2 = 2003$ không có nghiệm nguyên.

5. Giải phương trình trên tập số nguyên :

a) $x^2 - 3y^2 = 17$; b) $x^2 - 5y^2 = 17$;

c) $2^x + 12^2 = y^2 - 3^2$; d) $15x^2 - 7y^2 = 9$.

6. Chứng minh các phương trình sau không có nghiệm nguyên :

a) $x^4 + y^4 + z^4 + t^4 = 165$; b) $x_1^4 + x_2^4 + \cdots + x_{14}^4 = 1599$.

7. Chứng minh rằng phương trình $x^2 + y^3 - z^3 = k$ có nghiệm khi và chỉ khi $k \neq 9t - 4$ $(t \in Z)$.

8. Giải phương trình trên tập số nguyên : $x^2 + 2x + 4y^2 = 37$.

9. p là số nguyên tố có dạng 4k + 3, chứng minh rằng phương trình $x^2 + y^2 = pz^2$ không có nghệm nguyên dương.

Dạng 2.

10. Tìm hai số tự nhiên mà hiệu bình phương của chúng bằng 169.

11. Tìm nghiệm nguyên của phương trình :

a) $5(x + y) + 2 = 3xy$; b) $2(x + y) = 5xy$;

c) $x^2 - y^2 = 91$.

12. Tìm số có 2 chữ số, biết rằng khi viết liền nhau thì được một số có 4 chữ số chia hết cho tích của chúng.

13. Giải phương trình trên tập số nguyên : $x^2 + x + 6 = y^2$.

Dạng 3.

14. Tìm nghiệm nguyên dương của các phương trình sau :

a) $x + y + 1 = xyz$; b) $x + y + z + 9 = xyz$;

c) $x + y + z + t = xyzt$; c) $5(x + y + z + t) + 10 = 2xyzt$.

15. a) Tìm hai số tự nhiên, biết tổng nghịch đảo của chúng bằng 1.

b) Tìm 4 số tự nhiên, biết tổng nghịch đảo của chúng bằng 1.

c) Tìm 4 số tự nhiên, biết tổng bình phương nghịch đảo của chúng bằng 1.

16. Chứng minh rằng phương trình $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2003}$ chỉ có một số hữu hạn nghiệm nguyên dương.

17. Cho $n \in N$ và $n > 1$, chứng minh rằng phương trình

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = x_1 x_2 \cdots x_n$$

có ít nhất một nghiệm tự nhiên.

Dạng 4.

18. Tìm nghiệm nguyên của phương trình : $x^2 - 6xy + 13y^2 = 100$.

19. Tìm nghiệm nguyên của các phương trình sau :

a) $1 + x + x^2 + x^3 = y^3$ (Thi Quốc gia 1992) ;

b) $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 = y^2$;

c) $x^2 = y(y+1)(y+2)(y+3)$;

d) $(x-2)^4 - x^4 = y^3$.

20. Tìm nghiệm nguyên của phương trình : $x(x+1)(x+7)(x+8) = y^2$.

21. Tìm nghệm nguyên của phương trình : $6x^2 + 5y^2 = 74$.

Dạng 5.

22. Giải các phương trình sau trên tập số nguyên :

a) $x^3 - 2y^3 - 4z^3 = 0$; b) $8x^4 + 4y^4 + 2z^4 = u^4$;

c) $x^3 + 2y^3 = 4z^3$; d) $x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$.

Dạng 6.

23. Tìm nghiệm nguyên của các phương trình :

a) $(x+y+1)^2 = 3(x^2 + y^2 + 1)$; b) $x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz - 2z = 4$;

c) $\sqrt{x} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-2} = \frac{1}{2}(x+y+z)$.

HƯỚNG DẪN GIẢI – ĐÁP SỐ

1. $4p + 1 = x^2 \Rightarrow 4p = (x-1)(x+1) \vdots 8 \Rightarrow p \vdots 2 \Rightarrow p = 2$.

2. $x^2 = 2y^2 + 1$ lẻ $\Rightarrow x = 2k+1 \Rightarrow y$ chẵn. Đáp số : $y = 2, x = 3$.

3. Ta có : $200x + 11y = 100z \Rightarrow 100(z - 2x) = 11y \vdots 100 \Rightarrow y = 0$.

Các số cần tìm là : $\overline{xyz} = 102,\ 204,\ 306,\ 408$.

4. $x^2 \equiv 0 \pmod 4 \Rightarrow x^2 + y^2 \equiv 0; 1; 2 \pmod 4$ mà $2003 \equiv 3 \pmod 4$.

5. a) $x^2 \equiv 0; 1 \pmod 3$ trong khi $3y^2 + 17 \equiv 2 \pmod 3$.

b) $x^2 \equiv 0; 1; 4 \pmod 5$ trong khi $5y^2 + 17 \equiv 2 \pmod 5$.

c) x lẻ thì $2^x = 2^{2k+1} \equiv 2 \pmod 3 \Rightarrow y^2 = 2^x + 153 \equiv 2 \pmod 3$. Vậy x chẵn : $x = 2n$; $y^2 - (2^n)^2 = 153 = 3^2.17$. Vì $y + 2^n - (y - 2^n) = 2^{n+1}$ nên

$$\begin{cases} y - 2^n = 9 \\ y + 2^n = 17 \end{cases} \Rightarrow y = 13,\ x = 4.$$

d) $y = 3y_1 \Rightarrow 5x^2 - 21y_1^2 = 3 \Rightarrow x = 3x_1 \Rightarrow 15x_1^2 - 7y_1^2 = 1$.

$y_1^2 \equiv 0 ; 1 (mod\ 3) \Rightarrow 15x_1^2 - 7y_1^2 \equiv 0 ; 2 (mod\ 3)$.

6. Chứng minh $a^4 \equiv 0 ; 1 \pmod{16}$.

7. $n^3 \equiv 0 ; 1 ; 8 \pmod{9}$.

8. $(x+1)^2 + (2y)^2 = 38 \vdots 19$ (dạng $4k + 3$) $\Rightarrow x + 1 \vdots 19$ và $2y \vdots 19$.

9. Gọi $d = (x, y, z) \Rightarrow \left(\frac{x}{d}\right)^2 + \left(\frac{y}{d}\right)^2 = p\left(\frac{z}{d}\right)^2 \vdots p \Rightarrow \frac{x}{d} \vdots p$ và $\frac{y}{d} \vdots p \Rightarrow \frac{z}{d} \vdots p$. vô lí.

10. $m^2 - n^2 = 169 \Rightarrow m = 85, n = 84$.

11. a) $(x ; y) = (12 ; 2), (2 ; 12)$.

b) Không có nghiệm nguyên dương.

12. $(17 ; 34)$ và $(13 ; 52)$.

13. $x^2 + x + 6 = y^2 \Leftrightarrow (2x+1)^2 + 23 = y^2 \Leftrightarrow 23 = (y - 2x - 1)(y + 2x + 1)$.

14. a) Xét $x \le y$:

- $x = y : 2x + 1 = x^2z \Rightarrow x(xz - 2) = 1 \Rightarrow x = y = 1, z = 3$.
- $x < y : xyz < 2y + 1 \Rightarrow xyz \le 2y \Rightarrow xz \le 2$.

Nghiệm nguyên dương là $(1 ; 1 ; 3), (1 ; 2 ; 2), (2 ; 3 ; 1), (2 ; 1 ; 2), (3 ; 2 ; 1)$.

b) $(1 ; 2 ; 12)$ và các hoán vị của nó.

d) $(35 ; 3 ; 1 ; 1), (9 ; 5 ; 1 ; 1)$ và các hoán vị.

e) $(1 ; 1 ; 1), (2 ; 3 ; 4)$ và các hoán vị.

15. a) $(3 ; 3 ; 3)$ và các hoán vị của $(2 ; 3 ; 6)$.

c) $(2 ; 2 ; 2 ; 2)$.

16. Giả sử $0 < x \le y \le z$ thì $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2003} \le \frac{3}{x} \Rightarrow 2003 < x \le 3.2003$ nên x lấy một số hữu hạn giá trị.

Với mỗi x, ta có :

$$\frac{1}{2003} - \frac{1}{x} = \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \le \frac{2}{y} \Rightarrow y \le \frac{2.2003.x}{x - 2003} \le 2.2003x \le 6.2003^2$$

nên y cũng lấy một số hữu hạn giá trị, z cũng lấy một số hữu hạn giá trị.

17. Giả sử $x_n \ge x_{n-1} \ge \cdots \ge x_1 \ge 1 \Rightarrow x_{n-1} > 1$. Vì nếu $x_{n-1} = 1$ thì $x_{n-1} = x_{n-2} = \cdots = x_1 = 1$ và $(n-1) + x_n = x_n$, vô lí. Từ đề bài suy ra :

$$1 = \frac{1}{x_2x_3\cdots x_n} + \cdots + \frac{1}{x_1x_2\cdots x_{n-1}} \le \frac{n}{x_1^{n-1}} \Rightarrow x_1^{n-1} \le n$$

thỏa với mọi n khi $x_1 = 1$.

Tiếp tục ta có $x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-2} = 1$. Phương trình trở thành :

$$(n-2) + x_{n-1} + x_n = x_{n-1}x_n \Leftrightarrow (x_n - 1)(x_{n-1} - 1) = n - 1$$

Chọn $\begin{cases} x_n - 1 = n - 1 \\ x_{n-1} - 1 = 1 \end{cases}$ thì $\begin{cases} x_n = n \\ x_{n-1} = 2 \end{cases}$. Vậy phương trình có ít nhất một nghiệm tự nhiên là : $(1 ; 1 ; ... ; 1 ; 2 ; n)$.

18. $(x - 3y)^2 = 4(25 - y^2) \geq 0 \Rightarrow |y| \leq 5$ và $25 - y^2$ là số chính phương.

19. a) Với $x > 0 : x^3 < 1 + x + x^2 + x^3 = y^3 < (x+1)^3 \Rightarrow x < y < x + 1$, vô lí.

Với $x = 0 \Rightarrow y = 1$ ta có nghiệm $(0 ; 1)$.

Với $x = -1 \Rightarrow y = 0$ ta có nghiệm $(-1; 0)$.

Với $x < -1$: $x^3 < y^3 < (x+1)^3 \Leftrightarrow 2x(x+1) > 0$.

b) Biến đổi $4y^2 = 4 + 4x + 4x^2 + 4x^3 + 4x^4 = (2x^2 + x)^2 + 3x^2 + 4x + 4$

$= (2x^2 + x + 1)^2 + 3 - x^2 + 2x$.

Vì $3x^2 + 4x + 4 > 0$ nên $4y^2 > (2x^2 + x)^2$.

Nếu $3 - x^2 + 2x < 0$ thì $4y^2 < (2x^2 + x + 1)^2$.

Vậy $3 - x^2 + 2x \geq 0 \Rightarrow -1 \leq x \leq 3$.

Ta có nghiệm $(0 ; \pm 1)$, $(-1 ; \pm 1)$, $(3 ; \pm 11)$.

c) Đặt $a = y^2 + 3y$.

d) $y^3 = 8(x^3 + 3x^2 + 4x + 2) \Rightarrow x^3 + 3x^2 + 4x + 2 = z^3$.

Với $x \geq 0$ thì $(x+1)^3 < z^3 < (x+2)^3$.

Với $x \leq -2$ đặt $x_1 = -x - 2 \geq 0 ; y_1 = -y$.

$x = -1, y = 0$ là nghiệm.

20. $y^2 = (x^2 + 8x)(x^2 + 8x + 7) = z^2 + 7z$ với $z = x^2 + 8x$. Nếu $z > 9$ thì $(z+3)^2 < z^2 + 7z < (z+4)^2$, vô lí. Vậy $z = x^2 + 8x \leq 9 \Leftrightarrow -9 \leq x \leq 1$.

21. $6(x^2 - 4) = 5(10 - y^2) \Rightarrow x^2 - 4 = 54 ; 10 - y^2 = 6v \Rightarrow u = v ; x^2 = 4 + 5u \geq 0$;

$y^2 = 10 - 6v \geq 0 \Rightarrow -\dfrac{4}{5} \leq u \leq \dfrac{5}{3} \Rightarrow u = v = 0$ hoặc $u = v = 1$.

Các nghiệm nguyên là $(3 ; 2)$, $(3 ; -2)$, $(-3 ; 2)$, $(-3 ; -2)$.

22. b) $(0 ; 0 ; 0 ; 0)$ là nghiệm. Nếu (x_0, y_0, z_0, u_0) là nghiệm thì $(x_0, y_0, z_0, -u_0)$ cũng là nghiệm. Gọi (x_0, y_0, z_0, u_0) là nghiệm với u_0 là số nguyên dương nhỏ nhất trong tất cả các nghiệm nguyên dương của phương trình, khi đó $u_0 = 2u_1$, $x_0 = 2x_1$, $y_0 = 2y_1$, $z_0 = 2z_1$ đi đến (x_1, y_1, z_1, u_1) là nghiệm nguyên với $u_1 < u_0$, vô lí.

23. a) $(x + y + 1)^2 = 3(x^2 + y^2 + 1) \Leftrightarrow (x - y)^2 + (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = 1$.

b) $x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz - 2z = 4 \Leftrightarrow (x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - 2)^2 = 0$

$\Leftrightarrow x = y = z = 2$.

c) $(\sqrt{x} - 1)^2 + (\sqrt{y-1} - 1)^2 + (\sqrt{z-2} - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1, y = 2, z = 3$.

Chương 5.

PHẦN NGUYÊN

§ 1. ĐỊNH NGHĨA VÀ TÍNH CHẤT

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Định nghĩa :

• Phần nguyên của một số thực α , kí hiệu $[\alpha]$, là số nguyên lớn nhất không vượt quá α , hay $[\alpha]$ là số nguyên thỏa : $[\alpha] \le \alpha < [\alpha]+1$.

Thí dụ : $\left[2\frac{1}{2}\right]=2$; $\left[\frac{3}{5}\right]=0$; $[-7,2] = -8$; $[\pi]=3$; $[\sqrt{2}]=1$; ...

• Phần lẻ của α , kí hiệu $\{\alpha\}$, là số $\alpha-[\alpha]$.

Ta có : $0 \le \{\alpha\} = \alpha-[\alpha] < 1$ và $\alpha = [\alpha]+\{\alpha\}$.

Thí dụ : $\{2,1\} = 0,1$; $\left\{\frac{1}{2}\right\}=\frac{1}{2}$; $\{-7,2\} = 0,8$; ...

2. Các tính chất :

a) Nếu $n \in \mathbf{Z}$ và $n \le \alpha < n+1$ thì $[\alpha] = n$.

b) $[\{\alpha\}] = \{[\alpha]\} = 0$.

c) Nếu $\alpha \ge \beta$ thì $[\alpha] \ge [\beta]$.

d) $[n+\alpha] = n+[\alpha]$ với $n \in \mathbf{Z}$;

$\{\alpha+n\} = \{\alpha\}$.

Chứng minh :

c) Giả sử $\alpha \ge \beta$ và $[\alpha]<[\beta] \Rightarrow [\alpha]+1 \le [\beta] \Rightarrow \alpha < [\alpha]+1 \le [\beta] \le \beta \Rightarrow \alpha < \beta$, vô lí. Vậy $[\alpha] \ge [\beta]$.

d) $[\alpha] \le \alpha < [\alpha]+1 \Rightarrow n+[\alpha] \le n+\alpha < n+[\alpha]+1 \Rightarrow [n+\alpha] = n+[\alpha]$;

$\{\alpha+n\} = \alpha+n-[\alpha+n] = \alpha+n-(n+[\alpha]) = \alpha-[\alpha] = \{\alpha\}$.

B. CÁC DẠNG TOÁN

Bài 212.

Cho $n \in N^*$, chứng minh :

$$\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n+1}{2}\right]=n.$$

Giải :

Với $n = 2k$ $(k \in N^*)$ ta có : $\left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n+1}{2}\right] = [k] + \left[k + \frac{1}{2}\right] = 2k = n$.

Với $n = 2k + 1$ ta có : $\left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n+1}{2}\right] = \left[k + \frac{1}{2}\right] + [k+1] = 2k + 1 = n$.

Bài 213.

Chứng minh rằng :

a) $[-a] = \begin{cases} -[a] & \text{nếu } a \in Z \\ -1 - [a] & \text{nếu } a \notin Z \end{cases}$; *b)* $\{-a\} = \begin{cases} 0 & \text{nếu } a \in Z \\ 1 - \{a\} & \text{nếu } a \notin Z \end{cases}$.

Giải :

a) Nếu $\alpha \in Z$ thì $[-\alpha] = -\alpha = -[\alpha]$;

Nếu $\alpha \notin Z$ thì $[\alpha] < \alpha < [\alpha] + 1 \Rightarrow -[\alpha] - 1 < -\alpha < -[\alpha] \Rightarrow [-\alpha] = -[\alpha] - 1$.

b) Nếu $\alpha \in Z$ thì $\{-\alpha\} = -\alpha - [-\alpha] = 0$;

Nếu $\alpha \notin Z$ thì $\{-\alpha\} = -\alpha - [-\alpha] = -\alpha - (-1 - [\alpha]) = 1 - \{\alpha\}$.

Bài 214.

Cho $n \in N^*$, chứng minh rằng :

$$\left[\frac{[\alpha]}{n}\right] = \left[\frac{\alpha}{n}\right].$$

Giải :

Ta có : $\left[\frac{\alpha}{n}\right] \le \frac{\alpha}{n} < \left[\frac{\alpha}{n}\right] + 1 \Rightarrow n\left[\frac{\alpha}{n}\right] \le \alpha < n < \left(\left[\frac{\alpha}{n}\right] + 1\right)$

$$\Rightarrow n\left[\frac{\alpha}{n}\right] \le [\alpha] < n\left(\left[\frac{\alpha}{n}\right] + 1\right) \Rightarrow \left[\frac{\alpha}{n}\right] \le \frac{[\alpha]}{n} \le \left[\frac{\alpha}{n}\right] + 1.$$

Vậy : $\left[\frac{[\alpha]}{n}\right] = \left[\frac{\alpha}{n}\right]$.

Bài 215.

Cho $n \in N$, chứng minh rằng :

$$\left[\sqrt{4n+1}\right] = \left[\sqrt{4n+2}\right].$$

Giải :

Giả sử $\left[\sqrt{4n+1}\right] < \left[\sqrt{4n+2}\right]$, khi đó tồn tại số tự nhiên m sao cho

$$\left[\sqrt{4n+1}\right] < m \le \left[\sqrt{4n} + 2\right] \Rightarrow \sqrt{4n+1} < \left[\sqrt{4n+1}\right] + 1 \le m \le \sqrt{4n+2}$$

$$\Rightarrow 4n + 1 < m^2 \le 4n + 2 \Rightarrow m^2 = 4n + 2, \text{ vô lí}.$$

(vì số chính phương chẵn phải chia hết cho 4).

Vậy : $\left[\sqrt{4n+1}\right]=\left[\sqrt{4n+2}\right]$.

Bài 216.

Cho $n\in N$, chứng minh rằng :

$$\left[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right]=\left[\sqrt{4n+2}\right].$$

Giải :

Trước hết ta chứng minh :

$$\sqrt{4n+1}<\sqrt{n}+\sqrt{n+1}<\sqrt{4n+2} \text{ với } n\in \mathbf{N}^*. \quad (1)$$

Ta có :

- $\sqrt{4n+1}<\sqrt{n}+\sqrt{n+1} \Leftrightarrow 4n+1<n+2\sqrt{n(n+1)}+n+1 \Leftrightarrow 2n<2\sqrt{n(n+1)}$
  $\Leftrightarrow n^2<n^2+n$ (đúng)
- $\sqrt{n}+\sqrt{n+1}<\sqrt{4n+2} \Leftrightarrow n+2\sqrt{n(n+1)}+n+1<4n+2$
  $\Leftrightarrow 2\sqrt{n(n+1)}<2n+1$
  $\Leftrightarrow 4n(n+1)<4n^2+4n+1 \Leftrightarrow 0<1$ (đúng).

Áp dụng tính chất : $x<y \Rightarrow [x]\le[y]$ và từ (1) suy ra :

$$\left[\sqrt{4n+1}\right]\le\left[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right]\le\left[\sqrt{4n+2}\right].$$

Theo kết qủa Bài 215 :

$$\left[\sqrt{4n+1}\right]=\left[\sqrt{4n+2}\right]\Rightarrow \left[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right]=\left[\sqrt{4n+2}\right] \text{ (đpcm).}$$

Bài 217.

Với $\alpha\in R$, chứng minh rằng :

$$\left[\alpha+\frac{1}{2}\right]=[2\alpha]-[\alpha].$$

Giải :

Vì $0\le\{\alpha\}<1$ nên ta xét hai trường hợp :

a) Nếu $0\le\{\alpha\}<\frac{1}{2}$ thì :

- $\left[\alpha+\frac{1}{2}\right]=\left[[\alpha]+\{\alpha\}+\frac{1}{2}\right]=[\alpha]+\left[\{\alpha\}+\frac{1}{2}\right]=[\alpha]$ (vì $0\le\{\alpha\}+\frac{1}{2}<1$)
- $[2\alpha]=\left[2[\alpha]+2\{\alpha\}\right]=2[\alpha]+[2\{\alpha\}]=2[\alpha]$ (vì $0\le2\{\alpha\}<1$)

Vậy : $\left[\alpha+\frac{1}{2}\right]=[2\alpha]-[\alpha]$.

b) Nếu $\frac{1}{\alpha}\le\{\alpha\}<1$ thì :

- $\left[\alpha+\frac{1}{2}\right]=\left[[\alpha]+\{\alpha\}+\frac{1}{2}\right]=[\alpha]+\left[\{\alpha\}+\frac{1}{2}\right]=[\alpha]+1$ (vì $1\le\{\alpha\}+\frac{1}{2}<2$).
- $[2\alpha]=\left[2[\alpha]+2\{\alpha\}\right]=2[\alpha]+[2\{\alpha\}]=2[\alpha]+1$ (vì $1\le2\{\alpha\}<2$).

Vậy : $\left[\alpha + \frac{1}{2}\right] = [2\alpha] - [\alpha]$.

Bài 218.

Cho $\alpha, \beta \in R$, chứng minh rằng :

$$[2\alpha] + [2\beta] \geq [\alpha] + [\beta] + [\alpha + \beta].$$

Giải :

Ta có : $[2\alpha] = \left[2[\alpha] + 2\{\alpha\}\right] = 2[\alpha] + \left[2\{\alpha\}\right]$;

$[2\beta] = \left[2[\beta] + 2\{\beta\}\right] = 2[\beta] + \left[2\{\beta\}\right]$;

$[\alpha + \beta] = [\alpha] + [\beta] + \left[\{\alpha\} + \{\beta\}\right]$.

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với :

$$\left[2\{\alpha\}\right] + \left[2\{\beta\}\right] \geq \left[\{\alpha\} + \{\beta\}\right] \qquad (1)$$

Vì $0 \leq \{\alpha\} + \{\beta\} < 2$ nên ta có hai trường hợp sau :

• Nếu $0 \leq \{\alpha\} + \{\beta\} < 1$ thì (1) luôn đúng vì vế trái lớn hơn bằng 0, vế phải bằng 0.

• Nếu $1 \leq \{\alpha\} + \{\beta\} < 2$ thì $\left[\{\alpha\} + \{\beta\}\right] = 1$, khi đó $\{\alpha\} \geq \frac{1}{2}$ hoặc $\{\beta\} \geq \frac{1}{2}$. Giả sử $\{\alpha\} \geq \frac{1}{2} \Rightarrow 2\{\alpha\} \geq 1 \Rightarrow \left[2\{\alpha\}\right] + \left[2\{\beta\}\right] \geq 1$ (đpcm).

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Chứng minh rằng :

a) $[\alpha] + [\beta] \leq [\alpha + \beta]$; b) $\{\alpha\} + \{\beta\} \leq \{\alpha + \beta\}$.

2. Cho $n \in \mathbf{N}$, chứng minh $[n\alpha] \geq n[\alpha]$. Đặt biệt khi $\{\alpha\} < \frac{1}{n}$ thì $[n\alpha] = n[\alpha]$.

3. Chứng minh rằng nếu $[\alpha] = [\beta]$ thì $|\alpha - \beta| < 1$, điều ngược lại có đúng không ? Tại sao ?

4. Với k > 3, chứng minh rằng $\left[\frac{2n}{k}\right] \geq \left[\frac{n}{k}\right] + \left[\frac{n+2}{k}\right]$.

5. Chứng minh rằng nếu r là số dư trong phép chia a cho số nguyên dương b thì $r = a - b\left[\frac{a}{b}\right]$.

6. Cho $n, k_1, \dots, k_n \in \mathbf{N}^*$, chứng minh rằng :

$$\left[\frac{k_1 + k_2 + \cdots + k_n}{n}\right] + (n-1) \leq k_1 + k_2 + \cdots + k_n.$$

HƯỚNG DẪN GIẢI - ĐÁP SỐ

1. $[\alpha+\beta]=[\alpha]+[\beta]+[\{\alpha\}+\{\beta\}]\geq[\alpha]+[\beta]$.

2. $[n\alpha]=n[\alpha]+[n\{\alpha\}]\geq n[\alpha]$.

   Nếu $\{\alpha\}<\frac{1}{n}$ thì $0\leq n\{\alpha\}<1\Rightarrow[n\{\alpha\}]=0\Rightarrow[n\alpha]=n[\alpha]$.

3. $|\alpha-\beta|=|\{\alpha\}-\{\beta\}|<1$.

   Điều ngược lại không đúng, chẳng hạn $\alpha=3{,}1$; $\beta=2{,}9$.

4. Giả sử $n=kq+r$ $(0\leq r<k)$. Ta cần chứng minh :

$$\left[\frac{2r}{k}\right]\geq\left[\frac{r}{k}\right]+\left[\frac{r+2}{k}\right]=\left[\frac{r+2}{k}\right].$$

   Với r = 0 hay r = 1 thì $\left[\frac{2r}{k}\right]=\left[\frac{r+2}{k}\right]=0$ vì k > 3.

   Với $r\geq2$ thì $\frac{2r}{k}\geq\frac{r+2}{k}\Rightarrow\left[\frac{2r}{k}\right]\geq\left[\frac{r+2}{k}\right]$.

5. Giả sử $a=bq+r$; $0\leq r<b\Rightarrow\frac{a}{b}=q+\frac{r}{b}\Rightarrow q\leq\frac{a}{b}<q+1\Rightarrow\left[\frac{a}{b}\right]=q$.

6. $k_i\geq1\Rightarrow\frac{k_1+k_2+\cdots+k_n}{n}\geq1$. Do đó :

$$\left[\frac{k_1+\cdots+k_n}{n}\right]+(n-1)\leq\frac{k_1+\cdots+k_n}{n}+(n-1)\frac{k_1+\cdots+k_n}{n}=k_1+\cdots+k_n.$$

§ 2. MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN PHẦN NGUYÊN

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

Để tìm phần nguyên của α ta tìm $n\in\mathbf{Z}$ sao cho $n\leq\alpha<n+1$, khi đó $[\alpha]=n$.

Các tính chất :

- $\{\alpha\}=\{\beta\}$ thì $\alpha-\beta\in\mathbf{Z}$;
- $\{n+\alpha\}=\{\alpha\}$ với $n\in\mathbf{Z}$;
- $\left[\alpha+\frac{1}{2}\right]=[2\alpha]-[\alpha]$.

B. CÁC DẠNG TOÁN

Bài 219.

Cho $A=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$. *Tìm* $[A]$.

Giải :

Ta có : $A = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} \Rightarrow 0 < A < 1$.

Vậy : $[A] = 0$.

Bài 220.

Cho $A = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{10^6}}$. ***Tìm*** $[A]$.

Giải :

Ta có : $$\frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{2}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} = 2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$$

và $$\frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{2}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} = 2\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$$

Do đó : $$2\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) < \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\left(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\right)$$

Với $n = 2$: $$2\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right) < \frac{1}{\sqrt{2}} < 2(\sqrt{2} - 1)$$

Với $n = 3$: $$2\left(\sqrt{4} - \sqrt{3}\right) < \frac{1}{\sqrt{3}} < 2\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)$$

...

Với $n = 10^6$: $$2\left(\sqrt{10^6 + 1} - \sqrt{10^6}\right) < \frac{1}{\sqrt{10^6}} < 2\left(\sqrt{10^6} - \sqrt{10^6 - 1}\right)$$

Cộng các bất đẳng thức trên lại ta được :

$$1 + 2\left(\sqrt{10^6 + 1} - \sqrt{2}\right) < A < 1 + 2\left(\sqrt{10^6} - 1\right) = 1999$$

Ta có :

$$1 + 2\left(\sqrt{10^6 + 1} - \sqrt{2}\right) > 1 + 2000 - 2\sqrt{2} > 2001 - 3 = 1998 \Rightarrow 1998 < A < 1999.$$

Vậy : $[A] = 1998$.

Bài 221.

Cho $n \in N^*$ ***và*** $n \geq 2$. ***Tính tổng :***

$$A = \left[\sqrt{1}\right] + \left[\sqrt{2}\right] + \cdots + \left[\sqrt{n^2 - 1}\right].$$

Giải :

Ta có các công thức : $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$;

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Với k = 0, 1, ... , 2n thì :

$$n^2 \le n^2 + k < (n+1)^2 \Rightarrow n \le \sqrt{n^2+k} < n+1\,.$$

Do đó : $\left[\sqrt{n^2}\right] = \left[\sqrt{n^2+1}\right] = \cdots = \left[\sqrt{n^2+2n}\right] = n(2n+1) = 2n^2+n\,.$

Ta có : $A = \sum_{k=1}^{n-1}\left(\left[\sqrt{k^2}\right] + \left[k^2+1\right] + \cdots + \left[\sqrt{k^2+2k}\right]\right) = \sum_{k=1}^{n-1} 2k^2 + \sum_{k=1}^{n-1} k$

$$= 2\cdot\frac{(n-1)\cdot n\cdot(2n-1)}{6} + \frac{n\cdot(n-1)}{2} = \frac{n\cdot(4n^2-3n-1)}{6}\,.$$

Bài 222.

Tính phần nguyên của :

$$T = \sqrt{2} + \sqrt[3]{\frac{3}{2}} + \sqrt[4]{\frac{4}{3}} + \cdots + \sqrt[n+1]{\frac{n+1}{n}}\,.$$

Giải :

Ta có :

$$\sqrt[k+1]{\frac{k+1}{k}} > 1,\ \ k = 1, 2, \ldots, n$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho k + 1 số dương, ta có :

$$\sqrt[k+1]{\frac{k+1}{k}} = \sqrt[k+1]{\underbrace{1.1\ldots1}_{k\text{ số }1}.\frac{k+1}{k}} < \frac{k+\dfrac{k+1}{k}}{k+1} = \frac{k}{k+1} + \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{k(k+1)}$$

Suy ra :

$$1 < \sqrt[k+1]{\frac{k+1}{k}} < 1 + \frac{1}{k(k+1)} \Rightarrow n < \sum_{k=1}^{n}\sqrt[k+1]{\frac{k+1}{k}} < n + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} \Rightarrow n < T < n+1$$

(vì $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1} < 1$ (Bài 219)).

Vậy : $[T] = n\,.$

Bài 223.

Tính tổng :

$$A = \left[\sqrt{1.2.3.4}\right] + \left[\sqrt{2.3.4.5}\right] + \cdots + \left[\sqrt{n(n+1)(n+2)(n+3)}\right].$$

Giải :

Ta có : $n(n+1)(n+2)(n+3) = (n^2+3n)(n^2+3n+2) = (n^2+3n)^2 + 2(n^2+3n)$

$$\Rightarrow (n^2+3n)^2 < n(n+1)(n+2)(n+3) < (n^2+3n+1)^2$$

$$\Rightarrow n^2+3n < \sqrt{n(n+1)(n+2)(n+3)} < n^2+3n+1$$

$$\Rightarrow \left[\sqrt{n(n+1)(n+2)(n+3)}\right] = n^2+3n\,.$$

Vậy :

$$[A]=\sum_{k=1}^{n}(k^2+3k)=\sum_{k=1}^{n}k^2+3\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{3n(n+1)}{2}.$$

Bài 224.

· ***Tính tổng :***

$$A=\left\{\frac{0.a+b}{m}\right\}+\left\{\frac{1.a+b}{m}\right\}+\cdots+\left\{\frac{(m-1)a+b}{m}\right\}$$

trong đó $a, m\in N^*$ và $(a, m)=1$, $b\in Z$.

Giải :

Trước hết, ta nhận xét rằng nếu α là số hữu tỉ thì $\{\alpha\}$ cũng là số hữu tỉ nên nếu ta chứng minh được các phân số trong tổng A đôi một khác nhau thì A chính là tổng của m phân số tối giản có mẫu là m :

$$\frac{0}{m},\frac{1}{m},\ldots,\frac{m-1}{m}\ \ (\text{do } 0\le\{\alpha\}<1).$$

Thật vậy, giả sử có n_1, n_2 sao cho

$$\left\{\frac{n_1 a+b}{m}\right\}=\left\{\frac{n_2 a+b}{m}\right\}\ \text{với } 0\le n_1<n_2<m$$

thì

$$\frac{n_2a+b}{m}-\frac{n_1a+b}{m}=\frac{a(n_2-n_1)}{m}\in Z,\ \text{vô lí.}$$

(vì $(a,m)=(m,n_2-n_1)=1$).

Vậy : $$A=\frac{0}{m}+\frac{1}{m}+\cdots+\frac{m-1}{m}=\frac{m(m-1)}{2m}=\frac{m-1}{2}.$$

Bài 225.

Cho m, n là hai số tự nhiên lẻ và nguyên tố cùng nhau. Chứng minh rằng :

$$\left[\frac{m}{n}\right]+\left[\frac{2m}{n}\right]+\cdots+\left[\frac{(n-1)m}{n}\right]+\left[\frac{n}{m}\right]+\left[\frac{2n}{m}\right]+\cdots+\left[\frac{(m-1)n}{m}\right]=\frac{(m-1)(n-1)}{2}.$$

Giải :

Cách 1 :

Với k = 1, 2, ... , m – 1, ta có :

$$\left\{\frac{(m-k)n}{m}\right\}=\left\{n-\frac{kn}{m}\right\}=\left\{-\frac{kn}{m}\right\}=1-\left\{\frac{kn}{m}\right\}\ \text{vì}\ \frac{kn}{m}\notin Z.$$

Suy ra : $$\left\{k.\frac{n}{m}\right\}+\left\{\frac{(m-k)n}{m}\right\}=1.$$

Khi đó : $$n=\left[\frac{kn}{m}+\frac{(m-k)n}{m}\right]=\left[\frac{kn}{m}\right]+\left[\frac{(m-k)n}{m}\right]+1.$$

Suy ra : $$\left[k\frac{n}{m}\right]+\left[\frac{(m-k)n}{m}\right]=n-1.$$

Cho k lần lượt bằng 1, 2, ... , m - 1 rồi lấy tổng ta được :
$$\sum_{k=1}^{m-1}\left[k.\frac{n}{m}\right]+\left[\frac{(m-k)n}{m}\right]=(n-1)(m-1) \Rightarrow \sum_{k=1}^{m-1}\left[\frac{kn}{m}\right]=\frac{(n-1)(m-1)}{2}.$$

Tương tự : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{km}{n}=\frac{(m-1)(n-1)}{2}$ (đpcm).

Cách 2.

Áp dụng kết quả Bài 224 cho b = 0, a = n ta được :
$$\left\{\frac{n}{m}\right\}+\left\{\frac{2n}{m}\right\}+\cdots+\left\{\frac{(m-1)n}{m}\right\}=\frac{m-1}{2}$$

Suy ra : $$\left[\frac{n}{m}\right]+\left[\frac{2n}{m}\right]+\cdots+\left[\frac{(m-1)n}{m}\right]=\frac{n}{m}+\frac{2n}{m}+\cdots+\frac{(m-1)n}{m}-\frac{m-1}{2}$$
$$=\frac{n(m-1)}{2}-\frac{m-1}{2}=\frac{(m-1)(n-1)}{2} \text{ (đpcm).}$$

Bài 226.

Chứng minh rằng $\left[(2+\sqrt{3})^n\right]$ là số lẻ với $n \in N$.

Giải :

Đặt : $\begin{cases} x_1 = 2-\sqrt{3} \\ x_2 = 2+\sqrt{3} \end{cases}$, khi đó : $\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ x_1x_2 = 1 \end{cases}$ $\Rightarrow x_1, x_2$ là nghiệm của phương trình $x^2-4x+1=0$.

Đặt : $S_n = x_1^n + x_2^n$. Ta có
$$x_1^2-4x_1+1=0 \Rightarrow x_1^{n+2}-4x_1^{n+1}+x_1^n=0 \quad (1)$$
$$x_2^2-4x_2+1=0 \Rightarrow x_2^{n+2}-4x_2^{n+1}+x_2^n=0 \quad (2)$$

Cộng (1) và (2) ta được
$$S_{n+2}+4S_{n+1}+S_n=0 \quad (3)$$

Ta có $S_0=2,\ S_1=4$ nên từ (3) suy ra S_n là số nguyên chẵn với mọi $n \in \mathbf{N}$. Ta có $0<2-\sqrt{3}<1$ nên
$$0<x_1^n<1 \Rightarrow x_2^n+(x_1^n-1)<x_2^n<x_2^n+x_1^n \Rightarrow S_n-1<(2+\sqrt{3})^n<S_n$$
$$\Rightarrow\left[(2+\sqrt{3})^n\right]=S_n-1 \text{ là số lẻ với mọi } n\in\mathbf{N}.$$

Bài 227.

Tìm hai chữ số tận cùng của số :
$$\left[\left(\sqrt{29}+\sqrt{21}\right)^{2000}\right]$$

Giải :

Đặt : $x_1 = (\sqrt{29} - \sqrt{21})^2 = 50 - 2\sqrt{609}$;

$x_2 = (\sqrt{29} + \sqrt{21})^2 = 50 + 2\sqrt{609}$.

x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $x^2 - 100x + 64 = 0$

Đặt $S_n = x_1^n + x_2^n$, lí luận tương tự Bài 227 ta có :

$$S_{n+2} - 100S_{n+1} + 64S_n = 0 \text{ và } \left[x_2^{1000}\right] = S_{1000} - 1 .$$

Do đó : $S_{n+2} = 100S_{n+1} - 64S_n \equiv 36S_n \equiv 6^2S_n \equiv 6^4S_{n-2} \equiv \cdots \equiv 6^{n+2}S_0 \pmod{100}$

Suy ra : $S_{1000} \equiv 6^{1000}.2 \pmod{100}$.

Nhưng $6^{1000} = (6^5)^{200} = (76)^{200} \equiv 76 \pmod{100}$ nên $S_{1000} \equiv 52 \pmod{100}$.

Vậy $\left[\left(\sqrt{29} + \sqrt{21}\right)^{2000}\right]$ có hai chữ số tận cùng là 51.

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Tìm phần nguyên của : $\sqrt{6 + \sqrt{6 + \cdots + \sqrt{6}}} + \sqrt[3]{6 + \sqrt[3]{6 + \cdots + \sqrt[3]{6}}}$.

(Thi toán Liên Xô -1986)

2. Tìm $n \in \mathbf{N}^*$ thỏa $[\sqrt{n}]$ là ước của n.
3. Tìm các số nguyên tố x, y sao cho : $[\sqrt{1}] + [\sqrt{2}] + \cdots + [\sqrt{x^2 - 1}] = y$.
4. Với α là số vô tỉ, chứng minh rằng có vô hạn số nguyên tố p sao cho p không là ước của $[p\alpha]$.
5. Với $n \in \mathbf{N}^*$, chứng minh rằng :

$$[x] + \left[x + \frac{1}{n}\right] + \left[x + \frac{2}{n}\right] + \cdots + \left[x + \frac{n-1}{n}\right] = [nx] .$$

6. Tính tổng : $S = \left[\frac{n+1}{2}\right] + \left[\frac{n+2}{2^2}\right] + \cdots + \left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right] + \cdots$

(Thi toán Quốc tế - 1968)

7. Chứnng minh rằng không tồn tại số thực x thỏa :

$$[x] + [2x] + [4x] + [8x] + [16x] + [32x] = 12345 .$$

HƯỚNG DẪN GIẢI - ĐÁP SỐ

1. Trong căn bậc hai thay số 6 cuối cùng bởi số 9 thì giá trị căn thức là 3. Trong căn bậc ba thay số 6 cuối cùng bởi số 8 thì giá trị của căn thức là 2. Do đó :

$$\sqrt{6}+\sqrt[3]{6}<\sqrt{6+\sqrt{6+\cdots+\sqrt{6}}}+\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\cdots+\sqrt[3]{6}}}<5.$$

Mà $\sqrt{6}+\sqrt[3]{6}>4$. Vậy phần nguyên của số đã cho bằng 4.

2. Gọi $\left[\sqrt{n}\right]=t$, giả sử n = kt. Ta có :

$$t\le\sqrt{n}<t+1\Rightarrow t^2\le n<(t+1)^2\Rightarrow t\le k<t+2+\frac{1}{t}$$

$t=1$; k = 1, 2, 3 thì n = 1, 2, 3.

$t\ge 2\Rightarrow t\le k<t+3\Rightarrow k=t\,;\,t+1\,;\,t+2\Rightarrow n=t^2\,;\,t(t+1)\,;\,t(t+2)$.

3. x = 2, y = 3 hoặc x = 3, y = 13.

4. $n\alpha=n[\alpha]+n\{\alpha\}$.

$\{\alpha\}>0$ nên với n đủ lớn thì $\{\alpha\}>\frac{1}{n}\Rightarrow n\{\alpha\}>1\Rightarrow\left[n\{\alpha\}\right]\ge 1$. Do đó :

$[n\alpha]>n[\alpha]\Rightarrow\frac{[n\alpha]}{n}>[\alpha]\Rightarrow[\alpha]<\frac{[n\alpha]}{n}<[\alpha]+1$.

5. Chọn số tự nhiên k sao cho : $m+\frac{k-1}{n}\le x<m+\frac{k}{n}$; $[x]=m$, khi đó :

$$[x]+\left[x+\frac{1}{n}\right]+\cdots+\left[x+\frac{n-k}{n}\right]=(n-k+1)[x]=m(n+1-k)$$

và $$\left[x+\frac{n-k+1}{n}\right]+\cdots+\left[x+\frac{n-1}{n}\right]=(k-1)(m+1)$$

Mà $[nx]=mn+k-1$. Từ đó suy ra :

$$[x]+\left[x+\frac{1}{n}\right]+\cdots+\left[x+\frac{n-1}{n}\right]=m(n-k+1)+(k-1)(m+1)$$
$$=mn+k-1=[nx].$$

6. S là tổng hữu hạn vì với k đủ lớn thì $\frac{n+2^k}{2^{k+1}}<1$, khi đó $\left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right]=0$ với $k\ge k_0$ nào đó.

Áp dụng tính chất $\left[\alpha+\frac{1}{2}\right]=[2\alpha]-[\alpha]$ cho $\left[\frac{n}{2^{k+1}}+\frac{1}{2}\right]$, sau đó cộng lại ta được S = n.

7. Đặt $\{x\}=\alpha$ $(0\le\alpha<1)$, ta có :

$[x]+[2x]+[4x]+[8x]+[16x]+[32x]=$

$=63[x]+[2\alpha]+[4\alpha]+[8\alpha]+[16\alpha]+[32\alpha]=63[x]+k$ với $0\le k<62$ và $k\in\mathbb{Z}$

Giả sử 63[x] + k = 12345 thì k = 60 ; [x] = 195.

Mà $[kx]=\left[k[x]+k\alpha\right]\le k[x]+k\alpha<k[x]+k\Rightarrow k[x]\le k[x]+k-1$ $(k\ge 1)$

$\Rightarrow[x]+[2x]+[4x]+[8x]+[16x]+[32x]\le 63[x]+57$, vô lí.

§ 3. ÁP DỤNG PHẦN NGUYÊN ĐỂ GIẢI TOÁN SỐ HỌC

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

Mệnh đề 1 :

Trong dãy số tự nhiên :

$$1, 2, \dots, n \qquad (1)$$

có $\left[\frac{n}{q}\right]$ số chia hết cho số tự nhiên q.

Chứng minh :

Nếu $q \geq n$ thì mệnh đề đúng.

Giả sử q < n, ta chứng minh các số của dãy (1) chia hết cho q là :

$$1.q, 2.q, \dots, \left[\frac{n}{q}\right].q \qquad (2)$$

Thật vậy, ta có : $\left[\frac{n}{q}\right] \leq \frac{n}{q} \Rightarrow \left[\frac{n}{q}\right].q \leq n$ nên số tự nhiên $\left[\frac{n}{q}\right].q$ chia hết cho q và có mặt trong dãy (1). Mặt khác số $\left(\left[\frac{n}{q}\right]+1\right).q$ chia hết cho q nhưng không có mặt trong dãy (1) vì $\left[\frac{n}{q}\right]+1 > \frac{n}{q} \Rightarrow \left(\left[\frac{n}{q}\right]+1\right)q > n$. Như vậy tất cả các số chia hết cho q trong dãy (1) là các số trong dãy (2), mà (2) có $\left[\frac{n}{q}\right]$ số.

Thí dụ : Với n = 10, q = 3 ta có $\left[\frac{10}{3}\right] = 3$ số chia hết cho 3 và nhỏ hơn hoặc bằng 10, đó là các số 3, 6, 9.

Mệnh đề 2 :

Trong sự phân tích số n! ra thừa số nguyên tố :

$$n! = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$$

thì số mũ α_i của thừa số p_i nào đó sẽ là :

$$\alpha_i = \left[\frac{n}{p_i}\right] + \left[\frac{n}{p_i^2}\right] + \dots + \left[\frac{n}{p_i^k}\right] + \dots$$

Chứng minh :

Thực chất tổng trên là tổng hữu hạn, vì với k đủ lớn thì $n < p_i^k$ khi đó

$$\left[\frac{n}{p_i^k}\right] = \left[\frac{n}{p_i^{k+1}}\right] = \dots = 0.$$

Giả sử p là một ước nguyên tố của n!, theo Mệnh đề 1 ta có :

$$n! = 1.2...p(p+1)...2p...3p...\left[\frac{n}{p}\right]p...n = p^{\left[\frac{n}{p}\right]}\left[\frac{n}{p}\right]!q = p^m.m!q$$

với $m = \left[\frac{n}{p}\right]$ và $(p, q) = 1$.

Tương tự, ta có : $m! = p^{\left[\frac{m}{p}\right]}.\left[\frac{m}{p}\right]!q'$ với $(p, q') = 1$.

Suy ra : $$n! = p^{\left[\frac{n}{p}\right]}.p^{\left[\frac{m}{p}\right]}.\left[\frac{m}{p}\right]!qq'$$

Mà $\left[\frac{m}{p}\right] = \left[\frac{\left[\frac{n}{p}\right]}{p}\right] = \left[\frac{n}{p^2}\right]$ và tiếp tục như thế với $\left[\frac{m}{p}\right]!$ ta thu được số mũ của p xuất hiện trong dạng phân tích n! ra thừa số nguyên tố là :

$$\alpha p = \left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \cdots + \left[\frac{n}{p^k}\right] + \cdots$$

Chẳng hạn, số mũ của 7 trong phân tích 100! ra thừa số nguyên tố là :

$$\alpha_7 = \left[\frac{100}{7}\right] + \left[\frac{100}{7^2}\right] + \left[\frac{100}{7^3}\right] = 14 + 2 + 0 = 16.$$

C. CÁC DẠNG TOÁN

Bài 228.

Cho $n \in N^*$, chứng minh rằng 2^n không thể là ước của n!

Giải :

Giả sử $n! = 2^{\alpha_2}.q$ với $(2, q) = 1$. Để chứng minh $2^n \nmid n!$ ta chứng minh $n > \alpha_2$. Ta có : $\alpha_2 = \left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n}{2^2}\right] + \cdots + \left[\frac{n}{2^m}\right]$ với $n \geq 2^m$ và $n < 2^{m+1}$, suy ra

$$\alpha_2 \leq \left[\frac{n}{2} + \frac{n}{2^2} + \cdots + \frac{n}{2^m}\right] = \left[n\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^m}\right)\right] = \left[n\left(1 - \frac{1}{2^m}\right)\right],$$

suy ra $\alpha_2 \leq \left[n - \frac{n}{2^m}\right] \leq n - 1 < n$ (đpcm).

Bài 229.

Chứng minh rằng nếu $a_1 + a_2 + \cdots + a_m$ $(a_i, n \in N^*)$ thì $\frac{n!}{a_1!a_2!...a_m!}$

là số nguyên, từ đó suy ra :

a) $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} \in Z$;

b) $T = \left(1+\dfrac{n}{1}\right)\left(1+\dfrac{n}{2}\right)\cdots\left(1+\dfrac{n}{m}\right) \in Z$ *với* $m, n \in N^*$;

c) Tích n số nguyên liên tiếp chia hết cho n!.

Giải :

Gọi p là số nguyên tố nào đó.

Số mũ p trong phân tích n! ra thừa số là :

$$\alpha_p = \left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \cdots + \left[\frac{n}{p^k}\right] + \cdots$$

Số mũ p trong phân tích $a_1!a_2!\ldots a_m!$ ra thừa số là :

$$\alpha'_p = \left[\frac{a_1}{p}\right] + \left[\frac{a_2}{p}\right] + \cdots + \left[\frac{a_m}{p}\right] + \left[\frac{a_1}{p^2}\right] + \left[\frac{a_2}{p^2}\right] + \cdots + \left[\frac{a_m}{p^2}\right] + \cdots + \left[\frac{a_1}{p^k}\right] + \cdots + \left[\frac{a_m}{p^k}\right] + \cdots$$

Ta cần chứng minh $\alpha_p \geq \alpha'_p$.

Gọi $k \in N^*$, ta chứng minh :

$$\left[\frac{a_1}{p^k}\right] + \left[\frac{a_2}{p^k}\right] + \cdots + \left[\frac{a_m}{p^k}\right] \leq \left[\frac{n}{p^k}\right]$$

Thật vậy :

$$\left[\frac{a_1}{p^k}\right] + \left[\frac{a_2}{p^k}\right] + \cdots + \left[\frac{a_m}{p^k}\right] \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_m}{p^k} \leq \frac{n}{p^k}$$

suy ra :

$$\left[\frac{a_1}{p^k}\right] + \left[\frac{a_2}{p^k}\right] + \cdots + \left[\frac{a_m}{p^k}\right] \leq \left[\frac{n}{p^k}\right] \text{(đpcm).}$$

(Áp dụng tính chất : $x \geq y \Rightarrow [x] \leq [y]$).

a) $n = k + (n - k)$ nên $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} \in \mathbf{Z}$.

b) $T = \dfrac{(n+1)(n+2)\ldots(n+m)}{m!} = \dfrac{(n+m)!}{n!m!} = C_{n+m}^n \in \mathbf{Z}$.

c) $(m+1)(m+2)\ldots(m+n) = \dfrac{(n+m)!}{m!} = n!C_{n+m}^n \,\vdots\, n!$

Bài 230.

Tìm số tự nhiên k lớn nhất thỏa điều kiện :

$(1994!)^{1995} \,\vdots\, 1995^k$.

(Thi HSG Quốc gia - 1995)

Giải :

Ta có 1995 = 3.5.7.19

Ta tìm số mũ lớn nhất của mỗi thừa số 3, 5, 7, 19 trong số $(1994!)^{1995}$.

Số mũ 3 của phân tích 1994! ra thừa số là :

$$\alpha_3 = \left[\frac{1994}{3}\right] + \left[\frac{1994}{3^2}\right] + \left[\frac{1994}{3^3}\right] + \dots + \left[\frac{1994}{3^7}\right]$$

$$= 664 + 221 + 73 + 24 + 8 + 2 + 0 = 992.$$

Tương tự, tính được : $\alpha_5 = 495$, $\alpha_7 = 329$, $\alpha_{19} = 109$.

Vậy trong (1994!) có các thừa số $3^{992}, 5^{495}, 7^{329}, 19^{109}$, suy ra

$$(1994!)^{1995} = \left(3^{992}.5^{495}.7^{329}.19^{109}.M\right)^{1995},$$

trong đó M nguyên tố cùng nhau với 3, 5, 7, 19.

Với k = 109.1995 thì $(1994!)^{1995} \,\vdots\, 1995^k$.

Với k = 109.1995 + 1 thì $(1994!)^{1995} \,\not\vdots\, 1995^k$.

Vậy 100.1995 là số tự nhiên lớn nhất cần tìm.

Bài 231.

Cho m, $n \in N^*$, chứng minh rằng $\dfrac{(2m)!(2n)!}{m!n!(m+n)!}$ là một số nguyên.

(Vô địch Toán Quốc tế - 1972)

Giải :

Chứng tỏ rằng với mọi số nguyên tố p, số các thừa số p chứa trong tích (2m)!(2n)! không nhỏ hơn các thừa số p chứa trong tích m!n!(m + n)!.

Gọi S_1, S_2 lần lượt là số thừa số p chứa trong tích (2m)!(2n)! và m!n!(m + n)!. Ta có :

$$S_1 = \left[\frac{2m}{p}\right] + \left[\frac{2n}{p}\right] + \left[\frac{2m}{p^2}\right] + \left[\frac{2n}{p^2}\right] + \dots + \left[\frac{2m}{p^k}\right] + \left[\frac{2n}{p^k}\right] + \dots$$

$$S_2 = \left[\frac{m}{p}\right] + \left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{m+n}{p}\right] + \left[\frac{m}{p^2}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \left[\frac{m+n}{p^2}\right] + \dots$$

Để chứng minh $S_1 \ge S_2$ ta cần chứng minh với $k \in \mathbf{N}$ thì

$$\left[\frac{2m}{p^k}\right] + \left[\frac{2n}{p^k}\right] \ge \left[\frac{n}{p^k}\right] + \left[\frac{m}{p^k}\right] + \left[\frac{n+m}{p^k}\right]$$

hay

$$[2\alpha] + [2\beta] \ge [\alpha] + [\beta] + [\alpha + \beta]$$

với $\alpha = \dfrac{m}{p^k}, \beta = \dfrac{n}{p^k}$ (xem Bài 218).

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Phân tích số 12! ra thừa nguyên tố.
2. a) Số 100! Có tận cùng nao nhiêu chữ số 0 ?
   b) Số ((3!)!)! có tận cùng bao nhiêu chữ số 0 ?
3. Số C_{1000}^{500} có chia hết cho 7 không ? Tại sao ?
4. Cho $n \in \mathbf{N}$, chứng minh $\dfrac{(2n)!6}{n!(n+2)!}$ là một số nguyên.
5. Cho $A = \dfrac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6...(2n)}$ $(n \in \mathbf{N})$ chứng minh rằng trong dãy A, 2A, 2^2A, ..., 2^mA từ một vị trí nào đó trở đi các số hạng đều nguyên.
6. Cho k, m, $n \in \mathbf{N}^*$ sao cho m + k + 1 là số nguyên tố lớn hơn n + 1. Kí hiệu $C_i = i(i+1)$. Chứng minh rằng :

$$(C_{m-1} - C_k)(C_{m+2} - C_k)...(C_{m+n} - C_k) \vdots C_1C_2...C_n .$$

(Thi toán Quốc tế)

HƯỚNG DẪN GIẢI - ĐÁP SỐ

1. Ước nguyên tố của 12! không vượt quá 12. Lần lượt tính $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_5, \alpha_7, \alpha_{11}$ ta được $12! = 2^{10}.3^5.5^2.7.11$.
2. a) Ta tìm số nguyên dương k lớn nhất sao cho $100! \vdots 10^k$. Vì 10 = 2.5 nên ta tính α_2 và α_5, ta có $\alpha_2 < \alpha_5 = 24$; 100! có tận cùng 24 chữ số 0.
   b) ((3!)!)! có tận cùng 178 chữ số 0.
3. $C_{1000}^{500} = \dfrac{1000!}{(500!)^2}$. Lũy thừa 7 trong phân tích 1000! và $(500!)^2$ ra thừa số đều bằng 164 nên $C_{1000}^{500} \not\vdots\, 7$.
4. Chứng minh : $$\left[\frac{2n}{p}\right] + \left[\frac{3}{p}\right] \geq \left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n+2}{p}\right] \qquad (1)$$

Với p = 2 : (1) đúng, vì $[n] + 1 \geq \left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n}{2}\right] + 1$

Với p = 3 : (1) $\Leftrightarrow \left[\frac{2n}{3}\right] + 1 \geq \left[\frac{n}{3}\right] + \left[\frac{n+2}{3}\right]$.

Thật vậy : $\left[\frac{n}{3}\right] + \left[\frac{n+2}{3}\right] \leq \left[\frac{2n+2}{3}\right] \leq \left[\frac{2n}{3} + 1\right] = \left[\frac{2n}{3}\right] + 1$

Với p > 3 : (1) $\Leftrightarrow \left[\frac{2n}{p}\right] \geq \left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n+2}{p}\right]$.

Theo tính chất : $\left[\alpha + \frac{1}{2}\right] = [2\alpha] - [\alpha]$, ta có :

$$\left[\frac{2n}{p}\right] - \left[\frac{n}{p}\right] = \left[\frac{n}{p} + \frac{1}{2}\right] \geq \left[\frac{n+2}{p}\right] \quad \left(\text{vì } \frac{1}{2} \geq \frac{2}{p}\right)$$

5. $A = \dfrac{(2n-1)!}{2^{2n-1}.n!(n-1)!} = \dfrac{1}{2^{2n-1}} C_{2n-1}^{n-1} \Rightarrow 2^{2n-1} A = C_{2n-1}^{n-1} \in \mathbf{Z}$.

6. $C_p - C_q = p(p+1) - q(q+1) = (p-q)(p+q+1)$;

$A = (m-k+1)(m-k+2)...(m-k+n)(m+k+2)(m+k+3)...(m+k+n+1)$.

Mặt khác : $B = C_1C_2...C_n = n!(n+1)!$. Ta cần chứng minh :

$$(m-k+1)(m-k+2)...(m-k+m) \vdots n!$$

và $$(m+k+2)(m+k+3)...(m+k+n+1) \vdots (n+1)!$$

(Áp dụng tính chất : Tích n số nguyên liên tiếp chia hết cho n! và $C_{m-k+n+1}^{n-1}$ là số nguyên).

§ 4. GIẢI PHƯƠNG TRÌNH CÓ CHỨA PHẦN NGUYÊN

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

- $[x] = t \Leftrightarrow t \in \mathbf{Z}$ và $t \leq x < t+1$.
- $\{x\} = k \Leftrightarrow 0 \leq k < 1$ và $x = [x] + k$.

B. CÁC DẠNG TOÁN

Bài 232.

Giải phương trình :

a) $[x]^2 - [x] - 2 = 0$;

b) $[-x^2 + 3x] = \left[x^2 + \frac{1}{2}\right]$.

Giải :

a) Đặt $t = [x]$, ta có : $t^2 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = 2 \end{array}\right.$

$t = -1 \Leftrightarrow [x] = -1 \Leftrightarrow -1 \leq x < 0$;

$t = 2 \Leftrightarrow [x] = 2 \Leftrightarrow 2 \leq x < 3$.

Vậy tập nghiệm $S = [-1;0) \cup [2;3)$

b) Vì $x^2 + \frac{1}{2} > 0$ nên $[-x^2 + 3x] = \left[x^2 + \frac{1}{2}\right] = n$ với $n \in \mathbf{N}$.

Ta có : $-x^2+3x=-\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{9}{4}\le\dfrac{9}{4}$ nên n = 0, 1, 2.

Với n = 0, ta có :

$$\begin{cases}[-x^2+3x]=0\\ \left[x^2+\dfrac{1}{2}\right]=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0\le -x^2+3x<1\\ 0<x^2+\dfrac{1}{2}<1\end{cases}\Leftrightarrow 0\le x<\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

Với n = 1, ta có :

$$\begin{cases}[-x^2+3x]=1\\ \left[x^2+\dfrac{1}{2}\right]=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1\le -x^2+3x<2\\ 1\le x^2+\dfrac{1}{2}<2\end{cases}\Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{2}}{2}\le x<1.$$

Với n = 2, ta có :

$$\begin{cases}[-x^2+3x]=2\\ \left[x^2+\dfrac{1}{2}\right]=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2< -x^2+3x<3\\ 2\le x^2+\dfrac{1}{2}<3\end{cases}\Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{6}}{2}\le x<\dfrac{\sqrt{10}}{2}.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là :

$$S=\left[0;\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2};1\right)\cup\left[\dfrac{\sqrt{6}}{2};\dfrac{\sqrt{10}}{2}\right).$$

Bài 233.

Giải phương trình : $\quad \{x^2\}=\{x\}^2 \qquad (1)$

Giải :

Ta có : $x^2=([x]+\{x\})^2=[x]^2+2[x]\{x\}+\{x\}^2$, do đó :

$(1)\Leftrightarrow\left\{2[x]\{x\}+\{x\}^2\right\}=\{x\}^2=\left\{\{x\}^2\right\}\Leftrightarrow 2[x]\{x\}+\{x\}^2-\{x\}^2=2[x]\{x\}\in\mathbf{Z}$

Đặt $m=[x]$ và $k=2m\{x\}\in\mathbf{Z}$.

Nếu m = 0 thì $[x]=0\Leftrightarrow 0\le x<1$.

Nếu $m\ne 0$ thì $\{x\}=\dfrac{k}{2m}\Rightarrow 0\le k<2m$ và $x=[x]+\{x\}=m+\dfrac{k}{2m}$

Thử lại thấy : $0\le x<1$ và $x=m+\dfrac{k}{2m}$ $(0\le k<2m,\ k,\ m\in\mathbf{Z})$ là nghiệm của phương trình.

Bài 234.

Giải các phương trình :

a) $x^3-[x]=3$; $\qquad$ ***b)*** $x^4=2x^2+[x]$.

Giải :

a) Ta có $x^3-[x]=3\Leftrightarrow x^3-(x-\{x\})=3\Leftrightarrow x^3-x=3-\{x\}$.

Vì $0 \le \{x\} < 1$ nên $2 < x^3 - x \le 3$.

Với $x \le -1$ thì $x(x^2-1) \le 0$;

Với $-1 < x \le 0$ thì $x(x^2-1) \le -x < 1$;

Với $0 < x \le 1$ thì $x(x^2-1) < x^3 \le 1$;

Với $x \ge 2$ thì $x(x^2-1) \ge 6$.

Vậy : $1 < x < 2$ suy ra $[x] = 1$, nghiệm của phương trình là : $x = \sqrt[3]{4}$.

b) $x^4 = 2x^2 + [x] \Leftrightarrow [x] = x^2(x^2-2)$.

• Nếu $x^2 \le 2$ thì $[x] \le 0$ và $-\sqrt{2} \le x \le \sqrt{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}[x]=0\\ [x]=-1\end{array}\right.$

Với $[x] = 0$, ta được nghiệm $x = 0$.

Với $[x] = -1$, ta được nghiệm $x = -1$.

• Nếu $x^2 > 2$ khi đó $[x] > 0$ và $x > \sqrt{2}$ phương trình đã cho trở thành :

$$\frac{[x]}{x} = x(x^2 - x)$$

Mà $\frac{[x]}{x} \le 1$ và $x > \sqrt{2}$ nên $x^2 - 2 < 1 \Rightarrow x < \sqrt{2}$. Khi đó $\sqrt{2} < x < \sqrt{3} \Rightarrow [x] = 1$.

Phương trình $x^2(x^2-1) = 1$ có nghiệm $x = \sqrt{1+\sqrt{2}}$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là : $S = \left\{-1; 0; \sqrt{1+\sqrt{2}}\right\}$.

Bài 235.

Giải các phương trình :

a) $\left[\frac{8x+19}{7}\right] = \frac{16(x+1)}{11}$; *b)* $\left[\frac{2x-1}{3}\right] + \left[\frac{4x+1}{6}\right] = \frac{5x-4}{3}$.

Giải :

a) Đặt $\frac{16(x+1)}{11} = t \in \mathbf{Z} \Rightarrow x = \frac{11t-16}{16}$. Khi đó ta có :

$\left[\frac{11t-22}{14}\right] = t \Leftrightarrow 0 \le \frac{11t-22}{14} - t < 1 \Leftrightarrow 2\frac{2}{3} \le t < 7\frac{1}{3} \Leftrightarrow t \in \{3, 4, 5, 6, 7\}$.

Tập nghiệm : $S = \left\{1\frac{1}{16}; 1\frac{3}{4}; 2\frac{7}{6}; 3\frac{1}{8}; 2\frac{13}{16}\right\}$

b) Đặt : $y = \frac{2x-1}{3} \Rightarrow x = \frac{3y+1}{2}$.

Thay $x = \frac{3y+1}{2}$ vào phương trình ta được :

$$[y] + \left[y + \frac{1}{2}\right] = \frac{5y-1}{2} \Leftrightarrow [2y] = \frac{5y-1}{2}$$

Đặt $\frac{5y-1}{2} = t \in \mathbf{Z}$, khi đó $y = \frac{2t+1}{5}$. Ta có :

$$\left[\frac{4t+2}{5}\right] = t \Leftrightarrow 0 \le \frac{4t+2}{5} - t < 1 \Leftrightarrow -3 < t \le 2 \Leftrightarrow t \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}.$$

Tập nghiệm : $S = \left\{-\frac{2}{5}; \frac{1}{5}; \frac{4}{5}; \frac{7}{5}; 2\right\}$.

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Giải các phương trình :

a) $\left[\frac{2x+1}{3}\right] - [x^2] = [-x^2]$;

b) $[2x-1] = [1-x]$;

c) $\left[\frac{2x-1}{3}\right] = \left[\frac{x+1}{2}\right]$;

d) $[x^2] = [x]^2$.

2. Giải phương trình : $x^2 - 8[x] + 7 = 0$.

3. Tìm nghiệm dương của phương trình : $x^2 + 2x + [x] = 0$.

4. Tìm nghiệm nguyên của : $20\left(x + 37 - \left[\frac{x+37}{3}\right]\right) = x$.

5. Giải phương trình : $1 - |x+1| = \frac{[x] - x}{|x-1|}$.

6. Giải phương trình :

a) $\left[\frac{5+6x}{8}\right] = \frac{15x-7}{5}$;

b) $\left[\frac{1-x}{2}\right] + \left[1 - \frac{x}{2}\right] = \frac{1-3x}{8}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI – ĐÁP SỐ

1. a) $[-\alpha] + [\alpha]$ bằng 0 hoặc -1.

- $x^2 \in \mathbf{Z}$: $\left[\frac{2x+1}{3}\right] = 0 \Leftrightarrow 0 \le \frac{2x+1}{3} < 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \le x < 1$.

Kết hợp với $x^2 \in \mathbf{Z}$ ta có x = 0.

