

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO THANH HÓA
TRƯỜNG THPT NGÃ SƠN**

SÁNG KIẾN KINH NGHIỆM

**KINH NGHIỆM HƯỚNG DẪN HỌC SINH GIẢI MỘT
SỐ DẠNG BÀI TOÁN VỀ TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM
SỐ THEO HÌNH THỨC THI TRẮC NGHIỆM**

**Người thực hiện: Mai Phi Thường
Chức vụ: Giáo viên
Đơn vị công tác: THPT Ngã Sơn
SKKN thuộc lĩnh vực(môn): Toán**

THANH HÓA NĂM 2017

MỤC LỤC

1. MỞ ĐẦU	1
1.1 Lí do chọn đề tài	1
1.2 Mục đích nghiên cứu	1
1.3 Đối tượng nghiên cứu	2
1.4 Phương pháp nghiên cứu	2
2. NỘI DUNG SÁNG KIẾN KINH NGHIỆM	2
2.1. Cơ sở lí luận của sáng kiến	2
2.2. Thực trạng vấn đề trước khi áp dụng sáng kiến	3
2.3. Các giải pháp đã thực hiện để giải quyết vấn đề	3
2.3.1. Hệ thống kiến thức liên quan	3
2.3.2. Một số bài tập vận dụng	3
2.3.3. Hệ thống bài tập tự luyện	12
2.4. Hiệu quả của sáng kiến	14
3. KẾT LUẬN – KIẾN NGHỊ	15
3.1. Kết luận	15
3.2 Kiến nghị	16

1. Mở đầu

1.1. Lí do chọn đề tài

Đất nước ta đang trên con đường hội nhập và phát triển, từ đó cần những con người phát triển toàn diện. Muốn vậy, phải bắt đầu từ sự nghiệp giáo dục và đào tạo, đòi hỏi sự nghiệp giáo dục phải được đổi mới một cách căn bản và toàn diện để đáp ứng nhu cầu phát triển của xã hội. Để đổi mới sự nghiệp giáo dục và đào tạo trước hết phải đổi mới phương pháp dạy học, trong đó có cả phương pháp dạy học môn Toán.

Từ năm học 2016 – 2017 hình thức thi THPT Quốc Gia của môn Toán đã có sự thay đổi (chuyển từ hình thức thi tự luận sang hình thức thi trắc nghiệm), bước đầu làm cho giáo viên và học sinh thấy ngỡ ngàng. Trong các đề thi minh họa của bộ giáo dục, câu liên quan đến tính đơn điệu của hàm số thường là những câu ở mức độ vận dụng thấp hoặc vận dụng cao, muốn giải quyết được những câu này đòi hỏi học sinh phải nắm vững kiến thức về tính đơn điệu của hàm, định lí Vi-et trong phương trình bậc hai, ứng dụng của đạo hàm để giải phương trình - bất phương trình..., đồng thời phải biết vận dụng khéo léo và linh hoạt các mảng kiến thức trên vào từng bài toán cụ thể để tìm ra kết quả nhanh nhất và chính xác nhất.

Trước kì thi THPT Quốc gia đến gần, với mong muốn có thể cung cấp thêm cho các em học sinh một số kiến thức để có thể lấy được điểm tối đa bài thi của mình, từ đó tôi nghiên cứu và viết đề tài **“Kinh nghiệm hướng dẫn học sinh giải một số dạng bài toán về tính đơn điệu của hàm số theo hình thức thi trắc nghiệm”**. Hi vọng nó sẽ là tài liệu tham khảo bổ ích cho giáo viên và học sinh.

1.2. Mục đích nghiên cứu

- **Thứ nhất:** Giúp học sinh tiếp cận và làm quen với cách học, cách làm nhanh bài toán trắc nghiệm, từ đó có thể phát huy tối đa hiệu quả làm bài, nhằm đạt được kết quả cao nhất.

-Thứ hai: Thông qua sáng kiến kinh nghiệm của mình, tôi muốn định hướng để học sinh có thể giải gianh, giải chính xác đối với những bài toán có liên quan đến tính đơn điệu của hàm số

1.3. Đối tượng nghiên cứu

- Kiến thức về tính đạo hàm của hàm số
- Kiến thức về tính đơn điệu của hàm số.
- Học sinh lớp 12E, 12G năm học 2016 – 2017 trường THPT Nga Sơn.

1.4. Phương pháp nghiên cứu

- Sử dụng phương pháp nghiên cứu tổng hợp.
- Sử dụng phương pháp thực nghiệm.
- Sử dụng phương pháp phân tích và so sánh những vấn đề có liên quan đến đề tài.

2. Nội dung sáng kiến kinh nghiệm

2.1. Cơ sở lí luận của sáng kiến kinh nghiệm

Định lí:(tính đơn điệu của hàm số)

Giả sử $f(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(a; b)$. Thế thì:

* $f'(x) > 0, \forall x \in (a; b) \Rightarrow f(x)$ đồng biến trên khoảng $(a; b)$

$f'(x) < 0, \forall x \in (a; b) \Rightarrow f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(a; b)$

* $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(a; b) \Rightarrow f'(x) \geq 0, \forall x \in (a; b)$

$f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(a; b) \Rightarrow f'(x) \leq 0, \forall x \in (a; b)$

Khoảng $(a; b)$ được gọi chung là khoảng đơn điệu của hàm số

2.2. Thực trạng vấn đề trước khi áp dụng sáng kiến kinh nghiệm

Việc hướng dẫn cho học sinh biết cách “**Giải một số dạng bài toán về tính đơn điệu của hàm số**” là rất cần thiết vì các lí do sau:

Thứ nhất: Môn toán đã có sự thay đổi hình thức thi từ hình thức tự luận sang trắc nghiệm, từ đó đòi hỏi học sinh phải giải một bài toán một cách nhanh nhất có thể để tiết kiệm thời gian.

Thứ hai: Ngoài việc trực tiếp giải quyết các dạng bài tập về tính đơn điệu của hàm số thì các bài toán này còn ứng dụng vào giải phương trình, hệ phương trình, bất phương trình và nhiều kiến thức có liên quan khác.

Trong bài viết này, tôi đưa ra một số cách giải bài toán tìm tham số để hàm số đơn điệu trên miền cho trước ứng với từng hàm số cụ thể, thấy kết quả đạt tốt và phù hợp đối với các đối tượng học sinh trường tôi.

2.3. Các giải pháp đã sử dụng để giải quyết vấn đề

2.3.1. Hệ thống kiến thức liên quan

* Định lý Vi-et :

Nếu phương trình $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ có hai nghiệm x_1, x_2 thì
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

* Điều kiện để phương trình $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn

$$x_1 < x_2 \leq \alpha \text{ là } \begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1 - \alpha < 0 \\ x_2 - \alpha \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1 + x_2 - 2\alpha < 0 \\ (x_1 - \alpha)(x_2 - \alpha) \geq 0 \end{cases}$$

* Bất phương trình $f(x) \geq g(m), \forall x \in D \Leftrightarrow g(m) \leq \min_D f(x)$ (m là tham số)

* Bất phương trình $f(x) \leq g(m), \forall x \in D \Leftrightarrow g(m) \geq \max_D f(x)$ (m là tham số)

* Phương trình $a \sin x + b \cos x = c$ có nghiệm $\Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq c^2$

2.3.2. Một số bài tập vận dụng

Dạng 1: Xét tính đơn điệu của các hàm số không chứa tham số

Đối với dạng bài toán này, học sinh cần nắm vững các công thức tính đạo hàm của hàm số, quy tắc xét dấu của đa thức và mối liên hệ giữa dấu của đạo hàm và tính đơn điệu của hàm số. Tôi đưa ra một số bài tập ở mức độ thông hiểu và vận dụng để học sinh làm quen và rèn luyện kỹ năng làm bài. Cụ thể:

Bài tập 1: Khoảng đồng biến của hàm số $y = (x+2)^5 (2x+1)^4$ là

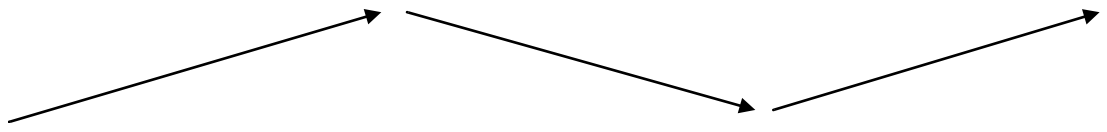
$$\text{A. } \left(-2; -\frac{7}{6}\right) \text{ và } \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right) \quad \text{B. } \left(-\infty; -\frac{7}{6}\right) \text{ và } \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right) \quad \text{C. } \left(-\frac{7}{6}; -\frac{1}{2}\right) \quad \text{D. } \left(-2; -\frac{1}{2}\right)$$

(Trích đề thi thử THPT Quốc gia lần 3 năm 2017, trường THPT Nga Sơn năm)

Lời giải: Ta có $y' = (x+2)^4 (2x+1)^3 (18x+21)$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = -\frac{1}{2} \\ x = -\frac{7}{6} \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-2	$-\frac{7}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
y'	$+$	0	$+$	0	$+$
y					

Suy ra khoảng đồng biến của hàm số là $\left(-\infty; -\frac{7}{6}\right)$ và $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$. Chọn **B**

Nhận xét: Bài toán trên, đạo hàm của nó có 3 nghiệm phân biệt nhưng có một nghiệm bội bậc chẵn, và một nghiệm bội bậc lẻ, học sinh thường nhầm khi xét dấu của đạo hàm khi qua nghiệm bội bậc chẵn.

Bài tập 2: Hàm số $y = \frac{x}{\ln x}$ nghịch biến trên các khoảng $(a; b)$ và $(b; c)$. Khi đó

$S = a + b - c$ có giá trị là

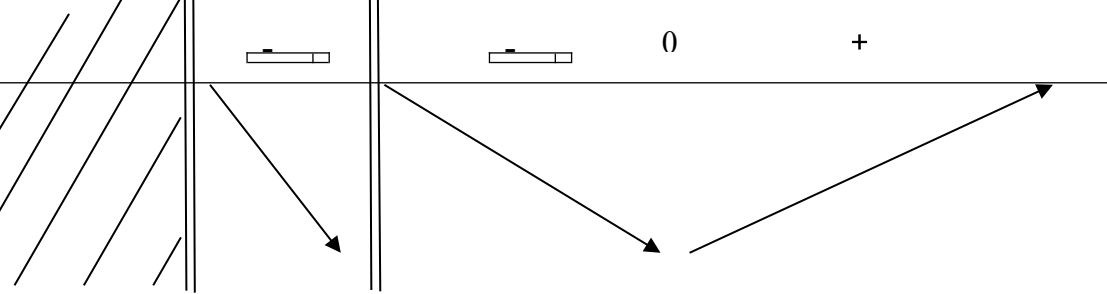
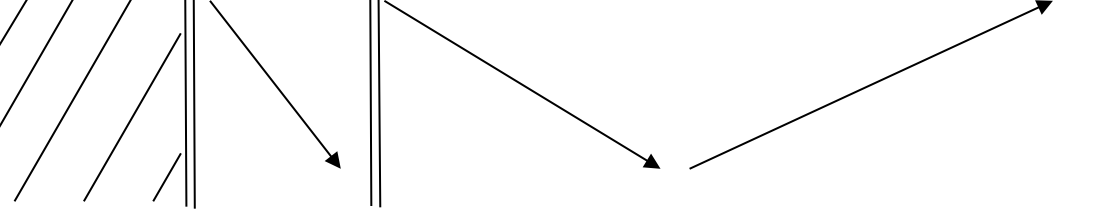
A. $1 - e$ **B.** $e - 1$ **C.** -1 **D.** $-e$

