ĐỀ 80

Câu 1. (4,0 điểm)

a) Cho x, y là các số tự nhiên sao cho $x^2+y^2+2xy+x+3y+2$ là một số chính phương. Tính giá trị của biểu thức S = $5x-5y+2022$

b) Cho a, b, c là các số tự nhiên thỏa mãn a + b + c = 30. Tìm dư của phép chia $a^5+b^5+c^5+2022$ cho 30

Câu 2. (4,0 điểm)

a) Cho parabol (P): $y=3x^2$ và đường thẳng (d): $y=(10-4m)x-3m-7$ (m là tham số). Tìm các giá trị nguyên của m để (P) cắt (d) tại hai điểm phân biệt có hoành độ là các số dương.

b) Giải phương trình $(2x+1)\sqrt{4x^2-4x+3}=4x^2+1$

Câu 3. (4,0 điểm)

a) Cho x là số thực thoả mãn $\frac{2}{3}$ ≤ x ≤ 2. Rút gọn biểu thức

T = $\sqrt{3x+2+4\sqrt{3x-2}}+\sqrt{3x+2-4\sqrt{3x-2}}$

b) Cho a, b, c lần lượt là độ dài các cạnh của một tam giác và thoả mãn

a + b + c = 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

M = $27(a^2+b^2+c^2)+108abc$

Câu 4. (4,0 điểm)

a) Cho tam giác ABC vuông tại A có trọng tâm G và BD là đường phân giác của góc $\widehat{ABC}$(D thuộc cạnh AC). Biết $\widehat{GDC}$ = 90^0. Tính $\widehat{ABC}$

b) Cho hình vuông ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và BC, E là giao điểm của CM và DN. Chứng minh tam giác AED cân.

Câu 5. (4,0 điểm)

a) Cho điểm A nằm ngoài đường tròn (T), tâm O. Từ điểm A vẽ các tiếp tuyến AB, AC với (T) (B và C là các tiếp điểm). Gọi M là trung điểm của AB, CM cắt (T) tại điểm D (D khác C). Tính $\frac{CD.CM}{BC^2}$

b) Cho tam giác ABC (AB < AC) có trọng tâm G và có diện tích bằng 2022. Xét đường thẳng d thay đổi đi qua điểm G và cắt các cạnh AB, AC của tam giác ABC lần lượt tại D và E. Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng diện tích các tam giác BDE và CDE.

-----------HẾT------------

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. (4,0 điểm)

a) Cho x, y là các số tự nhiên sao cho $x^2+y^2+2xy+x+3y+2$ là một số chính phương. Tính giá trị của biểu thức S = $5x-5y+2022$

Lời giải

Đặt M = $x^2+y^2+2xy+x+3y+2$

Ta có: M > $x^2+2xy+y^2$ $\Leftrightarrow$ M > $(x+y)^2$.

Mà M < $x^2+y^2+4xy+4x+4y+4$ $\Leftrightarrow$ M > $(x+y+2)^2$.

Ta lại có: $(x+y)^2.(x+y+1)^2.(x+y+2)^2$ là các số chính phương liên tiếp

Suy ra M = $(x+y+1)^2$ $\Leftrightarrow$ $x-y=1$

Do đó S = $5x-5y+2022=2027$

b) Cho a, b, c là các số tự nhiên thỏa mãn a + b + c = 30. Tìm dư của phép chia $a^5+b^5+c^5+2022$ cho 30

Lời giải

Ta có $a^5-a=a(a^4-1)=(a-1)a(a+1)(a^2+1)$

Do $(a-1)a(a+1)\, chia\, hết\, cho\, 2\, và\, 3, mà\, (2;3)=1\, nên$

$(a-1)a(a+1)\, chia\, hết\, cho\, 6$

Nếu a chia hết cho 5 được dư 1; 0; 4 thì $(a-1)a(a+1)\, chia\, hết\, cho 5$.

Nếu a chia hết cho 5 được dư là 2 thì $a^2+1=(a-2)(a+2)+5\, chia\, hết\, cho 5$.

Nếu a chia hết cho 5 được dư là 3 thì $a^2+1=(a-3)(a+3)+10\, chia\, hết\, cho 5$.

Do (5;6) = 1 nên a^5-a chia hết cho 30; tương tự b^5-b; c^5-c chia hết cho 30.

