

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO THANH HÓA
TRƯỜNG THPT BA ĐÌNH**

SÁNG KIẾN KINH NGHIỆM

**HƯỚNG DẪN HỌC SINH KHAI THÁC TÍNH CHẤT HÌNH HỌC
ĐỂ GIẢI BÀI TOÁN VỀ TAM GIÁC TRONG HÌNH HỌC
TỌA ĐỘ PHẪNG.**

**Người thực hiện: Dương Thị Thu
Chức vụ: Giáo Viên
SKKN thuộc môn: Toán**

THANH HÓA NĂM 2016

MỤC LỤC

Nội dung	Trang
I. MỞ ĐẦU	2
1. Lí do chọn đề tài	2
2. Mục đích nghiên cứu	2
3. Đối tượng nghiên cứu	2
4. Phương pháp nghiên cứu	2
II. NỘI DUNG	2
1. Cơ sở lí luận	2
2. Thực trạng vấn đề	3
3. Giải pháp thực hiện	3
3.1. Các bài toán sử dụng tính chất các đường trong tam giác	3
a. Sử dụng tính chất của đường phân giác trong	3
b. Sử dụng tính chất của đường cao	10
3.2. Các bài toán sử dụng tính chất của tam giác đặc biệt	16
Bài tập tương tự	20
4. Hiệu quả của sáng kiến kinh nghiệm	21
III. KẾT LUẬN, KIẾN NGHỊ	22

I. MỞ ĐẦU

1. Lí do chọn đề tài:

Trong chương trình toán lớp 10 học sinh được học về phương pháp tọa độ trong mặt phẳng và bước đầu biết vận dụng kiến thức cơ bản vào giải một số bài tập trong sách giáo khoa như lập phương trình đường thẳng, phương trình đường tròn, đường elip... và các bài toán về góc, khoảng cách. Bài toán tọa độ trong mặt phẳng luôn xuất hiện trong đề thi đại học các năm trước và đề thi THPT quốc gia hai năm gần đây. Tuy nhiên bài toán này trong đề thi THPT quốc gia ngày càng nâng dần mức độ khó, đòi hỏi học sinh phải định hướng tốt, tư duy tìm được điểm “mấu chốt” của bài toán.

Chủ đề về tam giác là chủ đề rộng được khai thác rất nhiều trong các đề thi. Để giải quyết tốt được bài toán về tam giác nói riêng và bài toán tọa độ phẳng nói chung đòi hỏi học sinh phải nắm vững tính chất hình học và khai thác tốt tính chất hình học đó. Trong nhiều bài toán các em còn phải mày mò tìm ra được tính chất hình học ẩn trong bài toán- đó là điểm “mấu chốt” để giải quyết bài toán. Trong quá trình ôn tập và thi THPT quốc gia rất nhiều học sinh lúng túng không giải được bài toán này. Vì vậy tôi chọn đề tài : “Hướng dẫn học sinh khai thác tính chất hình học để giải bài toán về tam giác trong hình học tọa độ phẳng”.

2. Mục đích nghiên cứu:

Trên cơ sở nghiên cứu đề tài: “Hướng dẫn học sinh khai thác tính chất hình học để giải bài toán về tam giác trong hình học tọa độ phẳng” cùng quá trình ôn luyện cho học sinh, tôi mong muốn giúp học sinh định hướng và khai thác tốt tính chất hình học cũng như tìm được tính chất hình học ẩn trong bài toán để giải quyết được bài toán về tam giác, từ đó các em có thể giải quyết được các bài toán tọa độ phẳng nói chung, giúp các em có thể đạt kết quả cao trong kỳ thi THPT quốc gia và nâng cao hơn nữa chất lượng dạy học Toán.

3. Đối tượng nghiên cứu:

Cách định hướng khai thác tính chất hình học của tam giác để giải bài toán về tam giác trong hình học tọa độ phẳng Oxy.

4. Phương pháp nghiên cứu:

Phương pháp nghiên cứu xây dựng cơ sở lí thuyết.

II. NỘI DUNG

1. Cơ sở lí luận:

Hình học phẳng được xây dựng từ các đối tượng như điểm, đường thẳng, tam giác, tứ giác, đường tròn... Từ lớp 7 các em đã được học về các tam giác đặc biệt, các đường trong tam giác và tính chất của chúng. Bài toán tọa độ trong mặt phẳng

liên quan mật thiết tới kiến thức hình học phẳng mà các em đã biết ở lớp dưới. Khi giải một bài toán hình học tọa độ trong mặt phẳng ta cần phải đọc kỹ đầu bài, vẽ hình chính xác, phân tích giả thiết của bài toán, định hướng bài toán cho biết gì, cần phải làm gì. Đặc biệt là khai thác tính chất hình học của bài toán.

2. Thực trạng vấn đề:

Đứng trước những bài toán hình học tọa độ phẳng như vậy học sinh thường lúng túng không xác định được đường lối, phương pháp giải, nhiều học sinh không tránh khỏi tâm trạng hoang mang, mất phương hướng. Các em cho rằng nhiều dạng toán như thế thì làm sao nhớ hết các dạng toán và cách giải các dạng toán đó, nếu bài toán không thuộc dạng đã gặp thì không giải được. Một số học sinh có thói quen không tốt là khi đọc đề chưa kỹ đã vội làm ngay, có thể sự thử nghiệm đó sẽ có kết quả nhưng hiệu suất giải toán sẽ không cao. Với thực trạng đó để giúp học sinh định hướng tốt hơn trong quá trình giải toán hình học tọa độ trong mặt phẳng nói chung và bài toán về tam giác nói riêng người giáo viên cần tạo cho học sinh thói quen định hướng lời giải: ta cần phải làm gì, giả thiết bài toán cho ta biết điều gì, đặc biệt khai thác tính chất đặc trưng hình học của bài toán để tìm lời giải.

3. Giải pháp thực hiện:

Trước hết, yêu cầu học sinh nắm vững các kiến thức cơ bản về phương trình đường thẳng, đường tròn, kiến thức về tọa độ của vectơ và của điểm. Với mỗi bài toán cụ thể yêu cầu học sinh vẽ hình chính xác, bởi nhiều bài toán từ trực quan hình vẽ ta có thể chỉ ra tính chất của hình và định hướng tìm cách giải. Sau đó tôi phân thành hai dạng bài toán: bài toán sử dụng tính chất các đường trong tam giác như đường phân giác trong, đường cao, đường trung tuyến; bài toán sử dụng tính chất của các tam giác đặc biệt như tam giác vuông, cân, đều. Với mỗi dạng toán đó tôi đưa ra một số tính chất đặc trưng mà các bài toán hay sử dụng, các ví dụ cụ thể, phân tích định hướng cách giải, trình bày lời giải, đặc biệt là bước phân tích định hướng tìm lời giải, thông qua đó giúp học sinh tư duy và vận dụng để giải bài toán khác một cách tốt nhất.

3.1. Các bài toán sử dụng tính chất các đường trong tam giác.

a. Sử dụng tính chất của đường phân giác trong.

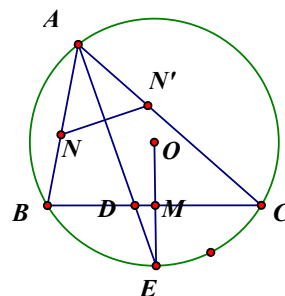
- Kiến thức liên quan tới đường phân giác trong:

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O, gọi AD là đường phân giác trong góc A ($D \in BC$); M là trung điểm BC; phân giác AD cắt (O) tại điểm thứ hai là E.

Nhận xét 1: Ta có tỉ lệ: $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$.

Nhận xét 2: Nếu điểm N thuộc đường thẳng AB thì điểm N' đối xứng với N qua AD sẽ thuộc đường AC.

Nhận xét 3: E là điểm chính giữa cung BC và OE vuông góc với BC tại trung điểm M của BC. Dễ dàng chứng minh các nhận xét 1,2,3.

