Giáo trình hình học đại số

Ngô Bảo Châu

bản tháng 8 năm 2003

Lời mở đầu

Trong hình học đại số, các đối tượng hình học được mô tả bằng một ngôn ngữ đại số thuần tuý. Bên ngoài trực quan hình học và đại số hình thức có vẻ đối lập nhau, sự phát triển của hình học đại số trong thế kỷ 20 đã chứng minh điều ngược lại : một ngôn ngữ đại số phù hợp có khả năng diễn đạt trực quan hình học một cách rất chính xác.

Vào cuối thế kỷ 19 hình học đại số đã phát triển mạnh ở Italia với nhữnh tên tuối như Castelnuovo hay Severi, gặt hái được nhiều kết quả đẹp đẽ về các đối tượng tương đối cụ thể như đường cong và mặt đại số. Do thiếu một nền tảng đại số vững chắc, các nhà toán học Italia còn dùng nhiều công cụ giải tích và đôi khi mắc phải những ngộ nhận hình học dẫn đến những chứng minh không đầy đủ. Phải đến Zariski và Weil, đại số giao hoán mới trở thành công cụ chính trong hình học đại số. Vào những năm giữa thập kỷ 20, hình học đại số có thêm một lần lột xác. Nhũng người đi tiên phong trong giai đoạn này là Serre và Grothendieck. Grothendieck sử dụng lý thuyết phạm trù vào hình học đại số một cách có hệ thống. Ý tưởng của ông coi đa tạp đại số như một hàm tử là một ý tưởng then chốt trong lý thyết lược đồ.

Một cái hay của ngôn ngữ hình học đại số là, mặc dù phạm trù và hàm tử là những khái niệm rất trừu tượng, nó cho phép ta diễn đạt một cách trong sáng những trực quan hình học cụ thể nhất và thật sự giúp ta hiểu thêm về những đối tượng cụ thể ví dụ như đường cong, mặt ... Nhưng đó cũng đồng thời là cái khó cho người học hình học đại số và cho người viết giáo trình hình học đại số. Xem các giáo trình tiếng nước ngoài đã có, nổi tiếng nhát là các cuốn của Hartshorne, Mumford, Shafarevich, ta thấy các cuốn này có nội dung rất khác nhau, hầu như ít có phần giao nhau. Người viết cuốn này cũng phải lựa chọn một tuyến đường riêng, để dẫn dắt bạn đọc tham quan xứ sở diệu kỳ của hình học đại số. Theo quan điểm sư phạm riêng, tuyến đường được chọn là các đại lộ chính, có thể không có gì thật ngoạn mục, nhưng nó giúp ta di xa hơn và có thể tránh cho người tham quan có cảm giác bị lạc đường.

Nội dung quyển giáo trình này tất nhiên không có gì mới. Nếu có gì mới thì nó nằm trong cách trình bày và thứ tự sắp xếp các khái niệm. Trong từng phần riêng rẽ, chắc chắn là người viết có vay mượn từ các sách đã có, chủ yếu từ cuốn của Hartshorne và của Mumford. Người viết cũng không hề ngần ngại lược bớt đi hoàn toàn một số chứng minh quá rắc rối hoặc chỉ trình bày chứng minh trong một trương hợp đặc biệt nhưng đặc thù. Các chứng minh chi tiết và đầy đủ thì bạn đọc nếu cần có thể tham khảo sách của Hartshorne. Ở đây, tôi chỉ mong muốn bạn đọc nắm được cách tính toán cụ thể trong một số trương hợp cụ thể và hiểu được nội dung của định lý thông qua các tính toán đó.

Phần I

Đại số

Mục đích của chương này là điểm lại một số khái niệm cơ bản của đại số giao hoán và lý thuyết phạm trù. Tác giả không có tham vọng viết chương này thành một tài liệu tham khảo. Mục đích của nó là điểm lại một số khái niệm cơ bản của đại số giao hoán và lý thuyết phạm trù mà theo chủ quan của mình, tác giả cho là không thiếu được cho người bắt đầu học hình học đại số. Nhiều chứng minh chỉ được trình bày vắn tắt, hoặc thậm chí bỏ qua. Nếu cảm thấy cần thiết, người đọc có thể tham khảo cuốn sách kinh điển về đại số giao hoán của Matsumura hay là cuốn của Atyah và Macdonald.

Ta chú ý đặc biệt đến phạm trù các vành giao hoán và các hàm tử từ phạm trù này vào phạm trù các tập hợp. Khái niệm địa phương hoá trong đại số giao hoán và khái niệm hàm tử biểu diễn được của lý thuyết phạm trù được nhấn mạnh.

Chương 1

Sơ lược về đại số giao hoán

1.1 Vành giao hoán

Trong tập hợp các số nguyên $\mathbb{Z}$ ta có hai phép toán cơ bản là phép cộng và phép nhân. Các phép toán này thỏa mãn một số tính chất như tính giao hoán, tính kết hợp và tính phân phối. Phép cộng có một phần tử đơn vị là 0, phép nhân có một phần tử đơn vị là 1. Vành giao hoán là cấu trúc đại số trừu tượng, mô phỏng các tính chất của phép cộng và phép nhn số nguyên.

Định nghĩa 1 *Vành giao hoán là một tập hợp R cùng với $(+, 0, \times, 1)$ thoả mãn*

- tập R, cùng với phép cộng $+$ và phần tử $0 \in R$ là phần tử đơn vị đối với $+$, tạo thành một nhóm Abel.

-tập R cùng với phép nhân $\times$ và phần tử $1 \in R$ đơn vị với phép ., tạo thành một nửa nhóm Abel, tức là như một nhóm Abel chỉ thiếu tiên đề là mọi phần tử đều nghịch đảo được.

-phép $+$ và phép nhân thoả mãn tính chất phân phối

$$x \times (y + z) = x \times y + x \times z.$$

Tất nhiên ví dụ cơ bản nhất của vành giao hoán chính là vành các số nguyên $\mathbb{Z}$. Tập hợp các số hữu tỉ $\mathbb{Q}$, các số thực $\mathbb{R}$, hay các số phức cũng tạo nên một vành. Tập các đa thức một biến với hệ số nguyên $\mathbb{Z}[x]$, hệ số hữu tỉ $\mathbb{Q}[x]$, hay hệ số phức $\mathbb{C}[x]$ rõ ràng cũng tạo nên một vành.

Ví dụ suy biến và tầm thường là ví dụ một vành với $0 = 1$. Khi đó ta chứng minh được là vành này chỉ có đúng một phần tử.

Định nghĩa 2 *Đồng cấu vành giữa R và R' là một ánh xạ $\phi : R \to R'$ tương thích với các cấu trúc $(+, 0, \times, 1)$ của R và R'.*

Ta lưu ý tới khẳng định hiển nhiên sau đây.

Mệnh đề 3 *Với mọi vành giao hoán R, tồn tại duy nhất một đồng cấu vành $\phi_R : \mathbb{Z} \to R$.*

Với mọi số nguyên dương n, ϕ_R bắt buộc phải gửi n lên phần tử $1 + \cdots + 1$, n lần, của R. Còn nếu n là nguyên âm, ta phải gửi n lên $-\phi_R(-n)$. Dễ thấy ánh xạ định nghĩa như trên là một đồng cấu vành.

Định nghĩa 4 *Một phần tử $x \in R$ được gọi là khả nghịch nếu tồn tại $y \in R$ sao cho $xy = 1$.*

Ta ký hiệu $R^\times$ tập hợp các phần tử khả nghịch của vành R. Vành R được gọi là một **trường** nếu như $R^\times = R - \{0\}$. Ví dụ như vành $\mathbb{Q}$ các số hữu tỉ, hay $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ đều là trường, nhưng $\mathbb{Z}$ thì không. Tập hợp các lớp đồng dư modulo một số nguyên tố p là một trường mà người ta thường ký hiệu là $\mathbb{F}_p$. Các trường hữu hạn $\mathbb{F}_p$ với p nguyên tố, và $\mathbb{Q}$ được gọi là trường nguyên thuỷ, tương tự nhu $\mathbb{Z}$ là vành nguyên thuỷ, do mệnh đề sau đây. Ta có thể chứng minh nó cùng một kiểu như mệnh đề 3.

Mệnh đề 5 *Một trường k bất kỳ hoặc là chứa $\mathbb{Q}$, hoặc là chứa một trong các trường hữu hạn $\mathbb{F}_p$.*

Trong trường hợp đầu, ta nói k là trường có đặc số 0, trong trường hợp sau, k có đặc số p. Hình học đại số trên $\mathbb{Q}$ liên quan đến việc tìm nghiệm hữu tỉ của phương trình đại số. Hình học đại số trên $\mathbb{F}_p$ thì giống như việc giải phương trình đồng dư modulo p.

Định nghĩa 6 *Một phần tử $x \in R$ được gọi là ước số của 0 nếu tồn tại một phần tử $y \in R$ khác 0 sao cho $xy = 0$. Một phần tử $x \in R$ gọi là luỹ linh nếu tồn tại $n \in \mathbb{N}$ sao cho $x^n = 0$.*

Một vành R được gọi là miền nguyên nếu R không chứa các phần tử khác không mà lại là ước số của không. Vành R được gọi là rút gọn nếu R không chứa phần tử khác không mà lại là lũy linh.

1.2 Mođun trên một vành

Định nghĩa 7 *Mođun trên một vành R là một nhòm Abel M cùng với một phép nhân vô hướng $R \times M \to M$ ký hiệu là $(\alpha, x) \mapsto \alpha x$ thoả mãn các tính chất*

-$(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ và $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$,

-$(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$ và $1.x = x$

Đồng cấu R-mođun là một ánh xạ bảo toàn cấu trúc R-mođun.

Ví dụ đơn giản nhất là tập R mà ta có thể xem như một mođun trên R. Cho hai R-mođun bất kỳ M_1, M_2, tích trực tiếp $M_1 \times M_2$ có một cấu trúc R-mođun hiển nhiên $\alpha(x_1, x_2) = (\alpha x_1, \alpha x_2)$. Ta gọi nó là tổng trực tiếp của M_1 và M_2 và ký hiệu là $M_1 \oplus M_2$. Một R-mođun là *mođun tự do cấp n* nếu nó đẳng cấu với $R^n = R \oplus \cdots \oplus R$, n lần.

Định nghĩa 8 *M là một mođun hữu hạn sinh nếu tồn tại một đồng cấu toàn ánh $R^n \to M$ từ một mođun tự do cấp hữu hạn vào M.*

Nói một cách khác, M là hữu hạn sinh nếu tồn tại một số hữu hạn phần tử $x_1, \ldots, x_n \in M$ sao cho mọi phần tử $x \in M$ đều có thể viết được dưới dạng $x = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n$.

Định nghĩa 9 *M là một mođun xạ ảnh nếu tồn tại một R-mođun M' sao cho $M \oplus M'$ là một mođun tự do cấp hữu hạn.*

Một mođun tự do hữu hạn sinh lẽ dĩ nhiên là một mođun xạ ảnh. Mệnh đề ngược lại thì không đúng như ta sẽ thấy ở những chương sau khi nghiên cứu các phân thớ vectơ.

1.3 Iđêan, iđêan nguyên tố và phổ

Môđun con của một R-mođun M là một tập con $N \subset M$, đóng đói với phép cộng và phép nhân vô hướng. Nếu N là một môđun con của M, thương M/N tự động có một cấu trúc R-mođun.

Định nghĩa 10 *Ta xét R như là một mođun trên chính nó. Một iđêan của Rư là một môđun con I của R.*

Nếu I là một iđêan của R, mođun thương R/I tự động có một cấu trúc vành gọi là *vành các dư* của R mođulo I. Thật vậy lớp đồng dư modulo I của tổng hay tích hai phần tử $x, y \in R$ chỉ phụ thuộc vào các lớp đồng dư của x và y modulo Iư. Trong trường hợp $I = R$ ta có vành suy biến chỉ có một phần tử.

Định nghĩa 11 *Iđêan I được gọi là nguyên tố nếu R/I là một miền nguyên. Iđêan I được gọi là tối đại nếu R/I là một trường.*

Đối tượng hình học thông dụng ứng với một vành giao hoán R, là tập phổ $\mathrm{Spec}(R)$ các iđêan nguyên tố của R. Tập phổ này còn được trang bị nhiều cấu trúc khác nữa như cấu trúc tôpô và cấu trúc bó vành mà chúng ta sẽ xem xét kỹ ở chương sau. Hiện tại ta tạm coi $\mathrm{Spec}(R)$ chỉ như một tập hợp, các phần tử của nó được gọi là điểm. Ta cùng nhau khảo sát tập này trong một số trường hợp đơn giản.

Nếu $R = \mathbb{Z}$, tập $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ bao gồm duy nhất một iđêan nguyên tố mà không tối đại là iđêan $\{0\}$. Các iđêan nguyên tố khác đều có một phần tử sinh là một số nguyên tố p nào đó. Điểm tương ứng với iđêan $\{0\}$ gọi là điểm tổng quát. Ta có thể hình dung $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ như một đường cong với mỗi điểm là một số nguyên tố, cộng thêm với một điểm tổng quát.

Vành $\mathbb{C}[x]$ có phổ là một đường cong quen thuộc hơn. Nó cũng chứa một duy nhất một iđêan nguyên tố không tối đại là iđêan $\{0\}$. Các iđêan tối đại được sinh bởi một đơn thức ở dạng $x - \alpha$ với α là một số phức nào đó. Như vậy, phổ của $\mathbb{C}[x]$ là tập các số phức $\mathbb{C}$ có bổ sung thêm một điểm tổng quát.

Nói chung, nếu R là một miền nguyên, iđêan $\{0\}$ là một iđêan nguyên tố. Điểm tương ứng với nó trong phổ của R gọi là *điểm tổng quát*.

Mệnh đề 12 *Với mọi đồng cấu vành $\phi : R \to R'$, tạo ảnh p của môt iđêan nguyên tố p' bất kỳ của R' cũng là một iđêan nguên tố. Tạo ảnh p của môt iđêan tối đại p' bất kỳ của R' cũng là một iđêan tối đại.*

Do p là tạo ảnh của p', đồng cấu vành $R/p \to R'/p'$ cảm sing từ ϕ, là một đơn ánh. Do R'/p' là vành nguyên vẹn nên R/p cũng phải là vành nguyên vẹn. Tương tự nhu vậy, nếu R'/p' là một trường thì R/p cũng phải là một trường.

Như vậy mỗi đồng cấu vành $R \to R'$ cho ta một ánh xạ $\mathrm{Spec}(R') \to \mathrm{Spec}(R)$ từ phổ của R' vào phổ của R.

1.4 Tích tenxơ

Cho M và N là hai R-mođun. Ta có thể đinh nghĩa tích tenxơ $M \otimes_R N$ như sau. Chọn hai hệ sinh $\{x_i | i \in I\}$ của M và $\{y_j \mid j \in J\}$ của N. Ở đây M, N không nhất thiết phải hữu hạn sinh nên các tập I, J không nhất thiết là tập hữu hạn. Xét R-mođun tự do V với cơ sở là các phần tử ký hiệu là $x_i \otimes y_j$ với tập chỉ số là $I \times J$. Xét R-mođun con W sinh bởi các phần tử ở dạng

- hoặc là $\sum_{i \in I} \alpha_i x_i \otimes y_j$ với một chỉ số cố định $j \in J$ nào đó, và với các hệ số α_i bằng không với hầu hết ngoại trừ một số hữu hạn các chỉ số i, sao cho $\sum_{i \in I} \alpha_i x_i = 0$,

- hoạc là $\sum_{j \in J} \alpha_j x_i \otimes y_j$ với một chỉ số cố định $i \in I$ nào đó, và với các hệ số α_j bằng không với hầu hết ngoại trừ một số hữu hạn các chỉ số j, sao cho $\sum_{j \in J} \alpha_j y_j = 0$.

Ta đặt $M \otimes_R N = V/W$.

Mọi phần tử $x \in M, y \in N$ ta có thể viết dưới dạng $x = \sum_{i \in I} \alpha_i x_i$ và $y = \sum_{j \in J} \beta_j y_j$ với α_i, β_j bằng khong với hầu hết các chỉ số ngoại trừ một số hữu hạn các chỉ số i, j. Ta dễ dàng kiểm tra được rằng ảnh của phần tử $\sum_{i,j} \alpha_i \beta_j x_i y_j \in V$ trong V/W không phụ thuộc vào cách viết $x = \sum_{i \in I} \alpha_i x_i$ và $y = \sum_{j \in J} \beta_j y_j$ mà chỉ phụ thuộc vào bản thân x và y. Như vậy ta có một ánh xạ $\phi : M \times N \to M \otimes_R N$ mà ta có thể kiểm tra dễ dàng là một ánh xạ song tuyến tính.

Cặp $(M \otimes_R N, \phi)$ thoả mãn một tính chất phổ dụng.

Mệnh đề 13 *Cho $\psi : M \times N \to L$ là một ánh xạ song tuyến tính. Tồn tại duy nhất một ánh xạ tuyến tính $\psi' : M \otimes_R N \to L$ sao cho $\psi = \psi' \circ \phi$.*

Nhờ vào tính chất phổ dụng, ta thấy rằng cặp $(M \otimes_R N, \phi)$ được xác định duy nhất với sai khác là một đẳng cấu duy nhất. Như vậy nó không phụ thuộc gì vào hệ sinh $\{x_i\}$ và $\{y_j\}$ mà ta chọn trong cách xây dựng.

Dựa theo cách xây dựng ở trên ta thấy việc *tính toán* tích tenxơ không khó. Ví dụ :

- nếu $M = R^I$ và $N = R^J$ là các mođun tự do thì $M \otimes_R N = R^{I \times J}$,

- nếu M là một mođun tự do R^I thì $M \otimes_R N$ chỉ là tổng trực tiếp $\otimes_{i \in I} N_i$ với mỗi N_i là một phiên bản của N,

- nếu $M = R/\mathfrak{p}$ với $\mathfrak{p}$ là một iđêan của R thì $M \otimes N = N/\mathfrak{p}N$ với $\mathfrak{p}N$ là mođun con của N sinh bởi các phần tử có dạng αy với $\alpha \in \mathfrak{p}$ và $y \in N$.

Định nghĩa 14 *Cho R là một vành giao hoán bất kỳ. Một R-đại số là một vành giao hoán R' cùng với một đồng cấu vành $\phi : R \to R'$. Đồng cấu giữa hai R-đại số (ϕ_1, R_1) và (ϕ_2, R_2) là một đồng cấu vành $\psi : R_1 \to R_2$ sao cho $\psi \circ \phi_1 = \phi_2$.*

Cho R' là một R-đại số và M là một R-mođun. Ta xét tích tenxơ $M \otimes_R R'$ với R' chỉ xem như là R-mođun. Dễ thấy $M \otimes_R R'$ có một cấu trúc R'-mođun cho bởi $\beta(m \otimes \alpha) = m \otimes (\alpha\beta)$ với mọi $m \in M$ và $\alpha, \beta \in R'$. N ếu M là một R-mođun tự do, hoặc là hữu hạn sinh, hoặc là xạ ảnh, thì $M \otimes_R R'$ cũng là một mođun tự do, hoặc là hữu hạn sinh, hoặc là xạ ảnh.

Có một tính chất bắc cầu đáng lưu ý là với mọi R-mođun M, R-đại số R' và R'-đại số R'', ta có

$$(M \otimes_R R') \otimes_{R'} R'' = M \otimes_R R''.$$

Cho R' và R'' là hai R-đại số. Xem chúng như là các R-mođun, ta có thể xét $R' \otimes_R R''$. Ta có hai cấu đồng cấu R-đại số $\phi' : R' \to R' \otimes_R R''$ và $\phi'' : R'' \to R' \otimes_R R''$ được xác định bởi $\phi'(x') = x' \otimes 1$ và $\phi''(x'') = 1 \otimes x''$. Bộ ba $(R' \otimes_R, R''; \phi', \phi'')$ cũng thoả mãn một tính chất phổ dụng.

Mệnh đề 15 *Cho một R-đại số S và hai đồng cấu R-đại số $\psi' : R' \to S$ và $\psi'' : R'' \to S$. Khi đó tồn tại duy nhất một đồng cấu R-đại số $\psi : R' \otimes_R R'' \to S$ sao cho $\psi' = \psi \circ \phi'$ và $\psi'' = \psi \circ \phi''$*

Việc tính toán tích tenxơ $R' \otimes_R R''$ với R' và R''-là R-đại số cũng không có gì là khó khăn. Chẳng hạn nếu $R' = R[x_1, \ldots, x_n]/\langle f_1, \ldots, f_m \rangle$ là vành các đa thức n-biến chia cho môt iđêan hữu hạn sinh nào đó, thì

$$R' \otimes_R R'' = R''[x_1, \ldots, x_n]/\langle f_1, \ldots, f_m \rangle.$$

1.5 Địa phương hoá và vành địa phương

Khái niệm *địa phương hoá* là một khái niệm then chốt trong hình học đại số. Phép toán ngược của nó là *phép dán* cho phép ta chuyển từ đại số giao hoán sang hình học đại số. Tuy là phép toán ngược nhưng phép dán cũng được xây dựng trên cơ sở của phép địa phương hoá.

Cho một vành giao hoán R, một tập con S của R được gọi là một *tập nhân* nếu $1 \in S$ và với mọi $x, y \in S$, ta có $xy \in S$.

Định nghĩa 16 *Địa phương hoá của vành R đối với tập nhân S là tập các lớp tương đương*

$$S^{-1}R = \{(x, s) \in R \times S\}/\sim$$

với $(x_1, s_1) \sim (x_2, s_2)$ nếu tồn tại $s \in S$ sao cho $s(x_1 s_2 - x_2 s_1) = 0$.

Ký hiệu lớp tương đương của (x, s) là x/s. Tồn tại trên tập $S^{-1}R$ một cấu trúc vành duy nhất sao cho $x_1/s_1 + x_2/s_2 = (x_1 s_2 + x_2 s_1)/s_1 s_2$ và $(x_1/s_1)(x_2/s_2) = x_1 x_2/s_1 s_2$.

Phần thứ hai của định nghĩa trên thật ra là một mệnh đề. Ta cần kiểm tra rằng phép cộng và phép nhân cho như trên xác định duy nhất một cấu trúc vành trên tập các lớp tương đương $S^{-1}R$. Bạn đọc cẩn thận có thể dễ dàng tự kiểm tra khẳng định này và cả mệnh đề sau đây.

Mệnh đề 17 *Tồn tại duy nhất một đồng cấu vành $\phi : R \to S^{-1}R$ với $\phi(x) = x/1 \in S^{-1}R$. Đồng cấu ϕ thoả mãn tính chất : ảnh $\phi(s)$ của mọi phần tử $s \in S$ là khả nghịch trong $S^{-1}R$. Ngược lại, mọi đồng cấu vành $\phi' : R \to R'$ sao cho $\phi(s) \in R'$ khả nghịch với mọi $s \in S$, đều phân tích được một cách duy nhất thành $\phi' = \psi \circ \phi$ với $\psi : S^{-1}R \to R'$ là một đồng cấu vành.*

Ta có thể dễ dàng mô tả phổ của vành địa phương hoá $S^{-1}R$ như một tập con của phổ của R.

Mệnh đề 18 *Đồng cấu vành $\phi : R \to S^{-1}R$ cảm sinh một ánh xạ chuẩn tắc $\mathrm{Spec}(S^{-1}R) \to \mathrm{Spec}(R)$. Ánh xạ này là đơn ánh, ảnh của nó là tập các iđean nguyên tố của R không chứa bât kỳ một phần tử nào của S.*

Cho p là một iđêan nguyên tố bất kỳ của R. Tập con p' của $S^{-1}R$ các phần tử có dạng x/s với $x \in p$ và $s \in S$ là một mođun con của $S^{-1}R$ xem như mođun con trên chính nó. Nó bằng chính $S^{-1}R$ nếu và chỉ nếu $p \cap S \neq \emptyset$. Trong trường hợp ngươc lại, p' nhất thiết là một iđêan nguyên tố và $\phi^{-1}(p') = p$.

Ta xét hai ví dụ mà ta sẽ còn gặp lại ở các chương sau. Cho $f \in R$ là một phần tử bất kỳ của vành R. Đặt $S = \{1, f, f^2, \ldots\}$ là tập nhân tối thiểu chứa f. Khi đó tồn tại một song ánh chuẩn tắc giữa tập $\mathrm{Spec}(S^{-1}R)$ và tập con của $\mathrm{Spec}(R)$ bao gồm các iđêan nguyên tố của R không chứa phần tử f.

Trong ví dụ thứ hai ta lấy một iđêan nguyên tố p bất kỳ và lấy S là phần bù $S = R - p$. Vì p là một iđêan nguyên tố cho nên S là một tập nhân.

Phổ của vành $S^{-1}R$ là tập các iđêan của R không có giao với S. Nói một cách khác $\mathrm{Spec}(S^{-1}R)$ là tập các iđêan của R bị chứa trong p. Iđean p của R tương ứng với iđêan tối đại duy nhất của $S^{-1}R$. Vành $S^{-1}R$ là một vành địa phương theo nghĩa sau đây.

Định nghĩa 19 *Một vành là vành địa phương nếu nó có duy nhất một iđêan tối đại.*

Nói chung tất cả các vành địa phương đều được xây dựng bằng cách địa phương hoá như ở trên. Địa phương hoá theo tập nhân S là phần bù của một iđêan nguyên tố p, ta nhận được một vành địa phương với iđêan tối đại là iđêan sinh bởi ảnh của p. Ngược lại, nếu p đã là iđêan tối đại của một vành địa phương R rồi, mọi phần tử của $R-p$ đều nghịch đảo được cho nên địa phương hoá theo $R-p$ không làm thay đổi vành R.

Từ giờ trở đi, với mọi vành R, với mọi iđêan nguyên tố p, ta sẽ *ký hiệu* R_p là vành địa phương xây dựng bằng cách địa phương hoá R theo tạp nhân $R-p$.

Trong một vành nguyên vẹn R, iđêan $\{0\}$ là một iđêan nguyên tố, tương ứng với điểm tổng quát của $\mathrm{Spec}(R)$. Vậy nên tập $R-\{0\}$ là một tập nhân. Địa phương hóa R theo tập nhân này cho ta một trường vì mọi phần tử khác 0 của R đều trở nên nghịch đảo được. Người ta gọi trường này là *trường các thương* của R và ký hiệu là $K(R)$.

Bạn đọc có thể tự kiểm tra mệnh đề sau đây.

Mệnh đề 20 *Cho p là một iđêan nguyên tố của một vành giao hoán R bất kỳ. Vành các thặng dư R/p là vành nguyên vẹn, ký hiệu $K(R/p)$ là trường các thương của R/p. Ký hiệu (p) là iđêan tối đại của vành địa phương R_p. Khi đó ta có*

$$R_p/(p) = K(R/p).$$

Như vậy mỗi iđêan nguyên tố p của R cho ta một đồng cấu vành từ R vào trường $R_p/(p)$. Ngược lại, nếu ta có một đồng cấu $\phi : R \to K$ từ R vào một trường K, tạo ảnh của $\{0\}$ là một iđêan nguyên tố. Lẽ dĩ nhiên, K chỉ chứa chứ không nhất thiết phải bằng $R_p/(p)$.

Ta có thể hình dung các phần tử của R như các hàm số trên tập $\mathrm{Spec}(R)$. Cho một điểm $p \in \mathrm{Spec}(R)$ và $f \in R$, giá trị của f tại R là ảnh của f qua đồng cấu $R \to R_p/(p)$. Khác với các hàm số thông thường, ở đây tập các giá trị là một trường biến thiên theo p.

Ta cũng nhận xét thêm là nếu f là một phần tử lũy linh của R, ảnh của f qua mọi đồng cấu vành $\phi : R \to K$ vào một trường K, đều bằng 0. Vậy nên nếu chỉ xét R như tập các hàm số trên tập phổ như trên đây, ta bị mất các thông tin về các phần tử lũy linh.

Ta đi đến khái niệm địa phương hoá của một mođun. Cho M là một R-mođun, S là một tập nhân của R. Cách ngắn gọn nhất để định nghĩa là đặt địa phương hoá $S^{-1}M$ của M theo tập nhân S bằng

$$S^{-1}M = M \otimes_R S^{-1}R.$$

Ta cũng có thể định nghĩa $S^{-1}M$ như là tập các lớp tương đương $(m, s) \in M \times S$ theo quan hệ $(x_1, s_1) \sim (x_2, s_2)$ nếu tồn tại $s \in S$ sao cho $s(x_1 s_2 - x_2 s_1) = 0$. Định nghĩa đầu tuy có kém cụ thể nhưng dễ nhớ và dễ sử dụng hơn. Chẳng hạn, chỉ qua công thức định nghĩa, ta thấy ngay $S^{-1}M$ là $S^{-1}R$-mođun.

Nếu p là một iđean nguyên tố, ta *ký hiệu* M_p là địa phương hoá của M theo tập nhân $R - p$. Ta còn có

$$M_{(p)} = M_p \otimes_{R_p} (R_p/(p))$$

là một không gian vectơ trên trường $(R_p/(p))$.

Ta có thể hình dung M như một họ các không gian vectơ $M_{(p)}$ biến thiên theo $p \in \mathrm{Spec}(R)$. Hình dung như vậy ta vẫn nắm được mọi thông tin về M, trừ các thông tin có liên quan đến các phần tử lũy linh của R.

1.6 Mođun trên một vành địa phương

Cho R là một vành địa phương. Ta ký hiệu $\mathfrak{m}$ là iđean tối đại của R và k là trường các dư $R/\mathfrak{m}$. Định lý sau, mà người ta thường gọi là bổ đề Nakayama bất chấp sự phản đối của nhà toán học Nhật này, đóng một vai trò cơ bản trong hình học đại số.

Định lý 21 *Cho M là một mođun hữu hạn sinh trên vành địa phương R. Chọn một cơ sở $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_m$ của k-không gian vectơ $\bar{M} \otimes_R k$. Chọn các phần tử $x_1, \ldots, x_m$ của M sao cho ảnh của x_i trong $\bar{M}$ là $\bar{x}_i$. Gọi $\phi : R^m \to M$ là cấu xạ xác định bởi $x_1, \ldots, x_n$. Khi đó ϕ là một toàn cấu. Nếu M là một mođun tự do thì ϕ là một đẳng cấu.*

Ký hiệu N là ảnh của cấu xạ $\phi : R^n \to M$ và $N' = M/N$. Ta cần chứng minh rằng $N' = 0$. Vì M là một mođun hữu hạn sinh nên thương của nó N' cũng là hữu hạn sinh. Chọn $y'_1, \ldots, y'_n$ là một hệ sinh của N'. Chọn các phần tử $y_1, \ldots, y_n$ của M sao cho ảnh của y_i trong N' là y'_i. Đặt $\bar{y}_i$ là ảnh của y_i trong $\bar{M}$. Viết nó theo cơ sở $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$ của $\bar{M}$ ta có :

$$\bar{y}_i = \sum_{j=1}^{m} \bar{\alpha}_{ij}\bar{x}_j.$$

Chọn $\alpha_{ij} \in R$ có ảnh là $\bar{\alpha}_{ij} \in k$. Ta có

$$y_i - \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij}x_j \in \mathfrak{m}M.$$

Ảnh của phần tử này trong N' là $\bar{y}_i$ vì $x_j \in N$, cho nên $\bar{y}_i$ thuộc $\mathfrak{m}N'$. Vậy nên ta có thể viết $\bar{y}_i$ dưới dạng

$$\bar{y}_i = \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij}\bar{y}_j$$

với các hệ số $\beta_{ij} \in \mathfrak{m}$.

Ta có phương trình tuyến tính $\mathrm{Id}_n\bar{y} = \beta\bar{y}$ với β là ma trận β_{ij}, với $\bar{y}$ là vectơ cột $(\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n)$. Nhận xét rằng định thức của ma trận $\mathrm{Id}_n - \beta$ là một phần thử trong R với ảnh bằng 1 trong trường các dư k, cho nên nó là một phần tử khả nghịch của R. Theo công thức Cramer thì bản thân ma trận $\mathrm{Id}_n - \beta$ là ma trận khả nghịch. Vậy nên vectơ $\bar{y}$ bằng không và vì thế N' cũng bằng không.

Mệnh đề thứ hai của định lý cũng chứng minh tương tự như vậy. Giả sử M là một R-mođun tự do với cơ sở là $v_1, \ldots, v_r$. Rõ ràng là các ảnh $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_r$ trong $\bar{M}$ là một cơ sở của không gian vectơ $\bar{M}$, cho nên $r = n$. Cấu xạ $\phi : R^n \to M$ xác định bởi các phần tử $x_1, \ldots, x_n$ có thể viết dưới dạng một ma trận vuông ϕ_{ij} với

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} \phi_{ij}v_j.$$

Rõ ràng là cấu xạ cảm suy $\bar{\phi} : k^n \to \bar{M}$ là một đẳng cấu giữa các không gian vectơ cho nên định thức của $\bar{\phi}$ là $\det(\bar{\phi}) \in k^{\times}$. Vậy $\det(\phi) \in R^{\times}$ và vì thế ϕ là một ma trận khả nghịch, hay nói cách khác $\phi : R^n \to M$ là một đẳng cấu.

Hệ quả 22 *Mọi mođun xạ ảnh hữu hạn sinh M trên vành địa phương R đều là mođun tự do.*

Vì M là xạ ảnh nên theo định nghĩa, tồn tại một mođun M' sao cho $M \oplus M'$ đẳng cấu với một mođun tự do R^n. Đặt $\bar{M} = M \otimes_R k$ và $\bar{M}' = M' \otimes_R k$. Ta có $\bar{M} \oplus \bar{M}' = k^n$. Chọn $x_1, \ldots, x_m \in M$ sao với ảnh $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_m \in \bar{M}$ là một cơ sở của $\bar{M}$. Tương tự ta chọn $x'_1, \ldots, x'_{m'} \in M'$ sao với ảnh $\bar{x}'_1, \ldots, \bar{x}'_{m'} \in \bar{M}'$ là một cơ sở của $\bar{M}'$. Các phần tử này xác định các cấu xạ $\phi : R^m \to M$ và $\phi' : R^{m'} \to M'$ mà ta biết theo bổ đề Nakayama ở trên, là những cấu xạ toàn ánh. Ta còn biết là $\phi \oplus \phi' : R^{m+m'} \to R^n$ là một đẳng cấu, vì thế cả ϕ và ϕ' đều là đơn ánh. Vậy nên ϕ là một đẳng cấu.

1.7 Vành Noether và đại số dạng hữu hạn

Để xét các vấn đề có tính định tính, người ta hay cần đến một số tính chất hữu hạn. Một trong những khái niệm quan trọng nhất là khái niệm vành Noether.

Định nghĩa 23 *Một vành R là vành Noether nếu mọi dãy tăng các iđêan của R*

$$I_1 \subset I_2 \subset \cdots \subset I_n \subset \cdots$$

đều là dãy dừng.

Mệnh đề 24 *Cho M là một mođun hữu hạn sinh trên một vành Noether R. Khi đó, mọi mođun con $M' \subset M$ cũng đệu là hữu hạn sinh. Đặc biệt với $M = R$, mọi iđêan I của một vành Noether R, xem như R-mođun, đều là hữu hạn sinh.*

Trước hết ta xét trường hợp đặc biệt $M = R$. Nếu tồn tại một iđêan I không hữu hạn sinh, ta có thể xây dưng được một dãy tăng mà không dừng các iđêan con của I, mâu thuẫn với giả thiết Noether của R.

Tron trường hợp tổng quát, do M là hữu hạn sinh, tồn tại một đồng cấu toàn ánh $R^n \to M$ và ta có thể quy về trường hợp đăc biệt các mođun tự do $M = R^n$. Trường hợp $M = R^n$ lại có về quy về trường hợp $M = R$ bằng qui nạp.

Hầu hết các vành giao hoán quen thuộc đều là vành Noether. Một trường bất kỳ hiển nhiên là vành Noether bởi vì nó có một iđêan duy nhất là iđêan

$\{0\}$. Vành $\mathbb{Z}$ các số nguyên cũng là vành Noether. Các vành đa thức cũng là vành Noether nhờ vào định lý cơ bản sau đay của Hilbert.

Định lý 25 (Hilbert) *Nếu R là một vành Noether thì vành $R[x_1, \ldots, x_n]$ các đa thức n biến với hệ số trong R cũng là vành Noether.*

Chứng minh định lý Hilbert tương đối dài và vượt quà khuôn khổ của chương này. Bạn đọc có thể tham khảo trong các sách khác để tìm hiểu cách chứng minh của nó.

Mệnh đề 26 *Cho R là một vành Noether, I là một iđêan của R. Khi đó $\bar{R} = R/I$ cũng là một vành Noether. Cho S là một tập nhân của R. Khi đó địa phương hóa $S^{-1}R$ cũng là vành Noether.*

Ký hiệu $\phi : R \to \bar{R} = R/I$. Môt dãy tăng $\bar{I}_1 \subset \bar{I}_2 \subset \cdots$ các iđêan của $\bar{R}$ cho ta một dãy tăng $I_1 \subset I_2 \subset \cdots$ các iđêan của R vói $I_i = \phi^{-1}(\bar{I}_i)$. Do ϕ là toàn cấu, $\bar{I}_i = \phi(\phi^{-1}(I_i))$. Do R là Noether, dãy I_i là dãy dừng, vậy nên dãy $\bar{I}_i$ cũng phải là dãy dừng.

Ký hiệu $R' = S^{-1}R$ và $\phi : R \to R'$. Cho $I'_1 \subset I'_2 \subset \cdots$ là một dãy tăng các iđêan của R', ta có một dãy tăng $I_1 \subset I_2 \subset \cdots$ các iđêan của R với $I_i = \phi^{-1}(I'_i)$. Dễ thấy $I'_i = S^{-1}I_i$. Do I_i là dẫy dừng nên I'_i cũng phải là dãy dừng.

Định nghĩa 27 *Một R-đại số R' được gọi là có dạng hữu hạn nếu tồn tại một đồng cấu R-đại số toàn ánh $\psi : R[x_1, \ldots, x_n] \to R'$ từ một vành đa thức với hữu hạn biến vào R'.*

Giả sử R là một vành Noether. Theo đinh lý Hilbert các vành đa thức $R[x_1, \ldots, x_n]$ cũng sẽ là Noether. Vậy nên mọi thương $R' = R[x_1, \ldots, x_n]/I$ cũng là Noether. Nhận xét thêm rằng iđêan I bắt buộc là hữu hạn sinh, cho nên R' phải có dạng

$$R' = R[x_1, \ldots, x_n]/\langle f_1, \ldots, f_m\rangle$$

với $\langle f_1, \ldots, f_m\rangle$ là iđêan sinh bởi các phần tử $f_1, \ldots, f_m \in R$.

Chương 2

Sơ lược về lý thuyết phạm trù

Phạm trù đơn giản nhất là phạm trù các tập hợp. Nhưng nếu lấy tập hợp của tất cả các tập hợp, ta có thể rơi vào vòng luẩn quẩn của lôgic. Để tránh cái vòng luẩn quẩn này, người ta đã đưa ra khái niệm tập hợp "nhỏ" đối với một vũ trụ nào đó. Tập các tập hợp nhỏ thì không còn là nhỏ nữa. Khái niệm vũ trụ do Grothendieck vượt ra ngoài phạm vi của cuôn giáo trình này và ra ngoài tầm hiểu biết của người viết, vậy nên ta sẽ ngầm qui ước với nhau về sự tồn tại của một vũ trụ mà trong đó ta có thề nói đến phạm trù các tập hợp mà không rơi vào lòng luẩn quẩn.

2.1 Phạm trù, hàm tử và cấu xạ giữa các hàm tử

Lý thuyết phạm trù có ba khái niệm chính là phạm trù, hàm tử giữa hai phạm trù và cấu xạ giữa hai hàm tử.

Định nghĩa 1 *Cho một phạm trù $\mathcal{C}$ là cho các dữ kiện thỏa mãn các tính chất như sau.*

1. Ta có một tập hợp $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ *các vật của* $\mathcal{C}$ *và một tập hợp* $\mathrm{Hom}(\mathcal{C})$ *các đồng cấu của* $\mathcal{C}$*. Ta có một ánh xạ*

$$s \times b : \mathrm{Hom}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \times \mathrm{Ob}(\mathcal{C}),$$

trong đó ánh xạ thứ nhất $s : \mathrm{Hom}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ *gọi là ánh xạ nguồn và ánh xạ thứ hai* $b : \mathrm{Hom}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ *gọi là ánh xạ* *đích. Với mọi $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, đặt $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ là tập các đồng cấu $\phi \in \mathrm{Hom}(\mathcal{C})$ với nguồn là A và đích là B.*

2. Với mỗi $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ ta có một phần tử $\mathrm{id}_A \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A)$ gọi là đồng cấu đơn vị của A. Với mọi $A, B, C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ ta có một ánh xạ

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C)$$

gọi là phép hợp thành ký hiệu là $(\phi, \psi) \mapsto \psi \circ \phi$ thỏa mãn hai tính chất sau :

a) *cho $A_i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ với $i = 0, 1, 2, 3$ và cho $\phi_i \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A_{i-1}, A_i)$, ta có*

$$(\phi_2 \circ \phi_1) \circ \phi_0 = \phi_2 \circ (\phi_1 \circ \phi_0),$$

b) *cho $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ ta có $\phi \circ \mathrm{id}_A = \mathrm{id}_B \circ \phi = \phi$.*

Ví dụ điển hình là phạm trù **Set** mà vật là các tập hợp và đống cấu là các ánh xạ tập hợp. Ta còn có phạm trù **Ring** mà vật là các vành giao hoán và đồng cấu là các đồng cấu vành. Tương tự như vậy, với mọi vành R ta có phạm trù $R-$**Alg** mà vật là các R-đại số và đồng cấu là các đồng cấu R-đại số.

Cho một phạm trù $\mathcal{C}$ và cho một tập con $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}')$ của tập $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, ta sẽ có một phạm trù mới $\mathcal{C}'$ mà vật là các phần tử của $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}')$ và với $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(A, B) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$; các đồng cấu đơn vị id_A và phép hợp thành cũng cảm sinh từ $\mathcal{C}$. Các phạm trù như vậy gọi là *phạm trù con đầy* của $\mathcal{C}$. Ví dụ như phạm trù các tập hợp hữu hạn là phạm trù con đầy của **Set**, nhưng phạm trù **Ring** không là phạm trù con đầy của **Set** vì một ánh xạ giữa hai vành giao hoán không nhất thiết là một đồng cấu vành.

Định nghĩa 2 *Cho một hàm tử F từ một phạm trù $\mathcal{C}$ vào một phạm trù $\mathcal{C}'$ là cho các dữ kiện thỏa mãn các tính chất như sau :*

1. Ta có một ánh xạ $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Ob}(\mathcal{C}')$ ký hiệu là $A \mapsto FA$.

2. Với mọi $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ ta có một ánh xạ

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(FA, FB)$$

ký hiệu là $\phi \mapsto F(\phi)$ thòa mãn :

a) *$F(\phi \circ \psi) = F(\phi) \circ F(\psi)$.*

b) *$F(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{FA}$.*

Ví dụ tầm thường nhất là hàm tử đơn vị $\mathrm{id}_{\mathcal{C}}\mathcal{C} \to \mathcal{C}$ cho ứng với mỗi vật của $\mathcal{C}$ chính vật ấy và cho ứng với mỗi đồng cấu của $\mathcal{C}$
chính đồng cấu ấy.

Ta còn có một hàm tử hiển nhiên **Ring** $\to$ **Set** ứng với mỗi vành R là tập R bỏ đi cấu trúc vành, ứng vưói mỗi đồng cấu vành là ánh xạ giữa hai tập hợp. Tương tự như vậy với mọi vành R, ta cũng có hàm tử $R-$**Alg** $\to$ **Ring**. Các hàm tử như trên có tên chung là *hàm tử quên*.

Ta có môt ví dụ thú vị hơn như sau. Cho $\mathcal{C}$ là một phạm trù bất kỳ và cho A là một vật của $\mathcal{C}$. Ta có một hàm tử

$$h_A : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$$

ứng với mỗi vật $B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ là tập $h_A(B) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$, ứng với mỗi đồng cấu $\phi : B \to C$ là ánh xạ

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C)$$

cho bởi $\psi \mapsto \phi \circ \psi$.

Định nghĩa 3 *Một hàm tử $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ được gọi là chung thủy nếu với mọi $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ ánh xạ $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(FA, FB)$ là đơn ánh. Nếu ánh xạ này luôn luôn là song ánh thì hàm tử F được gọi là hàm tử đầy và chung thủy.*

Định nghĩa 4 *Cho F, F' là hai hàm tử từ phạm trù $\mathcal{C}$ vào phạm trù $\mathcal{C}'$. Cho một cấu xạ $f : F \to F'$ là cho một đồng cấu $f(A) : F(A) \to F'(A)$ với mỗi $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, thỏa mãn tính chất sau. Với mọi $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ ta có một sơ đồ giao hoán :*

$$\begin{array}{ccc} FA & \xrightarrow{f(A)} & F'A \\ {\scriptstyle F(\phi)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F'(\phi)} \\ FB & \xrightarrow[f(B)]{} & F'B \end{array}$$

Ví dụ tầm thường nhất là lấy $F = F'$. Khi đó ta có cấu xạ đơn vị id_F cho ứng với mỗi vật $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ là đồng cấu $\mathrm{id}_F(A) = \mathrm{id}_{FA} : FA \to FA$.

Định nghĩa 5 *Một cẫu xạ hàm tử $f : F \to F'$ là môt đẳng cấu nếu tồn tại $f' : F' \to F$ sao cho $f \circ f' = \mathrm{id}_{F'}$ và $f' \circ f = \mathrm{id}_F$.*

Một hàm tử $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ là một tương đương phạm trù nếu tồn tại một hàm tử $F' : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$ sao cho $F \circ F'$ đẳng cấu với hàm tử đơn vị $\mathrm{id}_{\mathcal{C}'}$ và $F' \circ F$ đẳng cấu với $\mathrm{id}_{\mathcal{C}}$.

Xin lưu ý rằng trong định nghĩa tương đương phạm trù, người ta không đòi hỏi $F \circ F' = \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$ mà chỉ đòi hỏi một một cái yếu hơn là $F \circ F'$ đẳng cấu $\mathrm{id}_{\mathcal{C}}$. Đây là một trong những điểm khác nhau cơ bản giữa lý thuyết phạm trù và lý thuyết tập hợp.

2.2 Phạm trù đối

Định nghĩa 6 *Cho $\mathcal{C}$ là một phạm trù. Phạm trù đối $\mathcal{C}^{\mathrm{opp}}$ của $\mathcal{C}$ là phạm trù mà các vật vẫn là các vật của $\mathcal{C}$ nhưng các đồng cấu thì bị đổi chiều có nghĩa là*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{opp}}}(A, B) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A).$$

Phép hợp thành trong $\mathcal{C}^{\mathrm{opp}}$ là phép hợp thành trong $\mathcal{C}$ mà ta chỉ đảo thứ tự các đồng cấu. Cho $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{opp}}}(A, B)$ và $\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{opp}}}(B, C)$ thì hợp thành $\psi \circ \phi$ trong $\mathcal{C}^{\mathrm{opp}}$ là hợp thành $\phi \circ \psi$ trong $\mathcal{C}$.

Khái niệm phạm trù đối quả là vô vị nếu nó không phản ánh sự đối ngẫu cơ bản giữa đại số và hình học. Như ta sẽ thấy ở chương sau, phạm trù các lược đồ aphin có thể coi như phạm trù đối của phạm trù **Ring** các vành giao hoán. Với mọi vành giao hoán A, phổ $\mathrm{Spec}(A)$ có thể xem như vật tương ứng với A trong phạm trù $\mathbf{Ring}^{\mathrm{opp}}$.

2.3 Định lý Yoneda

Ta đi đến một điểm then chốt của lý thuyết phạm trù. Cho $\mathcal{C}$ là một phạm trù bất kỳ. Xét phạm trù $\mathbb{F}(\mathcal{C})$ mà các vật là các hàm tử $F : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$. Cho $F, F' : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ hai vật của $\mathbb{F}(\mathcal{C})$ ta đặt $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}(\mathcal{C})}$ là tập các cấu xạ $f : F \to F'$ từ hàm tử F vào hàm tử F'. Trong $\mathbb{F}(\mathcal{C})$ ta có các đồng cấu đơn vị id_F hiển nhiên và phép hợp thành hiển nhiên.

Như ta đã thấy trong các ví dụ hàm tử, với mọi vật $A \in \mathrm{Ob}\mathcal{C}$, ta có một hàm tử $h_A : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ cho bởi $B \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$. Nếu ta có một đồng cấu $\phi : A \to A'$ thì ta có một cấu xạ hàm tử theo chiều ngược lại $h_{A'} \to h_A$. Thật vậy, với mọi $B \in \mathrm{Ob}\mathcal{C}$ ta có một ánh xạ

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A', B) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B).$$

cho bởi $\psi \mapsto \psi \circ \phi$. Để kiểm tra rằng các ánh xạ này cho ta một cấu xạ hàm tử, nói cách khác là kiểm tra tính giao hoán của các sơ đồ có dạng

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A', B) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A', B') & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B') \end{array}$$

ta dùng tính kết hợp của phép hợp thành.

Như vậy ta có một hàm tử $h : \mathcal{C}^{\mathrm{opp}} \to \mathbb{F}(\mathcal{C})$.

Định lý 7 (Yoneda) *Hàm tử $h : \mathcal{C}^{\mathrm{opp}} \to \mathbb{F}(\mathcal{C})$ cho bởi $A \mapsto h_A$ xây dựng như ở trên, là một hàm tử đầy và nguyên thuỷ.*

Ta cần chứng minh rằng với mọi $A, A' \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, ánh xạ

$$h : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A') \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}(\mathcal{C})}(h_{A'}, h_A)$$

là một song ánh. Trước hết ta chứng minh nó là đơn ánh. Cho $\phi, \phi' \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A')$. Lấy $B = A'$ và $\phi = \mathrm{id}_{A'} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A', A')$. Ta có $h(\phi)(\mathrm{id}_{A'}) = \phi$ và $h(\phi')(\mathrm{id}_{A'}) = \phi'$. Nếu $h(\phi) = h(\phi')$ thì ắt ϕ và ϕ' phải bằng nhau.

Chứng minh nó là toàn ánh cũng tương tự như vậy. Cho $f : h_{A'} \to h_A$ là một cấu xạ hàm tử bất kỳ. Ta đặt $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A')$ là phần tử $\phi = f(\mathrm{id}_{A'})$. Dễ dàng kiểm tra được là $h(\phi) = f$.

Định nghĩa 8 *Một hàm tử $F : \mathcal{C} \to$ **Set** được gọi là biểu diễn được nếu tồn tại một vật $A \in \mathrm{Ob}\mathcal{C}$ và một đẳng cấu hàm tử $f : h_A \to F$.*

Cặp (A, f) ở trong định nghĩa trên không nhất thiết là duy nhất, nhưng nếu tồn tại một cặp (A', f') thì $f^{-1}f'$ là một đẳng cấu giữa $\mathbb{Y}(A) \to \mathbb{Y}(A)$. Theo đinh lý Yoneda, hầm tử h là một hàm tử đầy và chung thuỷ cho nên đẳng cấu $f^{-1}f' : h_{A'} \to h_A$ xác định duy nhất một đẳng cấu $\phi : A \to A'$ sao cho $h(\phi) = f^{-1}f'$. Vậy ta có thể nói là nếu hàm tử $F : \mathcal{C} \to$ **Set** là biểu diễn được, thì cái cặp (A, f) biểu diễn nó là *duy nhất với sai khác là một đẳng cấu duy nhất.*

Để tiết kiệm ký hiệu thi người ta thường lờ đi f mà chỉ nói rằng F biểu diễn được bởi A trong đó A được xác định với sai khác là một đẳng cấu duy nhất, dù như thế không được chính xác lắm.

2.4 Ví dụ hàm tử biểu diễn được

Xét hàm tử $\mathbb{A}^1 : \mathbf{Ring} \to \mathbf{Set}$ cho ứng với mỗi vành giao hoán R là tập hợp R bị tước mất cấu trúc vành.

Hàm tử này biểu diễn đươc bởi vành $\mathbb{Z}[t]$ các đa thức với một biến t. Thật vậy, một đồng cấu vành $\phi : \mathbb{Z}[t] \to R$ được xac định duy nhất bởi ảnh $\phi(t) \in R$ vậy nên ta có một đăng cấu hàm tử $h_A \to F$ với $A = \mathbb{Z}[t]$. Ở đây $\mathbb{A}^1$ không hẳn là vành $\mathbb{Z}[t]$, mà chính xác hơn là vật ứng với vành này trong phạm trù $\mathbf{Ring}^{\mathrm{opp}}$ nhúng vào trong $\mathbb{F}(\mathbf{Ring})$. Vậy nên ta có thể viết $\mathbb{A}^1 \simeq \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[t])$.

Tương tự, với mỗi vành giao hoán R hàm tử $F : R - \mathbf{Alg} \to \mathbf{Set}$ cho ứng với mỗi R-đại số R', tập R', có thể biểu diễn được bởi vành $R[t]$. Ta gọi hàm tử này là đường thẳng aphin trên R, ký hiệu là $\mathbb{A}^1_R \simeq \mathrm{Spec}(R[t])$.

Xét hàm tử $\mathbb{G}_m : \mathbf{Ring} \to \mathbf{Set}$ cho ứng với mỗi vành R tập $R^\times$ các phần tử khả nghịch của R. Ta có thể kiểm tra dễ dàng kiểm tra là hàm tử này có thể biểu diễn được bơi vành $\mathbb{Z}[x, y]/\langle xy - 1\rangle$.

Thật vậy, một đồng cấu $\phi : \mathbb{Z}[x, y]/\langle xy-1\rangle \to R$ hoàn toàn được xác định bởi ảnh $\alpha = \phi(x)$ và $\beta = \phi(y)$, với α và β là hai phần tử trong R thỏa mãn $\alpha\beta = 1$. Vì thế phần tử α là một phần tử khả nghịch của R và trong trường hợp này α cũng xác định luôn β. Vậy nên $\mathbb{G}_m \simeq \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[x, y]/\langle xy - 1\rangle)$.

Nêu một ví dụ thú vị khác là ham tử $\mu_n : \mathbf{Ring} \to \mathbf{Set}$ với $n \in \mathbb{N}$. Nó cho ứng với mọi vành R tập hợp các căn bạc n của đơn vị

$$\mu_n(R) = \{x \in R \mid x^n = 1\}.$$

Các phần tử của $\mu_n(R)$ tương ứng 1-1 với các đồng cấu vành

$$\mathbb{Z}[x]/\langle x^n - 1\rangle \to R.$$

Vậy nên $\mu_n = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[x]/\langle x^n - 1\rangle)$.

2.5 Giới hạn quy nạp và giới hạn xạ ảnh

Cho một tập sắp thứ tự bộ phận $\mathcal{J}$.

Cho một hệ qui nạp trong phạm trù tập hợp với tập chỉ số $\mathcal{J}$ là cho các dữ kiện như sau. Với mỗi phần tử $j \in J$, ta cho một tập hợp S_j ; với một cặp $i \leq j$ trong $\mathcal{J}$ ta cho một ánh xạ $s_{ji} : S_i \to S_j$ sao cho $s_{ii} = 1$ và $s_{kj} \circ s_{ji} = s_{ki}$ với mọi $i \leq j \leq k$.

Cho một hệ xạ ảnh trong phạm trù tập hợp với tập chỉ số $\mathcal{J}$ là cho các dữ kiện như sau. Với mỗi phần tử $j \in J$, ta cho một tập hợp S_j ; với một cặp $i \leq j$ trong $\mathcal{J}$ ta cho một ánh xạ $s_{ij} : S_j \to S_i$ sao cho $s_{ii} = 1$ và $s_{ij} \circ s_{jk} = s_{ik}$ với mọi $i \leq j \leq k$.

Ta cũng có thể coi $\mathcal{J}$ là một phạm trù với các vật là phần tử của J, với $\mathrm{Hom}_{\mathcal{J}}(i, j)$ là tập với duy nhất một phần tử hay là tập rỗng tuỳ theo $i \leq j$ hay không. Ngược lại nếu ta có một phạm trù sao cho tập các đồng cấu giữa hai vật chỉ có không hoặc một phần tử, khi đó tập các vật có một quan hệ thứ tự : $i \leq j$ khi và chỉ khi $\mathrm{Hom}_{\mathcal{J}}(i, j)$ khác rỗng. Khi đó một hệ quy nạp các tập hợp là một hàm tử từ $\mathcal{J}$ vào **Set**.

Định nghĩa 9 *Với một phạm trù $\mathcal{C}$ bất kỳ, một hệ quy nạp trong $\mathcal{C}$ với chỉ số trong $\mathcal{J}$ là một hàm tử S từ $\mathcal{J}$ vào $\mathcal{C}$. Tương tự như vậy hệ xạ ảnh trong một phạm trù $\mathcal{C}$ bất kỳ với chỉ số trong $\mathcal{J}$ là một hàm tử S từ $\mathcal{J}$ vào $\mathcal{C}^{\mathrm{opp}}$.*

Giới hạn quy nạp của một hệ quy nạp trong $\mathcal{C}$ là một vật C của $\mathcal{C}$ cùng với các đồng cấu $c_j : S_j \to C$ sao cho vưới mọi $i \leq j$, ta có $c_i = c_j \circ s_{ji}$ sao cho với mọi $(C'; (c'_j)_{j \in J})$ thoả mãn cùng một tính chất như $(C, (c_j)_{j \in J})$, tồn tại duy nhất một đồng cấu $b : C \to C'$ sao cho $c'_j = b \circ c_j$, nói cách khác là cặp $(C, (c_j)_{j \in \mathcal{J})}$ là cặp phổ dụng cho tính chất này.

Giới hạn xạ ảnh của một hệ xạ ảnh trong $\mathcal{C}$ là một vật C cùng với các đồng cấu $c_j : C \to S_j$ sao cho $c_i = s_{ij} \circ c_j$ với mọi $i \leq j$ và sao cho cặp $(C, (c_j)_{j \in \mathcal{J}})$ là cặp phổ dụng.

Bổ đề 10 *Mọi hệ quy nạp (hay xạ ảnh) với giá trị trong trong phạm trù tập hợp* **Set** *đều có giới hạn quy nạp (hay xạ ảnh). Cho $\mathcal{C}$ là một phạm trù bất kỳ. Khẳng định trên vẫn còn đúng với phạm trù các hàm tử từ $\mathcal{C}$ vào* **Set**.

Khẳng định thứ hai suy ra được từ khẳng định thứ nhất. Ta lấy giới hạn quy nạp (hoặc xạ ảnh) của họ hàm tử $F_j : \mathcal{C} \to$ **Set** bằng cách lấy giới hạn qui nạp (hoạc xạ ảnh) cho họ tập hợp $F_j(C)$ cho từng đối tượng $C \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$.

Cho một hệ quy nạp (S_j, s_{ji}) trong **Set**. Ta xây dựng giới hạn quy nạp của nó như sau : tập C là tập các lớp tương đương cáp cặp (j, x) với $j \in \mathcal{J}$ và $x \in S_j$, theo quan hệ tương đương $(j, x) \sim (j', x')$ nếu tồn tại i lớn hơn cả j và j' sao cho $s_{ij}(x) = s_{ij'}(x')$; với mọi $j \in \mathcal{J}$, ánh xạ $c_j : S_j \to C$ là ánh xạ gán với mỗi phần tử $x \in S_j$ lớp tương đương của (j, x).

Cho một hệ xạ ảnh (S_j, s_{ij}) trong **Set**. Ta xây dựng giới hạn xạ ảnh của nó như sau : tập C là tập các dãy $(x_j)_{j \in \mathcal{J}}$ với $x_j \in S_j$ thoả mãn $s_{ij}(x_j) = x_i$ với mọi $i \leq j$. Tập hợp C là giới hạn xạ ảnh ta cần. $\square$

Ta xem xét hai ví dụ sau. Thứ nhất là hệ xạ ảnh bao gồm ba tập hợp X, Y, Z và hai ánh xạ $f : Y \to X$ và $g : Z \to X$. Giới hạn xạ ảnh của hệ này là **tích phân thớ**

$$Y \times_X Z$$

tập các cặp (y, z) với $y \in Y$ và $z \in Z$ sao cho $f(y) = g(z)$. Trong trường hợp X có đúng một phần tử, tích phân thớ là tích Descartes. Ta có thể coi tích theo thớ như một tích Descartes phụ thuộc môt biến $x \in X$.

Ví dụ thứ hai là hệ qui nạp bao gồm ba tập hợp X, Y, Z và hai ánh xạ $f : X \to Y$ và $g : X \to Z$. Giới hạn qui nạp của hệ này là tập

$$Y +_X Z$$

thương của hợp rời $Y \bigsqcup Z$ của Y và Z chia cho quan hệ tương đương sinh bởi $y \sim z$ nếu tồn tại $x \in X$ sao cho $y = f(x)$ và $z = g(y)$. Ta có thể hình dung $Y +_X Z$ như là dán Y và Z theo X. Phép toán này được gọi là **tổng hỗn hợp**. Người đọc cũng nên chú ý là ký hiệu tổng hỗn hợp $Y +_X Z$ dùng ở đây không phải là một ký hiệu phổ biến như ký hiệu tích phân thớ $Y \times_X Z$.

Một trường hợp đặc biệt của tổng hỗn hợp là phép dán. Cho hai tập hợp X, Y và hai ánh xạ $f_1, g_2 : X \to Y$. Dữ kiện như vậy gọi là một quan hệ tương đương trên Y nếu quan hệ hai ngôi

$$y_1 \sim y_2 \Leftrightarrow \exists x \in X \text{ sao cho } y_1 = f_1(x) \text{ và } y_2 = f(x_2)$$

là một quan hệ tương đương. Khi đó tổng hỗn hợp $Y +_X Y$ gọi là dán Y the quan hệ tương đương X.

2.6 Tích theo thớ

Cho ba tập hợp X, Y, Z và hai ánh xạ $f : Y \to X$ và $g : Z \to X$, ta đã định nghĩa tích theo thớ của Y và Z trên X như sau

$$Y \times_X Z = \{(y, z) \in Y \times Z \mid f(y) = g(z)\}.$$

Cho một phạm trù $\mathcal{C}$ bất kỳ. Ta có thể mở rộng khái niệm tích theo thớ ra phạm trù $\mathbb{F}(\mathcal{C})$ các hàm tử $F : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ như sau.

Cho X, Y, Z là ba hàm tử từ một phạm trù $\mathcal{C}$ vào **Set**. Cho hai cấu xạ hàm tử $f : X \to Y$ và $g : Z \to X$. Hàm tử tích theo thớ $Y \times_X Z$ cho ứng với mỗi vật A của $\mathcal{C}$, tập hợp

$$Y(A) \times_{X(A)} Z(A).$$

Khái niệm tích theo thớ cho ta một ngôn ngữ mềm dẻo, được sử dụng khá uyển chuyển trong hình học đại số. Một mặt, ta có thể hình dung nó môt cách rất trực quan như trên như tích theo thớ trong phạm trù tập hợp. Môt mặt khác, nó tương đương với khái niệm tích tenxơ trong đại số giao hoánnên cũng khá thuận lợi về phương diện tính toán.

Mệnh đề 11 *Cho A, B, C là các vành giao hoán và cho $\phi : A \to B$ và $\psi : A \to C$ là các đồng cấu vành. Đặt $h_\phi : h_B \to h_A$ và $h_\psi : h_C \to h_A$ là các là các đồng cấu hàm tử tương ứng. Khi đó ta có một đẳng cấu chuẩn tắc giữa tích theo thớ*

$$h_B \times_{h_A} h_C \simeq h_{B \otimes_A C}.$$

Cho R là một vành giao hoán. Cho hai phần tử $x \in h_B(R)$ và $y \in h_C(R)$ cảm sinh ra cùng một phần tử của $h_A(R)$ tương đương với việc cho một A-đại số R và hai đồng cấu A-đại số $x : B \to R$ và $y : C \to R$. Như ta đã thấy trong mục về tích tenxơ, cho x, y như vậy tương đương với việc cho một đồng cấu A-đại số $x \otimes y : B \otimes_A C \to R$. Như vậy ta có một đẳng cấu giữa hai hàm tử

$$h_B \times_{h_A} h_C \to h_{B \otimes_A C}$$

và mệnh đề được chứng minh. □

Như vậy khái niệm tích phân thớ trên hàm tử **Ring** → **Set** không làm ta vượt ra khỏi ảnh Yoneda của phạm trù đối của phạm trù **Ring**. Như ta sẽ thấy ở các chương sau, phép dán hay tổng hỗn hợp vượt ra ngoài khuôn khổ này. Đó là bước chuyển từ lược đồ aphin sang lược đồ tổng quát.

Chương 3

Sơ lược về đại số đồng điều

3.1 Phạm trù các mođun trên một vành

Cho A là một vành giao hoán. Phạm trù A-Mod các A-mođun có một số tính chất đặc biệt. Với mọi $M, N \in \mathrm{Ob}(A\text{-Mod})$ là hai A-mođun tập các đồng cấu

$$\mathrm{Hom}_{A\text{-Mod}}(M, N)$$

là một nhóm abel. Thật vậy ta có thể cộng hai đồng cấu A-mođun $f, g : M \to N$ để được một đồng cấu $f + g : M \to N$ và với mọi đông cấu mođun $f : M \to N$ ta có đồng cấu đối $-f : M \to N$. Tất nhiên là $\mathrm{Hom}_{A\text{-Mod}}(M, N)$ còn có cả cấu trúc A-mođun nữa, nhưng trong thực tế ta ít quan tâm đến cấu trúc bổ sung này.

Với mọi đồng cấu $f : M \to N$ ta có hạch, đối hạch, ảnh, đối ảnh là các vật khác của A-Mod. Hạch

$$\ker(f) = \ker[f : M \to N] \in \mathrm{Ob}(A\text{-Mod})$$

là tập các phần tử $m \in M$ sao cho $f(m) = 0$ là một A-mođun. Ảnh

$$\mathrm{im}(f) = \mathrm{im}[f : M \to N] \in \mathrm{Ob}(A\text{-Mod})$$

là tập các phần tử $n \in N$ sao cho tồn tại $m \in M$ với $f(m) = n$ cũng là một A-mođun. Đối hạch là mođun thương

$$\mathrm{coker}(f) = N/\mathrm{im}(f)$$

còn đối ảnh là mođun thương

$$\mathrm{coim}(f) = M/\ker(f).$$

Ta có một số tính chất hiển nhiên của hạch, đối hạch, ảnh và đối ảnh.

Mệnh đề 1 (Hạch-đối hạch) *Cho $f : M \to N$ là một đồng cấu A-mođun.*

1. *Với mọi cặp (P, g) với $P \in \mathrm{Ob}(A\text{-Mod})$ và $g \in \mathrm{Hom}(P, M)$ sao cho $f \circ g = 0$ tồn tại duy nhất $g' \in \mathrm{Hom}(P, \ker(f))$ sao cho $g = \iota \circ g'$ với $\iota : \ker(f) \to M$ là nhúng hiển nhiên $\ker(f)$ vào M.*

2. *Với mọi cặp (P, g) với $P \in \mathrm{Ob}(A\text{-Mod})$ và $g \in \mathrm{Hom}(N, P)$ sao cho $g \circ f = 0$, tồn tại duy nhất $g' : \mathrm{coker}(f) \to P$ sao cho $g = g' \circ \pi$ với $\pi : N \to \mathrm{coker}(f)$ là đồng cấu thương hiển nhiên.*

Cho một đồng cấu $g : P \to M$ sao cho $f \circ g = 0$, với mọi $p \in P$, $g(p)$ nằm trong hạch của f vậy nên g phân tích một cách duy nhất qua hạch của f. Cho một đồng cấu $g : N \to P$ sao cho $g \circ f = 0$, hai phần tử $n, n' \in N$ sao cho $n - n' \in \mathrm{im}(f)$ ta có $g(n) = g(n')$. Vậy nên g phân tích một cách duy nhất qua $\mathrm{coker}(f)$. □

Mệnh đề 2 (Ảnh-đối ảnh) *Với mọi $f \in \mathrm{Hom}_{A\text{-Mod}}(M, N)$ ta có một đồng cấu chuẩn tắc*

$$\mathrm{coim}(f) \to \mathrm{im}(f)$$

là đẳng cấu.

Mệnh đề 3 (Tổng trực tiếp) *Với mọi A-mođun M, N tổng trực tiếp $M \oplus N$ được trang bị các cấu xạ*

$$\pi_M : M \oplus N \to N \text{ và } \pi_N : M \oplus N \to N$$

$$\iota_M : M \to M \oplus N \text{ và } \iota_N : N \to M \oplus N$$

thỏa mãn $\pi_M \circ \iota_M = 1_M$, $\pi_N \circ \iota_N = 1_N$ và

$$\iota_M \circ \pi_M + \iota_N \circ \pi_N = 1_{M \oplus N}.$$

Phạm trù các mođun trên một vành A còn có một số tính chất đặc biệt đối với hàm tử Hom và hàm tử $\otimes$. Ta nói một dãy

$$0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$$

là **dãy khớp** A-mođun, nếu như $M' \to M$ là đơn ánh, $M \to M''$ là toàn ánh và

$$\mathrm{im}(f) = \ker(g).$$

Dãy trên chỉ là khớp trái nếu ta bỏ đi điều kiện $M \to M''$ toàn ánh, chỉ là khớp phải nếu ta bỏ đi điều kiện $M' \to M$ đơn ánh.

Mệnh đề 4 (Hom khớp trái) *1. Dãy* $0 \to M' \to M \to M$ *trong* A-Mod *là khớp trái khi và chỉ khi với mọi* A*-mođun* N*, dãy*

$$0 \to \mathrm{Hom}(N, M') \to \mathrm{Hom}(N, M) \to \mathrm{Hom}(N, M'')$$

là dãy khớp trái trong Ab.

2. *Dãy* $M' \to M \to M \to 0$ *trong* A-Mod *là khớp phải khi và chỉ khi với mọi* A*-mođun* N*, dãy*

$$0 \to \mathrm{Hom}(M'', N) \to \mathrm{Hom}(M, N) \to \mathrm{Hom}(M', N)$$

là dãy khớp trái trong Ab.

Một đồng cấu $\alpha' : N \to M'$ xác định hiển nhiên một đồng cấu $\alpha : N \to M$, và $\alpha = 0$ khi và chