CĐ 10: TỈ LỆ THỨC VÀ DÃY TỈ SỐ BẰNG NHAU

Dạng 1: Tìm số hạng chưa biết dựa vào tỉ lệ thức
Dạng 2: Chứng minh đẳng thức
Dạng 3: Chứng minh bất đẳng thức
Dạng 4: Bài toán về dãy tỉ số bằng nhau và chia tỉ lệ

Dạng 2. Chứng minh đẳng thức

Câu 1. **(HSG 7 huyện Phù Cát, trường THCS Ngô Gia Tự 2017 - 2018; trường Nguyễn Du 2016 - 2017)**

Cho tỉ lệ thức $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ với $a,b,c,d\neq 0; a\neq \pm b, c\neq \pm d$.

Chứng minh: $\frac{b}{b-a}=\frac{d}{d-c}$ và $\frac{c+d}{a+b}=\frac{c}{a}$

Lời giải

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow 1-\frac{a}{b}=1-\frac{c}{d}\Rightarrow \frac{b-a}{b}=\frac{d-c}{c}\Rightarrow \frac{b}{b-a}=\frac{d}{d-c}$$

Từ $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow \frac{c}{a}=\frac{d}{b}=\frac{c+d}{a+b}$

Câu 2. **(HSG 7 trường Bích Hoà; trường Thiệu Vân 2022 - 2023)**

Cho $\frac{a}{c}=\frac{c}{b}$. Chứng minh rằng: $\frac{a-c}{a+c}=\frac{c-b}{c+b}$

Lời giải

$$\frac{a}{c}=\frac{c}{b}=\frac{a-c}{c-b}=\frac{a+c}{c+b}\Rightarrow \frac{a-c}{a+c}=\frac{c-b}{c+b}$$

Câu 3. **(HSG 2018 - 2019)**

Cho tỉ lệ thức $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. Chứng minh rằng: $\frac{5a+3b}{5a-3b}=\frac{5c+3d}{5c-3d}$

Lời giải

Đặt $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k\Rightarrow a=kb, c=kd$

Suy ra: $\frac{5a+3b}{5a-3b}=\frac{b(5k+3)}{b(5k-3)}=\frac{5k+3}{5k-3}$

Và $\frac{5c+3d}{5c-3d}=\frac{d(5k+3)}{d(5k-3)}=\frac{5k+3}{5k-3}$

Vậy $\frac{5a+3b}{5a-3b}=\frac{5c+3d}{5c-3d}$

Câu 4. **(HSG 7 Tp Ninh Bình 2022 - 2023; huyện Thanh Oai 2014 - 2015)**

Cho $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. Chứng minh rằng $\frac{2a-3b}{2a+3b}=\frac{2c-3d}{2c+3d}$

Lời giải

Cho $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$

$\Rightarrow\frac{2a}{2c}=\frac{3b}{3d}=\frac{2a-3b}{2c-3d}=\frac{2a+3b}{2c+3d}$

$\Rightarrow\frac{2a-3b}{2a+3b}=\frac{2c-3d}{2c+3d}$

Vậy $\frac{2a-3b}{2a+3b}=\frac{2c-3d}{2c+3d}$

Câu 5. **(HSG 7 huyện Giao Thuỷ 2016 - 2017)**

Cho tỉ lệ thức: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ (giả thiết các tỉ lệ thức đều có nghĩa).

Chứng minh rằng: $\frac{2a+3b}{2a-3b}=\frac{2c+3d}{2c-3d}$

Lời giải

Giả thiết các tỉ lệ thức đều có nghĩa, từ $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a}{c}=\frac{b}{d}\Rightarrow\frac{2a}{2c}=\frac{3b}{3d}$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$\frac{2a}{2c}=\frac{3b}{3d}=\frac{2a+2c}{2c+3d}=\frac{2a-3b}{2c-3d}\Rightarrow\frac{2a+3b}{2a-3b}=\frac{2c+3d}{2c-3d}$

Câu 6. **(HSG 7 trường Thiệu Vận, huyện Thiệu Hóa; huyện Thường Tín 2018 - 2019)**

Chứng minh rằng: Từ tỷ lệ thức $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}\neq1$ ta có tỉ lệ thức $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

Lời giải

$\frac{a+b}{a-b}\neq1\Rightarrow b\neq0;\ \frac{c+d}{c-d}\neq1\Rightarrow d\neq0$

Vì $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}\Rightarrow(a+b)(c-d)=(a-b)(c+d)$

$\Rightarrow 2bc=2ad\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\ (b,d\neq0)$ (ĐPCM).

Câu 7. **(HSG 7 SƠN ĐỘNG 2022 - 2023)**

Cho $\frac{7x+5y}{3x-7y}=\frac{7z+5t}{3z-7t}$. Chứng minh: $\frac{x}{y}=\frac{z}{t}$.

Lời giải

Đặt: $\frac{7x+5y}{3x-7y}=\frac{7z+5t}{3z-7t}=k$, ta có:

$7x+5y=k(3x-7y)\Rightarrow(3k-7)x=(7k+5)y\Rightarrow\frac{x}{y}=\frac{7k+5}{3k-7}$. (1)

$7z+5t=k(3z-7t)\Rightarrow(3k-7)z=(7k+5)t\Rightarrow\frac{z}{t}=\frac{7k+5}{3k-7}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{x}{y}=\frac{z}{t}$. Đây là điều phải chứng minh.

Câu 8. **(HSG 7 huyện 2022 - 2023)**

Chứng minh rằng từ tỉ lệ thức $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+a}{c-a}$ suy ra hệ thức $a^2=bc$

Lời giải

Đặt $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+a}{c-a}=k$, ta có: $a+b=k(a-b)$

$\Rightarrow a+b=ka-kb\Rightarrow a-ka=-kb-b\Leftrightarrow a(1-k)=b(-k-1)$

$\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{-k-1}{1-k}=\frac{-(k+1)}{-(k-1)}=\frac{k+1}{k-1}\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{k+1}{k-1}$

$c+a=k(c-a)\Rightarrow c+a=kc-ka\Rightarrow c-kc=-ka-a$

$\Rightarrow c(1-k)=a(-k-1)\Rightarrow\frac{c}{a}=\frac{-k-1}{1-k}=\frac{-(k+1)}{-(k-1)}=\frac{k+1}{k-1}$

$\Rightarrow\frac{c}{a}=\frac{k+1}{k-1}\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{c}{a}=\frac{k+1}{k-1}\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{c}{a}\Rightarrow a^2=bc$

Vậy: $a^2=bc$

Câu 9. **(HSG 7 huyện Anh Sơn; huyện Phú Thiện 2015 - 2016)**

Cho tỉ lệ thức $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. Chứng minh rằng: $(a+2c)(b+d)=(a+c)(b+2d)$.

Lời giải

Ta có: $(a+2c)(b+d)=(a+c)(b+2d)$

$ab+ad+2cb+2cd=ab+2ad+cb+2cd$

$cb=ad$ suy ra: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

Câu 10. **(HSG 7 THCS Hiền Quan, Tam Nông 2017-2018)**

Cho $(a+3)(b-4)-(a-3)(b+4)=0$. Chứng minh: $\frac{a}{3}=\frac{b}{4}$

Lời giải

Tính được $6a=8b\Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}\Rightarrow \frac{a}{3}=\frac{b}{4}$

Từ (1) và $(2)\Rightarrow \frac{(a+b)^2}{a^2+b^2}=\frac{(c+d)^2}{c^2+d^2}$

Câu 11. **(HSG 7 huyện Chương Mỹ 2021 - 2022; trường THCS Thanh Oai 2018 - 2019; trường Sương Bình 2017 - 2018)**

Chứng minh rằng: Nếu $2(x+y)=5(y+z)=3(z+x)$ thì $\frac{x-y}{4}=\frac{y-z}{5}$.

Lời giải

$2(x+y)=5(y+z)=3(z+x)$

$\Rightarrow \frac{2(x+y)}{30}=\frac{5(y+z)}{30}=\frac{3(z+x)}{30}\Rightarrow \frac{x+y}{15}=\frac{y+z}{6}=\frac{z+x}{10}$

Biến đổi: $\frac{z+x}{10}=\frac{y+z}{6}=\frac{x-y}{4}$ (1); $\frac{x+y}{15}=\frac{z+x}{10}=\frac{y-x}{5}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{x-y}{4}=\frac{y-z}{5}$.

Câu 12. **(HSG 7 trường Võ Thị Sáu; trường Hồng Dương, Thanh Oai 2022 - 2023; trường Điện Hồng, Thanh Oai; trường Phong Đạt 2018 - 2019; trường Thạch Bình 2017 – 2018)**

Cho $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}$. Chứng minh: $\left(\frac{a+b+c}{b+c+d}\right)^3=\frac{a}{d}$.

Lời giải

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có: $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}=\frac{a+b+c}{b+c+d}$.

Suy ra: $\left(\frac{a}{b}\right)^3=\left(\frac{b}{c}\right)^3=\left(\frac{c}{d}\right)^3=\left(\frac{a+b+c}{b+c+d}\right)^3=\frac{a}{b}.\frac{b}{c}.\frac{c}{d}=\frac{a}{d}$.