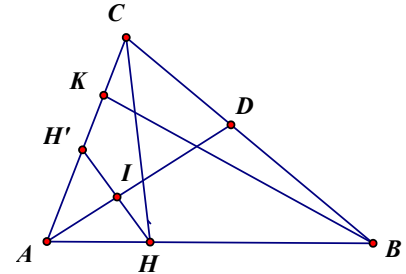


- Ví dụ áp dụng:

Ví dụ 1: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, hãy tìm tọa độ đỉnh C của tam giác ABC biết rằng hình chiếu vuông góc của C trên đường thẳng AB là điểm $H(-1;-1)$, đường phân giác trong của góc A có phương trình: $x-y+2=0$ và đường cao kẻ từ B có phương trình: $4x+3y-1=0$.

- Định hướng:

Ta biết phương trình đường phân giác trong góc A và tọa độ điểm H thuộc cạnh AB nên có thể tìm được tọa độ điểm H' đối xứng với H qua phân giác AD và H' thuộc AC. Khi đó ta lập được phương trình cạnh AC đi qua H' và vuông góc với BK nên tìm được tọa độ điểm A. Từ đó tìm được tọa độ điểm C.



- Lời giải:

Gọi H' là điểm đối xứng với H qua phân giác AD.

PT đường thẳng HH' đi qua H và vuông góc với AD là: $x+y+2=0$.

Tọa độ trung điểm I của HH' là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x-y+2=0 \\ x+y+2=0 \end{cases} \Rightarrow I(-2;0) \Rightarrow H'(-3;1)$$

Đường thẳng AC đi qua H' và vuông góc với BK nên có PT: $3x-4y+13=0$.

Tọa độ điểm A là nghiệm của hệ: $\begin{cases} 3x-4y+13=0 \\ x-y+2=0 \end{cases} \Rightarrow A(5;7)$.

Điểm C thuộc AC nên $C(a; \frac{3a+13}{4})$.

Ta có: $\overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{HA} = 0 \Leftrightarrow 6(a+1) + 8 \cdot \frac{3a+17}{4} = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{10}{3} \Rightarrow C(-\frac{10}{3}; \frac{3}{4})$.

Vậy $C(-\frac{10}{3}; \frac{3}{4})$.

Ví dụ 2: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(4;3)$, đường phân giác trong góc A có PT: $x-y-1=0$, tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là $I(2; \frac{3}{2})$. Viết phương trình cạnh BC biết diện tích tam giác ABC bằng hai lần diện tích tam giác IBC.

- Định hướng:

Trong bài toán này vẫn cho phương trình đường phân giác trong góc A nhưng không biết điểm nằm trên hai cạnh AB hoặc AC (khác điểm A), vậy sử dụng giả thiết phương trình đường phân giác trong như thế nào? Kéo dài phân giác trong góc A cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại điểm thứ hai là D ta có D là điểm chính giữa cung BC $\Rightarrow ID \perp BC$. Phương trình đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ ta lập được, suy ra tọa độ điểm D và lưu ý $BC \perp ID$. Sử dụng tiếp giả thiết thứ hai để tìm PT cạnh BC.

- Lời giải:

Gọi D là giao điểm của đường phân giác trong góc A với đường tròn (C) ngoại tiếp $\triangle ABC$. Ta có $IA = \frac{5}{2}$, đường tròn (C) có tâm I và bán kính IA nên có phương trình:

$$(x-2)^2 + (y-\frac{3}{2})^2 = \frac{25}{4}.$$

Tọa độ giao điểm D là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x-y-1=0 \\ (x-2)^2 + (y-\frac{3}{2})^2 = \frac{25}{4} \end{cases} \Rightarrow D(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}).$$

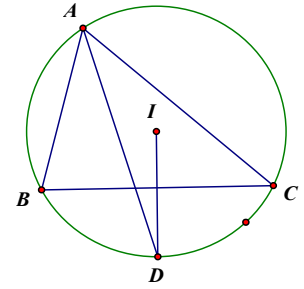
Ta có $\widehat{BAD} = \widehat{DAC} \Rightarrow D$ là điểm chính giữa cung BC $\Rightarrow ID \perp BC$

Ta có $ID = (-\frac{3}{2}; -2)$. Đường thẳng $BC \perp ID$ nên có phương trình $3x+4y+m=0$.

Mặt khác: $S_{\triangle ABC} = 2S_{\triangle IBC} \Rightarrow d(A; BC) = 2d(I; BC)$

$$\Leftrightarrow \frac{|m+24|}{5} = 2 \frac{|m+12|}{5} \Leftrightarrow \begin{cases} m=0 \\ m=-16 \end{cases}$$

Vậy PT đường thẳng BC là $3x+4y=0$ hoặc $3x+4y-16=0$



Ví dụ 3: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có phương trình đường phân giác trong góc A và phân giác ngoài góc B lần lượt là $(d_1): x=2$ và $(d_2): x+y+7=0$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C của tam giác ABC biết $I(-1/2; 1)$; $J(2; 1)$ lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp của tam giác ABC.

- Định hướng:

Giả thiết bài toán cho biết PT đường phân giác ngoài góc B, vậy sử dụng giả thiết này như thế nào? Hãy lưu ý tới giả thiết tâm đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$, ta có thể lập được phương trình đường phân giác trong góc B (đi qua J và vuông góc với phân giác ngoài). Từ đó tìm được tọa độ điểm B

suy ra phương trình đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ rồi suy ra tọa độ điểm A.

Để tìm tọa độ điểm C ta sử dụng tính chất của đường phân giác trong góc A tìm điểm A' là giao điểm của phân giác trong góc A với đường tròn (I).

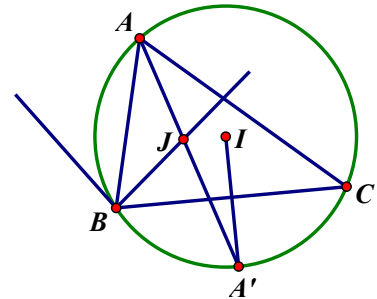
Đường thẳng BC đi qua B và vuông góc với IA' .

- Lời giải:

Đường phân giác ngoài góc B đi qua J và vuông góc với $(d_2): x+y+7=0$ nên có phương trình:

$$x-y-1=0.$$

Tọa độ điểm B là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x-y-1=0 \\ x+y+7=0 \end{cases} \Rightarrow B(-3; -4)$



Đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ có tâm $I(-\frac{1}{2}; 1)$ và có bán kính $R = IB = \frac{5\sqrt{5}}{2}$

Phương trình đường tròn (I) : $(x + \frac{1}{2})^2 + (y - 1)^2 = \frac{125}{4}$

Tọa độ giao điểm A là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x=2 \\ (x+\frac{1}{2})^2 + (y-1)^2 = \frac{125}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(2;6) \\ A(2;-4) \end{cases}$

*) Với A(2;6): Gọi A' là giao điểm của đường phân giác trong góc A với đường tròn(I). Ta có $A'(2;-4) \Rightarrow IA' = (\frac{5}{2}; -5)$. Đường thẳng BC đi qua B và vuông góc

với IA' nên có phương trình $x-2y-5=0$

Tọa độ điểm C là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x-2y-5=0 \\ (x+\frac{1}{2})^2 + (y-1)^2 = \frac{125}{4} \end{cases} \Rightarrow C(5;0)$.

*) Với A(2;-4) $\Rightarrow A'(2;6) \Rightarrow$ phương trình BC: $x+2y+11=0$

$\Rightarrow C(-3;-4)$ (loại vì $C \equiv B$).

Vậy A(2;6); B(-3;-4); C(5;0).

- Nhận xét:

Với ba ví dụ trên ta hoàn toàn sử dụng tính chất hình học có sẵn trong bài toán là đường phân giác trong của tam giác.

Ví dụ 4: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC vuông tại A. Điểm H(5;5) là hình chiếu vuông góc của A lên BC. Đường phân giác trong góc A của tam giác ABC thuộc đường thẳng d: $x-7y+20=0$. Đường thẳng chứa trung tuyến AM của tam giác ABC đi qua K(-10;5). Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C biết điểm B có tung độ dương.

- Định hướng:

Bài toán cho biết đường phân giác trong góc A của $\triangle ABC$ nhưng không biết điểm thuộc cạnh AB, AC mà biết điểm H là chân đường vuông góc kẻ từ A lên BC và đường trung tuyến AM đi qua điểm K. Vậy ba giả thiết này có mối liên hệ gì với nhau? Từ giả thiết $\triangle ABC$ vuông tại A ta chứng minh được đường phân giác trong góc A cũng là phân giác trong góc $\angle HAK$. Đó chính là tính chất hình học ẩn trong bài toán. Đến đây ta sử dụng tới tính chất đường phân giác trong để giải bài toán.