(Trích bộ đề trắc nghiệm luyện thi THPT Quốc gia năm 2017 môn Toán)

Lời giải: TXĐ: $D = (0; +\infty) \setminus \{1\}$

Ta có: $y' = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$
 $y' = 0 \Leftrightarrow x = e$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	1	e	$+\infty$
y'					
y					

Suy ra hàm số nghịch biến trên các khoảng $(0;1)$ và $(1;e)$.

Vậy: $S = a + b - c = 1 - e$. Chọn **A**

Nhận xét: Học sinh hay mắc sai lầm khi tìm TXĐ của hàm số trên, vì vậy khi xác định khoảng nghịch biến của hàm số dễ dẫn tới kết quả sai

Bài tập 3: Hàm số $y = \sqrt[3]{(2x-1)(x-1)^2}$ **nghịch biến** trên khoảng nào?

- A. $\left(-\infty; \frac{2}{3}\right)$ B. $\left(\frac{2}{3}; 1\right)$ C. $(1; +\infty)$ D. $(-\infty; +\infty)$

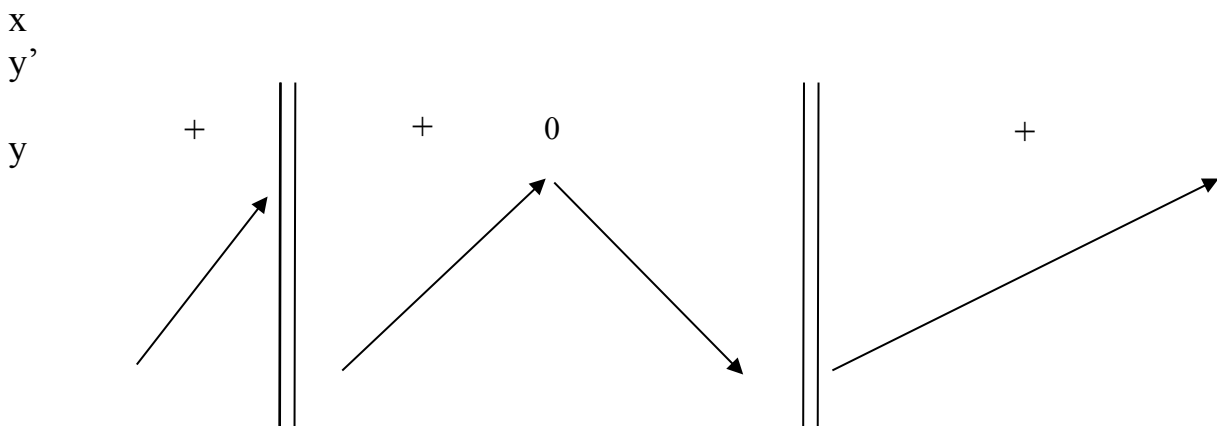
(Trích Giải toán đạo hàm và khảo sát hàm số - TS. Nguyễn Cam)

Lời giải: TXĐ: $D = \mathbb{R}$

Ta có: $y' = \frac{2}{3} \cdot \frac{(3x-2)}{\sqrt[3]{(2x-1)^2(x-1)}}$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$

Dấu của y' phụ thuộc vào dấu của $(3x-2)$ và $(x-1)$.

Lập bảng biến thiên



Suy ra hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{2}{3}; 1\right)$. Chọn **B**

Bài 4. Cho hàm số $y = \ln(x + \sqrt{4+x^2})$. Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

- A. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$
B. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$
C. Hàm số có đạo hàm $y' = \frac{x}{\sqrt{4+x^2}}$
D. Hàm số có tập xác định là khoảng $(0; +\infty)$

(Trích Giải toán đạo hàm và khảo sát hàm số - TS. Nguyễn Cam)

Lời giải: Ta có: $x + \sqrt{4+x^2} > x + |x| \geq 0$ nên TXĐ: $D = \mathbb{R}$

Lại có: $y' = \frac{1}{\sqrt{4+x^2}} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$. Chọn **A**

Dạng 2: Tìm điều kiện của tham số để hàm số đơn điệu trên miền D cho trước

Dưới đây là hệ thống các bài tập tìm tham số để hàm số đơn điệu trên miền D cho trước. Tôi đưa các bài toán cụ thể với các hàm đa thức, hàm phân thức, hàm vô tỷ, hàm mũ, ... Cụ thể như sau:

Bài tập 1: Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số

$$y = -x^3 - 3mx^2 + 4m - 1 \text{ đồng biến trên khoảng } (0; 4)$$

- A. $m \leq -2$ B. $m \neq 0$ C. $m < -2$ D. $m \geq 2$

(Trích bộ đề trắc nghiệm luyện thi THPT Quốc gia năm 2017 môn Toán)

Lời giải: TXĐ: $D = \mathbb{R}$

Ta có: $y' = -3x^2 - 6mx$

* Nếu $m = 0$ thì $y' = -3x^2 \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R} \Rightarrow m = 0$ (loại)

* Nếu $m \neq 0$ thì $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2m \end{cases}$

$\Rightarrow$ hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 4) \Leftrightarrow -2m \geq 4 \Leftrightarrow m \leq -2$. Chọn A