Vậy: $\left(\frac{a+b+c}{b+c+d}\right)^3=\frac{a}{d}$ (đpcm).

Câu 13. **(HSG 7 trường Lê Quý Đôn, huyện Hưng Hà 2022 - 2023; trường Hùng Thư; đề khảo sát huyện Thái Thụy 2017 - 2018; trường Tam Hưng 2016 - 2017)**

Cho a,b,c,d là 4 số khác 0, thỏa mãn điều kiện: $b^2=ac;c^2=bd;b^3+c^3+d^3\neq 0$

Chứng minh rằng: $\frac{a^3+b^3+c^3}{b^3+c^3+d^3}=\frac{a}{d}$

Lời giải

Từ giả thiết: $b^2=ac$; $c^2=bd\Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}$

Ta có: $\frac{a^3}{b^3}=\frac{b^3}{c^3}=\frac{c^3}{d^3}=\frac{a^3+b^3+c^3}{b^3+c^3+d^3}(1)$

Lại có: $\frac{a^3}{b^3}=\frac{a}{b}.\frac{a}{b}.\frac{a}{b}=\frac{a}{b}.\frac{b}{c}.\frac{c}{d}=\frac{a}{d}(2)$

Từ (1) và (2): $\Rightarrow \frac{a^3+b^3+c^3}{b^3+c^3+d^3}=\frac{a}{d}$

Câu 14. **(HSG 7 trường Kim Trung; trường Tân Tiến, huyện Hưng Hà 2022 - 2023)**

Cho $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}$. Chứng minh rằng: $\frac{a^3+b^3+c^3}{b^3+c^3+d^3}=\frac{a}{d}$.

Lời giải

Ta có: $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}\Rightarrow\left(\frac{a}{b}\right)^3=\left(\frac{b}{c}\right)^3=\left(\frac{c}{d}\right)^3\Rightarrow\frac{a^3}{b^3}=\frac{b^3}{c^3}=\frac{c^3}{d^3}$

Áp dụng tính chất của dãy tỷ số bằng nhau ta có:

$$\frac{a^3}{b^3}=\frac{b^3}{c^3}=\frac{c^3}{d^3}=\frac{a^3+b^3+c^3}{b^3+c^3+d^3}\quad(1)$$

Lại có: $\frac{a^3}{b^3}=\frac{a}{b}.\frac{a}{b}.\frac{a}{b}$ và $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}$

Do đó suy ra: $\frac{a^3}{b^3}=\frac{a}{b}.\frac{b}{c}.\frac{c}{d}=\frac{a}{d}\quad(2)$

Từ (1) và (2) suy ra: $\frac{a^3+b^3+c^3}{b^3+c^3+d^3}=\frac{a}{d}$.

Câu 15. **(HSG 7 huyện Hưng Hà, trường Trần Thủ Độ 2022 - 2023)**

Cho $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}$ (Giả sử các tỉ số đều có nghĩa).

Chứng minh rằng $\left(\frac{a+b+c}{b+c+d}\right)^3=\frac{a^3+b^3+c^3}{b^3+c^3+d^3}$.

Lời giải

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}=\frac{a+b+c}{b+c+d}\Rightarrow\frac{a^3}{b^3}=\frac{b^3}{c^3}=\frac{c^3}{d^3}=\left(\frac{a+b+c}{b+c+d}\right)^3\quad(1)$$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{a^3}{b^3}=\frac{b^3}{c^3}=\frac{c^3}{d^3}=\frac{a^3+b^3+c^3}{b^3+c^3+d^3}\quad(2)$$

Từ (1) và $(2) \Rightarrow \left(\dfrac{a+b+c}{b+c+d}\right)^3 = \dfrac{a^3+b^3+c^3}{b^3+c^3+d^3}$.

Câu 16. **(HSG 7 huyện Hoằng Hoá 2018 - 2019)**

Cho $b^2 = ac$, $c^2 = bd$. Với $b,c,d \neq 0$, $b+c \neq d$, $b^5+c^5 \neq d^5$.

Chứng minh: $\dfrac{a^3+b^3+c^3}{b^3+c^3-d^3} = \left(\dfrac{a+b-c}{b+c-d}\right)^3$.

Lời giải

Từ $b^2 = ac \Rightarrow \dfrac{a}{b} = \dfrac{b}{c}$ (1); $c^2 = bd \Rightarrow \dfrac{b}{c} = \dfrac{c}{d}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\dfrac{a}{b} = \dfrac{b}{c} = \dfrac{c}{d} = \dfrac{a+b-c}{b+c-d}$

$\Rightarrow \left(\dfrac{a+b-c}{b+c-d}\right)^3 = \dfrac{a^3}{b^3} = \dfrac{b^3}{c^3} = \dfrac{c^3}{d^3} = \dfrac{a^3+b^3-c^3}{b^3+c^3-d^3}$

Vậy $\dfrac{a^3+b^3+c^3}{b^3+c^3-d^3} = \left(\dfrac{a+b-c}{b+c-d}\right)^3$.

Câu 17. **(HSG 7 huyện Tam Dương, 2021 - 2022)**

Cho a,b,c,d là các số khác 0 thỏa mãn $b^2 = ac;\ c^2 = bd;\ b^3+27c^3+8d^3 \neq 0$.

Chứng minh rằng $\dfrac{a}{d} = \dfrac{a^3+27b^3+8c^3}{b^3+27c^3+8d^3}$.

Lời giải

Do $b^2 = ac \Rightarrow \dfrac{b}{c} = \dfrac{a}{b}(1)$ và $c^2 = bd \Rightarrow \dfrac{c}{d} = \dfrac{b}{c}(2)$

Từ (1) và (2) suy ra $\dfrac{a}{b} = \dfrac{b}{c} = \dfrac{c}{d} = \dfrac{3b}{3c} = \dfrac{2c}{2d}$

$\dfrac{a}{b}.\dfrac{b}{c}.\dfrac{c}{d} = \left(\dfrac{3b}{3c}\right)^3 = \left(\dfrac{2c}{2d}\right)^3$

Hay $\dfrac{a}{d} = \dfrac{a^3}{b^3} = \dfrac{27b^3}{27c^3} = \dfrac{8c^3}{8d^3}$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có

$\dfrac{a}{d} = \dfrac{a^3}{b^3} = \dfrac{27b^3}{27c^3} = \dfrac{8c^3}{8d^3} = \dfrac{a^3+27b^3+8c^3}{b^3+27c^3+8d^3}$

Vậy $\dfrac{a}{d} = \dfrac{a^3+27b^3+8c^3}{b^3+27c^3+8d^3}$

Câu 18. **(HSG 7 huyện Nguyệt Ấn, Tp Vinh 2022 - 2023)**

Cho $b^2 = ac; c^2 = bd$ (a,b,c,d và $12b+3c-5d \neq 0$).

Chứng minh: $\left(\frac{12a+3b-5c}{12b+3c-5d}\right)^3=\frac{a}{d}$

Lời giải

Ta có $b^2=ac\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$ (1) và $c^2=bd\Rightarrow\frac{b}{c}=\frac{c}{d}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}$.

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}=\frac{12a+3b-5c}{12b+3c-5d}\Rightarrow\left(\frac{a}{b}\right)^3=\left(\frac{12a+3b-5c}{12b+3c-5d}\right)^3 \quad (3)$$

Mặt khác: $\Rightarrow\left(\frac{a}{b}\right)^3=\frac{a}{b}.\frac{a}{b}.\frac{a}{b}=\frac{a}{b}.\frac{b}{c}.\frac{c}{d}=\frac{a}{d}$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra: $\left(\frac{12a+3b-5c}{12b+3c-5d}\right)^3=\frac{a}{d}$ (đpcm)

Câu 19. **(HSG 7 huyện Tam Điệp 2021 - 2022)**

Cho $a,b,c\neq0$ thỏa mãn $b^2=ac$. Chứng minh rằng: $\frac{a}{c}=\frac{(a+2022b)^2}{(b+2022c)^2}$

Lời giải

Ta có $b^2=ac\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{2022b}{2022c}$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{a}{b}=\frac{2022b}{2022c}=\frac{a+2022b}{b+2022c}\Rightarrow\frac{(a+2022b)^2}{(b+2022c)^2}=\left(\frac{a}{b}\right)^2=\frac{a}{b}.\frac{a}{b}=\frac{a}{b}.\frac{b}{c}=\frac{a}{c}$$

Vậy $\frac{a}{c}=\frac{(a+2022b)^2}{(b+2022c)^2}$.