- Lời giải:

Gọi D là giao điểm của đường phân giác trong góc A với BC.

Ta có $\triangle MAC$ cân tại M nên $\angle MAC = \angle MCA$

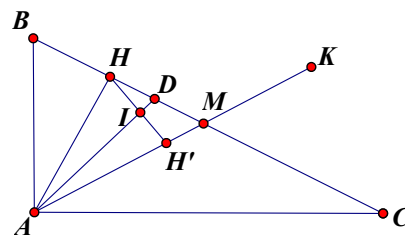
Mà $\angle MCA = \angle HAB$ (cùng phụ với $\angle ABH$)

$\Rightarrow \angle MAC = \angle HAB$

Lại có $\angle BAD = \angle DAC \Rightarrow \angle HAD = \angle DAM$

$\Rightarrow AD$ là đường phân giác trong góc $\angle HAK$.

Gọi H' là điểm đối xứng với H qua AD thì H' thuộc AM.



Đường thẳng d đi qua H và vuông góc với

AD có phương trình $7x+y-40=0$.

Tọa độ giao điểm I của d và AD là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x - 7y + 20 = 0 \\ 7x + y - 40 = 0 \end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{26}{5}; \frac{18}{5}\right)$$

Vì I là trung điểm của HH' nên $H'\left(\frac{27}{5}; \frac{11}{5}\right)$

Đường thẳng AM đi qua hai điểm H' và K nên có phương trình : $2x+11y-35=0$

Tọa độ điểm A là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x - 7y + 20 = 0 \\ 2x + 11y - 35 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(1;3)$

Đường thẳng BC đi qua H(5;5) và có VTPT $\vec{n} = \vec{AH} = (4;2)$ nên có phương trình:

$$2x+y-15=0$$

Tọa độ điểm M là nghiệm của hệ: $\begin{cases} 2x + y - 15 = 0 \\ 2x + 11y - 35 = 0 \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{13}{2}; 2\right)$

Đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ có tâm M và bán kính $MA = \sqrt{\frac{125}{4}}$ nên có phương

trình : $\left(x - \frac{13}{2}\right)^2 + (y - 2)^2 = \frac{125}{4}$.

Tọa độ hai điểm B,C là nghiệm của hệ: $\begin{cases} \left(x - \frac{13}{2}\right)^2 + (y - 2)^2 = \frac{125}{4} \\ 2x + y - 15 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow B(4;3), C(9;-3)$ (Vì điểm B có tung độ dương)

Vậy $A(1;3); B(4;3); C(9;-3)$.

• Nhận xét:

Để giải bài toán này ta cần chỉ ra được tính chất hình học ẩn trong bài toán đó là: AD là đường phân giác trong góc $\angle HAK$.

Ví dụ 5: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC. Các điểm E,F lần lượt thuộc các cạnh AB, AC sao cho BE=CF. Trung điểm BE và CF lần lượt là M,N. Viết phương trình đường thẳng AC biết $A(1;1); B(5;3)$ và phương trình đường thẳng MN là $2x+2y-19=0$.

• Định hướng:

Trong bài toán này các giả thiết của bài toán không liên quan tới đường phân giác trong mà cho biết tọa độ điểm A,B và phương trình đường thẳng MN. Một tư duy tự nhiên ta nghĩ tới các đường thẳng qua A hoặc B và vuông góc với MN. Vẽ đường thẳng d qua A và vuông góc với MN. Bằng trực quan ta thấy d có thể là đường phân giác trong góc A. Khi đó điểm B' đối xứng với B qua d sẽ thuộc AC.

Bài toán lúc này giải quyết được. Vấn đề là làm thế nào chứng minh được d là phân giác trong góc A . Bài toán có các yếu tố đoạn thẳng bằng nhau $BE=CF$ và các trung điểm M, N của BF và CE . Hãy tìm mối liên hệ giữa các yếu tố này? Nếu gọi I là trung điểm của EF ta hoàn toàn chứng minh được $\triangle IMN$ cân, từ đó suy ra đường thẳng IK qua I vuông góc với MN là đường phân giác trong góc $\angle MIN$. Mà $\angle MIN = \angle BAC$ và $d \parallel IK \Rightarrow d$ là phân giác trong góc A .

• Lời giải:

Gọi I, K lần lượt là trung điểm của EF và MN .

Gọi d là đường thẳng qua A và vuông góc với MN .

Ta có: $MI = \frac{1}{2}BE$; $NI = \frac{1}{2}CF$.

Mà $BE=CF \Rightarrow MI=NI \Rightarrow \triangle IMN$ cân

$\Rightarrow IK \perp MN$ và IK là đường phân giác trong góc $\angle MIN \Rightarrow d \parallel IK$.

Mặt khác: $IM \parallel AB$; $IN \parallel AC \Rightarrow \angle MIN = \angle BAC$.

$\Rightarrow d$ là phân giác trong góc $\angle BAC$.

Đường thẳng d qua $A(1;1)$ và vuông góc với MN : $2x+2y-19=0$ nên có phương trình: $x-y=0$.

Đường thẳng Δ qua $B(5;3)$ và vuông góc d có phương trình: $x+y-8=0$

Tọa độ giao điểm J của d và Δ là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y - 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow J(4;4)$$

Gọi B' là điểm đối xứng của B qua d thì B' thuộc AC .

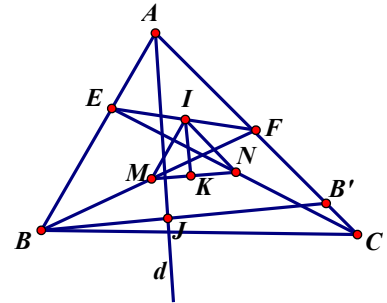
J là trung điểm $BB' \Rightarrow B'(3;5)$.

Đường thẳng AC đi qua hai điểm $A(1;1)$; $B'(3;5)$ nên có VTCP $\vec{u} = \vec{AB'} = (2;4)$.

$\Rightarrow$ Phương trình đường thẳng AC là $2x-y-1=0$.

• Nhận xét:

Trong bài toán này tính chất hình học ẩn trong bài toán là đường thẳng d qua A và vuông góc với MN là đường phân giác trong góc A .



Ví dụ 6: (Đề thi thử trường THPT Anh Sơn 2- lần 2-năm 2016) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC có điểm $C(-1;-2)$ ngoại tiếp đường tròn tâm I . Gọi M, N, H lần lượt là tiếp điểm của đường tròn (I) với các cạnh AB, AC, BC . Gọi $K(-1;-4)$ là giao điểm của BI với MN . Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của tam giác ABC, biết $H(2;1)$.

• Định hướng:

Giả thiết bài toán cho biết tọa độ ba điểm H, K, C, hãy tìm mối liên hệ giữa A, B với ba điểm trên. Từ trực quan hình vẽ ta thấy BK vuông góc với KC. Chứng minh được điều này ta sẽ tìm được hướng giải bài toán. Khi đó ta sẽ lập được phương trình BI, phương trình BC và tìm được tọa độ điểm B. Sử dụng BI là phân giác trong góc B ta tìm được tọa độ điểm C' đối xứng với C qua BI và C' thuộc AB. Từ đó lập được phương trình AB. Để lập phương trình AC ta sử dụng tính chất điểm I cách đều AC và BC.

- Lời giải:

Ta có:

$$\begin{aligned}\angle KIC &= \angle IBC + \angle ICB = \frac{1}{2} \angle ABC + \frac{1}{2} \angle ACB \\ &= 90^\circ - \angle BAC\end{aligned}$$

$$\angle KNC = \angle ANM = \angle AMN = 90^\circ - \angle BAC$$

$$\Rightarrow \angle KIC = \angle KNC$$

$\Rightarrow$ tứ giác KNIC nội tiếp đường tròn đường kính IC (vì $\angle INK = 90^\circ$).

$$\Rightarrow \angle IKC = 90^\circ \text{ hay } BK \perp KC.$$

Đường thẳng BK đi qua K(-1;-4) và có vectơ pháp tuyến $n = \overrightarrow{KC} = (0;2)$ nên có phương trình: $y+4=0$.

