

Người làm: Lê Thị Hoa

Zalo: Yli - số đt zalo: 0394082363

Email: nguyenthihau100988@gmail.com

CD10: CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC VÀ TÌM GTLN, GTNN

Dạng 1. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất.

A. Trắc nghiệm

Câu 1. (HSG 7 Thanh Thủy, Phú Thọ 2021 - 2022)

Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = |y - 2| + |y - 5|$ là

- A. 2 B. 3 C. 5 D. 7

Lời giải

Ta có: $A = |y - 2| + |y - 5| = |y - 2| + |5 - y|$

Áp dụng BĐT giá trị tuyệt đối: $|a| + |b| \geq |a + b|$. Dấu '=' xảy ra khi $a \cdot b \geq 0$.

Ta có $|y - 2| + |5 - y| \geq |y - 2 + 5 - y| = 3$. Dấu '=' xảy ra khi $(y - 2)(5 - y) \geq 0 \Rightarrow 2 \leq y \leq 5$
 $\Rightarrow A \geq 3$

Vậy A có giá trị nhỏ nhất bằng 3 khi $2 \leq y \leq 5$

Câu 2. (HSG 7 Thanh Thủy, Phú Thọ 2021 - 2022)

Với x nguyên, giá trị lớn nhất của biểu thức $A = \frac{2022 - x}{2 - x}$ là

- A. 2021 B. 2020 C. 2019 D. 2018

Lời giải

Ta có: $A = \frac{2022 - x}{2 - x} = 1 + \frac{2020}{2 - x}$, $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow 2 - x \in \mathbb{Z}$

Để A có giá trị lớn nhất thì $2 - x$ là số nguyên dương nhỏ nhất, hay $2 - x = 1 \Rightarrow x = 1$.

Vậy GTLN của A là 2021 khi $x = 1$.

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 Mỹ Đức, Hà Nội 2021 - 2022)

Cho biểu thức: $Q = |x - 2020| + |x - 2021| + |x - 2022|$. Tìm x để biểu thức Q có giá trị nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất đó.

Lời giải

Ta có: $Q = |x - 2020| + |x - 2021| + |x - 2022|$

Áp dụng BĐT giá trị tuyệt đối: $|a| + |b| \geq |a + b|$. Dấu '=' xảy ra khi $a \cdot b \geq 0$.

Ta có $|x - 2020| + |2022 - x| \geq |x - 2020 + 2022 - x| = 2$ với mọi x (1)

$|x - 2021| \geq 0$ với mọi x (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow A \geq 2$ với mọi x

Dấu '=' xảy ra: $\begin{cases} (x - 2020)(2022 - x) \geq 0 \\ x - 2021 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x = 2021$

Vậy Q có giá trị nhỏ nhất bằng 2 khi $x = 2021$.

Câu 2. (HSG 7 Ứng Hòa, Hà Nội 2021 - 2022)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |2021 - x| + |2022 - x|$

Lời giải

Ta có: $P = |2021 - x| + |2022 - x|$

$$= |x - 2021| + |2022 - x|$$

Ta có $|x - 2021| + |2022 - x| \geq |x - 2021 + 2022 - x| = 1$

Dấu bằng xảy ra khi $(x - 2021)(2022 - x) \geq 0 \Leftrightarrow 2021 \leq x \leq 2022$

Vậy biểu thức P có giá trị nhỏ nhất là 1, xảy ra khi $2021 \leq x \leq 2022$.

Câu 3. (HSG 7 Vũng Tàu 2021 - 2022)

Tìm giá trị nguyên của x để biểu thức $M = \frac{2016x - 2016}{3x + 2}$ có giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

$$M = \frac{2016x - 2016}{3x + 2} = \frac{672 \cdot (3x + 2) - 2016 - 1344}{3x + 2} = 672 - \frac{3360}{3x + 2}$$

M nhỏ nhất khi $\frac{3360}{3x + 2}$ lớn nhất

Vì $3360 > 0$ và không đổi nên $\frac{3360}{3x + 2}$ đạt giá trị lớn nhất khi: $3x + 2 > 0$ và $3x + 2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Mà $3x + 2$ chia 3 dư 2 nên $3x + 2 = 2 \Rightarrow x = 0$

$$\text{Khi đó: } M = 672 - \frac{3360}{3x + 2} = 672 - \frac{3360}{3 \cdot 0 + 2} = -1008$$

Vậy M đạt giá trị nhỏ nhất là -1008 khi $x = 0$

Câu 4. (HSG 7 TP Vũng Tàu 2021 - 2022)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = |x - 2| + |2x - 3| + |3x - 4|$

Lời giải

Ta có: $|x - 2| + |3x - 4| = |2 - x| + |3x - 4| \geq |2 - x + 3x - 4| = |2x - 2|$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow (2 - x)(3x - 4) \geq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 - x \geq 0 \\ 3x - 4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \geq x \\ 3x \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x \geq \frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{4}{3} \leq x \leq 2$$

Lại có: $|2x - 2| + |2x - 3| = |2x - 2| + |3 - 2x| \geq |2x - 2 + 3 - 2x| = |1| = 1$

$$\begin{aligned} \text{Dấu "}" xây ra} &\Leftrightarrow (3-2x)(2x-2) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 3-2x \geq 0 \\ 2x-2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x \geq -3 \\ 2x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{3}{2} \\ x \geq 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 3-2x \leq 0 \\ 2x-2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x \leq -3 \\ 2x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{3}{2} \\ x \leq 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow 1 \leq x \leq \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Do đó } \Rightarrow A = |x-2| + |2x-3| + |3x-4| \geq 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4}{3} \leq x \leq 2 \\ 1 \leq x \leq \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{4}{3} \leq x \leq \frac{3}{2}$$

$$\text{Dấu "}" xây ra} \Leftrightarrow \frac{4}{3} \leq x \leq \frac{3}{2}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là 1

Câu 5. (HSG 7 Cửa Lò, Nghệ An 2021 - 2022)

Cho a, b, c là các số không âm thỏa mãn: $a+3c=2021$; $a+2b=2022$. Tìm giá trị lớn nhất của $P=a+b+c$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } a+3c=2021 \Rightarrow a=2021-3c; a+2b=2022 \Rightarrow a=2022-2b$$

$$\text{Suy ra: } 2021-3c=2022-2b \Rightarrow 2b=2022-2021+3c=1+3c \Rightarrow b=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}c$$

$$\text{Nhu vậy: } P=a+b+c=2021-3c+\frac{1}{2}+\frac{3}{2}c+c=2021\frac{1}{2}-\frac{1}{2}c \geq 2021\frac{1}{2} \text{ (vì } c \geq 0).$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra } \Leftrightarrow c=0. \text{ Khi đó } a+3c=2021 \Rightarrow a=2021; a+2b=2022 \Rightarrow b=\frac{1}{2}$$

$$\text{Vậy giá trị lớn nhất của } P \text{ là } 2021\frac{1}{2} \text{ khi } a=2021; b=\frac{1}{2}; c=0$$

Câu 6. (HSG 7 Vũ Thư, Thái Bình 2021 - 2022)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $C=2022+|3y-1|+(2x-y+3)^2$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Với mọi } x, y \text{ ta có: } &|3y-1| \geq 0 \text{ và } (2x-y+3)^2 \geq 0 \\ \Rightarrow &|3y-1|+(2x-y+3)^2 \geq 0 \Rightarrow C \geq 2022 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Dấu bằng xảy ra khi } &|3y-1|=0 \text{ và } (2x-y+3)^2=0 \Leftrightarrow 3y-1=0 \text{ và } 2x-y+3=0 \\ \Rightarrow &y=\frac{1}{3}; x=\frac{-4}{3} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } C_{\min}=2022 \text{ với } (x; y) = \left(\frac{-4}{3}; \frac{1}{3}\right)$$

Câu 7. (HSG 7 Thành phố Thái Bình 2021 - 2022)

Cho biểu thức: $A = \frac{7x-8}{2x-3}$ với $x \neq \frac{3}{2}$.

$$\left| x + \frac{1}{3} \right| - 2 = -1$$

1. Tính giá trị của biểu thức A biết

2. Tìm các giá trị nguyên của x để biểu thức A có giá trị lớn nhất. Tìm giá trị lớn nhất đó.

Lời giải

1. Ta có: $\left| x + \frac{1}{3} \right| - 2 = -1 \Rightarrow \left| x + \frac{1}{3} \right| = 1$

Trường hợp 1: $x + \frac{1}{3} = 1 \Rightarrow x = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

Trường hợp 2: $x + \frac{1}{3} = -1 \Rightarrow x = -1 - \frac{1}{3} = -\frac{4}{3}$

$\Rightarrow x = \frac{2}{3}$ hoặc $x = -\frac{4}{3}$

Với $x = \frac{2}{3}$ thỏa mãn điều kiện $x \neq \frac{3}{2}$ thay vào biểu thức A tính được

$$A = \frac{7 \cdot \frac{2}{3} - 8}{2 \cdot \frac{2}{3} - 3} = 2$$

Với $x = -\frac{4}{3}$ thỏa mãn điều kiện $x \neq \frac{3}{2}$ thay vào biểu thức A tính được

$$A = \frac{7 \cdot \frac{-4}{3} - 8}{2 \cdot \frac{-4}{3} - 3} = \frac{52}{17}$$

Vậy $A = 2$ tại $x = \frac{2}{3}$, $A = \frac{52}{17}$ tại $x = -\frac{4}{3}$

2. Ta có: $A = \frac{7x-8}{2x-3} = \frac{7}{2} + \frac{5}{2x-3}$ ($x \in \mathbb{Q}$)

A lớn nhất khi $\frac{5}{2x-3}$ lớn nhất

$\frac{5}{2x-3}$ lớn nhất khi $(2x-3)$ là số nguyên dương nhỏ nhất

$\Rightarrow 2x-3=1 \Rightarrow x=2$ (Thỏa mãn điều kiện x nguyên)

Thay $x=2$ vào biểu thức $A = \frac{7}{2} + \frac{5}{2x-3} = 6$

Vậy $x=2$ thì giá trị lớn nhất của biểu thức A bằng 6.

Câu 8. (HSG 7 Bất Xất, Lào Cai 2021 - 2022)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức
$$M = \frac{2011}{2012 - 3|x - 2010|}$$

Lời giải

$$M = \frac{2011}{2012 - 3|x - 2010|}$$

Biểu thức M đạt giá trị nhỏ nhất khi $2012 - 3|x - 2010|$ có giá trị lớn nhất

Mà $-3|x - 2010| \leq 0$ với mọi $x \Rightarrow 2012 - 3|x - 2010| \leq 2012$ với mọi x

Dấu “=” xảy ra khi $x = 2010$

Suy ra $M \leq \frac{2011}{2012}$ với mọi x

$$M_{\min} = \frac{2011}{2012} \text{ khi } x = 2010$$

Vậy

Câu 8. (HSG 7 Mường La, Sơn La 2021 - 2022)

Tìm số tự nhiên n để phân số $\frac{7n - 8}{2n - 3}$ có giá trị lớn nhất.

Lời giải

$$\text{Đặt } P = \frac{7n - 8}{2n - 3} \Rightarrow 2P = \frac{14n - 16}{2n - 3} = 7 + \frac{5}{2n - 3}$$

P có GTLN $\Rightarrow 2P$ có GTLN $\Rightarrow \frac{5}{2n - 3}$ có GTLN $\Rightarrow 2n - 3 = 1 \Rightarrow n = 2$

(vì $n \in \mathbb{N} \Rightarrow 2n - 3 \in \mathbb{N}$ và $2n - 3$ là số tự nhiên lẻ)

Vậy P có GTLN bằng 6 khi $n = 2$

Câu 9. (HSG 7 Mường La, Sơn La 2021 - 2022)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:
$$A = \frac{|x - 2016| + 2017}{|x - 2016| + 2018}$$

Lời giải

$$\text{Ta có: } A = \frac{|x - 2016| + 2017}{|x - 2016| + 2018} = 1 - \frac{1}{|x - 2016| + 2018}$$

A có GTNN khi $\frac{1}{|x - 2016| + 2018}$ có GTLN

Lại có: $|x - 2016| + 2018 \geq 2018$ (với $\forall x$). Dấu “=” xảy ra khi $x = 2016$

Vậy A có GTNN là $\frac{2017}{2018}$ khi $x = 2016$

Câu 10. (HSG 7 Chư Sê, Gia Lai 2021 - 2022)

Cho $x + y = 1$ và $x > 0, y > 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y}$ (a và b là các hằng số dương đã cho).

Lời giải

Ta có:
$$P = \frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} = \frac{a^2 \cdot 1}{x} + \frac{b^2 \cdot 1}{y} = \frac{a^2 \cdot (x+y)}{x} + \frac{b^2 \cdot (x+y)}{y}$$

$$= a^2 + \frac{a^2 y}{x} + b^2 + \frac{b^2 x}{y} = \left(\frac{a^2 y}{x} + \frac{b^2 x}{y} \right) + a^2 + b^2$$

Các số dương $\frac{a^2 y}{x}, \frac{b^2 x}{y}$ có tích không đổi nên tổng của chúng nhỏ nhất khi và chỉ khi

$$\frac{a^2 y}{x} = \frac{b^2 x}{y} \Rightarrow a^2 y^2 = b^2 x^2 \Rightarrow ay = bx \Rightarrow a(1-x) = bx \Rightarrow x = \frac{a}{a+b}$$

Suy ra $y = \frac{b}{a+b}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức là $P = (a+b)^2$ khi $x = \frac{a}{a+b}; y = \frac{b}{a+b}$.

Câu 11. (HSG 7 Lý Nhân, Hà Nam 2021 - 2022)

Tìm số nguyên y để biểu thức $D = |y - 4| + |y - 10|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

Ta có $|a| = |-a|$ và $|a| + |b| \geq |a + b|$.

Dấu “=” xảy ra khi a, b cùng dấu hoặc ít nhất một số bằng 0.

Áp dụng $D = |y - 4| + |y - 10| = |y - 4| + |-y + 10| \geq |y - 4 + 10 - y| \geq 6$

Dấu “=” xảy ra khi $(y - 4)(10 - y) \geq 0 \Leftrightarrow 4 \leq y \leq 10$.

Vì y nguyên nên $y \in \{4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$.

Câu 12. (HSG 7 Quảng Trạch, Quảng Bình 2021 - 2022)

Tìm một số có ba chữ số sao cho tỷ số giữa số đó với tổng các chữ số của nó có giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

Gọi số có ba chữ số cần tìm là \overline{abc} (a, b, c là các chữ số, $0 < a \leq 9; 0 \leq b; c \leq 9$).

Ta có
$$k = \frac{\overline{abc}}{a+b+c} = \frac{100a+10b+c}{a+b+c} = 1 + \frac{99a+9b}{a+b+c}$$

Với a, b xác định thì k bé nhất khi c là số lớn nhất $\Rightarrow c = 9$.

Khi đó
$$k = 1 + \frac{99a+9b}{a+b+9} = 1 + \frac{9(a+b+9)+90a-81}{a+b+9} = 10 + \frac{90a-81}{a+b+9}$$

Với a xác định thì k bé nhất khi b là số lớn nhất $\Rightarrow b = 9$.

Khi đó:

$$k = 10 + \frac{90a-81}{a+18} = 10 + 9 \cdot \frac{10a-9}{a+18} = 10 + 9 \cdot \frac{10(a+18)-189}{a+18} = 100 - \frac{9 \cdot 189}{a+18}$$

$$\Rightarrow k = 100 - \frac{9.189}{a+18} \text{ bé nhất khi } a \text{ bé nhất} \Rightarrow a = 1.$$

$$\text{Vậy số cần tìm là } 199 \text{ và } k = \frac{199}{19}$$

Câu 13. (HSG 7 Quảng Trạch, Quảng Bình 2021 - 2022)

Chứng minh rằng với $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ ta có: $A = \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \dots + \frac{1}{n^3} < \frac{1}{12}$.

Lời giải

$$\text{Với } n \in \mathbb{N}, n \geq 3 \text{ ta có: } A = \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \dots + \frac{1}{n^3}$$

$$\Rightarrow 2A = \frac{2}{3^3} + \frac{2}{4^3} + \frac{2}{5^3} + \dots + \frac{2}{n^3}$$

Ta có:

$$\frac{2}{3^3} < \frac{2}{2.3.4} = \frac{1}{2.3} - \frac{1}{3.4}$$

$$\frac{2}{4^3} < \frac{2}{3.4.5} = \frac{1}{3.4} - \frac{1}{4.5}$$

$$\frac{2}{5^3} < \frac{2}{4.5.6} = \frac{1}{4.5} - \frac{1}{5.6}$$

.....

$$\frac{2}{n^3} < \frac{2}{(n-1).n(n+1)} = \frac{1}{(n-1).n} - \frac{1}{n.(n+1)}$$

$$\Rightarrow 2A = \frac{2}{3^3} + \frac{2}{4^3} + \frac{2}{5^3} + \dots + \frac{2}{n^3} < \frac{1}{2.3} - \frac{1}{3.4} + \frac{1}{3.4} - \frac{1}{4.5} + \frac{1}{4.5} - \frac{1}{5.6} + \dots + \frac{1}{(n-1).n} - \frac{1}{n(n+1)}$$

$$\Rightarrow 2A < \frac{1}{2.3} - \frac{1}{n(n+1)}$$

$$\Rightarrow A < \frac{1}{12} - \frac{1}{2n(n+1)}$$

$$\Rightarrow A < \frac{1}{12}$$

$$\text{Vậy } A = \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \dots + \frac{1}{n^3} < \frac{1}{12} \text{ (với } n \in \mathbb{N}, n \geq 3).$$

Câu 14. (HSG 7 Đức Thọ, Hà Tĩnh 2021 - 2022)

Tìm số tự nhiên n để phân số $B = \frac{10n-3}{4n-10}$ đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải

$$\text{Đặt } B = \frac{10n-3}{4n-10} = \frac{2,5(4n-10)+22}{4n-10} = 2,5 + \frac{22}{4n-10}$$

$$B \text{ có GTLN} \Rightarrow \frac{22}{4n-10} \text{ có GTLN} \Rightarrow \frac{22}{4n-10} \text{ có GTLN} \Rightarrow 4n-10 = 2 \Rightarrow n = 3 \text{ (Vì } n \in \mathbb{N} \Rightarrow 4n-10 \in \mathbb{N} \text{ và } 4n-10 \text{ là số tự nhiên chẵn)}$$

$$\text{Vậy } B \text{ có GTLN bằng } 13,5 \text{ khi } n = 3$$

Câu 15. (HSG 7 Tam Nông, Phú Thọ 2021 - 2022)

$$P = \frac{|x-2022| - |x-2023| + |x-2024| + 2022}{|x-2022| + |x-2023| + |x-2024|}$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

Lời giải

$$P = \frac{|x-2022| + |x-2023| + |x-2024| + 2022 - 2|x-2023|}{|x-2022| + |x-2023| + |x-2024|}$$

Ta có:

$$P = 1 + \frac{2022 - 2|x-2023|}{|x-2022| + |x-2023| + |x-2024|}$$

$$\text{Vì: } |x-2023| \geq 0 \Rightarrow 2022 - 2|x-2023| \leq 2022$$

$$\begin{aligned} |x-2022| + |x-2023| + |x-2024| &= |x-2022| + |2024-x| + |x-2023| \\ &\geq |x-2022+2024-x| + |x-2023| = 2 + |x-2023| \geq 2 \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra: } \frac{1}{|x-2022| + |x-2023| + |x-2024|} \leq \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{2022 - 2|x-2023|}{|x-2022| + |x-2023| + |x-2024|} \leq \frac{2022}{2}$$

$$\Rightarrow P = 1 + \frac{2022 - 2|x-2023|}{|x-2022| + |x-2023| + |x-2024|} \leq 1 + \frac{2022}{2} = 1012$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra khi } \begin{cases} x-2023=0 \\ (x-2022)(2024-x) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2023 \\ 2022 \leq x \leq 2024 \end{cases} \Rightarrow x=2023$$

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức $P=1012$ khi $x=2023$.

Dạng 3. Bất đẳng thức dạng chữ

Câu 1. (HSG 7 Triệu Sơn, Thanh Hóa 2021 - 2022)

Cho ba số thực $a; b; c$ thỏa mãn: $0 \leq a \leq b \leq c \leq 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ac+1} + \frac{c}{ab+1} \leq 2$$

Lời giải

$$\text{Vì } 0 \leq a \leq b \leq c \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} b-1 \leq 0 \\ c-1 \leq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (b-1)(c-1) \geq 0 \Rightarrow bc - b - c + 1 \geq 0 \Rightarrow bc + 1 \geq b + c$$

$$\Rightarrow \frac{1}{bc+1} \leq \frac{1}{b+c} \Rightarrow \frac{a}{bc+1} \leq \frac{a}{b+c}$$

$$\text{Vì } 0 \leq a \leq b \leq c \leq 1 \text{ nên } \frac{a}{b+c} \leq 1 \Rightarrow \frac{a}{bc+1} \leq \frac{a}{b+c} \leq \frac{2a}{a+b+c} \quad (1)$$

$$\text{Tương tự, vì } \frac{b}{c+a} \leq 1 \Rightarrow \frac{b}{ca+1} \leq \frac{b}{c+a} \leq \frac{2b}{a+b+c} \quad (2)$$

$$\text{Tương tự } \frac{c}{ab+1} \leq \frac{2c}{a+b+c} \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) ta có: $\frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ac+1} + \frac{c}{ab+1} \leq \frac{2a+2b+2c}{a+b+c} = 2$.

Dấu “=” xảy ra khi 2 trong ba số $a; b; c$ bằng 1; số còn lại bằng 0.

Câu 2. (HSG 7 Thanh Miện, Hải Dương 2021 - 2022)

Cho 20 số nguyên khác 0: $a_1; a_2; a_3 \dots a_{20}$ có các tính chất sau:

+ a_1 là số dương.

+ Tổng của ba số viết liền nhau bất kì là một số dương.

+ Tổng của 20 số đó là số âm.

Chứng minh rằng: $a_1 \cdot a_{14} + a_{14} \cdot a_{12} < a_1 \cdot a_{12}$

Lời giải

Ta có:

$$a_1 + (a_2 + a_3 + a_4) + (a_5 + a_6 + a_7) + (a_8 + a_9 + a_{10}) + (a_{11} + a_{12} + a_{13}) + a_{14} + (a_{15} + a_{16} + a_{17}) + (a_{18} + a_{19} + a_{20}) < 0$$

Ta có:

$$a_1 > 0; a_2 + a_3 + a_4 > 0; a_5 + a_6 + a_7 > 0; a_8 + a_9 + a_{10} > 0;$$

$$a_{11} + a_{12} + a_{13} > 0; a_{15} + a_{16} + a_{17} > 0; a_{18} + a_{19} + a_{20} > 0$$

$$\Rightarrow a_{14} < 0$$

Cũng như vậy:

$$(a_1 + a_2 + a_3) + \dots + (a_{10} + a_{11} + a_{12}) + (a_{13} + a_{14}) + (a_{15} + a_{16} + a_{17}) + (a_{18} + a_{19} + a_{20}) < 0$$

$$\Rightarrow a_{13} + a_{14} < 0$$

$$\text{Mặt khác: } a_{12} + a_{13} + a_{14} > 0 \Rightarrow a_{12} > 0$$

$$\text{Từ các điều kiện: } a_1 > 0; a_{12} > 0; a_{14} < 0$$

$$\Rightarrow a_1 \cdot a_{14} + a_{14} \cdot a_{12} < a_1 \cdot a_{12} \text{ (đpcm).}$$

Câu 3. (HSG 7 Cẩm Thủy, Nam Định 2021 - 2022)

Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} > 1$$

Lời giải

Vì a, b, c là ba cạnh của tam giác nên ta có

$$0 < \frac{a}{b+c} < 1 \Rightarrow \sqrt{\frac{a}{b+c}} \left(1 - \sqrt{\frac{a}{b+c}} \right) > 0 \Rightarrow \sqrt{\frac{a}{b+c}} > \frac{a}{b+c}$$

$$\text{Vì } a, b, c \text{ là các số dương nên } \frac{a}{b+c} > \frac{a}{a+b+c}$$

$$\text{Do đó } \sqrt{\frac{a}{b+c}} > \frac{a}{a+b+c}$$

$$\text{Chứng minh tương tự ta được } \sqrt{\frac{b}{c+a}} > \frac{b}{a+b+c}; \sqrt{\frac{c}{a+b}} > \frac{c}{a+b+c}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} > \frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{a+b+c} = 1$$

Bài toán được chứng minh.

Câu 4. (HSG 7 Thanh Sơn, Phú Thọ 2021 - 2022)

Cho ba số a, b, c thỏa mãn $0 \leq a \leq b \leq c \leq 1$. Chứng minh rằng: $\frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ac+1} + \frac{c}{ab+1} \leq 2$

Lời giải

$$\text{Vì } 0 \leq a \leq b \leq c \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} b-1 \leq 0 \\ c-1 \leq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (b-1)(c-1) \geq 0 \Rightarrow bc - b - c + 1 \geq 0 \Rightarrow bc + 1 \geq b + c$$

$$\Rightarrow \frac{1}{bc+1} \leq \frac{1}{b+c} \Rightarrow \frac{a}{bc+1} \leq \frac{a}{b+c}$$

$$\text{Vì } 0 \leq a \leq b \leq c \leq 1 \text{ nên } \frac{a}{b+c} \leq 1 \Rightarrow \frac{a}{bc+1} \leq \frac{a}{b+c} \leq \frac{2a}{a+b+c} \quad (1)$$

$$\text{Tương tự, vì } \frac{b}{c+a} \leq 1 \Rightarrow \frac{b}{ca+1} \leq \frac{b}{c+a} \leq \frac{2b}{a+b+c} \quad (2)$$

$$\text{Tương tự } \frac{c}{ab+1} \leq \frac{2c}{a+b+c} \quad (3)$$

$$\text{Từ (1), (2), (3) ta có: } \frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ac+1} + \frac{c}{ab+1} \leq \frac{2a+2b+2c}{a+b+c} = 2.$$

Dấu “=” xảy ra khi 2 trong ba số $a; b; c$ bằng 1; số còn lại bằng 0.

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com

<https://www.vnteach.com>