Câu 20. **(HSG 7 huyện Tam Nông 2018 - 2019)**

Cho tỉ lệ thức $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ (giả thiết các tỉ lệ đều có nghĩa). Chứng minh rằng

a) $\frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d}$

b) $\left(\frac{a+b}{c+d}\right)^2=\frac{a^2+b^2}{c^2+d^2}$

Lời giải

a) Đặt $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k$ ta có: $a=kb$; $c=kd$

$$\frac{a}{a+b}=\frac{k.b}{k.b+b}=\frac{k.b}{(k+1)b}=\frac{k}{k+1}$$

$$\frac{c}{c+d}=\frac{kd}{kd+d}=\frac{kd}{(k+1)d}=\frac{k}{k+1}$$

Vậy $\frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d}$.

b) $\left(\frac{a+b}{c+d}\right)^2=\frac{(kb+b)^2}{(kd+d)^2}=\frac{(k+1)^2.b^2}{(k+1)^2.d^2}=\frac{b^2}{d^2}$ (1)

$$\frac{a^2+b^2}{c^2+d^2}=\frac{(kb)^2+b^2}{(kd)^2+d^2}=\frac{k^2b^2+b^2}{k^2d^2+d^2}=\frac{(k^2+1)b^2}{(k^2+1)d^2}=\frac{b^2}{d^2}\ (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\left(\frac{a+b}{c+d}\right)^2=\frac{a^2+b^2}{c^2+d^2}$.

Câu 21. **(HSG 7 trường Nguyễn Trãi, Thường Tín; trường Bích Hòa; trường Thiệu Vân; huyện Nam Đàn 2022 - 2023; trường Nguyễn Trung Trực, quận Tân Bình; trường Cù Chính Lan 2018 - 2019)**

Cho $c^2=ab.$ Chứng minh rằng:

a) $\frac{a^2+c^2}{b^2+c^2}=\frac{a}{b}$

b) $\frac{b^2-a^2}{a^2+c^2}=\frac{b-a}{a}$

Lời giải

a) Từ $\frac{a}{c}=\frac{c}{b}\Rightarrow\frac{a}{c}.\frac{c}{b}=\left(\frac{a}{c}\right)^2=\left(\frac{c}{b}\right)^2$

$\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{a^2}{c^2}=\frac{c^2}{b^2}=\frac{a^2+c^2}{c^2+b^2}\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{a^2+c^2}{b^2+c^2}$ (đpcm).

b) Áp dụng chứng minh phần a) ta có:

$$\frac{a}{c}=\frac{c}{b}\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{a^2+c^2}{b^2+c^2}\Rightarrow\frac{b}{a}=\frac{b^2+c^2}{a^2+c^2}\Rightarrow\frac{b}{a}-1=\frac{b^2+c^2}{a^2+c^2}-1$$

$$\Rightarrow\frac{b}{a}-\frac{a}{a}=\frac{b^2+c^2}{a^2+c^2}-\frac{a^2+c^2}{a^2+c^2}\Rightarrow\frac{b-a}{a}=\frac{b^2+c^2-a^2-c^2}{a^2+c^2}$$

$\Rightarrow\frac{b-a}{a}=\frac{b^2-a^2}{a^2+c^2}$ (điều phải chứng minh)

Câu 22. **(HSG 7 trường Nguyễn trực 2017 - 2018)**

Cho tỉ lệ thức $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. Chứng minh rằng:

a) $\dfrac{a^2-b^2}{ab}=\dfrac{c^2-d^2}{cd}$;

b) $\dfrac{(a+b)^2}{a^2+b^2}=\dfrac{(c+d)^2}{c^2+d^2}$

Lời giải

a) Đặt $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=k \Rightarrow a=bk;\ c=dk$

$VT=\dfrac{a^2-b^2}{ab}=\dfrac{b^2k^2-b^2}{b^2k}=\dfrac{k^2-1}{k}$ (1)

$VP=\dfrac{c^2-d^2}{cd}=\dfrac{d^2k^2-d^2}{d^2k}=\dfrac{k^2-1}{k}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \dfrac{a^2-b^2}{ab}=\dfrac{c^2-d^2}{cd}$

b) Ta có: $VT=\dfrac{(a+b)^2}{a^2+b^2}=\dfrac{(bk+b)^2}{b^2k^2+b^2}=\dfrac{b^2(k+1)^2}{b^2(k^2+1)}=\dfrac{(k+1)^2}{k^2+1}$ (1)

$VP=\dfrac{(c+d)^2}{c^2+d^2}=\dfrac{(dk+d)^2}{d^2k^2+d^2}=\dfrac{(k+1)^2}{k^2+1}$ (2)

Câu 23. **(HSG 7 huyện Bảo Thắng 2022 - 2023; trường Kỳ Xuân, Chương Mỹ; trường Tri Thức, Đồng Nai; huyện An Nhơn 2021 - 2022; trường Bảo Phương; trường Thanh Thùy 2018 - 2019)**

Cho $\dfrac{a}{c}=\dfrac{c}{b}$. Chứng minh rằng: $\dfrac{a^2+c^2}{b^2+c^2}=\dfrac{a}{b}$.

Lời giải

Ta có: $\dfrac{a}{c}=\dfrac{c}{b} \Rightarrow \dfrac{a^2}{c^2}=\dfrac{c^2}{b^2}$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có: $\dfrac{a^2}{c^2}=\dfrac{c^2}{b^2}=\dfrac{a^2+c^2}{c^2+b^2}$ (1)

Lại có: $\dfrac{a^2}{c^2}=\dfrac{a}{c}\cdot\dfrac{a}{c}=\dfrac{a}{c}\cdot\dfrac{c}{b}=\dfrac{a}{b}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\dfrac{a^2+c^2}{b^2+c^2}=\dfrac{a}{b}$.

Câu 24. **(HSG 7 huyện Thanh Oai 2014 - 2015)**

Cho $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ với $b\neq 0;d\neq 0$. Chứng minh rằng $\dfrac{a^2+c^2}{b^2+d^2}=\dfrac{ac}{bd}$.

Lời giải

Ta có $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow \frac{a^2}{b^2}=\frac{c^2}{d^2}=\frac{a^2+c^2}{b^2+d^2}$ (1)

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow \frac{a^2}{b^2}=\frac{c^2}{d^2}=\frac{ac}{bd}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{a^2+c^2}{b^2+d^2}=\frac{ac}{bd}$.

Câu 25. **(HSG 7 huyện Nga Sơn 2016 - 2017)**

Cho tỉ lệ thức $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. Chứng minh rằng: $\frac{ab}{cd}=\frac{(a+b)^2}{(c+d)^2}$

Lời giải

Ta có: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow \frac{a}{c}=\frac{b}{d}=\frac{a+b}{c+d}$

$\Rightarrow \frac{a.b}{c.d}=\frac{a+b}{c+d}.\frac{a+b}{c+d}\Rightarrow \frac{a.b}{c.d}=\frac{(a+b)^2}{(c+d)^2}$

Câu 26. **(HSG 7 Nga Sơn, Thanh Hóa năm 2022 - 2023)**

Cho $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. Chứng minh rằng $\frac{a\cdot c}{b\cdot d}=\frac{2022a^2+2023c^2}{2022b^2+2023d^2}$.

Lời giải

Ta có $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow \frac{a}{b}.\frac{c}{d}=\left(\frac{a}{b}\right)^2=\left(\frac{c}{d}\right)^2\Rightarrow \frac{a\cdot c}{b\cdot d}=\frac{a^2}{b^2}=\frac{c^2}{d^2}$

$\Rightarrow \frac{a\cdot c}{b\cdot d}=\frac{2022a^2}{2022b^2}=\frac{2023c^2}{2023d^2}=\frac{2022a^2+2023c^2}{2022b^2+2023d^2}$

Vậy $\frac{a\cdot c}{b\cdot d}=\frac{2022a^2+2023c^2}{2022b^2+2023d^2}$.

Câu 27. **(HSG 7 Hưng Hà năm 2022 - 2023; trường Phương Chung 2018 - 2019)**

Cho tỉ lệ thức: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, với điều kiện mẫu thức xác định.

Chứng minh rằng: $\frac{2a^2-3ab+5b^2}{2b^2+3ab}=\frac{2c^2-3cd+5d^2}{2d^2+3cd}$.