Đường thẳng BC đi qua H(2;1) và có vectơ chỉ phương $u = \overrightarrow{CH} = (3;3)$ nên có phương trình: $x-y-1=0$.

$$\text{Tọa độ điểm B là nghiệm của hệ: } \begin{cases} y+4=0 \\ x-y-1=0 \end{cases} \Rightarrow B(-3;-4).$$

Gọi C' là điểm đối xứng với C qua BK thì C' thuộc AB.

K là trung điểm của CC' nên C'(-1;-6).

Đường thẳng AB đi qua hai điểm B(-3;-4) và C'(-1;-6) nên có phương trình:

$$x+y+7=0$$

Đường thẳng IH đi qua H(2;1) và vuông góc với HC nên có phương trình:

$$x+y-3=0$$

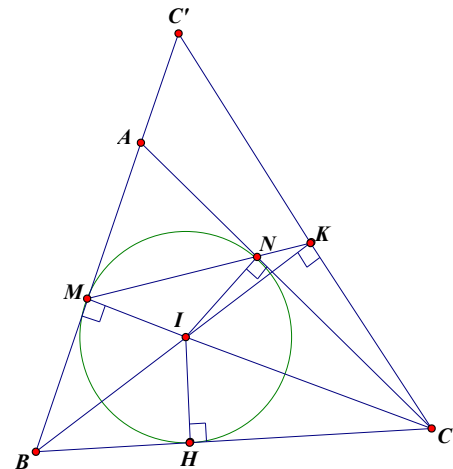
$$\text{Tọa độ điểm I là nghiệm của hệ: } \begin{cases} y+4=0 \\ x+y-3=0 \end{cases} \Rightarrow I(7;-4).$$

Gọi $n=(a;b)$ là vectơ pháp tuyến của đường thẳng AC (với $a^2+b^2 \neq 0$).

Đường thẳng AC đi qua C(-1;-2) có phương trình:

$$a(x+1)+b(y+2)=0 \Leftrightarrow ax+by+a+2b=0$$

Ta có:



$$d(I; AC) = IH \Leftrightarrow \frac{|7a - 4b + a + 2b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 5\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow 14a^2 - 32ab - 46b^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -b \\ 7a = 23b \end{cases}$$

*) Với $a = -b$ chọn $b = -1$ thì $a = 1 \Rightarrow$ phương trình AC: $x - y - 1 = 0$ (loại vì $AC \equiv BC$)

*) Với $7a = 23b$ chọn $b = 7$ thì $a = 23 \Rightarrow$ phương trình AC: $23x + 7y + 37 = 0$.

Tọa độ điểm A là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 23x + 7y + 37 = 0 \\ x + y + 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow A\left(\frac{3}{4}; -\frac{31}{4}\right)$$

Vậy $A\left(\frac{3}{4}; -\frac{31}{4}\right); B(-3; -4)$.

- Nhận xét:

Để giải bài toán này ta cần tìm được tính chất hình học ẩn trong bài là BK vuông góc với KC và sử dụng tính chất điểm đối xứng qua đường phân giác trong.

b. Sử dụng tính chất đường cao của tam giác:

- Kiến thức liên quan tới đường cao tam giác:

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (I);

H là trực tâm $\triangle ABC$. Gọi E, F lần lượt là chân đường cao hạ từ B và C; M là trung điểm cạnh BC.

Nhận xét 1: $\overline{AH} = 2\overline{IM}$

Nhận xét 2: $IA \perp EF$

Nhận xét 3: Gọi K là giao điểm thứ hai của AH với đường tròn (I). Khi đó K đối xứng với H qua đường thẳng BC và đường tròn ngoại tiếp tam giác HBC đối xứng với đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ qua đường thẳng BC.

Nhận xét 4: Gọi P là chân đường cao hạ từ A xuống BC thì H là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle EFP$.

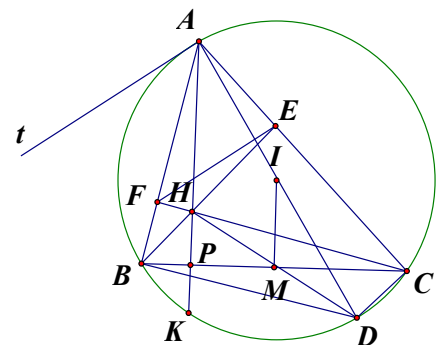
Dễ dàng chứng minh các nhận xét 1, 3, 4. Ta sẽ chứng minh nhận xét 2:

Kẻ tiếp tuyến At của đường tròn (I) $\Rightarrow \angle Bat = \angle BCA$

Tứ giác BCEF nội tiếp nên $\angle BCA = \angle FEA \Rightarrow \angle Bat = \angle FEA \Rightarrow At \parallel EF \Rightarrow IA \perp EF$

- Ví dụ áp dụng:

Ví dụ 7: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có trực tâm H(5;5); phương trình đường thẳng chứa cạnh BC: $x + y - 8 = 0$. Biết đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC đi qua hai điểm M(7;3); N(4;2). Tính diện tích tam giác ABC.



- Định hướng:

Để tính diện tích tam giác ABC ta cần biết tọa độ các đỉnh A, B, C. Biết 2 điểm M, N thuộc đường tròn (I) ngoại tiếp $\triangle ABC$, nếu ta có thể tìm thêm được 1 điểm thuộc (I) thì lập được phương trình đường tròn (I) và sẽ tìm được tọa độ các đỉnh A, B, C. Sử dụng nhận xét 3 ta có điểm K đối xứng với H qua BC thì K thuộc (I). Điểm K chính là “mấu chốt” của bài toán.

- Lời giải:

Gọi K là điểm đối xứng với H qua BC thì K thuộc đường tròn (I) ngoại tiếp tam giác ABC.

Đường thẳng HK đi qua điểm H(5;5) và vuông góc với BC nên có phương trình $x-y=0$.

Tọa độ trung điểm J của HK là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x+y-8=0 \\ x-y=0 \end{cases} \Rightarrow J(4;4) \Rightarrow K(3;3)$$

Gọi phương trình đường tròn (I) ngoại tiếp $\triangle ABC$ là $x^2+y^2+2ax+2by+c=0$.

Vì (I) đi qua 3 điểm M(7;3); N(4;2); K(3;3) nên ta có:

$$\begin{cases} 49+9+14a+6b+c=0 \\ 16+4+8a+4b+c=0 \\ 9+9+6a+6b+c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=-2 \\ c=6 \end{cases}$$

Phương trình đường tròn (I): $x^2+y^2-10x-8y+36=0$.

Tọa độ điểm B, C là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x+y-8=0 \\ x^2+y^2-10x-8y+36=0 \end{cases}$

$\Rightarrow B(6;2); C(3;5)$ hoặc $B(3;5); C(6;2) \Rightarrow BC=3\sqrt{2}$

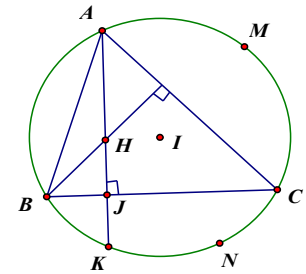
Phương trình đường thẳng HK là phương trình đường thẳng AH.

Tọa độ điểm A là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x-y=0 \\ x^2+y^2-10x-8y+36=0 \end{cases} \Rightarrow A(6;6)$

Diện tích tam giác ABC là:

$$S = \frac{1}{2} d(A; BC) \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot \frac{|6+6-8|}{\sqrt{2}} \cdot 3\sqrt{2} = 6 \text{ (đvdt)}.$$

Vậy diện tích $\triangle ABC$ bằng 6.



Ví dụ 8: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có trực tâm H(2;1), tâm đường tròn ngoại tiếp I(1;0). Trung điểm M của BC nằm trên đường thẳng d có phương trình: $x-2y-1=0$. Tìm tọa độ các đỉnh B, C biết đường tròn ngoại tiếp tam giác HBC đi qua điểm E(6;-1) và hoành độ điểm B nhỏ hơn 4.