- $x^2 \notin \mathbf{Z}$: $\left[\frac{2x+1}{3}\right] = -1 \Leftrightarrow -1 \le \frac{2x+1}{3} < 0 \Leftrightarrow -2 \le x < -\frac{1}{2}$.

Kết hợp với $x^2 \notin \mathbf{Z}$ ta có $-2 < x < -\frac{1}{2}$, $x \ne -1; \sqrt{2}; -\sqrt{3}$.

b) Đặt $[2x-1] = [1-x] = n \in \mathbf{Z} \Rightarrow \begin{cases} n \le 2x-1 < n+1 \\ n \le 1-x < n+1 \end{cases} \Rightarrow -\frac{2}{3} < n \le \frac{1}{3} \Rightarrow n = 0.$

c) $\left[\frac{2x-1}{3}\right] = \left[\frac{x+1}{2}\right] = n \Rightarrow \frac{2x-1}{3} - 1 < n \le \frac{x+1}{2}$ và $\left|\frac{2x-1}{3} - \frac{x+1}{2}\right| < 1$.

Suy ra $-1 < x < 11 \Rightarrow -2 < n < 6$.

d) Đặt $[x] = n \Rightarrow n \le x < n+1$; $[x^2] = n^2 \Leftrightarrow n \le x < \sqrt{n^2+1}$.

2. $[x] = n$; $x^2 + 7 = 8n$, $n \ge 0$.

Ta có : $n \le x < n+1 \Rightarrow n^2 + 7 \le x^2 + 7 < n^2 + 2n + 8$

$$\Rightarrow n^2 + 7 \le 8n < n^2 + 2n + 8 \Rightarrow \begin{cases} 1 \le n \le 7 \\ n < 2 \text{ hoặc } n > 4. \end{cases}$$

$$\Rightarrow n \in \{1, 5, 6, 7\}.$$

Vậy : $S = \{1 ; \sqrt{33} ; \sqrt{41} ; 7\}$.

3. $[x] = -(x+1)^2 + 1 \le 0 \Rightarrow [x] = 0 ; [x] = 1$.

4. $\left[\dfrac{x+37}{3}\right] = \dfrac{x+37}{3} - \left\{\dfrac{x+37}{3}\right\}$ với $\left\{\dfrac{x+37}{3}\right\} = 0 ; \dfrac{1}{3} ; \dfrac{2}{3}$.

5. $|x-1|\left(|x+1| - 1\right) = \{x\}$, $x \ne 1$.

Xét các trường hợp $x > 1$; $x < -1$; $-1 \le x < 1$.

$S = \{0 ; -2 ; -\sqrt{5}\}$.

6. a) Đặt $t = \dfrac{5x-7}{5} \in \mathbf{Z}$, ta được :

$$\left[\frac{30t+117}{120}\right] = t \Leftrightarrow 0 \le \frac{30t+117}{120} - t < 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{30} < t < \frac{117}{90} \Leftrightarrow t \in \{0 ; 1\}.$$

$S = \left\{\dfrac{7}{15} ; \dfrac{4}{5}\right\}$.

b) Đặt $y = \dfrac{1-x}{2}$, ta có :

$$[y] + \left[y + \frac{1}{2}\right] = \frac{3y-1}{4} \Leftrightarrow [2y] = \frac{3y-1}{4}$$

Đặt $\dfrac{3y-1}{4} = t \in \mathbf{Z}$, ta có :

$$\left[\frac{8t+2}{3}\right] = t \Leftrightarrow 0 \le \frac{8t+2}{3} - t < 1 \Leftrightarrow -\frac{2}{5} \le t < \frac{1}{5} \Leftrightarrow t = 0.$$

$S = \left\{\dfrac{1}{3}\right\}$.

ĐẠI SỐ TỔ HỢP

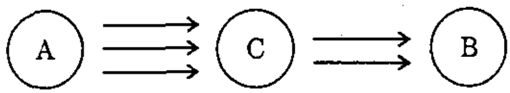
§ 1. QUY TẮC NHÂN – QUY TẮC CỘNG – CHỈNH HỢP LẶP

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Quy tắc nhân :

Giả sử một hành động H được tiến hành gồm k giai đoạn liên tiếp. Ở giai đoạn 1 có m_1 cách chọn, ở giai đoạn 2 có m_2 cách chọn, ... , ở giai đoạn k có m_k cách chọn. Khi đó có tất cả $m_1m_2...m_k$ cách chọn để thực hiện hành động H.

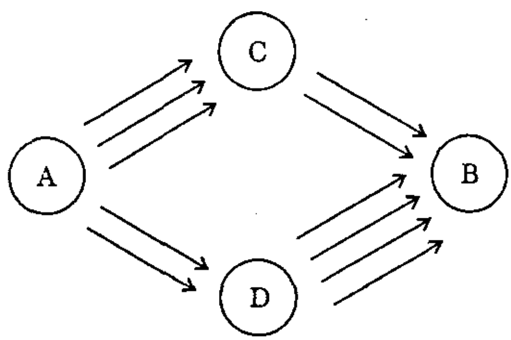
Chẳng hạn, khi đi từ A đến B phải qua C, biết rằng từ A đến C có 3 đường đi và từ C đến B có 2 đường đi. Như vậy, có $3\times 2=6$ đường đi từ A đến B



2. Quy tắc cộng :

Một hành động H được tiến hành gồm k hành động H_1, H_2, ..., H_k độc lập nhau và mỗi hành động H_i có m_i cách chọn. Khi đó hành động H sẽ có $m_1+m_2+\cdots+m_k$ cách chọn.

Chẳng hạn, khi đi từ A đến B phải qua C hoặc D. Biết rằng từ A đến C có 3 đường đi, từ C đến B có 2 đường đi, từ A đến D có 2 đường đi và từ D đến B có 4 đường đi. Hỏi có bao nhiêu đường đi từ A đến B, biết rằng giữa C và D không có đường đi.



- Từ A đến B qua C có $3\times 2=6$ đường đi ;
- Từ A đến B qua D có $2\times 4=8$ đường đi .

Vậy, từ A đến B có tất cả 6 + 8 = 14 đường đi.

2. Chỉnh hợp lặp :

a) Định nghĩa :

Cho tập hợp X gồm có n phần tử. Một dãy có độ dài m các phần tử của X, trong đó mỗi phần tử có thể lặp lại nhiều lần, sắp xếp theo một thứ tự nhất định được gọi là một chỉnh hợp lặp chập m của n phần tử. Kí hiệu số chỉnh hợp lặp chập m của n phần tử là F_n^m.

Ví dụ, các dãy

$$(a, a, d) ; (b, d, d) ; (d, a, b) ; \ldots ,$$

là các chỉnh hợp lặp chập 3 của 4 phần tử của tập hợp $\{a, b, c, d\}$

b) Định lí :

$$F_n^m = n^m .$$

B. CÁC DẠNG TOÁN

Bài 236.

Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau và chia hết cho 10.

Giải :

Gọi $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$ là số thỏa mãn yêu cầu bài toán.

- a_5 có một cách chọn ($a_5 = 0$) ;
- a_1 có 9 cách chọn ;
- a_2 có 8 cách chọn ;
- a_3 có 7 cách chọn ;
- a_4 có 6 cách chọn.

Vậy theo quy tắc nhân có 9.8.7.6 = 3024 số cần tìm.

Bài 237.

Có bao nhiêu số tự nhiên lẻ gồm 4 chữ số khác nhau.

Giải :

Gọi $x = \overline{a_1a_2a_3a_4}$ là số cần tìm.

- Vì x lẻ nên a_4 có 5 cách chọn ($a_4 \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$) ;
- Do $a_1 \neq 0$ và $a_1 \neq a_4$ nên có 8 cách chọn a_1 ;
- a_2 có 8 cách chọn ;
- a_3 có 7 cách chọn.

Vậy theo quy tắc nhân có 5.8.8.7 = 2240 số thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 238.

Có bao nhiêu số tự nhiên lẻ gồm 6 chữ số và chia hết cho 9 ?

Giải :

Gọi $x = \overline{a_1a_2....a_6}$ là số thỏa mãn điều kiện bài toán.

• Vì x lẻ nên có 5 cách chọn a_6;

• a_5, a_4, a_3, a_2 mỗi chữ số đều có 10 cách chọn.

• Lấy tổng các chữ số $T = a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6$ chia cho 9. Nếu T chia cho 9 được dư là 0, 1, 2, ... , 8 thì a_1 chọn tương ứng là 9, 8, 7, ... , 1, ta sẽ có $x \vdots 9$.

Vậy có $5.10^4 = 50000$ số lẻ gồm 6 chữ số và chia hết cho 9.

Bài 239.

Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số sao cho tổng các chữ số của mỗi số là một số lẻ.

Giải :

Xét một số tự nhiên gồm 4 chữ số tùy ý $\overline{a_1a_2a_3a_4}$.

• Nếu $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ là số chẵn thì lấy $a_5 \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$ để được $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$ là số lẻ. Khi đó a_5 có 5 cách chọn.

• Nếu $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ là số lẻ thì lấy $a_5 \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$ để được $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$ là số lẻ. Khi đó a_5 cũng có 5 cách chọn. Do đó số $\overline{a_1a_2a_3a_4}$ có $9.10.10.10 = 9.10^3$ cách chọn.

Vậy có $5.9.10^3 = 45000$ số thỏa yêu cầu bài toán.

Bài 240.

Có bao nhiêu số có 6 chữ số mà :

a) Chữ số đầu và chữ số cuối giống nhau ?

b) Chữ số đầu và chữ số cuối khác nhau ?

c) Số có hai chữ số đầu và số có hai chữ số cuối giống nhau ?

Giải :

a) Có $F_{10}^4 = 10^4$ cách chọn 4 chữ số ở giữa . Vậy có $9.10^4 = 90000$ số có 6 chữ số mà chữ số đầu và cuối giống nhau.

b) Có $F_{10}^6 - F_{10}^5 = 9.10^5$ số có 6 chữ số. Vậy có $9.10^5 - 9.10^4 = 810.000$ số có 6 chữ số mà chữ số đầu và chữ số cuối khác nhau.

c) Có $F_{10}^2 - F_{10}^1 = 90$ số có hai chữ số, do đó có 90 cách chọn hai chữ số đầu và cuối giống nhau.

Có $F_{10}^2 = 100$ cách chọn hai chữ số ở giữa. Vậy có 90.100 = 9000 số thỏa yêu cầu bài toán.

Tổng quát :

Với $n > 2m > 2$ $(m, n \in \mathbf{N})$, có $\left(F_{10}^m - F_{10}^1\right)F_{10}^{n-2m}$ số có n chữ số mà số có m chữ số đầu và số có m chữ số cuối giống nhau.

Bài 241.

Có bao nhiêu số chẵn lớn hơn 5000 gồm 4 chữ số khác nhau.

Giải :

Giả sử $x = \overline{a_1a_2a_3a_4}$ là số thỏa mãn yêu cầu bài toán.

i) Trường hợp a_1 là số lẻ thì a_1 có 3 cách chọn ($a_1 \in \{5,7,9\}$), a_4 có 5 cách chọn($a_4 \in \{0,2,4,6,8\}$), a_2 có 8 cách chọn và a_3 có 7 cách chọn. Vậy có 3.5.8.7 = 840 số chẵn có 4 chữ số bắt đầu bằng chữ số lẻ.

ii) Trường hợp a_1 là số chẵn thì a_1 có 2 cách chọn ($a_1 \in \{6,8\}$), a_4 có 4 cách chọn, a_2 có 8 cách chọn và a_3 có 7 cách chọn. Vậy có 2.4.8.7 = 448 số chẵn có 4 chữ số bắt đầu bằng chữ số chẵn.

Vậy tổng cộng có 840 + 448 = 1288 số thỏa mãn yêu cầu bài toán.

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Cho 8 chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Từ 8 chữ số trên có thể lập được bao nhiêu số, mỗi số gồm 4 chữ số đôi một khác nhau và không chia hết cho 10.

2. Có 5 miếng bìa, trên mỗi miếng ghi một trong 5 chữ số 0, 1, 2, 3, 4. Lấy 3 miếng trong 5 miếng bìa này đặt lần lượt cách nhau từ trái sang phải để được các số gồm 3 chữ số. Hỏi có thể lập được bao nhiêu số có nghĩa gồm ba chữ số và trong đó có bao nhiêu số chẵn.

3. Có bao nhiêu số có 5 chữ số :

a) Bắt đầu bằng số 3 ? b) Không bắt đầu bằng số 5 ?

c) Bắt đầu bằng số 54.

4. Cho tập hợp A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}.

a) Có bao nhiêu tập con X của A thỏa điều kiện X chứa chữ số 1 và không chứa chữ số 2.

b) Có bao nhiêu số tự nhiên chẵn gồm 5 chữ số khác nhau đôi một lấy từ A và không bắt đầu bằng 123 ?

5. Cho tập hợp X = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}. Hỏi có bao nhiêu tập con Y của X sao cho 0, 1 thuộc Y còn 8, 9 không thuộc Y và đồng thời có ít nhất một trong các số 2, 3, 4 thuộc Y ?

HƯỚNG DẪN GIẢI - ĐÁP SỐ

1. Số cần tìm có dạng $\overline{a_1a_2a_3a_4}$: a_1 có 7 cách chọn, a_4 có 6 cách chọn, a_2 có 6 cách chon, a_3 có 5 cách chọn. Đáp số : 7.6.6.5 = 1260 số.

2. a) 48. b) 30 số.

3. a) F_{10}^4. b) $F_{10}^5 - 2F_{10}^4$.

c) F_{10}^3.

4. a) Tập hợp n phần tử có 2^n tập hợp con . .

b) 3348.

5. Có 6 tập con của X chứa 0, 1 và không chứa 8, 9.

Có 2^3 tập con của X chứa 0, 1 và không chứa 8, 9, 2, 3, 4.

Vậy có $2^6 - 2^3$ tập con thỏa mãn yêu cầu.

§ 2. HOÁN VỊ

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Định nghĩa :

Mỗi cách sắp đặt các phần tử của tập hợp A gồm n phần tử $(n \geq 1)$ theo một thứ tự nhất định gọi là một hoán vị của n phần tử.

Kí hiệu số hoán vị của n phần tử là : P_n.

2. Công thức :

$$P_n = n! = 1.2.3.\ldots.n$$

Ví dụ :

• Số hoán vị của ba phần tử a, b, c là $3! = 6$, gồm các dãy abc, acb, bac, bca, cab, cba.

• Có $5! = 120$ cách sắp xếp 5 người vào ngồi cùng một ghế dài.

B. CÁC DẠNG TOÁN

Bài 242.

Có bao nhiêu số có 6 chữ số khác nhau lấy từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5. Trong các số đó có bao nhiêu số chia hết cho 5 ?

Giải :

Có $P_6 = 6!$ số có 6 chữ số lấy từ các chữ số đã cho kể cả các số có chữ số 0 đứng đầu. Với chữ số 0 đứng đầu ta có $P_5 = 5!$ số.

Vậy có tất cả $6! - 5! = 600$ số có 6 chữ số khác nhau lấy từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5.

Số chia hết cho 5 là số có chữ số tận cùng là 0 hoặc 5. Với số tận cùng là 0 ta có 5! Số. Với số tận cùng là 5 ta có 5! – 4! Số.

Vậy có tất cả 5! + (5! – 4!) = 216 số thoả yêu cầu bài toán.

Bài 243.

a) Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số mà các chữ số đều lớn hơn 4 và đôi một khác nhau ?

b) Hãy tính tổng tất cả các số tự nhiên nói trên.

Giải :

a) Số có 5 chữ số khác nhau lập được từ các chữ số 5, 6, 7, 8, 9 là một hoán vị của 5 phần tử. Vậy có tất cả $P_5 = 5! = 120$ số.

b) Để ý rằng 5 + 9 = 6 + 8 = 7 + 7 = 14, nên ứng với mỗi số n của hoán vị trên ta có thể ghép một và chỉ một số n' sao cho

$$n + n' = 14\left(1 + 10 + 10^2 + 10^3 + 10^4\right) = 155554$$

(Chẳng hạn, 65897 + 89657 = 155554).

Vậy tổng cần tìm là : $S = \frac{120}{2} \cdot 155554 = 9333240$.

Bài 244.

Tìm số hoán vị của n phần tử (n > 2) trong đó có hai phần tử cho trước không đứng cạnh nhau.

Giải :

Trước hết ta tìm số hoán vị của n phần tử trong đó hai phần tử ab luôn đứng cạnh nhau.

ab đứng cạnh nhau ta xem như một phần tử, trường hợp này có $(n-1)!$ hoán vị. Sau đó đổi chỗ a, b cho nhau ta được thêm $(n-1)!$ hoán vị. Vậy có tất cả $2(n-1)!$ hoán vị của n phần tử mà hai phần tử cho trước đứng cạnh nhau. Do đó có $n! - 2(n-1)! = (n-1)!(n-2)$ số hoán vị thoả yêu cầu bài toán.

Bài 245.