Nhận xét: Bài toán trên là bài toán cơ bản về tìm tham số để hàm bậc ba đơn điệu trên một khoảng $(a; b)$ nhưng nó ở dạng đặc biệt đó là y' có 1 nghiệm trùng với đầu mút a . Khi đó ta chỉ việc “**gò và so sánh**” nghiệm còn lại với đầu mút b , để tìm ra kết quả bài toán. Tương tự, ta xét bài toán sau:

Bài tập 2: Tìm m để hàm số $y = x^4 - 2mx^2 - 3m + 1$ đồng biến trên khoảng $(1; 2)$

- A. $m \leq 1$ B. $m \leq 0$ C. $0 < m \leq 1$ D. $m = 1$

(Trích Bài tập khảo sát hàm số - Trần Sĩ Tùng)

Lời giải: Ta có $y' = 4x^3 - 4mx = 4x(x^2 - m)$

* Nếu $m \leq 0 \Rightarrow y' \geq 0, \forall x \in (0; +\infty) \Rightarrow m \leq 0$ thỏa mãn

* Nếu $m > 0 \Rightarrow y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt: $-\sqrt{m}, 0, \sqrt{m}$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(1; 2) \Leftrightarrow \sqrt{m} \leq 1 \Leftrightarrow 0 < m \leq 1$

Vậy: $m \in (-\infty; 1]$. Chọn A

Bài tập 3: Tìm m để hàm số $y = -2x^3 + 3mx^2 - 1$ đồng biến trên khoảng $(x_1; x_2)$ sao cho $x_2 - x_1 = 1$

- A. $m = \pm 1$ B. $m = 0$ C. $m = -1$ D. $m = 1$

(Trích Bài tập khảo sát hàm số - Trần Sĩ Tùng)

Lời giải: Ta có $y' = -6x^2 + 6mx, y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = m \end{cases}$

* Nếu $m = 0$ thì $y' \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R} \Rightarrow m = 0$ (loại)

* Nếu $m \neq 0$ thì $y' \geq 0, \forall x \in (0; m)$ khi $m > 0$ hoặc $y' \geq 0, \forall x \in (0; m)$ khi $m < 0$

Hàm số đồng biến trong khoảng $(x_1; x_2)$ với $x_2 - x_1 = 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x_1; x_2) = (0; m) \\ (x_1; x_2) = (m; 0) \end{cases} \text{ và } x_2 - x_1 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m - 0 = 1 \\ 0 - m = 1 \end{cases} \Leftrightarrow m = \pm 1. \text{ Chọn A}$$

Bài tập 4: Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y = (m^2 - 1)x^3 + (m - 1)x^2 - x + 4$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$

A. 2 B. 1 C. 0 D. 3

(Trích đề thi minh họa THPTQG lần III của Bộ GD&ĐT năm 2017)

Lời giải: TXĐ: $D = \mathbb{R}$

Ta có: $y' = 3(m^2 - 1)x^2 + 2(m - 1)x - 1$

* Nếu $m = -1 \Rightarrow y' = -4x - 1$ không thỏa mãn hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$

* Nếu $m = 1 \Rightarrow y' = -1 < 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$

Suy ra: $m = 1$ là một giá trị nguyên thỏa mãn

* Nếu $m \neq \pm 1$, hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty) \Leftrightarrow y' \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 1 < 0 \\ \Delta' = (m - 1)^2 + 3(m^2 - 1) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < m < 1 \\ -\frac{1}{2} \leq m \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq m < 1$$

Suy ra: $m = 0$ là một giá trị nguyên trong trường hợp này

Vậy: $m = 0, m = 1$ là hai giá trị cần tìm. Chọn A

Bài tập 5: Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 + (m - 1)x^2 - (2m^2 + 3m + 2)x + 1$ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$

A. $-\frac{3}{2} \leq m \leq 2$ B. $m > -5$ C. $\forall m \in \mathbb{R}$ D. $-2 < m < -\frac{3}{2}$

(Trích đề thi thử THPT Quốc gia lần 3 năm 2017, trường THPT Đống Đa – Hà Nội)

Lời giải: TXĐ: $D = \mathbb{R}$

Ta có: $y' = 3x^2 + 2(m - 1)x - (2m^2 + 3m + 2)$

* Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta' \leq 0 \Leftrightarrow 7(m^2 + m + 1) \leq 0$ (vô lý)

* Hàm số đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$

$\Leftrightarrow y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 2(m - 1)x - (2m^2 + 3m + 2) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa

mãn $x_1 < x_2 \leq 2$, điều kiện là: $\begin{cases} x_1 < 2 \\ x_2 \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 2 < 0 \\ x_2 - 2 \leq 0 \end{cases}$ (vì $\Delta' > 0, \forall m$)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 < 4 \\ (x_1 - 2)(x_2 - 2) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 < 4 \\ x_1 x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4 \geq 0 \end{cases} (*)$$

Theo Vi-et:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{2(m-1)}{3} \\ x_1 x_2 = -\frac{2m^2 + 3m + 2}{3} \end{cases}$$

Thế vào (*) ta được:
$$\begin{cases} m > -5 \\ -\frac{3}{2} \leq m \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{3}{2} \leq m \leq 2. \text{ Chọn A}$$

Bài tập 6: Tìm m để hàm số $y = x^3 + 3x^2 + mx + m$ nghịch biến trên đoạn có độ dài bằng 1

A. $m = \frac{9}{4}$

B. $m \geq 3$

C. $m < 3$

D. $m = 1$

(Trích đề thi thử THPT Quốc gia lần 3 năm 2017, trường THPT Đồng Quan – Hà Nội)

Lời giải: Ta có: $y' = 3x^2 + 6x + m$ có $\Delta' = 9 - 3m$

* Nếu $m \geq 3$ thì $y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Rightarrow m \geq 3$ không thỏa mãn

* Nếu $m < 3$ thì $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 ($x_1 < x_2$).