Khi đó: $a^5+b^5+¿\, c^5$ + 2022 = (a^5-a) + (b^5-b) + (c^5-c) + 68.30 + 12

Vậy dư của phép chia $a^5+b^5+¿\, c^5$ + 2022 cho 30 là 12.

Câu 2. (4,0 điểm)

a) Cho parabol (P): $y=3x^2$ và đường thẳng (d): $y=(10-4m)x-3m-7$ (m là tham số). Tìm các giá trị nguyên của m để (P) cắt (d) tại hai điểm phân biệt có hoành độ là các số dương.

Lời giải

Hoành độ giao điểm của (P) và (d) là nghiệm của phương trình

$3x^2=(10-4m)x-3m-7$

$\Leftrightarrow\ 3x^2-2(5-2m)x+3m+7=0$ (*)

Yêu cầu bài toán được thoả khi (*) có hai nghiệm phân biệt đều dương. Điều này xảy ra khi

$$\begin{cases}\Delta'>0\\ P>0\\ S>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4m^2-29m+4>0\\ \dfrac{3m+1}{3}>0\\ \dfrac{2(5-2m)}{3}>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4m^2-29m+4>0\\ m>\dfrac{-7}{3}\\ m>\dfrac{5}{2}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}4m^2-29m+4>0\,(1)\\ \dfrac{-7}{3}<m<\dfrac{5}{2}\,(2)\end{cases}$$

Do m nguyên nên từ (2) suy ra m = $-2, m=-1, m=0, m=1, m=2$

Lần lượt thay m = $-2, m=-1, m=0, m=1, m=2$ vào (1) ta thấy m = $-2, m=-1, m=0$ thỏa mãn. Vậy m = $-2, m=-1, m=0$ là các giá trị cần tìm

b) Giải phương trình $(2x+1)\sqrt{4x^2-4x+3}=4x^2+1$

Lời giải

Điều kiện: 2x + 1 > 0

Phương trình đã cho tương đương với

$$2x\sqrt{4x^2-4x+3}+\sqrt{4x^2-4x+3}=\left(\sqrt{4x^2-4x+3}\right)^2+4x-2$$

$$\Leftrightarrow\ \left(\sqrt{4x^2-4x+3}\right)^2-\sqrt{4x^2-4x+3}-2-2x\left(\sqrt{4x^2-4x+3}-2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{4x^2-4x+3}-2\right)\left(\sqrt{4x^2-4x+3}+1-2x\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{4x^2-4x+3}=2\\ \sqrt{4x^2-4x+3}=2x-1\end{array}\right.$$

Với $\sqrt{4x^2-4x+3}=2\ \Leftrightarrow\ 4x^2-4x-1=0\Leftrightarrow x=¿\,\dfrac{1\pm\sqrt{2}}{2}$ (thỏa điều kiện)

Với $\sqrt{4x^2-4x+3}=2x-1\ \Leftrightarrow\begin{cases}2x-1\geq 0\\ 3=1\end{cases}$ phương trình vô nghiệm

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x=¿\,\dfrac{1\pm\sqrt{2}}{2}$

Câu 3. (4,0 điểm)

a) Cho x là số thực thoả mãn $\dfrac{2}{3}\leq$ x ≤ 2. Rút gọn biểu thức

T = $\sqrt{3x+2+4\sqrt{3x-2}}+\sqrt{3x+2-4\sqrt{3x-2}}$

Lời giải

Ta có: T = $\sqrt{3x+2+4\sqrt{3x-2}}+\sqrt{3x+2-4\sqrt{3x-2}}$

$= \sqrt{\left(\sqrt{3x-2}+2\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{3x-2}-2\right)^2}$

$= \left|\sqrt{3x-2}+2\right|+\left|\sqrt{3x-2}-2\right|$

$= \sqrt{3x-2}+2 + \left|\sqrt{3x-2}-2\right|$

Do $\frac{2}{3} \le x \le 2$ nên $\sqrt{3x-2}-2\le 0$

Vậy T = $\sqrt{3x-2}+2+2-\sqrt{3x-2}=4$

b) Cho a, b, c lần lượt là độ dài các cạnh của một tam giác và thoả mãn a + b + c = 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