Xét những số gồm 9 chữ số trong đó có năm chữ số 1 và bốn chữ số còn lại là 2, 3, 4, 5. Hỏi có bao nhiêu số như thế, nếu :

a) Năm chữ số 1 được xếp kề nhau.

b) Các chữ số được xếp tuỳ ý.

Giải :

a) Năm chữ số 1 được xếp kề nhau ta xem như một phần tử. Mỗi số có 9 chữ số như thế là một hoán vị của 5 phần tử. Vậy có $P_5 = 5! = 120$ số thoả đề bài.

b) Xem năm số 1 là khác nhau thì ta có 9! số, nhưng có 5! số trùng nhau (là hoán vị của 5 chữ số 1). Vậy có tất cả $\frac{9!}{5!} = 3024$ số thoả yêu cầu.

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Xét các số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau lập nên từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5. Hỏi trong các số đó có bao nhiêu số :
   a) Bắt đầu bởi chữ số 5 ?
   b) Không bắt đầu bởi chữ số 1 ?
   c) Bắt đầu bởi 23 ?
   d) Không bắt đầu bởi 345 ?
2. Có thể xếp các số 1, 2, ... , 2n bao nhiêu cách để cho số chẵn ở vị trí chẵn?
3. Với 5 chữ số 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được bao nhiêu số gồm 8 chữ số, trong đó chữ số 1 có mặt đúng 3 lần, chữ số 2 có mặt đúng 2 lần và mỗi chữ số còn lại có mặt đúng 1 lần ?
4. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được bao nhiêu số gồm 8 chữ số, trong đó chữ số 1 có mặt đúng 3 lần còn các chữ số khác có mặt đúng 1 lần ?
5. Từ ba chữ số 2, 3, 4 có thể tạo ra được bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số, trong đó có mặt đủ 3 chữ số trên.

HƯỚNG DẪN GIẢI – ĐÁP SỐ

1. a) $4!$; b) 96 ;
   c) 6 ; d) $5!-3!$.
2. $(n!)^2$.
3. $\dfrac{8!}{3!2!}$.
4. $\dfrac{7\cdot 7!}{3!}$.
5. 150.

§ 3. CHỈNH HỢP

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

Cho ba số 1, 2, 3. Tất cả các số có hai chữ số lấy trong tập hợp $\{1, 2, 3\}$ mà hai chữ số khác nhau là 12, 21, 13, 31, 23, 32. Ta gọi mỗi số như thế là một chỉnh hợp chập 2 của 3 phần tử 1, 2, 3.

1. Định nghĩa :

Cho tập hợp gồm n phần tử ($n \geq 1$) lấy ra k phần tử ($1 \leq k \leq n$) và sắp xếp k phần tử này theo một thứ tự nhất định gọi là một chỉnh hợp chập k của n phần tử.

2. Công thức :

Số chỉnh hợp chập k của n phần tử là :

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

3. Tính chất :

- $A_n^1 = \frac{n!}{(n-1)!} = n$;
- $A_n^n = A_n^{n-1} = n!$.

B. CÁC DẠNG TOÁN

Bài 246.

Từ 5 chữ số 0, 1, 3, 5, 7 có thể lập được bao nhiêu số, mỗi số gồm 4 chữ số khác nhau và không chia hết cho 5 ?

Giải :

Số có 4 chữ số khác nhau có dạng : $\overline{a_1a_2a_3a_4}$.

- Có 3 cách chọn a_4 ($a_4 \in \{1, 3, 7\}$)
- Có A_4^3 cách chọn $\overline{a_1a_2a_3}$, kể cả $a_1 = 0$.

Với $a_1 = 0$, có A_3^2 cách chọn $\overline{a_2a_3}$.

Vậy có $3(A_4^3 - A_3^2) = 54$ số thỏa yêu cầu bài toán.

Bài 247.

Cho tập hợp X = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}. Có thể lập được bao nhiêu số n gồm 5 chữ số khác nhau lấy từ tập X trong mỗi trường hợp sau :

a) n là số chẵn ;

b) Một trong ba chữ số đầu tiên phải bằng 1.

Giải :

a) Số chẵn có 5 chữ số có dạng : $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$, trong đó $a_5 \in \{0, 2, 4, 6\}$.

- $a_5 = 0$ có A_7^4 cách chọn $\overline{a_1a_2a_3a_4}$.
- $a_5 = 2$ (4 hoặc 6) có A_7^4 cách chọn $\overline{a_1a_2a_3a_4}$, kể cả $a_1 = 0$.

Với $a_1 = 0$ có A_6^3 cách chọn $\overline{a_2a_3a_4}$. Trường hợp này có $A_7^4 - A_6^3$ cách chọn.

Vậy tổng cộng có : $A_7^4 + 3\left(A_7^4 - A_6^3\right) = 4A_7^4 - 3A_6^3 = 3000$ số thỏa yêu cầu bài toán.

b) • $a_1 = 1$ có A_7^4 cách chọn $\overline{a_2a_3a_4a_5}$.

• $a_2 = 1$ (hoặc $a_3 = 1$) có $A_7^4 - A_6^3$ cách chọn.

Vậy tổng cộng có : $A_7^4 + 3\left(A_7^4 - A_6^3\right) = 3A_7^4 - 2A_6^3 = 2280$ số thoả yêu cầu bài toán.

Bài 248.

Với các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được bao nhiêu số, mỗi số gồm 5 chữ số đôi một khác nhau và trong đó nhất thiết phải có mặt chữ số 5 ?

Giải :

Số có 5 chữ số khác nhau lập được từ các số đã cho là A_7^5 số, kể cả chữ số 0 nằm ở vị trí đầu tiên. Với chữ số 0 nằm ở vị trí đầu tiên có A_6^4 số. Vậy có $A_7^5 - A_6^4$ số có 5 chữ số khác nhau lập từ các chữ số đã cho.

Tương tự, số có 5 chữ số khác nhau lấy từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 6 (trừ số 5 ra) là $A_6^5 - A_5^4$.

Vậy số các số cần tìm là : $A_7^5 - A_6^4 - \left(A_6^5 - A_5^4\right) = 1560$.

Bài 249.

Cho các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5. Từ các chữ số đã cho, hỏi :

a) Có bao nhiêu số chẵn có 4 chữ số khác nhau đôi một ?

b) Có bao nhiêu số có ba chữ số khác nhau đôi một và chia hết cho 5?

c) Có bao nhiêu số có ba chữ số khác nhau đôi một và chia hết cho 9?

Giải :

a) Số cần tìm có dạng : $\overline{a_1a_2a_3a_4}$, với $a_4 \in \{0, 2, 4\}$.

• Với $a_4 = 0$ có A_5^3 cách chọn $\overline{a_1a_2a_3}$.

• Với $a_4 = 2$ (hoặc $a_4 = 4$) có $A_5^3 - A_4^2$ cách chọn $\overline{a_1a_2a_3}$.

Vậy có $A_5^3 + 2\left(A_5^3 - A_4^2\right) = 156$ số thỏa yêu cầu.

b) Số cần tìm có dạng : $\overline{a_1a_2a_3}$, với $a_3 \in \{0, 5\}$.

• Với $a_3 = 0$ có A_5^2 cách chọn $\overline{a_1a_2}$.

• Với $a_3 = 5$ có $A_5^2 - A_4^1$ cách chọn $\overline{a_1a_2}$.

Vậy có $A_5^2 + \left(A_5^2 - A_4^1\right) = 36$ số thỏa yêu cầu.

c) $\overline{abc} \vdots 9 \Leftrightarrow a + b + c \vdots 9$; {a, b, c} có thể là {0, 4, 5}, {1, 3, 5} hoặc {2, 3, 4}.

• Khi {a, b, c} là {0, 4, 5} thì các số cần tìm là : 405, 504, 450, 540 (có 4 số).

• Khi {a, b, c} là {1, 3, 5} hoặc {2, 3, 4} thì có $3! = 6$ số.

Vậy tổng cộng có $4 + 6 + 6 = 16$ số thỏa yêu cầu bài toán.

Bài 250.

Tính tổng của tất cả các số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau đôi một được thành lập từ 6 chữ số 1, 3, 4, 5, 7, 8.

Giải :

Số các chữ số tạo ra được là $A_6^5 = \frac{6!}{1!} = 720$ số.

Để tìm tổng của tất cả các số ta cộng từng cột, chẳng hạn khi cộng cột ở hàng đơn vị thì các chữ số 1, 3, 4, 5, 7, 8 có mặt A_5^4 lần nên tổng của cột ở hàng đơn vị là $A_5^4(1+3+4+5+7+8) = 28A_5^4$.

Tương tự, tổng của các cột khác cũng là $28A_5^4$

Vậy giá trị của tổng cần tìm là :

$$S = 28A_5^4(1+10+10^2+10^3+10^4) = 37332960\,.$$

Bài 251.

Cho 8 chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Hỏi có thể lập được bao nhiêu số gồm 6 chữ số khác nhau từ các chữ số trên, trong đó nhất thiết phải có mặt chữ số 4.

Giải :

Cách 1 :

Số có 6 chữ số lấy từ 8 chữ số đã cho là chỉnh hợp chập 8 của 6 phần tử (kể cả các số có chữ số 0 đứng vị trí đầu tiên) : A_8^6.

Với chữ số 0 đứng đầu, ta có A_7^5 số.

Vậy có $A_8^6 - A_7^5$ số có 6 chữ số khác nhau lấy từ 8 chữ số đã cho.

Tương tự, có $A_7^6 - A_6^5$ số có 6 chữ số khác nhau lấy từ 8 chữ số đã cho và không có chữ số 4.

Vậy tổng cộng các số thỏa yêu cầu là :

$$A_8^6 - A_7^5 - A_7^6 + A_6^5 = \frac{8!}{2!} - \frac{7!}{2!} - \frac{7!}{1!} + \frac{6!}{1!} = 13320 \text{ số.}$$

Cách 2.

Số cần lập có dạng : $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$

• $a_1 = 4$, có A_7^5 cách chọn số $\overline{a_2a_3a_4a_5a_6}$.

• $a_1 \neq 4$, có 6 cách chọn a_1.

Số 4 có 5 vị trí, còn lại 4 vị trí có A_6^4 cách chọn. Vậy trường hợp này có

$6.5A_6^4$ cách chọn.

Tổng cộng các số thỏa yêu cầu là : $A_7^5 + 6.5.A_6^4 = 13320$ số.

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Dùng các chữ số 0, 1, 2, ... , 9 để viết các số tự nhiên x gồm 5 chữ số khác nhau đôi một, chữ số đầu tiên khác 0.
   a) Có bao nhiêu số x ?
   b) Có bao nhiêu số x là số lẻ ?
2. Từ các chữ số1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập bao nhiêu số gồm 5 chữ số đôi một khác nhau, trong đó :
   a) Phải có mặt chữ số 2 ?
   b) Phải có mặt hai chữ số 1 và 6 ?
3. Tìm các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 lập được bao nhiêu số chẵn có 5 chữ số khác nhau ?

HƯỚNG DẪN GIẢI – ĐÁP SỐ

1. a) $A_{10}^5 - A_9^4$; b) $5\left(A_9^4 - A_8^3\right)$.
2. a) $A_6^5 - 5!$; b) $A_6^5 - 2.2!$.
3. 3000 số.

§ 4. TỔ HỢP

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

Cho ba chữ số 1, 2, 3. Hỏi có bao nhiêu tập hợp có hai phần tử lấy trong các số 1, 2, 3 ? Đó là các tập hợp con {1, 2}, {2, 3}, {1, 3}. Mỗi tập hợp này gọi là một tổ hợp chập 2 của 3 phần tử đã cho.

1. Định nghĩa :

Cho tập hợp A gồm n phần tử. Mỗi tập hợp con của A gồm k phần tử $(0 \le k \le n)$ được gọi là một tổ hợp chập k của n phần tử.

2. Công thức :

Số tổ hợp chập k của n phần tử là :

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

3. Tính chất :

a) $C_n^0 = C_n^n = 1$; b) $C_n^k = C_n^{n-k}$;

c) $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$; d) $C_n^k = \frac{n-k+1}{k} \cdot C_n^{k-1}$ $(1 \le k \le n)$.

B. CÁC DẠNG TOÁN

Bài 252.

Có bao nhiêu số tự nhiên nhỏ hơn 10^n mà tổng các chữ số bằng 3?

Giải :

Các số tự nhiên này có nhiều nhất là n chữ số.

Có C_n^1 số tự nhiên chỉ chứa một chữ số 3.

Có A_n^2 số tự nhiên chỉ chứa 2 chữ số 1 và 2.

Có C_n^3 số tự nhiên chỉ chứa 3 chữ số 1.

Vậy số các số tự nhiên cần tìm là :

$$C_n^1 + A_n^2 + C_n^3 = n + (n-1)n + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

Bài 253.

Có bao nhiêu số có n chữ số, trong đó các chữ số chỉ là 1, 2, 3 sao cho mỗi chữ số có mặt ít nhất một lần trong mỗi số đó.

Giải :

Ta dùng phương pháp gián tiếp : Xác định xem có bao nhiêu số có n chữ số, trong đó các chữ số chỉ là 1, 2, 3 sao cho các chữ số chỉ là một hoặc hai trong ba chữ số đã cho.

• Số các số có n chữ số, trong đó có mặt một trong ba chữ số 1, 2, 3 là 3 (đó là các số $\underbrace{11...1}_{n}$, $\underbrace{22...2}_{n}$, $\underbrace{33...3}_{n}$).

• Trong ba số 1, 2, 3 có C_3^2 tập hợp gồm 2 chữ số. Với hai số 1, 2 chẳng hạn, có $2^n - 2$ số có n chữ số trong đó các chữ số chỉ là 1, 2 và mỗi chữ số có mặt ít nhất 1 lần (bằng số chỉnh hợp lặp $F_n^2 = 2^n$ trừ 2 số $\underbrace{11...1}_{n}$, $\underbrace{22...2}_{n}$).

Vậy số các số gồm n chữ số chỉ có mặt hai trong ba chữ số 1, 2, 3 là $C_3^2(2^n - 2)$. Do đó có $3^n - C_3^2(2^n - 2) - 3 = 3^n - 3(2^n - 2) - 3 = 3^n - 3.2^n + 3$ số thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 254.

a) Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 6 chữ số đôi một khác nhau (chữ số đầu tiên phải khác 0) trong đó có mặt chữ số 0 nhưng không có mặt chữ số 1 ?

b) Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 7 chữ số, biết rằng chữ số 2 có mặt đúng hai lần, chữ số 3 có mặt đúng ba lần và các chữ số còn lại có mặt không quá một lần ?

Giải :

a) Đưa chữ số 0 vào 5 vị trí cuối : có 5 cách.

Đưa năm chữ số trong tám chữ số (trừ chữ số 0 và 1) : có A_8^5 cách.

Vậy tổng cộng có $5A_8^5 = 33600$ số .

b) Đưa hai chữ số 2 vào bảy vị trí : có C_7^2 cách.

Đưa ba chữ số 3 vào năm vị trí còn lại : có C_5^3 cách.

Đưa hai chữ số trong tám chữ số (trừ chữ số 2 và 3) vào hai vị trí còn lại: có A_8^2 cách.

Theo quy tắc nhân ta được $C_7^2.C_5^3.A_8^2$ số.

Ta còn phải loại trừ những số có chữ số 0 đứng đầu, trường hợp này có $C_6^2.C_4^3.7$ số.

Vậy số các số thỏa yêu cầu là : $C_7^2.C_5^3.A_8^2 - C_6^2.C_4^3.7 = 11340$ số.

Bài 255.

Cho các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Có thể lập được bao nhiêu số gồm 10 chữ số được lấy từ 8 chữ số trên, trong đó chữ số 6 có mặt đúng 3 lần, các chữ số khác có mặt đúng một lần.

Giải :

Cách 1. (Hoán vị lặp)

Số các số thỏa yêu cầu bài toán, kể cả các số có chữ số 0 đứng đầu là $\frac{8!}{3!}$.

Với chữ số 0 đứng đầu ta được $\frac{7!}{3!}$ số.

Vậy tổng cộng có : $\frac{8!}{3!} - \frac{7!}{3!} = 544320$ số thỏa yêu cầu bài toán.

Cách 2. (Tổ hợp)

Số tự nhiên gồm 10 chữ số có dạng : $\overline{a_1a_2...a_{10}}$.

Số cách chọn 3 vị trí trong 10 vị trí là : C_{10}^3 .

Đặt số 6 vào 3 vị trí vừa chọn, sau đó đặt các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 7 vào 7 vị trí còn lại ta được $C_{10}^3 \cdot 7!$ số, kể cả các số có chữ số 0 đứng đầu. Với chữ số 0 đứng đầu, ta có $C_{10}^3.6!$ số.

Vậy tổng cộng có $C_{10}^3.7! - C_9^3.6! = 544320$ số.