Hàm số nghịch biến trên đoạn $[x_1; x_2]$ với độ dài $l = |x_1 - x_2|$

Theo Vi-et, ta có
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -2 \\ x_1 x_2 = \frac{m}{3} \end{cases}$$

Theo bài ra:

$$l = 1 \Leftrightarrow |x_1 - x_2| = 1 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = 1 \Leftrightarrow m = \frac{9}{4}$$

Chọn A

Nhận xét: Trên đây là một số bài toán vận dụng định lý Vi-et và so sánh nghiệm của phương trình bậc hai với một số cho trước. Đối với những bài toán này, đòi hỏi học sinh phải khéo léo và linh hoạt trong biến đổi yêu cầu của bài toán để xuất hiện cụm **“Tổng - Tích”** từ đó sử dụng định lý Vi-et để giải bài toán. Sau đây là một số bài tập vận dụng bài toán **“Tìm điều kiện của tham số để bất phương trình nghiệm đúng với mọi x thuộc D ”**.

Cần chú ý: Nếu đặt ẩn phụ thì phải tìm miền giá trị của ẩn phụ.

Bài tập 7: Tìm giá trị lớn nhất của tham số m để hàm số $y = 4^x - 2^{x+2} - mx + 1$ đồng biến trên khoảng $(-1; 1)$

- A. $-2 \ln 2$ B. $\ln 2$ C. 1 D. $\ln \frac{1}{2}$

(Trích đề thi thử THPT Quốc gia lần 3 năm 2017, trường THPT Lương Thế Vinh – Hà Nội)

Lời giải: TXĐ: $D = \mathbb{R}$

Ta có: $y' = 4^x \ln 4 - 2^{x+2} \ln 2 - m$

Đặt: $t = 2^x$, $\frac{1}{2} < t < 2$.

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-1; 1) \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in (-1; 1)$

$$\Leftrightarrow f(t) = (2 \ln 2)t^2 - (4 \ln 2)t - m \geq 0, \forall t \in \left(\frac{1}{2}; 2\right)$$

$$\Leftrightarrow f(t) = (2 \ln 2)t^2 - (4 \ln 2)t \geq m, \forall t \in \left(\frac{1}{2}; 2\right)$$

$$\Leftrightarrow m \leq \min_{t \in \left(\frac{1}{2}; 2\right)} f(t) = -2 \ln 2$$

Vậy: giá trị lớn nhất của m thỏa mãn yêu cầu bài toán là $m = -2 \ln 2$. Chọn A

Bài tập 8: Biết rằng tập tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số

$y = \frac{1}{3}x^3 - (m-1)x^2 - (m-3)x + 2017m$ đồng biến trên các khoảng $(-3; -1)$ và $(0; 3)$ là

đoạn $T = [a; b]$. Tính $a^2 + b^2$.

- A. $a^2 + b^2 = 13$. B. $a^2 + b^2 = 8$. C. $a^2 + b^2 = 10$. D. $a^2 + b^2 = 5$.

(Trích đề khảo sát môn Toán khối 12 – Sở GD&ĐT Thanh Hóa năm 2017)

Giải: TXĐ: $D = \mathbb{R}$

$y' = x^2 - 2(m-1)x - (m-3) \Rightarrow y' = 0$ có nhiều nhất 2 nghiệm trên $\mathbb{R}$.

* Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0; 3) \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in (0; 3)$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 + 2x + 3}{2x + 1} \geq m, \forall x \in (0; 3). \text{ Xét hàm số } g(x) = \frac{x^2 + 2x + 3}{2x + 1} \text{ trên khoảng } (0; 3)$$

$$g'(x) = \frac{2x^2 + 2x - 4}{(2x + 1)^2}; g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 (\text{loại}) \end{cases}$$

Từ BBT, $g(x) \geq m, \forall x \in (0; 3) \Leftrightarrow m \leq 2$

* Hàm số đồng biến trên khoảng $(-3; -1) \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in (-3; -1)$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 + 2x + 3}{2x + 1} \leq m, \forall x \in (-3; -1). \text{ Xét hàm số } g(x) = \frac{x^2 + 2x + 3}{2x + 1} \text{ trên khoảng } (-3; -1)$$

$$g'(x) = \frac{2x^2 + 2x - 4}{(2x+1)^2}; g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 (\text{loại}) \end{cases}$$

Từ BBT, $g(x) \leq m, \forall x \in (-3; -1) \Leftrightarrow m \geq -1$. Do đó $m \in [-1; 2] \Rightarrow a^2 + b^2 = 5$. Chọn **D**

Lưu ý: Nếu từ bất phương trình $y' \geq 0$ mà ta có thể xử lý bằng cách:

* Có lập biến số và tham số về hai vế thì sẽ áp dụng bài toán dạng

$$f(x) \geq g(m), \forall x \in D \Leftrightarrow g(m) \leq \min_D f(x) \quad (m \text{ là tham số})$$

* Nếu không có lập được biến số và tham số về hai vế thì sẽ áp dụng bài toán so sánh nghiệm của phương trình bậc hai với 1 số thực cho trước và áp dụng định lý Vi-et để giải.