- Định hướng:

Giả thiết bài toán cho biết đường tròn ngoại tiếp $\triangle HBC$ đi qua điểm E(6;-1) gọi cho ta hai hướng suy nghĩ:

Hướng 1: Tìm thêm 1 điểm thuộc đường tròn ngoại tiếp $\triangle HBC$.

Hướng 2: Tìm tâm J đường tròn ngoại tiếp $\triangle HBC$.

Hướng thứ nhất ta gặp bế tắc vì không có cơ sở nào để tìm thêm một điểm thuộc đường tròn ngoại tiếp $\triangle HBC$. Theo hướng 2 ta chú ý tới giả thiết trung điểm M của BC thuộc đường thẳng d gọi cho ta tham số hóa tọa độ trung điểm M.

Ta thấy tâm J cách đều 2 điểm B, C nên I, J, M thẳng hàng. Sử dụng nhận xét 3 ta thấy J là điểm đối xứng với I qua BC.

• Lời giải:

Gọi J là điểm đối xứng với I qua BC

$\Rightarrow$ M là trung điểm của IJ

Ta có $\overrightarrow{IJ} = 2\overrightarrow{IM} = \overrightarrow{AH}$

$\Rightarrow$ tứ giác AHJI là hình bình hành $\Rightarrow$ JH=IA

Mặt khác JB=JC=IB=IC=IA $\Rightarrow$ JB=IC=JH

$\Rightarrow$ J là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle HBC$.

Vì $M \in d: x - 2y - 1 = 0$ nên $M(2t+1; t) \Rightarrow J(4t+1; 2t)$

Vì E thuộc đường tròn ngoại tiếp $\triangle HBC$ nên JH=JE

$$\Leftrightarrow (4t-1)^2 + (2t-1)^2 = (4t-5)^2 + (2t+1)^2 \Leftrightarrow t=1$$

$\Rightarrow M(3;1)$ và $J(5;2)$

Phương trình đường tròn ngoại tiếp $\triangle HBC$ (tâm J, bán kính JH) là:

$$(x-5)^2 + (y-2)^2 = 10$$

Phương trình đường thẳng BC đi qua $M(3;1)$ và có VTPT $\vec{n} = \overrightarrow{IM} = (2;1)$ là: $2x+y-7=0$

Tọa độ điểm B, C là nghiệm của hệ:
$$\begin{cases} 2x+y-7=0 \\ (x-5)^2 + (y-2)^2 = 10 \end{cases}$$

$\Rightarrow B(2;3); C(4;1)$ (vì điểm B có hoành độ nhỏ hơn 4).

Vậy $B(2;3); C(4;1)$.

Ví dụ 9: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC có trực tâm $H(2;1)$, $BC=2\sqrt{5}$. Lập phương trình đường thẳng BC biết trung điểm M của BC nằm trên đường thẳng d: $x-2y-1=0$.

• Định hướng:

Ta biết tọa độ hai điểm A, H và trung điểm M của BC thuộc d: $x-2y-1=0$ gọi cho ta nghĩ đến tâm I đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ và đẳng thức $AH=2IM$ kết hợp với giả thiết

$BC=2\sqrt{5}$ để tìm tọa độ điểm M.

• Lời giải:

Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ ta có

$$\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{IM} \Rightarrow 2IM = AH = 2\sqrt{5} \Rightarrow IM = \sqrt{5}$$

Ta có $IA = IB = \sqrt{IM^2 + BM^2} = \sqrt{10}$

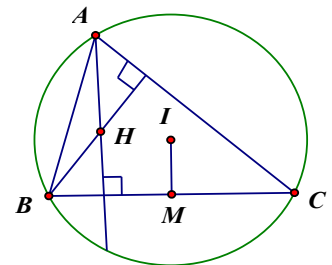
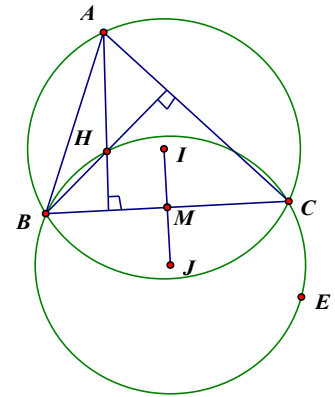
Vì $M \in d: x - 2y - 1 = 0 \Rightarrow M(2a+1; a)$. Mà $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{IM} \Rightarrow I(2a-1; a-1)$

$$IA = \sqrt{10} \Leftrightarrow (2a-1)^2 + a^2 = 10 \Leftrightarrow a=1; a=-\frac{9}{5}$$

$\Rightarrow M(3;1)$ (vì M có tung độ dương).

Đường thẳng BC đi qua $M(3;1)$ và có vector pháp tuyến là $\overrightarrow{AH} = (4;2)$ nên có phương trình: $2x+y-7=0$

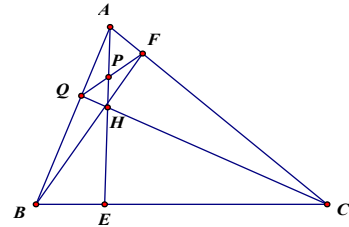
Vậy PT đường thẳng BC là $2x+y-7=0$.



Ví dụ 10: Viết phương trình 3 cạnh của tam giác ABC biết E(-1;-2); F(2;2); Q(-1;2) lần lượt là chân đường cao hạ từ 3 đỉnh A,B,C của tam giác ABC.

- Định hướng:

Giả thiết bài toán cho ta biết tọa độ 3 chân đường cao của ΔABC , nếu tìm được tọa độ trực tâm H thì bài toán được giải quyết. Liên quan tới chân đường cao ta nhớ tới nhận xét 4 khi đó H là tâm đường tròn nội tiếp ΔEFQ hay H là giao điểm 3 đường phân giác trong của 3 góc trong ΔEFQ . Sử dụng tính chất đường phân giác trong để tìm tọa độ điểm H.



- Lời giải:

Gọi P là giao điểm của AE và QF.

Theo tính chất đường phân giác trong ta có:

$$\frac{PQ}{PF} = \frac{QE}{EF} = \frac{4}{5} \Rightarrow PQ = -\frac{4}{5}PF \Rightarrow P\left(\frac{1}{3}; 2\right)$$

$$\text{Ta lại có: } \frac{PH}{EH} = \frac{PF}{EF} = \frac{1}{3} \Rightarrow PH = -\frac{1}{3}EH \Rightarrow H(0;1)$$

Đường thẳng BC đi qua E(-1;-2) và có VTPT $\vec{n} = \vec{EH} = (1;3)$ nên có phương trình:

$$x+3y+7=0$$

Đường thẳng AC đi qua F(2;2) và có VTPT $\vec{n} = \vec{HF} = (2;1)$ nên có phương trình:

$$2x+y-6=0$$

Đường thẳng AB đi qua Q(-1;2) và có VTPT $\vec{n} = \vec{QH} = (1;-1)$ nên có phương trình

$$x-y+3=0$$

Vậy phương trình các cạnh là AB: $x-y+3=0$; AC: $2x+y-6=0$; BC: $x+3y+7=0$.

Ví dụ 11: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm I(1;2), bán kính R=5. Chân đường cao hạ từ B, C của tam giác ABC lần lượt là H(3;3), K(0;-1). Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tứ giác BCHK biết điểm A có tung độ dương.

- Định hướng:

Giả thiết điểm A có tung độ dương gợi cho ta nghĩ tới tìm tọa độ điểm A. Biết tọa độ chân đường cao H, K và tâm I đường tròn ngoại tiếp ta nhớ tới nhận xét 2: $IA \perp HK$. Từ đó tìm được tọa độ điểm A rồi tìm tiếp tọa độ điểm B, C.

- Lời giải:

Trước hết ta chứng minh $IA \perp HK$.

Kẻ tiếp tuyến At của đường tròn (I;IA).

Ta có $\angle ACB = \angle A t$ (1)

Để thấy tứ giác BCHK nội tiếp

$$\Rightarrow \angle ACB = \angle AKH \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \angle A t = \angle AKH$

$\Rightarrow At \parallel HK$ mà $At \perp IA \Rightarrow IA \perp HK$.

Phương trình đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$

$$\text{là } (x-1)^2 + (y-2)^2 = 25.$$

Đường thẳng IA đi qua điểm I(1;2) và vuông góc với HK nên có phương trình $3x + 4y - 11 = 0$.

Tọa độ điểm A là nghiệm của hệ:
$$\begin{cases} 3x + 4y - 11 = 0 \\ (x-1)^2 + (y-2)^2 = 25 \end{cases}$$

$\Rightarrow A(-3;5)$ (vì điểm A có tung độ dương)

Phương trình đường thẳng AB đi qua hai điểm A(-3;5); K(0;-1) là $2x + y + 1 = 0$

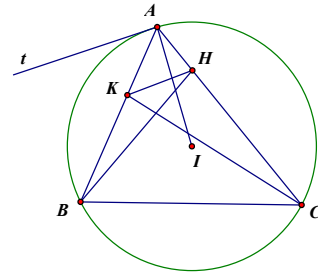
Phương trình đường thẳng AC đi qua hai điểm A(-3;5); H(3;3) là $x + 3y - 12 = 0$

Tọa độ điểm B là nghiệm của hệ:
$$\begin{cases} 2x + y + 1 = 0 \\ (x-1)^2 + (y-2)^2 = 25 \end{cases} \Rightarrow B(1;-3)$$

Tọa độ điểm C là nghiệm của hệ:
$$\begin{cases} x + 3y - 12 = 0 \\ (x-1)^2 + (y-2)^2 = 25 \end{cases} \Rightarrow C(6;2)$$

Đường tròn ngoại tiếp tứ giác BCHK có tâm J là trung điểm BC, bán kính $R' = \frac{BC}{2}$

Phương trình đường tròn cần tìm là $(x - \frac{7}{2})^2 + (y + \frac{1}{2})^2 = \frac{25}{2}$.



Ví dụ 12: Cho tam giác nhọn ABC. Các đường cao kẻ từ B và C cắt đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ tại $M(\frac{21}{5}; \frac{7}{5})$ và $N(1;3)$ (khác B, C). Trung tuyến AD có phương trình $3x - y - 6 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C biết trung điểm D của BC có tung độ nhỏ hơn 1.

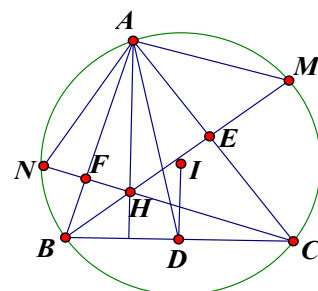
• Định hướng:

Trong ba điểm A, B, C ta tìm điểm nào trước? Ta thấy điểm A có nhiều giả thiết hơn, vì A thuộc đường thẳng AD đã có phương trình. Hãy liên hệ điểm A với các điểm M, N đã biết tọa độ? Từ tính chất của trục tâm ta thấy $AM = AN (=AH)$ nên A thuộc trung trực của MN, từ đó suy ra tọa độ điểm A. Để tìm tọa độ điểm B, C ta phải tìm tọa độ điểm D, điểm D liên hệ tới tâm I đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ và hai điểm A, H nhờ hệ thức $ID = \frac{1}{2}AH = \frac{1}{2}AN$. Đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ là đường tròn ngoại tiếp $\triangle AMN$, suy ra được tọa độ điểm I và tọa độ điểm D. Từ đó giải được bài toán.

• Lời giải:

Ta dễ dàng chứng minh được M, N đối xứng với H qua AC và AB nên $AM = AH = AN$.

Vì A thuộc AD nên $A(a; 3a-6)$.



$$AM = AN \Leftrightarrow AM^2 = AN^2$$

$$\Leftrightarrow \left(a - \frac{21}{5}\right)^2 + \left(3a - \frac{37}{5}\right)^2 = (a - 1)^2 + (3a - 9)^2$$

$$\Leftrightarrow a = 3$$

$$\Rightarrow A(3;3).$$

Đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ đi qua ba điểm A, M, N nên có phương trình:

$$x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0.$$

$\Rightarrow$ Tâm I đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ là $I(2;1)$.

Vì D thuộc AD nên $D(t;3t-6) \Rightarrow ID^2 = (t-2)^2 + (3t-7)^2$

$$\text{Ta có } ID = \frac{1}{2}AH = \frac{1}{2}AN = \frac{1}{2}.2 = 1 \Leftrightarrow (t-2)^2 + (3t-7)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow 10t^2 - 46t + 52 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 & \Rightarrow D(2;0) \\ t = \frac{13}{5} & \Rightarrow D\left(\frac{13}{5}; \frac{9}{5}\right) \end{cases}$$

Vì D có tung độ nhỏ hơn 1 nên $D(2;0)$.

Đường thẳng BC đi qua $D(2;0)$ và vuông góc với ID nên có phương trình $y=0$.

Tọa độ điểm B, C là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} y = 0 \\ x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0; x = 4 \end{cases}$$

$\Rightarrow B(0;0); C(4;0)$ hoặc $B(4;0); C(0;0)$.

Vậy $A(3;3); B(0;0); C(4;0)$ hoặc $A(3;3); B(4;0); C(0;0)$

3.2. Các bài toán sử dụng tính chất của tam giác đặc biệt:

Ví dụ 13: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC vuông cân đỉnh A, BM là đường trung tuyến. Đường thẳng qua A và vuông góc với BM cắt BC tại điểm $E(2;1)$. Biết trọng tâm của tam giác ABC là $G(2;2)$. Xác định tọa độ các đỉnh của tam giác ABC.

- Định hướng:

Giả thiết chỉ cho biết tọa độ điểm G và tọa độ điểm E ta cần xoay quanh hai điểm này. Từ trực quan hình vẽ ta nhận thấy $GE \parallel AC$. Nếu chứng minh được điều này thì có thể suy luận được $\triangle NEG$ vuông cân tại trung điểm N của BC.

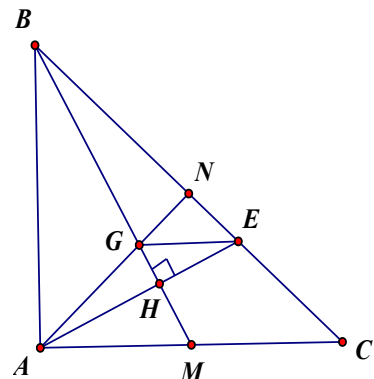
$\Rightarrow$ MN là đường trung trực của GE

$\Rightarrow$ lập được PT trung trực MN

Mặt khác $GN = \frac{1}{\sqrt{2}}GE \Rightarrow$ điểm N

$\Rightarrow$ Điểm A từ tính chất trọng tâm tam giác.

- Lời giải:



Gọi N là trung điểm BC $\Rightarrow AN \perp BC$.

Gọi H là giao điểm của BM và AE $\Rightarrow BH \perp AE$

$\Rightarrow G$ là trực tâm tam giác ABE

$\Rightarrow GE \perp AB \Rightarrow GE \parallel AC$.

Ta có $\triangle ANC$ vuông cân tại N

$\Rightarrow \triangle NEG$ vuông cân tại N

$\Rightarrow MN$ là đường trung trực của GE

$\Rightarrow$ Đường thẳng MN đi qua trung điểm I(2;3/2) của đoạn GE và có vec tơ pháp tuyến $\vec{n} = \vec{EG} = (0;1)$ nên có phương trình $y = \frac{3}{2}$.

$\Rightarrow N(a; \frac{3}{2})$ mà $GN = \frac{1}{\sqrt{2}}GE = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow N(\frac{3}{2}; \frac{3}{2})$ hoặc $N(\frac{5}{2}; \frac{3}{2})$.

*) Với $N(\frac{3}{2}; \frac{3}{2})$ ta có: $\vec{GA} = -2\vec{GN} \Rightarrow A(3;3)$.

Đường thẳng BC đi qua hai điểm N, E nên có phương trình $x+y-3=0$

Đường thẳng AB đi qua A và song song với MN nên có phương trình $y-3=0$.

Đường thẳng AC đi qua A và vuông góc với MN nên có phương trình $x-3=0$.

Tọa độ điểm B là nghiệm của hệ: $\begin{cases} y-3=0 \\ x+y-3=0 \end{cases} \Rightarrow B(0;3)$.

Tọa độ điểm C là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x-3=0 \\ x+y-3=0 \end{cases} \Rightarrow C(3;0)$.

*) Với $N(\frac{5}{2}; \frac{3}{2})$ ta có $\vec{GA} = -2\vec{GN} \Rightarrow A(1;3)$

Phương trình BC $x-y-1=0$; phương trình AB: $y-3=0$; phương trình AC: $x-1=0$;

Hoàn toàn tương tự như trên ta có B(4 ;3); C(1 ;0).

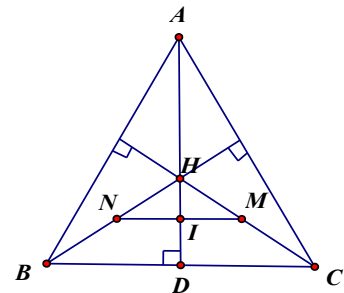
Vậy A(3;3); B(0;3); C(3;0) hoặc A(1;3); B(4;3); C(1;0).

• Nhận xét: Trong ví dụ này ta cần phải tìm được tính chất hình học ẩn trong bài toán là $\triangle NEG$ cân tại N. Điều này được suy luận từ tính chất của tam giác vuông cân tại A: trung tuyến AN là đường cao và $AN=NC=NB$.

Ví dụ 14: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC cân đỉnh A, phương trình cạnh BC là $2x+y-2=0$; đường cao kẻ từ B có phương trình $x+y+1=0$; điểm M(1;1) thuộc đường cao kẻ từ C. Tìm tọa độ các đỉnh A,B,C.

• Định hướng:

Biết phương trình cạnh BC và đường cao kẻ từ B ta tìm ngay được tọa độ điểm B. Ta còn giả thiết điểm M(1;1) thuộc đường cao kẻ từ C và tam giác ABC cân đỉnh A. Với 4 giả thiết đã cho ta lập ngay được phương trình đường thẳng đi qua M và song song với BC cắt đường cao kẻ từ B tại N; M, N đối xứng nhau qua đường cao AH suy ra trung điểm I của MN thuộc AH.



Ta lập được phương trình đường cao AH và tìm được trung điểm D của BC từ đó suy ra tọa độ điểm C

- Lời giải:

Tọa độ điểm B là nghiệm của hệ:
$$\begin{cases} 2x + y - 2 = 0 \\ x + y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow B(3; 4).$$

Đường thẳng d đi qua M và song song với BC có phương trình $2x + y - 3 = 0$

Tọa độ giao điểm N của d và đường cao kẻ từ B là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 2x + y - 3 = 0 \\ x + y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow N(4; -5)$$

Trung điểm I của MN có tọa độ $I(\frac{5}{2}; -2)$

Vì tam giác ABC cân tại A nên M, N đối xứng nhau qua trung trực của BC nên I thuộc đường cao AH.

Đường thẳng AH đi qua I và $AH \perp BC$ nên có phương trình $x - 2y - \frac{13}{2} = 0$.

Tọa độ trung điểm D của BC là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 2x + y - 2 = 0 \\ x - 2y - \frac{13}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow D(\frac{21}{5}; -\frac{11}{5}) \Rightarrow C(\frac{6}{5}; -\frac{2}{5})$$

Đường thẳng CA đi qua C và vuông góc với đường thẳng $x + y + 1 = 0$ nên có phương trình $x - y - \frac{8}{5} = 0$.

Tọa độ điểm A là nghiệm của hệ:
$$\begin{cases} x - 2y - \frac{13}{2} = 0 \\ x - y - \frac{8}{5} = 0 \end{cases} \Rightarrow A(-\frac{33}{10}; -\frac{49}{10})$$

Vậy $A(-\frac{33}{10}; -\frac{49}{10})$; $B(3; -4)$; $C(\frac{6}{5}; -\frac{2}{5})$.

Ví dụ 15: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC cân tại A có M(3;2) là trung điểm cạnh BC. Biết chân đường cao kẻ từ B là điểm $K(-\frac{6}{5}; \frac{13}{5})$ và trung điểm cạnh AB nằm trên đường thẳng $\Delta: x - y + 2 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C.

- Định hướng:

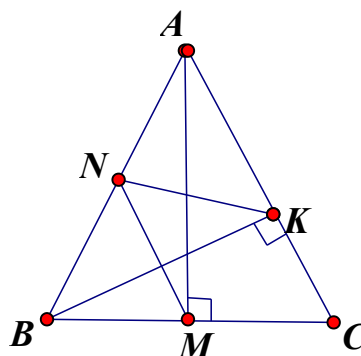
Bài toán cho biết trung điểm N của AB thuộc $\Delta: x - y + 2 = 0$ gọi cho ta nghĩ tới tìm tọa độ điểm N trước. N và hai điểm M, K có mối liên hệ với nhau như thế nào? Hai tam giác AKB và AMB vuông nên $NK = NM$ ta tìm được tọa độ điểm N. Với ba điểm M, N, K đã biết tọa độ có thể suy luận được điều gì? Dễ thấy $AC \parallel MN$ nên lập được phương trình AC. Tham số hóa tọa độ điểm A suy ra tọa độ điểm B theo tham số và sử dụng $AM \perp BM$ để tìm tham số.

- Lời giải:

Gọi N là trung điểm AB.

Vì N thuộc $\Delta: x - y + 2 = 0$ nên $N(t; t+2)$.

Ta có tam giác AKB và AMB vuông nên $NK = NM$



$$\Leftrightarrow NM^2 = NK^2 \Leftrightarrow (t-3)^2 + t^2 = (t+\frac{6}{5})^2 + (t-\frac{3}{5})^2$$

$$\Leftrightarrow t=1$$

$$\Rightarrow N(1;3).$$

Đường thẳng AC đi qua $K(-\frac{6}{5}; \frac{13}{5})$ và có vec tơ

chỉ phương $\vec{u} = \vec{MN} = (-2; 1)$ nên có phương trình :
 $x+2y-4=0$

A thuộc AC nên $A(4-2a; a) \Rightarrow B(2a-2; 6-a)$

$$\Rightarrow \vec{MA} = (1-2a; a-2) ; \vec{MB} = (2a-5; 4-a)$$

Ta có :

$$\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0 \Leftrightarrow (1-2a)(2a-5) + (a-2)(4-a) = 0$$

$$\Leftrightarrow 5a^2 - 18a + 13 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=1 & \Rightarrow A(2;1) \\ a=\frac{13}{5} & \Rightarrow A(-\frac{6}{5}; \frac{13}{5}) \equiv K \end{cases}$$

$\Rightarrow A(2;1)$. Vì $N(1;3)$ là trung điểm AB nên $B(0;5)$.

Điểm $M(3;2)$ là trung điểm của BC nên $C(6;-1)$

Vậy $A(2;1)$; $B(0;5)$; $C(6;-1)$.

Ví dụ 16 : (Đề thi THPT quốc gia năm 2015)

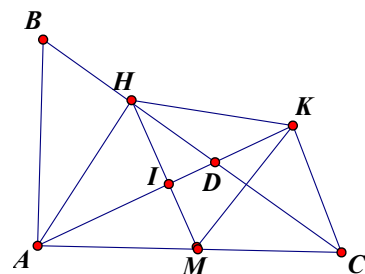
Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC vuông tại A. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên BC. D là điểm đối xứng của B qua H; K là hình chiếu vuông góc của C trên đường thẳng AD. Giả sử $H(-5;-5)$; $K(9;-3)$ và trung điểm cạnh AC thuộc đường thẳng d : $x-y+10=0$. Tìm tọa độ điểm A.

• Định hướng : Bài toán cho biết tọa độ hai điểm H, K và điểm M thuộc đường thẳng d, tương tự như VD 14 ta dễ dàng chứng minh được $MH=MK$, từ đó tìm được tọa độ điểm M. Bây giờ ta cần tìm mối liên hệ giữa điểm A với 3 điểm đã biết tọa độ là M, H, K. Từ trực quan hình vẽ ta thấy $AK \perp HM$. Chứng minh được điều này thì bài toán được giải quyết.

• Lời giải :

Vì M thuộc d : $x-y+10=0$ nên $M(t;t+10)$.