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Có bao nhiêu số gồm 6 chữ số khác nhau đôi một trong đó có đúng 3 chữ số lẻ và 3 chữ số chẵn.

2. Có bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số sao cho trong mỗi số đó chữ số đứng sau lớn hơn chữ số đứng liền trước.

3. Tìm đa giác có số đường chéo bằng số cạnh.

4. Cho thập giác lồi (10 cách), xét các tam giác có các đỉnh là các đỉnh của thập giác. Có bao nhiêu tam giác mà cả ba cạnh của nó đều không là cạnh của thập giác.

HƯỚNG DẪN GIẢI – ĐÁP SỐ

1. 64800 số.

2. C_9^5.

3. $C_n^2 - n = n \Rightarrow n = 5$.

4. 50 tam giác.

§ 5. NHỊ THỨC NEWTON

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Công thức khai triển nhị thức Newton

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k =$$

$$= C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \cdots + C_n^k a^{n-k} b^k + \cdots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n .$$

C_n^k là hệ số thứ k + 1 của khai triển nhị thức Newton.

Chứng minh :

Ta hãy khai triển :

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b)(a+b)+\cdots+(a+b)}_{\text{n thừa số } (a+b)}$$

bằng cách chọn mỗi thừa số một số hạng hoặc a hoặc b, ta có tích có dạng $a^{n-k}b^k$ $(0 \le k \le n)$. Vậy $(a+b)^n$ là tổng của các chữ số $a^{n-k}b^k$.

Cố định k, xét tất cả các số hạng dạng $a^{n-k}b^k$. Mỗi số hạng $a^{n-k}b^k$ được tạo thành do việc nhân k số b và n - k số a. Trong n số b có C_n^k số b nhân với nhau để được $a^{n-k}b^k$. Từ đó ta có C_n^k thừa số dạng $a^{n-k}b^k$.

Vậy : $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k}b^k = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}b + \cdots + C_n^{n-1}ab^{n-1} + C_n^n b^n$.

Nhận xét : Ta có thể chứng minh công thức bằng quy nạp toán học.

2. Tam giác Pascal :

Ta sắp xếp bảng các hệ số trong khai triển $(a+b)^n$ thành một tam giác gọi là tam giác Pascal.

Đỉnh 1	1					1				
Dòng 1 (n = 1)	$C_1^0 \rightarrow C_1^1$					$1 \rightarrow 1$				
	$\downarrow$									
Dòng 2 (n = 2)	C_2^0	C_2^1	C_2^2			1	2	1		
Dòng 3 (n = 3)	C_3^0	C_3^1	C_3^2	C_3^3		1	$3 \rightarrow 3$		1	
								$\downarrow$		
Dòng 4 (n = 4)	C_4^0	C_4^1	C_4^2	C_4^3	C_4^4	1	4	6	4	1

....

Cách xác định hệ số của nhị thức Newton bằng sơ đồ mũi tên : Chẳng hạn $C_3^1 + C_3^2 = C_4^2$ xuất phát từ tính chất : $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$.

Tam giác Pascal dùng để xác định các hệ số của nhị thức Newton với n nhỏ. Khi n khá lớn việc lập tam giác Pascal trở nên khó khăn, sau đây ta sẽ trình bày một phương pháp xác định các hệ số của nhị thức Newton với n bất kì.

3. Phương pháp xác định C_n^k trong nhị thức Newton

Xuất phát từ tính chất : $C_n^k = \dfrac{n-k+1}{k} \cdot C_n^{k-1}$, ta có :

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}b + \cdots + C_n^{k-1}a^{n-k+1}b^{k-1} + C_n^k a^{n-k}b^k + \cdots$$
$$\cdots + C_n^{n-1}ab^{n-1} + C_n^n b^n.$$

(Chia cho k là số thứ tự của đơn thức $C_n^{k-1}a^{n-k+1}b^{k-1}$)

Thực hành :

- Viết các đơn thức với số mũ a giảm dần và số mũ của b tăng dần $a^n b^0$; $a^{n-1}b^1$; $a^{n-2}b^2$; ... ; a^2b^{n-2} ; a^1b^{n-1} ; a^0b^n
- Hệ số của a^n là 1 (vì $C_n^0 = 1$).
- Muốn tìm hệ số của đơn thức sau C_n^k, ta lấy hệ số của đơn thức đứng ngay trước nó C_n^{k-1} nhân với số mũ của a là n - k + 1 rồi chia cho thứ tự k của đơn thức đứng ngay trước nó.
- Vì $C_n^k = C_n^{n-k}$ nên kể từ số hạng $\left[\dfrac{n}{2}\right]$ trở đi các hệ số lấy đôi xứng qua

Chẳng hạn :

$$(a+b)^7 = 1.a^7 + \frac{1.7}{1}a^6b + \frac{7.6}{2}a^5b^2 + \frac{21.5}{3}a^4b^3 + \frac{35.4}{4}a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$$

$$= a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7.$$

Chú ý : $(a-b)^n = C_n^0a^n - C_n^1a^{n-1}b + C_n^2a^{n-2}b^2 - \cdots + (-1)^nC_n^nb^n$.

(Dấu cộng, trừ xen kẽ nhau).

B. CÁC DẠNG TOÁN

Bài 256.

Chứng minh rằng vòi mọi $n \in Z^+$ ta đều có :

a) $4^n + 15n - 1 \vdots 9$; *b)* $16^n - 15n - 1 \vdots 225$;

c) $5.7^{2n+2} + 2^{3n} \vdots 41$.

Giải :

a) Ta có :

$$4^n = (3+1)^n = 3^n + n.3^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}\cdot 3^{n-2} + \cdots + n.3 + 1 \equiv 3n + 1 \pmod 9.$$

(vì $3^k \vdots 9\ \forall k \ge 2$)

Suy ra : $4^n + 15n - 1 \equiv 3n + 1 + 15n - 1 \pmod 9 \equiv 18n \equiv 0 \pmod 9$

Vậy : $4^n + 15n - 1 \vdots 9$ (đpcm).

b) Theo nhị thức Newton, ta có :

$$16^n = (1+15)^n = 1 + n.15 + \frac{n(n-1)}{2}\cdot 15^2 + \cdots + n.15^{n-1} + 15^n \equiv 1 + 15n \pmod{15}$$

(vì $15^k \vdots 15^2\ \forall k \ge 2$)

Suy ra : $16^n - 15n - 1 \equiv 1 + 15n - 15n - 1 \equiv 0 \pmod{225}$

Vậy : $16^n - 15n - 1 \vdots 225$ (đpcm).

c) Ta có :

$$5.7^{2n+2} + 2^{3n} = 5.49^{n+1} + 8^n = 5(41+8)^{n+1} + 8^n$$

$$= 5\left[41^{n+1} + (n+1).41^n.8 + \cdots + (n+1).41.8^n + 8^{n+1}\right] + 8^n$$

$$= 41M + 5.8^{n+1} + 8^n \quad (M \in N)$$

$$= 41M + 8^n(40+1) \vdots 41 \text{ (đpcm).}$$

Bài 257.

Chứng minh rằng $\left[(2+\sqrt{3})^n\right]$ ***là số lẻ với mọi số tự nhiên n.***

[x] : là phần nguyên của x, là số nguyên lớn nhất không vượt quá x.

Giải :

Trước hết ta chứng minh $(2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n$ là một số nguyên chẵn với mọi $n \in \mathbf{N}$. Theo nhị thức Newton, ta có :

$$(2+\sqrt{3})^n=\sum_{k=0}^{n} C_n^k 2^{n-k}\left(\sqrt{3}\right)^k \ ;\ (2-\sqrt{3})^n=\sum_{k=0}^{n} C_n^k 2^{n-k}\left(-\sqrt{3}\right)^k .$$

Suy ra : $(2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n=2\sum_{k=0}^{n} C_n^k 2^{n-k}\left(\sqrt{3}\right)^k$, k chẵn

$$=2\left(C_n^0 2^n+C_n^2 2^{n-2}\left(\sqrt{3}\right)^2+\cdots\right)$$

Vì k chẵn nên $\left(\sqrt{3}\right)^k$ là số nguyên, do đó $(2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n$ là số nguyên chẵn với mọi n.

Mặt khác, ta có : $0<2-\sqrt{3}<1$ nên $0<(2-\sqrt{3})^n<1$. Do đó :

$$(2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n-1<(2+\sqrt{3})^n<(2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n$$

Suy ra : $\left[(2+\sqrt{3})^n\right]=(2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n-1$ là một số lẻ.

Vậy $\left[(2+\sqrt{3})^n\right]$ là một số lẻ với $n \in \mathbf{N}$ (đpcm).

Bài 258.

Khai triển của $\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}x\right)^{10}$ thành đa thức

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{10}x^{10},$$

tìm hệ số a_k lớn nhất ($0 \le k \le 10$).

Giải :

Ta có : $\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}x\right)^{10}=\sum_{k=0}^{10} C_{10}^k\left(\frac{1}{3}\right)^{10-k}\left(\frac{2}{3}x\right)^k=\sum_{k=0}^{10} C_{10}^k \frac{1}{3^{10-k}}\frac{2^k}{3^k}x^k$, trong đó hệ số $a_k=C_{10}^k\frac{2^k}{3^{10}}$.

$$a_k \text{ lớn nhất} \Leftrightarrow \begin{cases} a_k \ge a_{k+1} \\ a_k \ge a_{k-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_{10}^k\dfrac{2^k}{3^{10}} \ge C_{10}^{k+1}2^{k+1} \\ C_{10}^k\dfrac{2^k}{3^{10}} \ge C_{10}^{k-1}\dfrac{2^{k-1}}{3^{10}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{10!}{k!(10-k)!} \ge 2.\dfrac{10!}{(k+1)!(9-k)!} \\ 2.\dfrac{10!}{k!(10-k)!} \ge \dfrac{10!}{(k-1)!(11-k)!} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k+1 \ge 2(10-k) \\ 2(11-k) \ge k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \ge \dfrac{19}{3} \\ k \le \dfrac{22}{3} \end{cases}$$

Vậy k = 7 ; $a_k = C_{10}^7 \dfrac{2^7}{3^{10}}$ là hệ số lớn nhất.

Bài 259.

Cho n là số nguyên dương cố định. Chứng minh rằng C_n^k lớn nhất nếu k là số tự nhiên lớn nhất không vượt quá $\dfrac{n+1}{2}$.

Giải :

$$C_n^k \text{ lớn nhất} \Leftrightarrow \begin{cases} C_n^k \geq C_n^{k-1} \\ C_n^k \geq C_n^{k+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{n!}{k!(n-k)!} \geq \dfrac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} \\ \dfrac{n!}{k!(n-k)!} \geq \dfrac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} n-k+1 \geq k \\ k+1 \geq n-k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \leq \dfrac{n+1}{2} \\ k \geq \dfrac{n-1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{n-1}{2} \leq k \leq \frac{n+1}{2}.$$

- Nếu n lẻ thì $k = \dfrac{n-1}{2}$ hoặc $k = \dfrac{n+1}{2}$.
- Nếu n chẵn thì $k = \dfrac{n}{2}$.

Bài 260.

Chứng minh rằng :

$$C_{2001}^0 + 3^2 C_{2001}^2 + 3^4 C_{2001}^4 + \cdots + 3^{2000} C_{2001}^{2000} = 2^{2000}\left(2^{2001} - 1\right).$$

Giải :

Ta có : $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \cdots + C_n^n x^n$

Cho n = 2001 và x = 3 ta được :

$$4^{2001} = C_{2001}^0 + 3C_{2001}^1 + \cdots + 3^{2001} C_{2001}^{2001} \quad (1)$$

Cho n = 2001 và x = − 3 ta được :

$$-2^{2001} = C_{2001}^0 - 3C_{2001}^1 + \cdots - 3^{2001} C_{2001}^{2001} \quad (2)$$

Cộng (1) và (2) vế theo vế, ta được :

$$\frac{1}{2}\left(4^{2001} - 2^{2001}\right) = C_{2001}^0 + 3^2 C_{2001}^2 + \cdots + 3^{2000} C_{2001}^{2000},$$

suy ra điều phải chứng minh.

Bài 261.

Chứng minh rằng :

$$C_{2n}^0 + C_{2n}^2 .3^2 + C_{2n}^4 .3^4 + \cdots + C_{2n}^{2n} .3^{2n} = 2^{2n-1}\left(2^{2n} + 1\right).$$

Giải :

Ta có : $\quad (1+x)^{2n} = C_{2n}^0 + C_{2n}^1 x + C_{2n}^2 x^2 + \cdots + C_{2n}^{2n} x^{2n}$

Thay x = 3, ta được :

$$4^{2n} = C_{2n}^0 - C_{2n}^1.3 + C_{2n}^2.3^2 + \cdots + C_{2n}^{2n}.3^{2n} \qquad (1)$$

Thay x = - 3, ta được :

$$2^{2n} = C_{2n}^0 - C_{2n}^1.3 + C_{2n}^2.3^2 + \cdots + C_{2n}^{2n}.3^{2n} \qquad (2)$$

Cộng (1) và (2) vế theo vế, ta được :

$$\frac{4^{2n} + 2^{2n}}{2} = C_{2n}^0 + C_{2n}^2.3^2 + \cdots + C_{2n}^{2n}.3^{2n}$$

Suy ra : $\quad C_{2n}^0 + C_{2n}^2.3^2 + \cdots + C_{2n}^{2n}.3^{2n} = 2^{2n-1}\left(2^{2n}+1\right)$ (đpcm).

Bài 262.

Chứng minh rằng với $3 \le k \le n$ ta có :

$$C_n^k + 3C_n^{k-1} + 3C_n^{k-2} + C_n^{k-3} = C_{n+3}^k .$$

Giải :

Ta có : $\quad (1+x)^{n+3} = (1+x)^3(1+x)^n$

Hệ số của x^k ở vế trái là C_{n+3}^k. Ta tìm hệ số x^k ở vế phải. Ta có :

$$(1+x)^3(1+x)^n = \left(1+3x+3x^2+x^3\right)\left(1+C_n^1 x + \cdots + C_n^k x^k + \cdots + x^n\right)$$

Hệ số của x^k ở vế phải là :

$$C_n^k + 3C_n^{k-1} + 3C_n^{k-2} + C_n^{k-3}$$

Vậy :

$$C_n^k + 3C_n^{k-1} + 3C_n^{k-2} + C_n^{k-3} = C_{n+3}^k$$

Tổng quát : Với k, m, $n \in \mathbf{N}$ thỏa $m \le k \le n$, ta có :

$$C_{m+n}^k = C_m^0 C_n^k + C_m^1 C_n^{k-1} + \cdots + C_m^k C_n^0$$

bằng cách so sánh hệ số x^k ở hai vế của đẳng thức $(1+x)^{m+n} = (1+x)^m(1+x)^n$.

Bài 263.

Chứng minh rằng : $C_{2n}^2 = 2C_n^2 + n^2$ $\quad (n \in N$ và $n \ge 2)$.

Giải :

Cách 1. (Dùng lí thuyết tổ hợp)

Xét tập hợp X có 2n phần tử. Số tập hợp con gồm 2 phần tử xủa X là C_{2n}^2. Gọi A, B là các tập con của X đều có n phần tử và $A \cap B = \varnothing$. Khi đó $X = A \cup B$. Các tập con có 2 phần tử của X thuộc một trong các loại sau :

i) Số tập con có 2 phần tử của A là C_n^2.

ii) Số tập con có 2 phần tử của B là C_n^2.

iii) Số tập con có 2 phần tử, trong đó 1 thuộc A và 1 thuộc B là n^2.

Vậy : $C_n^2 + C_n^2 + n^2 = C_{2n}^2$ hay $2C_n^2 + n^2 = C_{2n}^2$.

Cách 2. (Dùng phép biến đổi đại số)

Ta có : $C_{2n}^2 - 2C_n^2 = \dfrac{(2n)!}{2!(2n-2)!} - 2\cdot\dfrac{n!}{2!(n-2)!} = n(2n-1) - n(n-1) = n^2$.

Suy ra : $C_{2n}^2 = 2C_n^2 + n^2$.

Cách 3. (Đồng nhất hệ số của hai đẳng thức)

Ta có : $(1+x)^{2n} = (1+x)^n(1+x)^n$

Hệ số x^2 của $(1+x)^{2n}$ là C_{2n}^2.

Hệ số x^2 của

$$(1+x)^n(1+x)^n = (1 + C_n^1x + C_n^2x^2 + \cdots + x^n)(1 + C_n^1x + C_n^2x^2 + \cdots + x^n)$$

là $(C_n^1)^2 + C_n^2 + C_n^2 = 2C_n^2 + n^2$.

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Bài 264.

a) Chứng minh rằng nếu $m \equiv r \pmod n$ thì $m^n \equiv r^n \pmod{n^2}$.

b) Từ đó suy ra rằng tổng của lũy thừa bậc n của n số nguyên liên tiếp (với n là số lẻ) chia hết cho n^2.