M = $27\left(a^2+b^2+c^2\right)+108abc$

Lời giải

Ta có: $a^2-(b-c)^2\le a^2 \Leftrightarrow (a-b+c)(a+b-c)\le a^2$

Tương tự $(b-a+c)(b+a-c)\le b^2$; $(c-a+b)(c+a-b)\le c^2$

Từ đó suy ra $abc\ge(a+b-c)(b+a-c)(c+a-b)$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Do $a + b + c = 1$ nên ta có

$abc\ge(1-2a)(1-1b)(1-2c)=1-2(a+b+c)+4(ab+bc+ca)-8bc$

$\Leftrightarrow abc\ge \frac{-1}{9} + \frac{4}{9}(ab+bc+ca)$

Khi đó: M ≥ $27(a+b+c)^2-54(ab+bc+ca)-12+48(ab+bc+ca)$

Hay M $\ge 15-6(ab+bc+ca)$

Ta lại có: $(a+b+c)^2\ge 3(ab+bc+ca)$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi a = b = c

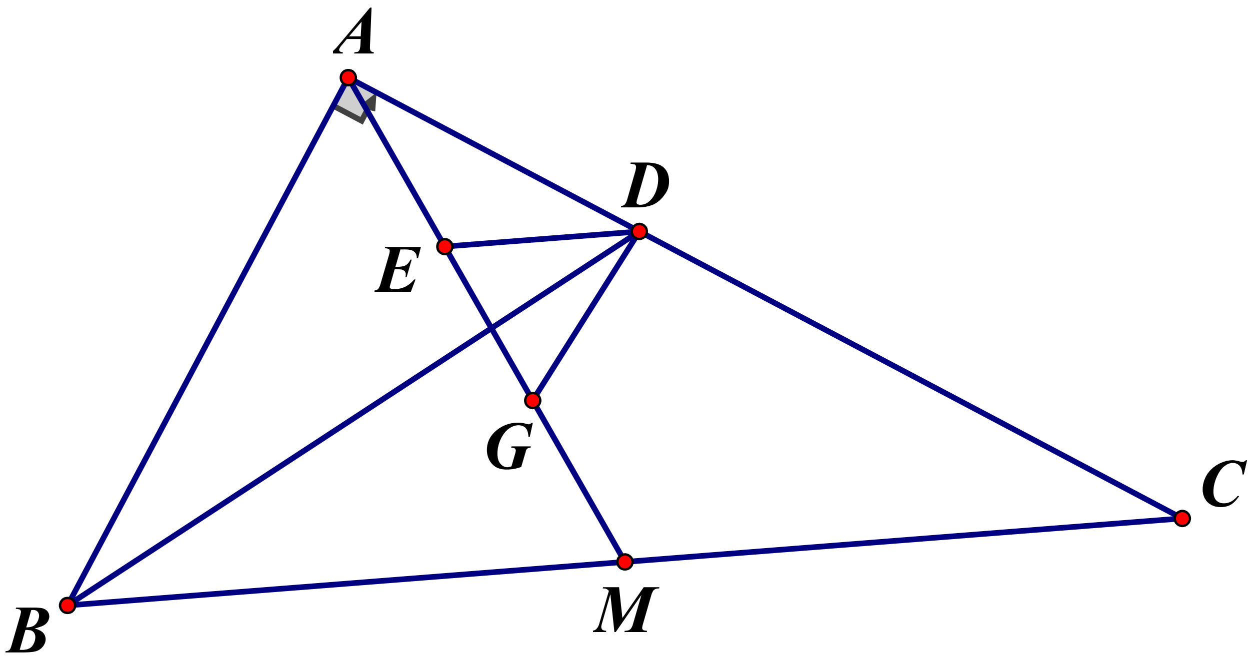
Suy ra M $\ge 15-2(a+b+c)^2=13$; M = 13 khi a = b = c = $\frac{1}{3}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức M là 13.

Câu 4. (4,0 điểm)

a) Cho tam giác ABC vuông tại A có trọng tâm G và BD là đường phân giác của góc $\widehat{ABC}$(D thuộc cạnh AC). Biết $\widehat{GDC}$ = 90^0. Tính $\widehat{ABC}$

Lời giải



Đặt M là trung điểm của BC và E là trung điểm của AG.