Lời giải

Đặt $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k$ ta có $a=bk,\ c=dk$

Thay $a=bk,\ c=dk$ ta có:

$$\frac{2a^2-3ab+5b^2}{2b^2+3ab}=\frac{2(bk)^2-3(bk).b+5b^2}{2b^2+3bk.b}=\frac{b^2.(2k^2-3k+5)}{b^2(2+3k)}=\frac{2k^2-3k+5}{2+3k}$$

$$\frac{2c^2-3cd+5d^2}{2d^2+3cd}=\frac{2(dk)^2-3(dk)d+5d^2}{2d^2+3(dk)d}=\frac{d^2(2k^2-3k+5)}{d^2.(2+3k)}=\frac{2k^2-3k+5}{2+3k}$$

Vậy $\frac{2a^2-3ab+5b^2}{2b^2+3ab}=\frac{2c^2-3cd+5d^2}{2d^2+3cd}$

Câu 28. **(HSG 7 trường Hoàng Quyên, huyện Phủ Lý; huyện Sơn Tây 2018 - 2019)**

Cho $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. Chứng minh rằng: $(a+2c).(b+d)=(a+c).(b+2d)$

Lời giải

Vì $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{2c}{2d}=\frac{a+2c}{b+2d}$ (1)

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow\frac{a+c}{b+d}=\frac{a+2c}{b+2d}\Rightarrow(a+2c).(b+d)=(a+c).(b+2d)$

Câu 29. **(HSG 7 huyện Hiệp Hoà , năm học 2022 – 2023)**

Cho các số thực a,b,c,d dương khác nhau thỏa mãn $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

Chứng minh $\frac{a^2-c^2}{b^2-d^2}=\frac{3a^2+2c^2}{3b^2+2d^2}$

Lời giải

Ta có: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a^2}{b^2}=\frac{c^2}{d^2}$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có

$$\frac{a^2}{b^2}=\frac{c^2}{d^2}=\frac{a^2-c^2}{b^2-d^2}=\frac{3a^2+2c^2}{3b^2+2d^2}$$

$$\frac{a^2-c^2}{b^2-d^2}=\frac{3a^2+2c^2}{3b^2+2d^2}$$

Do đó:

Vậy: $\frac{a^2-c^2}{b^2-d^2}=\frac{3a^2+2c^2}{3b^2+2d^2}$

Câu 30. **(HSG 7 huyện Hưng Hà, trường Bùi Hữu Diên 2022 - 2023)**

Cho tỉ lệ thức $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, hãy suy ra tỉ lệ thức $\frac{7a^2+8ab}{13a^2-6b^2}=\frac{7c^2+8cd}{13c^2-6d^2}$.

Lời giải

Ta có $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a}{c}=\frac{b}{d}\Rightarrow\frac{a^2}{c^2}=\frac{b^2}{d^2}$

Lại có $\frac{a^2}{c^2}=\frac{a}{c}\cdot\frac{a}{c}=\frac{a}{c}\cdot\frac{b}{d}=\frac{ab}{cd}$

Do đó $\frac{a^2}{c^2}=\frac{b^2}{d^2}=\frac{ab}{cd}$

Suy ra $\frac{a^2}{c^2}=\frac{b^2}{d^2}=\frac{ab}{cd}=\frac{7a^2}{7c^2}=\frac{13a^2}{13c^2}=\frac{6b^2}{6d^2}=\frac{8ab}{8cd}$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có

$$\frac{7a^2}{7c^2}=\frac{13a^2}{13c^2}=\frac{6b^2}{6d^2}=\frac{8ab}{8cd}=\frac{7a^2+8ab}{7c^2+8cd}=\frac{13a^2-6b^2}{13c^2-6d^2}$$

Từ $\frac{7a^2+8ab}{7c^2+8cd}=\frac{13a^2-6b^2}{13c^2-6d^2}\Rightarrow\frac{7a^2+8ab}{13a^2-6b^2}=\frac{7c^2+8cd}{13c^2-6d^2}$ (đpcm).

Câu 31. **(HSG 7 huyện Bát Xát 2022 - 2023)**

Cho $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. Chứng minh rằng: $\frac{7a^2+3ab}{11a^2-8b^2}=\frac{7c^2+3cd}{11c^2-8d^2}$.

Lời giải

Từ $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$

$$\Rightarrow\frac{a^2}{c^2}=\frac{b^2}{d^2}=\frac{7a^2}{7c^2}=\frac{b}{d}\cdot\frac{b}{d}=\frac{b}{d}\cdot\frac{a}{c}=\frac{ab}{dc}=\frac{3ab}{3cd}=\frac{7a^2+3ab}{7c^2+3cd}\quad(1)$$

Lại có: $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}\Rightarrow\frac{a^2}{c^2}=\frac{b^2}{d^2}=\frac{11a^2}{11c^2}=\frac{8b^2}{8d^2}=\frac{11a^2-8b^2}{11c^2-8d^2}\quad(2)$

Từ (1) và $(2)\Rightarrow\frac{7a^2+3ab}{7c^2+3cd}=\frac{11a^2-8b^2}{11c^2-8d^2}\Rightarrow\frac{7a^2+3ab}{11a^2-8b^2}=\frac{7c^2+3cd}{11c^2-8d^2}$ (đpcm)

Câu 32. **(HSG 7 huyện Nghĩa đàn, năm học 2022 - 2023)**

Cho $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ (với a, b, c, d khác 0). Chứng minh rằng: $\left(\frac{a+b}{c+d}\right)^2=\frac{a^2+b^2}{c^2+d^2}$

Lời giải

Cho $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ (với a, b, c, d khác 0). Chứng minh rằng: $\left(\frac{a+b}{c+d}\right)^2=\frac{a^2+b^2}{c^2+d^2}$

Đặt $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}=k\Rightarrow a=ck$; $b=dk$ (*)

Lần lượt thay (*) vào vế trái và vế phải của đẳng thức cần chứng minh, ta có:

+) $\left(\frac{a+b}{c+d}\right)^2=\left(\frac{ck+dk}{c+d}\right)^2=\left(\frac{(c+d)k}{c+d}\right)^2=k^2$ (1)

+) $\frac{a^2+b^2}{c^2+d^2}=\frac{(ck)^2+(dk)^2}{c^2+d^2}=\frac{(c^2+d^2)k^2}{c^2+d^2}=k^2$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\left(\frac{a+b}{c+d}\right)^2=\frac{a^2+b^2}{c^2+d^2}$ (đpcm)

Câu 33. **(HSG 7 trường Phú trường; huyện Thanh Oai 2022 - 2023; huyện Ứng Hòa 2021 - 2022; trường Kim An 2017 - 2018)**

Cho $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. Chứng minh rằng: $\frac{3a^6+c^6}{3b^6+d^6}=\frac{(a+c)^6}{(b+d)^6}$ (với $b+d\neq 0$).

Lời giải

Với $b+d\neq 0$ ta có:

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$

$\Rightarrow\left(\frac{a}{b}\right)^6=\left(\frac{c}{d}\right)^6=\left(\frac{a+c}{b+d}\right)^6\Rightarrow\frac{a^6}{b^6}=\frac{c^6}{d^6}=\frac{(a+c)^6}{(b+d)^6}\Rightarrow\frac{3a^6}{3b^6}=\frac{c^6}{d^6}=\frac{(a+c)^6}{(b+d)^6}$

$\Rightarrow\frac{3a^6+c^6}{3b^6+d^6}=\frac{(a+c)^6}{(b+d)^6}$ (đpcm)

Câu 34. **(HSG 7 trường Vạn Long; trường Thống Nhất 2022 - 2023; trường Tôn Đức Thắng 2018 - 2019; trường Trần Hưng Đạo; trường Trường Sa 2017-2018; trường Nguyễn Khuyến 2015-2016)**

Cho bốn số dương a,b,c,d thỏa điều kiện $a+c=2b$ và $c(b+d)=2bd.$

Chứng minh $\left(\frac{a+c}{b+d}\right)^8=\frac{a^8+b^8}{b^8+d^8}$

Lời giải

Từ $c(b+d)=2bd\Rightarrow b+d=\frac{2bd}{c}$

Mà $a+c=2b$

$\frac{a+c}{b+d}=\frac{2b}{\frac{2bd}{c}}=\frac{2bc}{2bd}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a+c}{b+d}=\frac{c}{d}$

nên

$\Rightarrow d(a+c)=c(b+d)\Rightarrow ad+cd=bc+cd\Rightarrow ad=bc$

Vì $a,b,c,d>0$ nên $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

$\Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$

$\Rightarrow \left(\frac{a+c}{b+d}\right)^8=\frac{a^8}{b^8}=\frac{c^8}{d^8}=\frac{a^8+c^8}{b^8+d^8}$

Câu 35. **(HSG 7 huyện Phủ Lý, trường Hoàng Quyên 2018 - 2019; trường Tân Ước, Thanh Oai 2013 - 2014)**

Cho $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. Chứng minh rằng: $\frac{a^{1005}+b^{1005}}{c^{1005}+d^{1005}}=\frac{(a+b)^{1005}}{(c+d)^{1005}}$

Lời giải

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow \frac{a}{c}=\frac{b}{d}=\frac{a+b}{c+d}\Rightarrow \left(\frac{a}{c}\right)^{1005}=\left(\frac{b}{d}\right)^{1005}=\left(\frac{a+b}{c+d}\right)^{1005}$

$\Rightarrow \frac{a^{1005}}{c^{1005}}=\frac{b^{1005}}{d^{1005}}=\frac{(a+b)^{1005}}{(c+d)^{1005}}$ (theo tính chất Dãy tỉ số bằng nhau) (1)

Mà $\frac{a^{1005}}{c^{1005}}=\frac{b^{1005}}{d^{1005}}=\frac{a^{1005}+b^{1005}}{c^{1005}+d^{1005}}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{a^{1005}+b^{1005}}{c^{1005}+d^{1005}}=\frac{(a+b)^{1005}}{(c+d)^{1005}}$ (đpcm)

Câu 36. **(HSG 7 Cẩm Thủy, Thanh Hóa năm 2022 - 2023; trường Ngô Gia Tự, huyện Phù Cát 2017 - 2018; trường Nguyễn Du 2016 - 2017)**

Cho tỉ lệ thức $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ với $a\neq 0,b\neq 0,c\neq 0,d\neq 0,a\neq \pm b,c\neq \pm d$.