Giải :

a) Giả sử m = nk + r, theo nhị thức Newton ta có :

$$m^n = (nk+r)^n = (nk)^n + n(nk)^{n-1}r + \cdots + n(nk)r^{n-1} + r^n \equiv r^n \pmod{n^2}$$

b) Xét các tổng : $A = m^n + (m+1)^n + \cdots + [m + (n-1)]^n$;

$B = 1^n + 2^n + \cdots + (n-1)^n$.

Vì m, m + 1, ... , m + (n - 1) là n số nguyên liên tiếp nên khi chia chúng cho n có số dư khác nhau đôi một 0, 1, 2, ... , n - 1 (có thể không theo thứ tự đó). Giả sử m + i chia cho n được dư là j $(1 \le j \le n-1)$, nghĩa là :

$$m + i \equiv j \pmod n \Rightarrow (m+i)^n \equiv j^n \pmod{n^2} \text{(câu a)} \Rightarrow A \equiv B \pmod{n^2}$$

Mặt khác :

$$j^n + (n-j)^n = j^n + n^n - n.n^{n-1}j + \cdots + n.nj^{n-1} - j^n \,\vdots\, n^2 \text{ (do n lẻ) } \left(1 \le j \le \frac{n-1}{2}\right)$$

Do đó $B \,\vdots\, n^2$. Vậy $A \,\vdots\, n^2$ (đpcm).

Bài 265.

Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n. Số

$$N = 2^0C_{2n+1}^1 + 2^3C_{2n+1}^3 + 2^6C_{2n+1}^5 + \cdots + 2^{3n}C_{2n+1}^{2n+1}$$

không chia hết cho 5.

Giải :

Theo công thức khai triển Newton, ta có :

$$\left(\sqrt{8}+1\right)^{2n+1}=C_{2n+1}^{0}+C_{2n+1}^{1}\left(\sqrt{8}\right)^{1}+C_{2n+1}^{2}\left(\sqrt{8}\right)^{2}+\cdots+C_{2n+1}^{2n+1}\left(\sqrt{8}\right)^{2n+1}$$

$$=\left(C_{2n+1}^{0}+C_{2n+1}^{2}.8+\cdots+C_{2n+1}^{2n}8^{n}\right)+\left(C_{2n+1}^{1}+C_{2n+1}^{3}8+\cdots+C_{2n+1}^{2n+1}8^{n}\right)\sqrt{8}$$

$$=A_n+B_n\sqrt{8}, \qquad (1)$$

trong đó : $A_n=C_{2n+1}^{0}+C_{2n+1}^{2}8+\cdots+C_{2n+1}^{2n}8^{n}$

$B_n=C_{2n+1}^{1}+C_{2n+1}^{3}8+\cdots+C_{2n+1}^{2n+1}8^{n}$

$=2^0C_{2n+1}^{1}+2^3C_{2n+1}^{3}+2^6C_{2n+1}^{5}+\cdots+2^{3n}C_{2n+1}^{2n+1}.$

Ta phải chứng minh $B_n \vdots 5$ với mọi n.

Cũng theo khai triển nhị thức Newton, ta có :

$$(\sqrt{8}-1)^{2n+1}=-A_n+B_n\sqrt{8} \qquad (2)$$

Nhân (1) với (2) theo từng vế :

$$(\sqrt{8}-1)^{2n+1}(\sqrt{8}+1)^{2n+1}=(B_n\sqrt{8}-A_n)(B_n\sqrt{8}+A_n)$$

hay : $$7^{2n+1}=8B_n^2-A_n^2 \qquad (3)$$

Ta có : $7^{2n+1}=7.49^n\equiv 7(-1)\equiv \pm 2 \pmod 5$

Do đó, nếu $B_n\equiv 0 \pmod 5$ thì từ (3) suy ra $A_n^2\equiv \pm 2 \pmod 5$. Vô lí, vì số chínnh phương chia cho 5 có dư là 0, ± 1 ($n\equiv 0, \pm 1, \pm 2 \pmod 5$) $\Rightarrow n^2\equiv 0, 1, 4 \pmod 5 \Rightarrow n^2\equiv 0, \pm 1 \pmod 5$.

Vậy B_n không chia hết cho 5 (đpcm).

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Tìm số hạng của khai triển $\left(x+\dfrac{1}{x^4}\right)^{10}$ không chứa x.

2. Tìm số hạng không chứa căn thức trong khai triển $\left(\sqrt[3]{3}+\sqrt{2}\right)^5$.

3. Chứnng minh rằng :

a) $C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=2^n$;

b) $C_{2n}^1+C_{2n}^3+\cdots+C_{2n}^{2n-1}=C_{2n}^0+C_{2n}^2+\cdots+C_{2n}^{2n}$.

4. Chứng minh rằng :

a) $\left(C_n^0\right)^2+\left(C_n^1\right)^2+\left(C_n^2\right)^2+\cdots+\left(C_n^n\right)^2=C_{2n}^n$;

b) $C_5^0C_n^k+C_5^1C_n^{k-1}+\cdots+C_5^5C_n^{k-5}=C_{n+5}^k \quad (5\le k\le n)$.

5. Chứng minh rằng với mọi $n\in \mathbf{N}$:

a) $10^n+18n-28 \vdots 27$;

b) $6^{2n+1} + 5^{n+2} \vdots 31$;

c) $3^{3n+3} - 26n - 27 \vdots 169$.

HƯỚNG DẪN GIẢI – ĐÁP SỐ

1. Ta có $\left(x + \frac{1}{x^4}\right)^{10} = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k x^{10-k} \left(\frac{1}{x^4}\right)^k = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k x^{10-k-4k}$. Tìm k để $10 - 5k = 0$ $\Leftrightarrow k = 2$. Số hạng cần tìm là $C_{10}^2 = 45$.

2. $\left(\sqrt[3]{3} + \sqrt{2}\right)^5 = \sum_{k=0}^{5} C_5^k \left(\sqrt[3]{3}\right)^{5-k} \left(\sqrt{2}\right)^k$. Số hạng không chứa căn ứng với $k = 2$: $C_5^2 = 10$.

3. a) Thay a = b = 1 vào công thức $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$.

b) Thay a = 1, b = - 1 vào $(a+b)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k a^{2n-k} b^k$.

4. a) Ta có $(1+x)^n (x+1)^n = (1+x)^{2n} \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k \cdot \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} C_{2n}^k x^k$. So sánh hệ số x^n ở hai vế được điều phải chứng minh.

b) Ta có $(1+x)^5 (x+1)^n = (1+x)^{n+5} \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{5} C_5^k x^k \cdot \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k} = \sum_{k=0}^{n+5} C_{n+5}^k x^k$. So sánh hệ số x^k ở hai vế ta được điều phải chứng minh.

5. a) Ta có $10^n = (9+1)^n = 9^n + n \cdot 9^{n-1} + \cdots + n \cdot 9 + 1 \equiv 9n + 1 \pmod{27}$, suy ra

$$10^n + 18n - 28 \equiv 27(n-1) \equiv 0 \pmod{27}.$$

b) Ta có $6^{2n+1} = 6.36^n = 6(31+5)^n \equiv 6.5^n \pmod{31}$ suy ra

$$6^{2n+1} + 5^{2n+2} \equiv 6.5^n + 25.5^n \equiv 0 \pmod{31}.$$

c) $3^{3n+3} = 27.27^n = 27(26+1)^n \equiv 27.26n + 27 \pmod{27^2}$;

$16^n = (15+1)^n \equiv 15n + 1 \pmod{15^2}$.

ÁP DỤNG NHỊ THỨC NEWTON VÀ TỔ HỢP ĐỂ CHỨNG MINH ĐỊNH LÍ FERMAT, EULER

BỔ ĐỀ 1 :

P là số nguyên tố $\Leftrightarrow C_p^k \vdots p$ ***với mọi*** $k = 1, 2, \dots, p - 1$.

Chứng minh :

i) Phần thuận : Giả sử p là số nguyên tố, khi đó :

$$(p, k) = 1 \text{ với } k = 1, 2, \dots, p - 1$$

Ta có : $C_p^k = \dfrac{p(p-1)\cdots(p-k+1)}{k!} \in Z$ suy ra $C_p^k = p.n \vdots p$.

ii) Phần đảo : Giả sử $C_p^k \vdots p$ với $k = 1, 2, \dots, p - 1$ ta chứng minh p là số nguyên tố.

Nếu p không là số nguyên tố thì p có ước nguyên tố q < p.

Theo giả thiết :

$$C_p^q = \frac{p(p-1)\cdots(p-q+1)}{q!} \vdots p \Rightarrow (p-1)(p-2)\cdots(p-q+1) \vdots q!$$

$$\Rightarrow q \mid (p-1)\dots(p-q+1)$$

$$\Rightarrow q \mid p-i \text{ với } 1 \le i \le q-1 \text{ hay } q \mid i, \text{ vô lí.}$$

Vậy p là số nguyên tố.

BỔ ĐỀ 2.

p, n là những số tự nhiên và p > 1.

$$a \equiv b \pmod{p^n} \Rightarrow a^p \equiv b^p \pmod{p^{n+1}}.$$

Chứng minh :

Giả sử $a \equiv b \pmod{p^n}$ khi đó $a - b \vdots p^n$.

Ta có : $a^p - b^p = (a-b)(a^{p-1} + a^{p-2}b + \dots + ab^{p-2} + b^{p-1})$

Mà : $a^{p-1} + a^{p-2}b + \dots + ab^{p-2} + b^{p-1} \pmod p \equiv a^{p-1} + a^{p-1} + \dots + a^{p-1} \pmod p$

$$\equiv 0 \pmod p.$$

(Vì $a \equiv b \pmod p \Rightarrow a^k \equiv b^k \pmod p$, $k = 1, 2, \dots, p - 1$)

Do đó $a^p - b^p \vdots p^{n+1}$ hay $a^p \equiv b^p \pmod{p^{n+1}}$.

BỔ ĐỀ 3.

p là số nguyên tố, $k_1, k_2, \dots, k_n$ là các số tự nhiên. Khi đó :

$$(k_1 + k_2 + \cdots + k_n)^p \equiv k_1^p + k_2^p + \cdots + k_n^p \pmod p$$

Chứng minh : Ta chứng minh bằng quy nạp theo n.

Với n = 1, đồng dư thức luôn luôn đúng.

Với n = 2, ta có :

$$(k_1 + k_2)^p = k_1^p + C_p^1 k_1^{p-1} k_2 + \cdots + C_p^{p-1} k_1 k_2^{p-1} + k_2^p \equiv k_1^p + k_2^p \pmod p$$

(vì $C_p^k \vdots p$ với k = 1, 2, ... , p - 1 (Bổ đề 1))

Giả sử ta có : $(k_1 + k_2 + \cdots + k_n)^p \equiv k_1^p + k_n^p + k_2^p + \cdots + k_n^p \pmod p$. Khi đó

$$(k_1 + k_2 + \cdots + k_{n+1})^p = [(k_1 + k_2 + \cdots + k_n) + k_{n+1}]^p$$
$$\equiv (k_1 + k_2 + \cdots + k_n)^p + k_{n+1}^p \pmod p$$
$$\equiv k_1^p + k_2^p + \cdots + k_{n+1}^p \pmod p.$$

Vậy đồng dư thức đúng với mọi n.

ĐỊNH LÍ FERMAT :

p là số nguyên tố, $a \in N$ trong Bổ đề 3 cho $k_1 = k_2 = \cdots = k_a = 1$ ta được : $a^p = (1 + 1 + \cdots + 1)^p \equiv 1^p + 1^p + \cdots + 1^p \equiv a \pmod p$

Đặc biệt nếu (a, p) = 1 thì $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$.

ĐỊNH LÍ EULER :

Giả sử (a, m) = 1 và $m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$. Khi đó :

$$\varphi(m) = m\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{p_k}\right) \text{ (hàm Euler)}$$

Suy ra : $\varphi(m) = p_1^{\alpha_1 - 1}(p_1 - 1)p_2^{\alpha_2 - 1}(p_2 - 1)\cdots p_k^{\alpha_k - 1}(p_k - 1)$.

Chứng minh :

Vì (a, m) = 1 nên $(a, p_i) = 1$, ta chứng minh : $a^{(p_i - 1)p_i^{\alpha_i - 1}} \equiv 1 \pmod{p_i^{\alpha_i}}$.

Theo Định lí Fermat : $a^{p_i - 1} \equiv 1 \pmod{p_i}$.

Theo Bổ đề 2 : $a^{(p_i - 1)p_i} \equiv 1 \pmod{p_i}$; $a^{(p_i - 1)p_i^{\alpha_i - 1}} \equiv 1 \pmod{p_i^{\alpha_i}}$

Do $\left(p_i^{\alpha_i}, p_j^{\alpha_j}\right) = 1 \ (i \neq j)$ nên $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod m$.

BÀI TẬP

1. Với p > 1, chứng minh các điều sau đây là tương đương :

a) p là số nguyên tố ;

b) $C_p^k \equiv 0 \pmod p$, k = 1, 2, ... , p − 1 ;

c) $C_{p-1}^{k} \equiv (-1)^k \pmod p$, $k = 0, 1, ..., p-1$.

2. $p > 2$ là số nguyên tố, chứng minh rằng :

a) $a^{p-1} + a^{p-2} + \cdots + a + 1 \vdots p^2$; với $(a, p) = 1$.

b) $a \equiv 1 \pmod{p^k} \Leftrightarrow a^p \equiv 1 \pmod{p^{k+1}}$.

3. p là số nguyên tố, $p > 2$, chứng minh rằng : $1^p + 2^p + ... + (p-1)^p \vdots p$.

4. Cho $p, q \in \mathbf{N}$ và $(p, q) = 1$. Chứng minh rằng $p^{q-1} + q^{p-1} \equiv 1 \pmod{pq}$.

5. Tìm số tự nhiên nhỏ nhất gồm toàn chữ số 9 và chia hết cho 2, 7, 11, 13, 17.

6. Chứng minh rằng nếu n lẻ thì $n \mid 2^{n!} - 1$.

7. Chứng minh rằng với mỗi số tự nhiên $k \geq 1$ có số tự nhiên n sao cho tổng các chữ số của n bằng k và $n \vdots k$.

8. Tìm n thỏa $n \mid 1^n + 2^n + \cdots + (n-1)^n$.

9. $m, n > 1$; $(m, n) = 1$. Chứng minh rằng : $m^{\varphi(n)} + n^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{mn}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI - ĐÁP SỐ

1. Dùng tính chất : $C_p^k = C_{p-1}^{k-1} + C_{p-1}^{k}$.

2. Áp dụng Bổ đề 2.

3. Áp dụng Bổ đề 3.

4. Áp dụng Định lí Fermat cho p và q.

5. Áp dụng Định lí Fermat, chứng minh $10^{240} - 1 \vdots 3.7.11.13.17$. Chú ý rằng $[2, 6, 10, 12, 16] = 16.5.3 = 240$.

6. $\varphi(n) < n \Rightarrow \varphi(n) \leq n - 1 \Rightarrow \varphi(n) \mid n!$ và $(2, n) = 1$. Áp dụng Định lí Euler.

7. $(10, t) = 1 \Rightarrow 10^{\varphi(t)} \equiv 1 \pmod t$. Giả sử $k = 2^a.5^b.t$ với $(t, 10) = 1$.

Đặt $n = 10^{a+b}\left(10^{\varphi(t)} + 10^{2\varphi(t)} + \cdots + 10^{k\varphi(t)}\right) \equiv 10^{a+b}.k \pmod t \equiv 0 \pmod t$.

Tổng các chữ số của n là k và $n \vdots k$.

8. i) Với n lẻ : $T = 1^n + 2^n + \cdots + (n-1)^n$, suy ra

$2T = \left[1^n + (n-1)^n\right] + \left[2^n + (n-2)^n\right] + \cdots + \left[(n-1)^n + 1^n\right] \vdots n \Rightarrow T \vdots n$.

ii) Với n chẵn : $n = 2^m.k$ với k lẻ.

$2^n = 2^{2^m.k} \vdots 2^m$, khi đó ta có :

$1^n + 2^n + \cdots + (n-1)^n \equiv 1^n + 3^n + 5^n + \cdots + (n-1)^n \pmod{2^m}$;

$\varphi(2^m) = 2^{m-1}.(l, 2) = 1 \Rightarrow l^{\varphi(2^m)} \equiv l^{2^{m-1}} \equiv 1 \pmod{2^m} \Rightarrow l^{2^m} \equiv 1 \pmod{2^m}$

$$\Rightarrow 1^n + 2^n + \cdots + (n-1)^n \equiv \frac{2^m.k}{2} = 2^{m-1}.k \pmod{2^m}$$

$$\Rightarrow 1^n + 2^n + \cdots + (n-1)^n \not\vdots\, n \text{ (vô lí).}$$

Vậy với n lẻ thì $1^n + 2^n + \cdots + (n-1)^n \vdots n$.

9. Áp dụng Định lí Euler.

MỤC LỤC