Do $ED = \frac{1}{2}AG$ nên $\triangle$EAD cân tại E, suy ra $\widehat{EDA} = \widehat{EAD}$ (1)

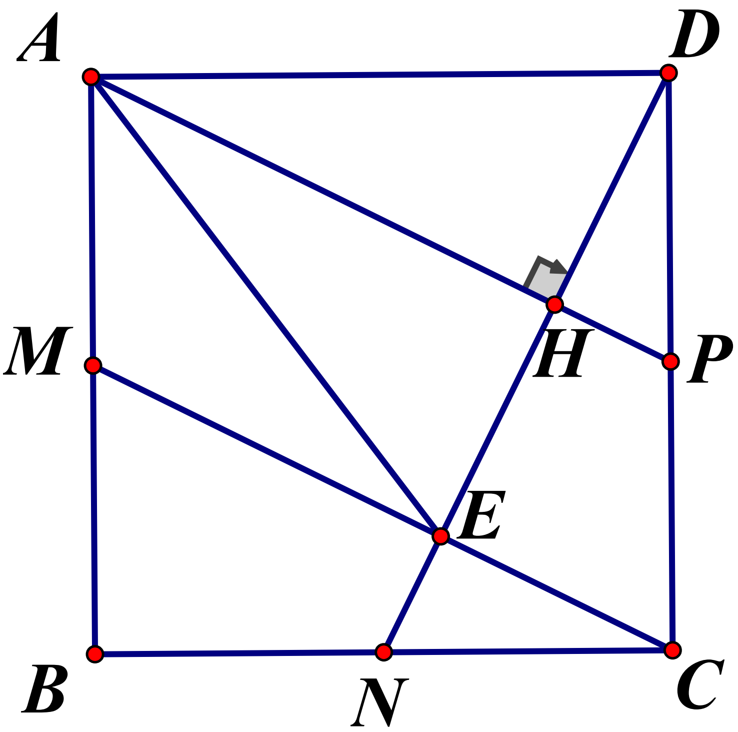
Do $AM = \frac{1}{2}BC$ nên $\triangle$MAC cân tại M, suy ra $\widehat{MAC} = \widehat{MCA}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{EDA} = \widehat{MCA}$. Khi đó ED//MC $\Rightarrow \frac{DA}{DC} = \frac{EA}{EM} = \frac{1}{2}$

Do tính chất phân giác, ta có $\frac{AB}{BC} = \frac{DA}{DC}$. Suy ra $\frac{AB}{BC} = \frac{1}{2}$ hay $\widehat{ABC} = 60^0$

b) Cho hình vuông ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và BC, E là giao điểm của CM và DN. Chứng minh tam giác AED cân.

Lời giải



Đặt P là trung điểm của CD, H là giao điểm của AP và DN.

Ta có: tứ giác APCM là hình bình hành (AM = CP và AM//CP) nên PH//CE.

Suy ra PH là đường trung bình của tam giác CDE hay H là trung điểm của DE .

Do đó AH là đường trung tuyến của tam giác AED. (3)

Ta lại có: $\widehat{PAD} = \widehat{NDC}$ (Vì $\triangle$PAD = $\triangle$NDC)