Bài tập 9: Tìm m để hàm số $y = (m-3)x - (2m+1)\cos x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$

A. $-4 \leq m \leq \frac{2}{3}$ **B.** $m \geq 1$ **C.** $m \neq 3$ **D.** $m \leq -4$

(Trích bộ đề trắc nghiệm luyện thi THPT Quốc gia năm 2017 môn Toán)

Lời giải: Ta có: $y' = m - 3 + (2m+1)\sin x$

Hàm số đã cho nghịch biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Đặt $t = \sin x, t \in [-1; 1]$. Khi đó: $f(t) = m - 3 + (2m+1)t \leq 0, \forall t \in [-1; 1]$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(1) \leq 0 \\ f(-1) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m - 2 \leq 0 \\ -m - 4 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -4 \leq m \leq \frac{2}{3}, \text{ Chọn A}$$

Nhận xét: Hàm số $f(t)$ ở trên là hàm bậc nhất với biến t , khi đó giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $[a; b]$ đạt được tại $x = a$ hoặc $x = b$

Bài tập 10: Tìm m để hàm số $y = \frac{2\cos x + 3}{2\cos x - m}$ nghịch biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{3}\right)$

A. $m < -3$ **B.** $m \geq 2$ **C.** $m < \frac{1}{2}$ **D.** $m \leq 1$

(Trích bộ đề trắc nghiệm luyện thi THPT Quốc gia năm 2017 môn Toán)

Lời giải: ĐK: $\cos x \neq \frac{m}{2}$

Ta có: $y' = \frac{2(m+3)\sin x}{(2\cos x - m)^2}$, vì $x \in \left(0; \frac{\pi}{3}\right)$ nên $0 < \sin x < \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} < \cos x < 1$

Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định $\Leftrightarrow y' < 0 \Leftrightarrow m < -3$ (1)

Để hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{3}\right)$ thì $\begin{cases} \frac{m}{2} \leq \frac{1}{2} \\ \frac{m}{2} \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 1 \\ m \geq 2 \end{cases}$ (2)

Từ (1), (2) ta được: $m < -3$. Chọn **A**

Nhận xét: Đối với bài toán trên, nếu đặt ẩn phụ $t = \cos x$, $\frac{1}{2} < t < 1$ bài toán trở thành tìm m để hàm số $y(t) = \frac{2t+3}{2t-m}$ nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$ thì ta sẽ có kết quả của bài toán là $m \in (-3; 1] \cup [2; +\infty)$, kết quả sai là do: $t = \cos x$ là hàm nghịch biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{3}\right)$, vì vậy khi đặt ẩn phụ để giải những bài toán có dạng như trên thì ta phải chú ý tới “**tính đơn điệu**” của ẩn phụ, ta xét bài toán sau để thấy rõ hơn điều đó:

Bài tập 11: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số

$$y = \frac{\tan x - 2}{\tan x - m} \text{ đồng biến trên khoảng } \left(0; \frac{\pi}{4}\right)$$

A. $m \leq 0$ hoặc $1 \leq m < 2$ B. $m \leq 0$ C. $1 \leq m < 2$ D. $m \geq 2$

(Trích đề thi minh họa môn Toán 2017 lần I của Bộ GD&ĐT năm 2017)

Lời giải: ĐK: $\tan x \neq m$

Đặt: $t = \tan x$, với $x \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow t \in (0; 1)$ (Vì $t = \tan x$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$)

Hàm số đã cho trở thành $f(t) = \frac{t-2}{t-m}$, $t \neq m$. Có: $f'(t) = \frac{2-m}{(t-m)^2}$

Hàm số $f(t)$ đồng biến trên từng khoảng xác định $\Leftrightarrow f'(t) > 0 \Leftrightarrow m < 2$ (1)

Để hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 1)$ thì $\begin{cases} m \geq 1 \\ m \leq 0 \end{cases}$ (2)

Từ (1), (2) ta được: $m \leq 0$ hoặc $1 \leq m < 2$. Chọn A

Bài tập 12: Tìm m để hàm số $y = \frac{m(x+1)^3}{x^2 - x + 1}$ đơn điệu

A. $m \neq 0$ B. $m > 0$ C. $m < 0$ D. Không tồn tại m

(Trích Giải toán đạo hàm và khảo sát hàm số - TS. Nguyễn Cam)

Lời giải: TXĐ: $D = \mathbb{R}$

$$\text{Ta có: } y' = m \frac{(x+1)^2(x-2)^2}{(x^2 - x + 1)^2}$$

Khi $m > 0$ thì $y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$

Khi $m < 0$ thì $y' \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$

Vậy: Hàm số đơn điệu khi $m \neq 0$. Chọn A

Bài tập 13: Tìm m để hàm số $y = -x - \sqrt{x^2 - x + m}$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$

A. $m > \frac{1}{4}$ B. $m \leq \frac{1}{4}$ C. $m \geq \frac{1}{4}$ D. $m < -1$

(Trích Các bài giảng luyện thi môn Toán – Tập III)

Lời giải: Hàm số xác định với $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow x^2 - x + m \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta \leq 0 \Leftrightarrow 1 - 4m \leq 0 \Leftrightarrow m \geq \frac{1}{4}$$

Ta có: $y' = -1 - \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+m}}$

* Nếu $m = \frac{1}{4}$ thì $y' = -1 - \frac{2x-1}{|2x-1|} = \begin{cases} -2 & \text{khi } x > \frac{1}{2} \\ 0 & \text{khi } x < \frac{1}{2} \end{cases}$ và y' không xác định tại

$$x = \frac{1}{2}$$

Do đó, y là hàm hằng trên khoảng $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$ nên $m = \frac{1}{4}$ không thỏa mãn bài toán.

* Nếu $m > \frac{1}{4}$ thì hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x^2-x+m} + 2x-1 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \sqrt{(2x-1)^2+4m-1} + 2x-1 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Vì $m > \frac{1}{4}$ nên $\sqrt{(2x-1)^2+4m-1} + 2x-1 > \sqrt{(2x-1)^2} + 2x-1 = |2x-1| + 2x-1 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Vậy: $m > \frac{1}{4}$ là giá trị cần tìm. Chọn A

Nhận xét: Khi xét tính đơn điệu của hàm vô tỷ, cần chú ý điều kiện xác định và công thức tính đạo hàm của hàm số vô tỷ.