Chứng minh: $\left(\frac{a-b}{c-d}\right)^{2013}=\frac{a^{2013}+b^{2013}}{c^{2013}+d^{2013}}$

Lời giải

Ta có: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a-c}{b-d}\Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^{2013}=\left(\frac{c}{d}\right)^{2013}=\left(\frac{a-c}{b-d}\right)^{2013}$ (1)

Mà: $\left(\frac{a}{b}\right)^{2013}=\left(\frac{c}{d}\right)^{2013}=\frac{a^{2013}}{b^{2013}}=\frac{c^{2013}}{d^{2013}}=\frac{a^{2013}+c^{2013}}{b^{2013}+d^{2013}}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \left(\frac{a-b}{c-d}\right)^{2013}=\frac{a^{2013}+b^{2013}}{c^{2013}+d^{2013}}$ (đpcm)

Câu 37. **(HSG TP LÀO CAI 2022 - 2023)**

Cho $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ với $b,d\neq 0;c\neq -d$. Chứng minh $\frac{a^{2022}+b^{2022}}{c^{2022}+d^{2022}}=\frac{(a+b)^{2022}}{(c+d)^{2022}}$

Lời giải

Ta có: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow \frac{a}{c}=\frac{b}{d}=\frac{a+b}{c+d}\Rightarrow \frac{a^{2022}}{c^{2022}}=\frac{b^{2022}}{d^{2022}}=\frac{(a+b)^{2022}}{(c+d)^{2022}}$ (1)

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow \frac{a}{c}=\frac{b}{d}\Rightarrow \frac{a^{2022}}{c^{2022}}=\frac{b^{2022}}{d^{2022}}=\frac{a^{2022}+b^{2022}}{c^{2022}+d^{2022}}$ (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra được $\frac{a^{2022}+b^{2022}}{c^{2022}+d^{2022}}=\frac{(a+b)^{2022}}{(c+d)^{2022}}$ điều phải chứng minh.

Câu 38. **(HSG 7 huyện Gia viễn, tỉnh Ninh Binh, năm học 2022 - 2023)**

Cho $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, với $b\neq 0,d\neq 0;c\neq d.$ Chứng minh rằng $\frac{(a-b)^{2023}}{a^{2023}-b^{2023}}=\frac{(c-d)^{2023}}{c^{2023}-d^{2023}}.$

Lời giải

Với $b\neq 0,d\neq 0;c\neq d,$ thì

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow \frac{a}{c}=\frac{b}{d}=\frac{a-b}{c-d}$ (1)

$\Rightarrow \frac{a^{2023}}{c^{2023}}=\frac{b^{2023}}{d^{2023}}=\frac{(a-b)^{2023}}{(c-d)^{2023}}$ (2)

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$\frac{a^{2023}}{c^{2023}}=\frac{b^{2023}}{d^{2023}}=\frac{(a-b)^{2023}}{(c-d)^{2023}}=\frac{a^{2023}-b^{2023}}{c^{2023}-d^{2023}}$

$\Rightarrow \frac{(a-b)^{2023}}{a^{2023}-b^{2023}}=\frac{(c-d)^{2023}}{c^{2023}-d^{2023}}$

Câu 39. **(HSG 7 huyện Kinh Môn 2018 - 2019)**

Cho các số dương $a,b,c,d\ (c\neq d)$ và $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}.$

CMR: $\frac{(a^{2018}+b^{2018})^{2019}}{(c^{2018}+d^{2018})^{2019}}=\frac{(a^{2019}-b^{2019})^{2018}}{(c^{2019}-d^{2019})^{2018}}$

Lời giải

Với $a,b,c,d>0$, $c\neq d$ ta có: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow \frac{a}{c}=\frac{b}{d}\Rightarrow \frac{a^{2018}}{c^{2018}}=\frac{b^{2018}}{d^{2018}}$

Do đó $\frac{a^{2018}}{c^{2018}}=\frac{b^{2018}}{d^{2018}}=\frac{a^{2018}+b^{2018}}{c^{2018}+d^{2018}}$

$$\Rightarrow \frac{\left(a^{2018}\right)^{2019}}{\left(c^{2018}\right)^{2019}}=\frac{\left(a^{2018}+b^{2018}\right)^{2019}}{\left(c^{2018}+d^{2018}\right)^{2019}} \quad (1)$$

Lại có: $a,b,c,d>0,c\neq d,$ ta có:

$$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}\Rightarrow \frac{a^{2019}}{c^{2019}}=\frac{b^{2019}}{d^{2019}}=\frac{a^{2019}-b^{2019}}{c^{2019}-d^{2019}}$$

$$\Rightarrow \frac{\left(a^{2019}\right)^{2018}}{\left(c^{2019}\right)^{2018}}=\frac{\left(a^{2019}-b^{2019}\right)^{2018}}{\left(c^{2019}-d^{2019}\right)^{2018}} \quad (2)$$

$$\frac{\left(a^{2018}\right)^{2019}}{\left(c^{2018}\right)^{2019}}=\frac{\left(a^{2019}\right)^{2018}}{\left(c^{2019}\right)^{2018}}=\frac{a^{2019.2018}}{c^{2019.2018}} \quad (3)$$

Mà

Từ (1), (2), (3) $\Rightarrow \frac{\left(a^{2018}+b^{2018}\right)^{2019}}{\left(c^{2018}+d^{2018}\right)^{2019}}=\frac{\left(a^{2019}-b^{2019}\right)^{2018}}{\left(c^{2019}-d^{2019}\right)^{2018}}$.

Câu 40. **(HSG 7 huyện, tỉnh, trường Cao Dương – đề Olympic. 2016 - 2017)**

Cho các số a,b,c,d với $a+b+c+d\neq 0$ thỏa mãn $\frac{b+c+d}{a}=\frac{c+d+a}{b}=\frac{a+b+d}{c}=\frac{a+b+c}{d}=k$. Tính giá trị của k.

Lời giải

Với $a+b+c+d\neq 0$ theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{b+c+d}{a}=\frac{c+d+a}{b}=\frac{a+b+d}{c}=\frac{a+b+c}{d}=\frac{3a+3b+3c+3d}{a+b+c+d}=\frac{3(a+b+c+d)}{a+b+c+d}=3$$

$\Rightarrow k=3$

Câu 41. **(HSG 7 huyện Cát Tiên 2018 - 2019; huyện Cẩm Khê 2017 - 2018; huyện Tân Kỳ 2015 - 2016)**

Cho các số thực $a;b;c;d;e$ khác 0 thỏa mãn $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}=\frac{d}{e}$. Chứng minh rằng: $\frac{2a^4+3b^4+4c^4+5d^4}{2b^4+3c^4+4d^4+5e^4}=\frac{a}{e}$

Lời giải

Ta có $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}=\frac{d}{e}\Rightarrow \frac{a}{b}.\frac{b}{c}.\frac{c}{d}.\frac{d}{e}=\frac{a}{e}$

Ta lại có: $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}=\frac{d}{e}$

$$\Rightarrow \frac{a}{b}.\frac{b}{c}.\frac{c}{d}.\frac{d}{e}=\frac{a^4}{b^4}=\frac{b^4}{c^4}=\frac{c^4}{d^4}=\frac{d^4}{e^4}$$

$$=\frac{2a^4}{2b^4}=\frac{3b^4}{3c^4}=\frac{4c^4}{4d^4}=\frac{5d^4}{5e^4}=\frac{2a^4+3b^4+4c^4+5d^4}{2b^4+3c^4+4d^4+5e^4}$$

Vậy suy ra $\frac{2a^4+3b^4+4c^4+5d^4}{2b^4+3c^4+4d^4+5e^4}=\frac{a}{e}$ (ĐPCM).

Câu 42. **(HSG 7 trường Thiệu Vũ, huyện Thiệu Hóa; huyện Quỳnh Phụ 2022 - 2023; huyện Tân Kỳ 2021 - 2022; huyện Hoài Nhơn 2018 - 2019; huyện Thanh Hà 2016 - 2017)**

Cho $\frac{3x-2y}{4}=\frac{2z-4x}{3}=\frac{4y-3z}{2}$. Chứng minh $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}$.