Mà $\widehat{PAD} + \widehat{APD} = 90^0$

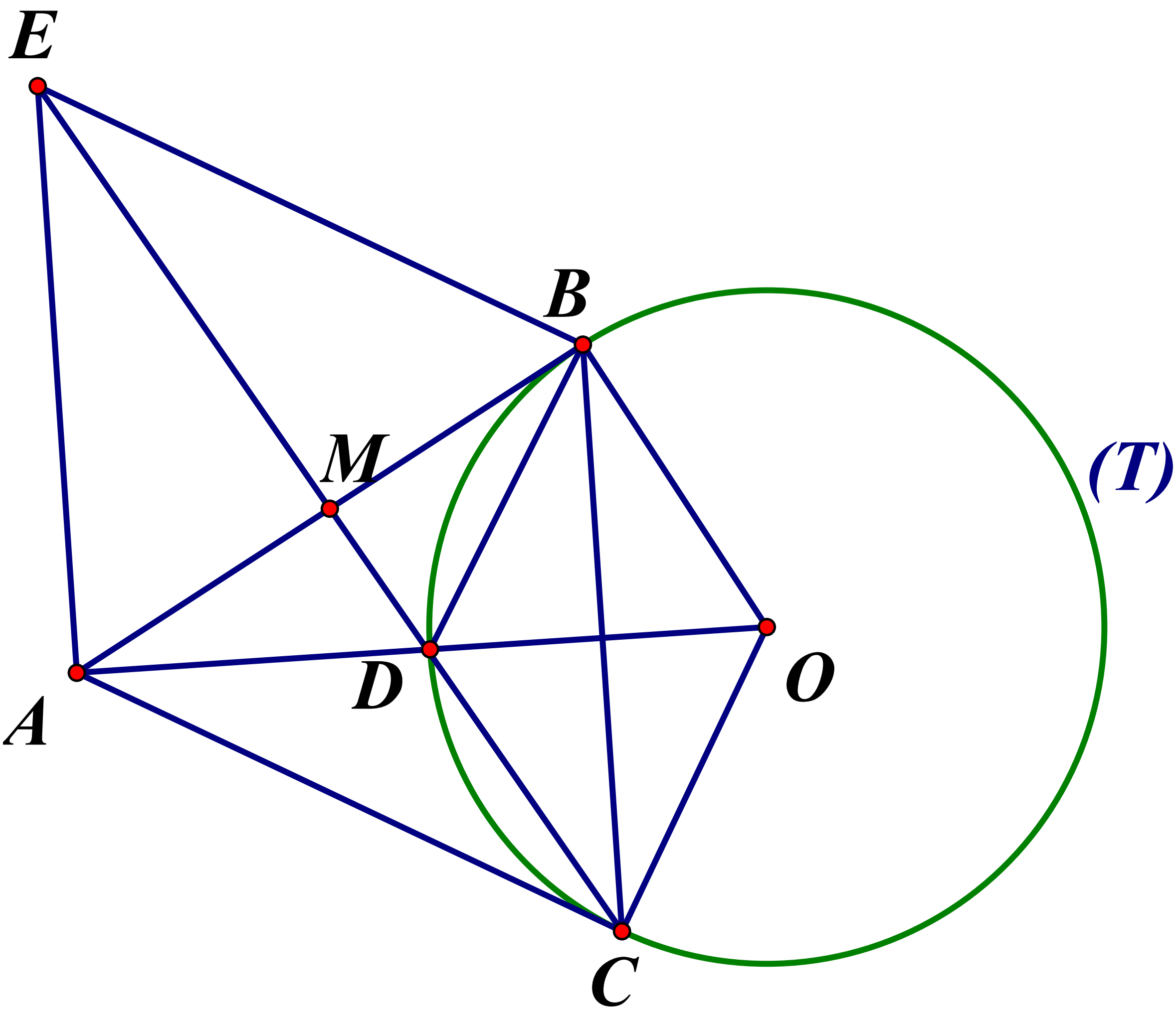
Suy ra $\widehat{NDC} + \widehat{APD} = 90^0$ hay AH $\perp DE$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $\triangle$AED có AH vừa là trung tuyến vừa là đường cao nên $\triangle$AED cân tại H)

Câu 5. (4,0 điểm)

a) Cho điểm A nằm ngoài đường tròn (T), tâm O. Từ điểm A vẽ các tiếp tuyến AB, AC với (T) (B và C là các tiếp điểm). Gọi M là trung điểm của AB, CM cắt (T) tại điểm D (D khác C). Tính $\dfrac{CD.CM}{BC^2}$

Lời giải



Đặt E là điểm đối xứng của C qua M .