Bài tập 14: Cho hàm số $y = a \cdot \sin x + b \cdot \cos x + x$. Điều kiện của a, b để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ là

A. $a^2 + b^2 > 1$ B. $a^2 + b^2 \leq 1$ C. $a^2 + b^2 = 1$ D. $ab = 1$

(Trích Giải toán đạo hàm và khảo sát hàm số - TS. Nguyễn Cam)

Lời giải: TXĐ: $D = \mathbb{R}$

Ta có: $y' = a \cos x - b \sin x + 1$

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow a \cos x - b \sin x + 1 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} (*)$

Lại có: $|a \cos x - b \sin x| \leq \sqrt{a^2 + b^2}, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{a^2 + b^2} \leq a \cos x - b \sin x \leq \sqrt{a^2 + b^2}, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow 1 - \sqrt{a^2 + b^2} \leq a \cos x - b \sin x + 1 \leq 1 + \sqrt{a^2 + b^2}, \forall x \in \mathbb{R}$$

Do đó: $(*) \Leftrightarrow 1 - \sqrt{a^2 + b^2} \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + b^2} \leq 1 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \leq 1$. Chọn B

Nhận xét: Đây là bài toán tìm mối liên hệ của tham số a, b để hàm lượng giác đơn điệu trên $\mathbb{R}$. Đối với bài toán này, ta sử dụng điều kiện có nghiệm của phương trình $a \sin x + b \cos x = c$ đó là $c^2 \leq a^2 + b^2$ để tìm lời giải cho bài toán.

2.3.3. Hệ thống bài tập tự luyện

Bài tập 1. Khoảng đồng biến của hàm số $y = x^2 e^{-x}$ là

- A. $(0; 2)$ B. $(-\infty; 0)$ C. $(2; +\infty)$ D. $(-\infty; 2)$

Bài tập 2. Gọi các khoảng $(-\infty; a)$ và $(b; +\infty)$ là khoảng đồng biến của hàm số

$y = \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 2}$. Khi đó $s = b - a$ bằng

- A. 0 B. 2 C. 3 D. 1

Bài tập 3. Hàm số $y = \frac{x^2 + 4x - 2}{x^2 + 1}$ có khoảng đồng biến là $(a; b)$. Khi đó $s = ab$

bằng

- A. 0 B. 2 C. -1 D. 1

Bài tập 4. Hàm số $y = x - e^x$ có mấy khoảng nghịch biến?

- A. 0 B. 2 C. 3 D. 1

Bài tập 5. Tìm m để hàm số $y = x + m \sin x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

- A. $-1 \leq m \leq 1$ B. $m \geq 1$ C. $m \leq 0$ D. $m \leq -1$

Bài tập 6: Tìm m để hàm số $y = \frac{mx + 4}{x + m}$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$

- A. $-2 < m \leq -1$ B. $-2 \leq m < -1$ C. $-2 < m < 2$ D. $m \leq -1$

Bài tập 7. Tìm m để hàm số $y = \frac{x^2 - 2mx + 3m^2}{2m - x}$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$

- A. $m \leq 1$ B. $m \geq 2 + \sqrt{3}$ C. $m \geq 2 - \sqrt{3}$ D. $m \leq -1$

Bài tập 8. Tìm m để hàm số $y = \frac{2x^2 - 3x + m}{x - 1}$ đồng biến trên khoảng $(1; 2)$

- A. $m \leq 1$ B. $-2 \leq m < -1$ C. $m \leq 0$ D. $m \leq -1$

Bài tập 9. Tìm m để hàm số $y = \frac{\sin x + m}{\sin x - 1}$ nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$

- A. $m < -1$ B. $m = 1$ C. $m \geq -1$ D. $m = -1$

Bài tập 10. Tìm m để hàm số $y = \frac{e^x - 1}{e^x - m}$ đồng biến trên khoảng $(-2; -1)$

- A. $m = 1$ B. $m > 1$ C. $m \neq 1$ D. $m \leq 1$

Bài tập 11. Tìm m để hàm số $y = \frac{m \ln x - 2}{\ln x - m - 1}$ nghịch biến trên khoảng $(e^2; +\infty)$

- A. $m \geq -2$ B. $m \geq -3$ C. $m < -2$ D. $m \neq -2$

Bài tập 12. Tìm m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + (m+1)x^2 + (3m+1)x + 2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

- A. $0 \leq m \leq 1$ B. $0 \leq m < 1$ C. $m \geq 1$ D. $m < 0$

Bài tập 13. Tìm m để hàm số $y = \frac{1}{3}(m^2 - 1)x^3 + (m - 1)x^2 - 2x + 1$ ($m \neq \pm 1$) nghịch biến trên khoảng $(2; +\infty)$

A. $-1 < m < 1$

B. $m \geq 1$

C. $m \leq -1$

D. $m \leq 1$

2.4. Hiệu quả của sáng kiến kinh nghiệm

Thực tế cho thấy, với cách làm trên đã tạo được cho học sinh sự nhanh nhẹn, kiên trì, linh hoạt, tiết kiệm được thời gian trong quá trình giải toán. Học sinh biết vận dụng và có sự sáng tạo hơn trong học tập, biết liên kết nhiều mảng kiến thức, nhiều phương pháp giải cho mỗi phần trong cùng một bài toán. Cách làm trên đã đáp ứng được nhu cầu học tập tích cực của học sinh. Sau khi đã được ôn tập những kiến thức cơ bản về tính đơn điệu của hàm số, học sinh đã tự giải được những bài tập tương tự, nhất là những bài tập nằm trong các đề thi thử THPT Quốc gia của các trường trên cả nước trong thời gian gần đây. Đồng thời biết tự xây dựng cho mình hệ thống bài tập phù hợp với nội dung kiến thức được học và những bài tập tương tự trong các đề thi thử nghiệm của Bộ giáo dục và đào tạo. Qua đó, hiệu quả trong học tập của học sinh đã được nâng lên rõ rệt.

Để có được bài viết trên, tôi đã phải mày mò nghiên cứu và kiểm chứng qua một số nhóm học sinh có học lực khá và trung bình khá trong các lớp mà tôi giảng dạy như lớp 12E và lớp 12G năm học 2016 – 2017.

Với bài toán: Điều kiện cần và đủ để hàm số $y = -x^3 + (m+1)x^2 + 2x - 3$ đồng biến trên đoạn $[0; 2]$ là

A. $m < \frac{3}{2}$

B. $m > \frac{3}{2}$

C. $m \geq \frac{3}{2}$

D. $m \leq \frac{3}{2}$

(Trích bộ đề trắc nghiệm luyện thi THPT Quốc gia năm 2017 môn Toán)

Tôi đã chọn ra hai nhóm học sinh với số lượng bằng nhau, có lực học ngang nhau, làm theo hai cách:

Cách 1: Sử dụng định lý (về tính đơn điệu của hàm số) tìm tham số để hàm số đơn điệu trên miền D

Cách 2: Vận dụng 2 phương pháp tìm tham số để hàm số đơn điệu trên miền D như đã trình bày ở trên.

Kết quả thu được thể hiện ở bảng sau:

Nhóm	Số học sinh	Số học sinh có lời giải		Số học sinh có lời giải đúng	
		Số lượng	%	Số lượng	%
Nhóm I (<i>phương pháp so sánh nghiệm của đạo hàm với 1 số cho trước</i>)	15	10	66,7%	7	46,7%
Nhóm II (<i>Giải theo một trong các phương pháp đã học</i>)	15	15	100%	14	93,3%

Qua bảng thống kê trên ta thấy, kết quả học tập của học sinh đã vượt trội sau khi các em tìm được lời giải phù hợp với khả năng của mình trong một bài toán cụ thể.

3. Kết luận, kiến nghị

3.1. Kết luận

Trong quá trình dạy học, đối với mỗi thể loại kiến thức, nếu giáo viên biết tìm ra những cơ sở lý thuyết, biết phát huy, sáng tạo cái mới và hướng dẫn học sinh vận dụng một cách hợp lý vào việc giải các bài tập tương ứng thì sẽ tạo được điều kiện để học sinh củng cố và hiểu sâu về lý thuyết cùng với việc thực hành giải toán một cách hiệu quả hơn, tạo được sự hứng thú, phát huy được tính chủ động và sự sáng tạo trong học tập của học sinh.

Mỗi nội dung kiến thức luôn chứa đựng những cách tiếp cận thú vị. Mỗi giáo viên, cần có sự chủ động trong việc tìm tòi cách giải mới, kế thừa và phát huy những kiến thức có sẵn một cách sáng tạo. Trong quá trình giảng dạy, cần

xây dựng phương pháp giải và đưa ra hệ thống các bài tập phù hợp với từng đối tượng học sinh để giúp cho việc học của học sinh tích cực, chủ động và đạt kết quả cao hơn.

3.2. Kiến nghị

Mặc dù đã có sự đầu tư kỹ lưỡng nhưng bài viết chắc không tránh khỏi những thiếu sót, tôi rất mong các bạn đồng nghiệp bổ sung góp ý để bài viết được hoàn thiện hơn, cũng như ứng dụng vào việc dạy học cho học sinh lớp mình giảng dạy, đem lại cho học sinh những bài giảng hay hơn, cuốn hút hơn.

XÁC NHẬN CỦA THỦ TRƯỞNG
ĐƠN VỊ

Thanh Hoá, ngày 15/05/2017

Tôi xin cam đoan đây là SKKN
của mình viết, không sao chép nội dung
của người khác.

Người viết

Mai Phi Thường

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Giải toán đạo hàm và khảo sát hàm số - TS Nguyễn Cam – NXB ĐHQG Hà Nội
2. Các bài giảng luyện thi môn Toán – Phan Đức Chính – Lê Thống Nhất – Tạ Mân – Đào Tam – Vũ Dương Thụy – NXB Giáo Dục
3. Bộ đề trắc nghiệm luyện thi THPTQG môn Toán năm 2017 – Phan Đức Tài – Nguyễn Ngọc Hải – Lại Tiến Minh – NXBGD Việt Nam
4. Bài Tập Khảo Sát Hàm Số - Trần Sĩ Tùng – Nguồn internet
5. Đề thi thử THPTQG của các trường THPT – Nguồn internet

DANH MỤC
CÁC ĐỀ TÀI SÁNG KIẾN KINH NGHIỆM ĐÃ ĐƯỢC HỘI ĐỒNG
ĐÁNH GIÁ XẾP LOẠI CẤP PHÒNG GD&ĐT, CẤP SỞ GD&ĐT VÀ CÁC
CẤP CAO HƠN XẾP LOẠI TỪ C TRỞ LÊN

Họ và tên tác giả: Mai Phi Thường

Chức vụ và đơn vị công tác: Giáo viên – Trường THPT Nga Sơn

TT	Tên đề tài SKKN	Cấp đánh giá xếp loại	Kết quả đánh giá xếp loại	Năm học đánh giá xếp loại
1.	Rèn luyện kỹ năng xác định đoạn vuông góc chung và tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau	Sở GD&ĐT tỉnh Thanh Hóa	C	2014 - 2015