Lời giải

Ta có $\frac{3x-2y}{4}=\frac{2z-4x}{3}=\frac{4y-3z}{2}$

$$=\frac{12x-8y}{16}=\frac{6z-12x}{9}=\frac{8y-6z}{4}=\frac{12x-8y+6z-12x+8y-6z}{16+9+4}=0.$$

$$\Rightarrow\begin{cases}3x-2y=0\\2z-4x=0\\4y-3z=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3x=2y\\2z=4x\\4y=3z\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{x}{2}=\frac{y}{3}\\\frac{x}{2}=\frac{z}{4}\\\frac{y}{3}=\frac{z}{4}\end{cases}\Rightarrow\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}.$$

Vậy: $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}$

Câu 43. **(HSG 7 trường Lê Hồng Phong 2018 - 2019)**

Biết rằng: $\frac{bz-cy}{a}=\frac{cx-az}{b}=\frac{ay-bx}{c}$. Chứng minh: $x:y:z=a:b:c$

Lời giải

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{bz-cy}{a}=\frac{cx-az}{b}=\frac{ay-bx}{c}=\frac{abz-acy}{a^2}=\frac{bcx-abz}{b^2}=\frac{acy-bcz}{c^2}$$

$$=\frac{abz-acy+bcx-abz+acy-bcx}{a^2+b^2+c^2}=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}bz-cy=0\\cx-az=0\\ay-bx=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}bz=cy\\cx=az\\ay=bx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{z}{c}=\frac{y}{b}\\\frac{x}{a}=\frac{z}{c}\\\frac{y}{b}=\frac{x}{a}\end{cases}\Rightarrow\frac{z}{c}=\frac{y}{b}=\frac{x}{a}$$

$\Rightarrow x:y:z=a:b:c$ (đpcm)

Câu 44. **(HSG 7 huyện Đông Hưng năm 2022 - 2023; thị xã Sầm Sơn 2017 - 2018)**

Biết: $\frac{bz-cy}{a}=\frac{cx-az}{b}=\frac{ay-bx}{c}\ (a,b,c\neq 0)$. Chứng minh rằng: $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$.

Lời giải

Từ giả thiết ta có: $a,\ b,\ c\neq 0\Rightarrow a^2+b^2+c^2\neq 0$ và

$$\frac{bz-cy}{a}=\frac{cx-az}{b}=\frac{ay-bx}{c}=\frac{a(bz-cy)}{a^2}=\frac{b(cx-az)}{b^2}=\frac{c(ay-bx)}{c^2}.$$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{a(bz-cy)}{a^2}=\frac{b(cx-az)}{b^2}=\frac{c(ay-bx)}{c^2}=\frac{0}{a^2+b^2+c^2}=0.$$

Suy ra: $bz-cy=0\Rightarrow\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$.

Tương tự ta có: $\frac{z}{c}=\frac{x}{a};\ \frac{x}{a}=\frac{y}{b}$.

Suy ra: $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$.

Câu 45. **(HSG 7 TP Vũng Tàu, 2021 - 2022)**

Cho $\frac{bz-cy}{a}=\frac{cx-az}{b}=\frac{ay-bx}{c}$. Chứng tỏ rằng $\frac{x^{2022}+y^{2022}+z^{2022}}{a^{2022}+b^{2022}+c^{2022}}=\frac{(x+y+z)^{2022}}{(a+b+c)^{2022}}$

Lời giải

Ta có $\frac{bz-cy}{a}=\frac{cx-az}{b}=\frac{ay-bx}{c}$

$$\Rightarrow\frac{abz-acy}{a^2}=\frac{bcx-baz}{b^2}=\frac{cay-cbx}{c^2}=\frac{abz-acy+bcx-baz+cay-cb}{a^2+b^2+c^2}=0$$

$$\Rightarrow bz-cy=cx-az=ay-bx=0$$

$$\Rightarrow\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=\frac{x+y+z}{a+b+c}$$

$$\Rightarrow\left(\frac{x}{a}\right)^{2022}=\left(\frac{y}{b}\right)^{2022}=\left(\frac{z}{c}\right)^{2022}=\left(\frac{x+y+z}{a+b+c}\right)^{2022}$$

$$\Rightarrow\frac{x^{2022}+y^{2022}+z^{2022}}{a^{2022}+b^{2022}+c^{2022}}=\frac{(x+y+z)^{2022}}{(a+b+c)^{2022}}$$

Vậy $\frac{x^{2022}+y^{2022}+z^{2022}}{a^{2022}+b^{2022}+c^{2022}}=\frac{(x+y+z)^{2022}}{(a+b+c)^{2022}}$

Câu 46. **(HSG 7 huyện Thanh Ba, 2021 - 2022)**

Cho 3 số x,y,z thoả mãn: $\frac{x}{2020}=\frac{y}{2021}=\frac{z}{2022}$.

Chứng minh rằng $(x-z)^3=8(x-y)^2.(y-z)$

Lời giải

$\frac{x}{2020}=\frac{y}{2021}=\frac{z}{2022}\Rightarrow\frac{x-z}{2020-2022}=\frac{x-y}{2020-2021}=\frac{y-z}{2021-2022}$

$\Rightarrow\frac{x-z}{-2}=\frac{x-y}{-1}=\frac{y-z}{-1}$

$\Rightarrow\left(\frac{x-z}{-2}\right)^3=\left(\frac{x-y}{-1}\right)^3$

$\Rightarrow\left(\frac{x-z}{-2}\right)^3=\left(\frac{x-y}{-1}\right)^2.\left(\frac{y-z}{-1}\right)$ (vì $\frac{x-y}{-1}=\frac{y-z}{-1}$)

$\Rightarrow\frac{(x-z)^3}{(-2)^3}=\frac{(x-y)^2}{(-1)^2}.\frac{y-z}{-1}$

$\Rightarrow(x-z)^3=8(x-y)^2(y-z)$ (đpcm)

Câu 47. **(HSG 7 Thanh Hóa lần 2 năm 2022 - 2023)**

Cho các số a, b, c thỏa mãn: $\frac{a}{2021}=\frac{b}{2020}=\frac{c}{2019}$.

Chứng minh rằng: $4(a-b)(b-c)=(a-c)^2$.

Lời giải

Áp dụng tính chất dãy tỉ bằng nhau, ta có:

$\frac{a}{2021}=\frac{b}{2020}=\frac{c}{2019}=\frac{a-b}{1}=\frac{b-c}{1}=\frac{a-c}{2}$.

Suy ra: $2(a-b)=a-c$ và $2(b-c)=a-c$.

Nhân vế với vế ta có: $4(a-b)(b-c)=(a-c)^2$ (đpcm).

Câu 48. **(HSG 7 trường Thái Phương, huyện Hưng Hà năm học 2022 - 2023)**

Cho $\frac{x}{2022}=\frac{y}{2023}=\frac{z}{2024}$. Chứng minh rằng: $4(x-y)(y-z)=(z-x)^2$

Lời giải

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$\frac{x}{2020}=\frac{y}{2021}=\frac{z}{2022}=\frac{x-y}{-1}=\frac{y-z}{-1}=\frac{z-x}{2}$

$\Rightarrow\frac{(x-y)^2}{1}=\frac{(z-x)^2}{4}$

$\Rightarrow 4(x-y)^2=(z-x)^2$

$\Rightarrow 4(x-y)(x-y)=(z-x)^2$

Mà $\frac{x-y}{-1}=\frac{y-z}{-1}\Rightarrow (x-y)=(y-z)$

Do đó $4(x-y)(y-z)=(z-x)^2$

Vậy $4(x-y)(y-z)=(z-x)^2$ (đpcm)

Câu 49. **(HSG 7 huyện Hưng Hà năm 2022 - 2023)**

Cho ba số thực a,b,c biết: $\frac{a}{2021}=\frac{b}{2022}=\frac{c}{2023}$.

Chứng minh rằng: $4(a-b)(b-c)=(c-a)^2$.

Lời giải

Theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$\frac{a}{2021}=\frac{b}{2022}=\frac{c}{2023}=\frac{a-b}{-1}=\frac{b-c}{-1}=\frac{c-a}{2}$.

$\Rightarrow \frac{(a-b)^2}{1}=\frac{(c-a)^2}{4}$

$\Rightarrow 4(a-b)^2=(c-a)^2\Rightarrow 4(a-b)(a-b)=(c-a)^2$. (1)

Mà $\frac{a-b}{-1}=\frac{b-c}{-1}\Rightarrow (a-b)=(b-c)$

nên từ (1) suy ra: $4(a-b)(b-c)=(c-a)^2$.

Vậy $4(a-b)(b-c)=(c-a)^2$ (đpcm).

Câu 50. **(HSG 7 huyện Lâm Thao 2022 - 2023)**

Cho 3 số a,b,c thỏa mãn $\frac{a}{2021}=\frac{b}{2022}=\frac{c}{2023}$.

Chứng minh rằng $(a-c)^3=8(a-b)^2.(b-c)$

Lời giải

Ta có $\frac{a}{2021}=\frac{b}{2022}=\frac{c}{2023}$

$\Rightarrow \frac{a-c}{2021-2023}=\frac{a-b}{2021-2022}=\frac{b-c}{2022-2023}$

$\Rightarrow \frac{a-c}{-2}=\frac{a-b}{-1}=\frac{b-c}{-1}$

$\Rightarrow \left(\frac{a-c}{-2}\right)^3=\left(\frac{a-b}{-1}\right)^2.\left(\frac{b-c}{-1}\right)$

$$\Rightarrow \frac{(a-c)^3}{(-2)^3}=\frac{(a-b)^2}{(-1)^2}.\left(\frac{b-c}{-1}\right)$$

$$\Rightarrow (a-c)^3=8(a-b)^2(b-c)$$

Câu 51. **(HSG 7 Hưng Hà năm 2022 - 2023; huyện Lục Ngạn 2020 - 2021; huyện Việt Yên 2017 - 2018)**

Cho dãy tỉ số bằng nhau: $\frac{ab+ac}{2}=\frac{bc+ba}{3}=\frac{ca+cb}{4}$. Chứng minh rằng: $\frac{a}{3}=\frac{b}{5}=\frac{c}{15}$

Lời giải

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{ab+ac}{2}=\frac{bc+ba}{3}=\frac{ca+cb}{4}=\frac{ab+ac-(bc+ba)+ca+cb}{2-3+4}$$

$$=\frac{ab+ac+bc+ba-(ca+cb)}{2+3-4}=\frac{-(ab+ac)+bc+ba+ca+cb}{-2+3+4}=\frac{2ac}{3}=\frac{2ab}{1}=\frac{2bc}{5}$$

Từ $\frac{2ac}{3}=\frac{2ab}{1}\Rightarrow \frac{c}{3}=b\Rightarrow \frac{c}{15}=\frac{b}{5}$

$$\frac{2ac}{3}=\frac{2bc}{5}\Rightarrow \frac{a}{3}=\frac{b}{5}$$

Do đó $\frac{a}{3}=\frac{b}{5}=\frac{c}{15}$. (đpcm)

Câu 52. **(HSG 7 trường Trường Yên, huyện Chương Mỹ; huyện Hương Sơn; huyện Tam Dương 2022 - 2023; huyện Thái Thụy; huyện Như Thanh 2021 - 2022; huyện Tân Tạo; huyện Phú Khánh 2018 - 2019; huyện Sông Lô 2017 - 2018; huyện Minh An 2016 - 2017)**

Cho dãy tỉ số bằng nhau $\frac{2bz-3cy}{a}=\frac{3cx-az}{2b}=\frac{ay-2bx}{3c}$ (với $a,b,c\neq 0$).

Chứng minh $\frac{x}{a}=\frac{y}{2b}=\frac{z}{3c}$.

Lời giải

Ta có: $\frac{2bz-3cy}{a}=\frac{3cx-az}{2b}=\frac{ay-2bx}{3c}$ và $a,b,c\neq 0$

$$=\frac{a(2bz-3cy)}{a.a}=\frac{2b(3cx-az)}{2b.2b}=\frac{3c(ay-2bx)}{3c.3c}$$

$$=\frac{2abz-3acy}{a^2}=\frac{6bcx-2abz}{4b^2}=\frac{3acy-6bcx}{9c^2}$$

$$=\frac{2abz-3acy+6bcx-2abz+3acy-6bcx}{a^2+4b^2+9c^2}=0$$

(Vì $a,b,c\neq 0$ nên $a^2+4b^2+9c^2\neq 0$)

* $\frac{2bz-3cy}{a}=0 \Rightarrow 2bz-3cy=0 \Rightarrow \frac{y}{2b}=\frac{z}{3c}$ (1)

* $\frac{3cx-az}{2b}=0 \Rightarrow 3cx-az=0 \Rightarrow \frac{x}{a}=\frac{z}{3c}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{x}{a}=\frac{y}{2b}=\frac{z}{3c}$ (đpcm).

Câu 53. **(HSG 7 huyện Cẩm Khê năm 2022 - 2023; huyện Thái Thụy 2018 - 2019)**

Cho x, y, z, a, b, c thỏa mãn $\frac{x}{a+2b+c}=\frac{y}{2a+b-c}=\frac{z}{4a-4b+c}$

Chứng minh rằng: $\frac{a}{x+2y+z}=\frac{b}{2x+y-z}=\frac{c}{4x-4y+z}$ (với điều kiện các mẫu thức khác 0)

Lời giải

Theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$\frac{x}{a+2b+c}=\frac{2y}{4a+2b-2c}=\frac{z}{4a-4b+c}=\frac{x+2y+z}{9a}$ (1)

$\frac{2x}{2a+4b+2c}=\frac{y}{2a+b-c}=\frac{z}{4a-4b+c}=\frac{2x+y-z}{9b}$ (2)

$\frac{4x}{4a+8b+4c}=\frac{4y}{8a+4b-4c}=\frac{z}{4a-4b+c}=\frac{4x-4y+z}{9c}$ (3)

Từ (1),(2),(3) ta có:

$\frac{x+2y+z}{9a}=\frac{2x+y-z}{9b}=\frac{4x-4y+z}{9c}$ hay $\frac{9a}{x+2y+z}=\frac{9b}{2x+y-z}=\frac{9c}{4x-4y+z}$

Vậy $\frac{a}{x+2y+z}=\frac{b}{2x+y-z}=\frac{c}{4x-4y+z}$ (ĐPCM).

Câu 54. **(HSG 7 huyện Hoằng Hóa – Thanh Hóa năm 2022 - 2023)**

Cho tỉ lệ thức: $\frac{a^2+b^2}{c^2+d^2}=\frac{ab}{cd}$. Chứng minh rằng: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

Lời giải

Ta có: $\frac{a^2+b^2}{c^2+d^2}=\frac{ab}{cd}=\frac{a^2+ab+ab+b^2}{c^2+cd+cd+d^2}=\frac{(a+b)^2}{(c+d)^2}$

$\Rightarrow \frac{ab}{cd}=\frac{(a+b)^2}{(c+d)^2} \Rightarrow \frac{c(a+b)}{a(c+d)}=\frac{b(c+d)}{d(a+b)} \Rightarrow \frac{ca+cb}{ca+ad}=\frac{bc+bd}{da+db}=\frac{ca-bd}{ca-bd}=1$

$\Rightarrow ca+cb=ca+ad \Rightarrow cb=ad \Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

Câu 55. **(HSG 7 trường Cù Chính Lan 2018 - 2019; trường Nguyễn Khuyến 2016 - 2017)**

Biết $a^2+ab+\frac{b^2}{3}=25;\ c^2+\frac{b^2}{3}=9;\ a^2+ac+c^2=16$

Và $a\neq 0,\ c\neq 0,\ a\neq -c$. Chứng minh rằng: $\frac{2c}{a}=\frac{b+c}{a+c}$

Lời giải

Ta có: $c^2+\frac{b^2}{3}+a^2+ac+c^2=a^2+ab+\frac{b^2}{3}$ (vì $9+16=25$)

Suy ra $2c^2=a(b-c)\Rightarrow \frac{2c}{a}=\frac{b-c}{c}\ (a\neq 0;\ b\neq 0)$

$$\Rightarrow \frac{2c}{a}=\frac{b-c}{c}=\frac{2c+b-c}{a+c}=\frac{b+c}{a+c}\ (a\neq -c;\ a+c\neq 0)$$

Vậy $\frac{2c}{a}=\frac{b+c}{a+c}$ (đpcm).

Câu 56. **(HSG 7 huyện Tân Kỳ năm 2022 - 2023)**

Biết: $a^2+ab+\frac{b^2}{3}=2023;\ c^2+\frac{b^2}{3}=2000;\ a^2+ac+c^2=23$ và $a\neq 0\ ;\ c\neq 0\ ;\ a\neq -c$.

Chứng minh rằng $\frac{2c}{a}=\frac{b+c}{a+c}$.

Lời giải

Ta có: $a^2+ab+\frac{b^2}{3}=2023\ ;\ c^2+\frac{b^2}{3}=2000\ ;\ a^2+ac+c^2=23$

$$\Rightarrow \left(a^2+ab+\frac{b^2}{3}\right)-\left(c^2+\frac{b^2}{3}\right)-(a^2+ac+c^2)=2023-2000-23$$

$$\Rightarrow a^2+ab+\frac{b^2}{3}-c^2-\frac{b^2}{3}-a^2-ac-c^2=0$$

$$\Rightarrow ab-ac-2c^2=0$$

$$\Rightarrow ab=ac+2c^2$$

$$\Rightarrow ab+ac=2ac+2c^2$$

$$\Rightarrow a(b+c)=2c(a+c)$$

$$\Rightarrow \frac{2c}{a}=\frac{b+c}{a+c}.$$

Câu 57. **(HSG 7 huyện Điện Bàn; huyện Tiên Du 2022 – 2023)**

Cho các số tự nhiên có hai chữ số $\overline{ab}$ và $\overline{bc}$ thỏa mãn điều kiện $\frac{b}{c}=\frac{\overline{ab}}{\overline{bc}}$. Chứng minh rằng $\frac{a}{c}=\frac{a^2+b^2}{b^2+c^2}$.

Lời giải

Ta có: $\frac{\overline{ab}}{\overline{bc}}=\frac{10a+b}{10b+c}\Rightarrow\frac{10a+b}{10b+c}=\frac{b}{c}$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$\frac{10a+b}{10b+c}=\frac{b}{c}=\frac{10a+b-b}{10b+c-c}=\frac{10a}{10b}=\frac{a}{b}$ suy ra $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$

Suy ra $\frac{a^2}{b^2}=\frac{b^2}{c^2}=\frac{a}{b}.\frac{b}{c}=\frac{a}{c}$. (1)

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$\frac{a^2}{b^2}=\frac{b^2}{c^2}=\frac{a^2+b^2}{b^2+c^2}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{a^2+b^2}{b^2+c^2}=\frac{a}{c}$.

Câu 58. **(HSG 7 huyện Đông Sơn 2022 - 2023; trường Đáp Cầu 2018 - 2019; trường Hồng Thái, huyện Sơn Dương 2017 - 2018**

Cho x,y,z là các số khác 0 và $x^2=yz,y^2=xz,z^2=xy$. Chứng minh rằng: $x=y=z$

Lời giải

Vì x,y,z là các số khác 0 và $x^2=yz,y^2=xz,z^2=xy$

$\Rightarrow\frac{x}{y}=\frac{z}{x};\frac{y}{z}=\frac{x}{y};\frac{z}{x}=\frac{y}{z}\Rightarrow\frac{x}{y}=\frac{y}{z}=\frac{z}{x}.$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$\frac{x}{y}=\frac{y}{z}=\frac{z}{x}=\frac{x+y+z}{y+z+x}=1\Rightarrow x=y=z$

$\frac{x}{y}=\frac{y}{z}=\frac{z}{x}=\frac{x+y+z}{y+z+x}=1\Rightarrow x=y=z$

Câu 59. **(HSG 7 huyện Thái Thụy 2015 – 2016)**

Cho x,y,z thỏa mãn $x^2=yz,y^2=xz,z^2=xy.$ Chứng minh rằng: $x=y=z$

Lời giải

TH1: Nếu $x=0$ thì $y=z=0\Rightarrow x=y=z.$ Tương tự với y,z

TH2: x,y,z là các số khác 0 từ $x^2=yz,y^2=xz,z^2=xy$

$\Rightarrow \frac{x}{y}=\frac{z}{x};\frac{y}{z}=\frac{x}{y};\frac{z}{x}=\frac{y}{z}\Rightarrow \frac{x}{y}=\frac{y}{z}=\frac{z}{x}$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau:

$\Rightarrow \frac{x}{y}=\frac{y}{z}=\frac{z}{x}=\frac{x+y+z}{y+z+x}=1\Rightarrow x=y=z$

Vậy $x=y=z$

Câu 60. **(HSG 7 huyện Thạch Thành năm 2022 - 2023)**

Cho các số $a,\ b,\ c,\ x,\ y,\ z$ thỏa mãn: $a+b+c=a^2+b^2+c^2=1$ và $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$ (các tỉ số đều có nghĩa). Chứng minh rằng $x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2$.

Lời giải

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=\frac{x+y+z}{a+b+c}=\frac{x+y+z}{1}=x+y+z$ (vì $a+b+c=1$).

Suy ra: $(x+y+z)^2=\left(\frac{x}{a}\right)^2=\left(\frac{y}{b}\right)^2=\left(\frac{z}{c}\right)^2=\frac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2}=\frac{x^2+y^2+z^2}{1}=x^2+y^2+z^2$

Câu 61. **(HSG 7 tỉnh Nam Định, huyện Ý Yên 2021– 2022)**

Cho x,y,z là các số nguyên dương và $x+y+z$ là số lẻ, các số thực a,b,c thỏa mãn: $\frac{a-b}{x}=\frac{b-c}{y}=\frac{a-c}{z}$. Chứng minh rằng: $a=b=c.$

Lời giải

Theo đề bài: $\frac{a-b}{x}=\frac{b-c}{y}=\frac{a-c}{z}$.

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$\frac{a-b}{x}=\frac{b-c}{y}=\frac{a-c}{z}=\frac{a-b+b-c+a-c}{x+y+z}=\frac{2a-2c}{x+y+z}$ (1)

Và $\frac{a-b}{x}=\frac{b-c}{y}=\frac{a-b+b-c}{x+y}=\frac{a-c}{x+y}$ (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow \frac{2(a-c)}{x+y+z}=\frac{a-c}{x+y}$ (3)

Nếu $a-c\neq 0$; Từ (3) $\Rightarrow 2(x+y)=x+y+z$. (Vô lý vì $(x+y+z)$ lẻ (theo đề bài); còn $2(x+y)$ luôn chẵn với mọi x,y).

Do đó $a-c=0$. Thay vào dãy tỉ số đã cho ta được

$\frac{a-b}{x}=\frac{b-c}{y}=\frac{0}{z}=0\Rightarrow \begin{cases}a-b=0\\ b-c=0\end{cases}\Rightarrow \begin{cases}a=b\\ b=c\end{cases}$

Vậy $a=b=c$ thỏa mãn điều kiện đề bài.

Câu 62. **(HSG 7 trường Bảo Phương 2018 - 2019)**

Cho $\frac{x}{y+z+t}=\frac{y}{z+t+x}=\frac{z}{t+x+y}=\frac{t}{x+y+z}$.

Chứng minh rằng biểu thức sau có giá trị nguyên: $A=\frac{x+y}{z+t}+\frac{y+z}{t+x}+\frac{z+t}{x+y}+\frac{t+z}{y+z}$

Lời giải

Ta có: $\frac{x}{y+z+t}=\frac{y}{z+t+x}=\frac{z}{t+x+y}=\frac{t}{x+y+z}=\frac{x+y+z+t}{3(x+y+z+t)}=\frac{1}{3}$

Suy ra $3x=y+z+t;\ 3y=z+t+x;\ 3z=t+x+y;\ 3t=x+y+z$

Từ đó suy ra được: $x+y=z+t;\ y+z=t+x;\ z+t=x+y;\ t+x=y+z$

$A=\frac{x+y}{z+t}+\frac{y+z}{t+x}+\frac{z+t}{x+y}+\frac{t+z}{y+z}=1+1+1+1=4$

Vậy $A=4$, A có giá trị nguyên.

Câu 63. **(HSG 7 trường Lý Nam Đế, huyện Hưng Hà năm học 2022 - 2023)**

Cho bốn số a,b,c,d thỏa mãn $\frac{a}{b+c+d}=\frac{b}{a+c+d}=\frac{c}{a+b+d}$

Chứng minh rằng biểu thức $M=\frac{a+b}{c+d}+\frac{b+c}{d+a}+\frac{d+a}{b+c}$ có giá trị nguyên biết:

Lời giải

$\frac{a}{b+c+d}=\frac{b}{a+c+d}=\frac{c}{a+b+d}\Rightarrow\frac{a}{b+c+d}+1=\frac{b}{a+c+d}+1=\frac{c}{a+b+d}+1$

$\Rightarrow\frac{a+b+c+d}{b+c+d}=\frac{a+b+c+d}{a+c+d}=\frac{a+b+c+d}{a+b+d}$

Ta xét hai trường hợp

+) Nếu $a+b+c+d=0$

Vì $a+b+c+d=0$ nên $a+b=-(c+d)\Rightarrow\frac{a+b}{c+d}=-1.$

Tương tự ta cũng có: $\frac{b+c}{d+a}=-1;\frac{d+a}{b+c}=-1$

Suy ra: $M=\frac{a+b}{c+d}+\frac{b+c}{d+a}+\frac{d+a}{b+c}=-3$

+) Nếu $a+b+c+d\neq0.$ Từ $\frac{a+b+c+d}{b+c+d}=\frac{a+b+c+d}{a+c+d}=\frac{a+b+c+d}{a+b+d}$

ta được: $\Rightarrow b+c+d=a+c+d=a+b+d\Rightarrow a=b=c$

Do đó $M=\frac{a+b}{c+d}+\frac{b+c}{d+a}+\frac{d+a}{b+c}=1+1+1=3$

Vậy biểu thức $M=\frac{a+b}{c+d}+\frac{b+c}{d+a}+\frac{d+a}{b+c}$ có giá trị nguyên

Câu 64. **(HSG 7 huyện Hưng Hà năm học 2022 - 2023)**

Cho $(x_1p-y_1q)^{2n}+(x_2p-y_2q)^{2n}+(x_3p-y_3q)^{2n}+...+(x_mp-y_mq)^{2n}\le 0$

với $m,n\in N^*$. Chứng minh rằng $\frac{x_1+x_2+x_3+...+x_m}{y_1+y_2+y_3+...+y_m}=\frac{q}{p}$

Lời giải

Ta có: $(x_1p-y_1q)^{2n}\ge 0;\ (x_2p-y_2q)^{2n}\ge 0;\ (x_3p-y_3q)^{2n}\ge 0;\ ...;\ (x_mp-y_mq)^{2n}\ge 0$

$\Rightarrow (x_1p-y_1q)^{2n}+(x_2p-y_2q)^{2n}+(x_3p-y_3q)^{2n}+...+(x_mp-y_mq)^{2n}\ge 0$

Mà $(x_1p-y_1q)^{2n}+(x_2p-y_2q)^{2n}+(x_3p-y_3q)^{2n}+...+(x_mp-y_mq)^{2n}\le 0$ (gt)

$\Rightarrow x_1p-y_1q=x_2p-y_2q=x_3p-y_3q=....=x_mp-y_mq$

Do đó $\frac{x_1}{y_1}=\frac{x_2}{y_2}=\frac{x_3}{y_3}=...=\frac{x_m}{y_m}=\frac{q}{p}\ hay\ \frac{x_1+x_2+x_3+...+x_m}{y_1+y_2+y_3+...+y_m}=\frac{q}{p}$

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com
https://www.vnteach.com