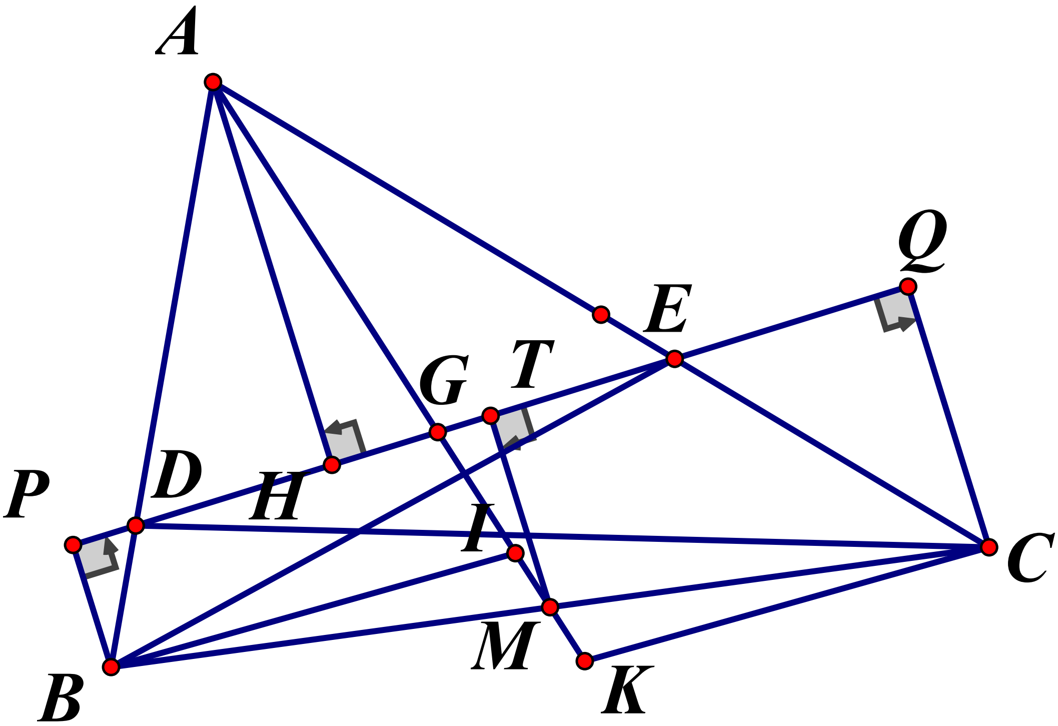
Do $\widehat{ACE} = \widehat{BEC}$ (BCAE là hình bình hành) và $\widehat{ACE} = \widehat{CBD}$ (cùng chắn cung CD)

Suy ra $\widehat{CBD} = \widehat{BEC}$ hay $\triangle$CBD đồng dạng $\triangle$CEB

$$\Rightarrow \frac{BC}{EC} = \frac{CD}{CB} \Rightarrow BC^2 = CD.CE \Rightarrow BC^2 = 2CD.CM \Rightarrow \frac{CD.CM}{BC^2} = \frac{1}{2}$$

b) Cho tam giác ABC (AB < AC) có trọng tâm G và có diện tích bằng 2022. Xét đường thẳng d thay đổi đi qua điểm G và cắt các cạnh AB, AC của tam giác ABC lần lượt tại D và E. Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng diện tích các tam giác BDE và CDE.

Lời giải



Đặt M là trung điểm của BC. Kẻ BI, CK cùng song song với d (I, K thuộc AM). Kẻ BP, AH, MT, CQ cùng vuông góc với d (P, H, T, Q thuộc d); dt: diện tích.

Ta có: △MIB = △MKC nên MI = MK

Ta lại có: $\frac{AB}{AD} + \frac{AC}{AE}\text{¿}\frac{AI}{AG} + \frac{AK}{AG}\text{¿}\frac{AM - \Im + AM + MK}{AG}\text{¿}\frac{2\,AM}{AG}\text{¿}3$

Khi đó: dt△BDE + dt△CDE = $\frac{1}{2}$ DE(BP+CQ) = DE.MT = $\frac{1}{2}$ DE.AH = dt△ADE

Suy ra $\frac{dt\triangle BDE + dt\triangle CDE}{dt\triangle ABC} = \frac{AD}{AB}\cdot\frac{AE}{AC}$

Mà $\frac{AB}{AD}\cdot\frac{AC}{AE} \le \frac{1}{2}\left(\frac{AB}{AD}+\frac{AC}{AE}\right)^2 = \frac{9}{4}$ đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$

Suy ra $\frac{dt\triangle BDE + dt\triangle CDE}{dt\triangle ABC} \ge \frac{4}{9} \Leftrightarrow dt\triangle BDE + dt\triangle CDE \ge \frac{2696}{3}$

Hay $dt\triangle BDE + dt\triangle CDE = \frac{2696}{3}$ khi $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ hay d//BC

Vậy giá trị nhỏ nhất của tổng diện tích các tam giác BDE và CDE bằng $\frac{2696}{3}$

-----------HẾT------------