Ta có $\angle AHC = \angle AKC = 90^\circ$ nên $MH=MK$



$$\Leftrightarrow MH^2 = MK^2$$

$$\Leftrightarrow (t+5)^2 + (t+15)^2 = (t-9)^2 + (t+13)^2$$

$$\Leftrightarrow t=0 \Rightarrow M(0;10)$$

Vì tứ giác AHKC nội tiếp nên $\widehat{HKA} = \widehat{HCA}$

Mà $\widehat{HCA} = \widehat{HAB}$ (cùng phụ với $\widehat{ABH}$)

$$\Rightarrow \widehat{HKA} = \widehat{HAB}$$

Mà $\widehat{HAB} = \widehat{HAD}$ nên $\widehat{HKA} = \widehat{HAD} \Rightarrow \Delta AKH$ cân đỉnh H

$$\Rightarrow HA=HK.$$

Mặt khác ta có $MA=MK \Rightarrow HM$ là đường trung trực của AK.

Đường thẳng AK đi qua K và có VTPT $n = \overrightarrow{HM}$ nên có phương trình: $x+3y=0$.

Đường thẳng HM có phương trình: $3x-y+10=0$.

Gọi I là trung điểm AK, tọa độ điểm I là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x+3y=0 \\ 3x-y+10=0 \end{cases} \Rightarrow I(-3;1) \Rightarrow A(-15;5)$$

Vậy $A(-15;5)$.

- Nhận xét:

Trong ví dụ này ta sử dụng tính chất của tam giác vuông : trung tuyến ứng với cạnh huyền bằng nửa cạnh huyền để chỉ ra tính chất hình học ẩn trong bài toán này là AK vuông góc với HM.

Bài tập tương tự:

1. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy cho tam giác ABC có trực tâm $H(-1;3)$, tâm đường tròn ngoại tiếp là $I(3;-3)$, chân đường cao kẻ từ A là $K(-1;1)$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C.

2. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy cho tam giác ABC có đỉnh $C(4;3)$, phương trình đường phân giác trong và trung tuyến kẻ từ một đỉnh của tam giác lần lượt là $x+2y-5=0$; $4x+13y-10=0$. Viết phương trình các cạnh của tam giác.

3. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (C) có phương trình $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 26$, điểm $G(1; \frac{8}{3})$ là trọng tâm tam giác

ABC và điểm $M(7;2)$ nằm trên đường thẳng đi qua A và vuông góc với BC, M khác A. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC biết tung độ điểm B lớn hơn tung độ điểm C.

4. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho tam giác ABC cân tại A, H là trung điểm của BC, D là hình chiếu vuông góc của H trên AC, $M(\frac{3}{4}; \frac{11}{4})$ là trung điểm

của HD, phương trình đường thẳng BD: $x + y - 4 = 0$; phương trình đường thẳng AB: $3x + y - 10 = 0$. Tìm tọa độ điểm C.

5. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy cho tam giác ABC có A(1;4), tiếp tuyến tại A của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC cắt BC tại D, đường phân giác trong của góc $\angle ADB$ có phương trình $x - y + 2 = 0$, điểm M(-4;1) thuộc cạnh AC. Viết phương trình đường thẳng AC.

6. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy cho tam giác ABC vuông tại A có $AC = 2AB$. Điểm M(2;-2) là trung điểm cạnh BC. Gọi E là điểm thuộc cạnh AC sao cho $EC = 3EA$, điểm $K(\frac{4}{5}; \frac{8}{5})$ là giao điểm của AM và BE. Xác định tọa độ các đỉnh của tam giác ABC biết điểm E nằm trên đường thẳng d: $x + 2y - 6 = 0$.

7. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy cho tam giác ABC nhọn. Đường thẳng chứa trung tuyến kẻ từ A và đường thẳng BC có phương trình lần lượt là $3x + 5y - 8 = 0$ và $x - y - 4 = 0$. Đường thẳng qua A vuông góc với BC cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại điểm thứ hai là D(4;-2). Viết phương trình các đường thẳng AB, AC biết hoành độ điểm B không lớn hơn 3.

8. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy cho tam giác ABC có trực tâm H(3;0) và trung điểm cạnh BC là M(6;1). Đường thẳng AH có phương trình: $x + 2y - 3 = 0$. Gọi D, E lần lượt là chân đường cao kẻ từ B và C của $\triangle ABC$. Xác định tọa độ các đỉnh của tam giác ABC biết đường thẳng DE có phương trình: $x - 2 = 0$.

9. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy cho tam giác ABC vuông tại A(1;2), cạnh BC có phương trình: $y + 3 = 0$ và điểm D(4;1). Gọi E, F lần lượt là trung điểm các đoạn BD, CD. Tìm tọa độ của B, C biết đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF đi qua điểm $M(2; -1 + \sqrt{6})$.

4. Hiệu quả của sáng kiến kinh nghiệm:

Thực tế trong quá trình giảng dạy phần hình học tọa độ phẳng lớp 10 và ôn thi THPT quốc gia cho lớp 12 tôi thấy việc định hướng cho học sinh biết khai thác tính chất hình học để giải bài toán về tam giác trong hình học tọa độ phẳng giúp học sinh phát hiện nhanh hướng giải bài toán. Các em tỏ ra hứng thú tích cực học tập. Điều này được kiểm nghiệm qua những lớp tôi dạy: lớp 10I năm 2014-2015; lớp 12C năm 2015-2016. Đặc biệt kiểm nghiệm trên hai nhóm học sinh có trình độ tương đương nhau của lớp 12C năm 2015-2016 bằng việc giải bài toán: “Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm I(1;2). Trực tâm H của tam giác ABC nằm trên đường thẳng d: $x - 4y - 5 = 0$. Đường thẳng AB có phương trình $2x + y - 14 = 0$. Tìm tọa độ điểm C biết khoảng cách từ C đến đường thẳng AB bằng $3\sqrt{5}$ ”.

Kết quả thu được thể hiện ở bảng sau:

Nhóm	Số học sinh	Số HS có lời giải		Số HS có lời giải đúng	
		Số lượng	Tỉ lệ %	Số lượng	Tỉ lệ %
I	20	19	95%	15	75%
II	20	15	75%	10	50%

III. KẾT LUẬN

Trong quá trình dạy học, đối với mỗi bài toán nói chung và bài toán hình học nói riêng, nếu giáo viên biết tìm ra cơ sở lý thuyết, đưa ra phương pháp giải hợp lý và hướng dẫn học sinh vận dụng một cách linh hoạt thì sẽ tạo được sự hứng thú học tập của học sinh. Khi dạy học sinh giải các bài toán hình học tọa độ phẳng cần yêu cầu học sinh vẽ hình tìm mối liên hệ giữa các giả thiết của bài toán với các tính chất của hình. Giáo viên cần xây dựng một hệ thống bài tập từ dễ đến khó để nâng cao khả năng tư duy và kỹ năng làm bài của học sinh.

Là một giáo viên tôi xác định cho mình phải luôn tạo cho học sinh niềm hứng thú say mê trong quá trình học tập; luôn cải tiến phương pháp dạy học, phát triển tư duy, vận dụng kiến thức phục vụ tốt cho bài dạy của mình.

Bài toán hình học tọa độ phẳng rất đa dạng không có một phương pháp chung nào để giải chúng. Trong bài viết này tôi chỉ mới đưa ra một số ví dụ về bài toán tam giác hay gặp trong đề thi đại học, đề thi học sinh giỏi nên chưa thể đầy đủ, chưa bao quát hết, với mong muốn giúp cho học sinh có định hướng tốt hơn khi gặp các bài toán này, tôi mong nhận được những góp ý chân thành của đồng nghiệp để bài viết của tôi được hoàn thiện hơn.

Tôi xin chân thành cảm ơn!

XÁC NHẬN CỦA THỦ TRƯỞNG ĐƠN VỊ:	Thanh Hóa ngày 25/5/2016 Tôi xin cam đoan đây là bài viết của mình không sao chép của người khác. Người viết: Dương Thị Thu
---------------------------------	--

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Báo Toán học và Tuổi trẻ
2. Đề thi thử THPT Quốc gia của Sở GD và ĐT Hà Nội
3. Đề thi thử THPT Quốc gia của trường THPT Anh Sơn 2- Nghệ An

4. Sách:”Chinh phục hình học giải tích” của nhóm LOVEBOOK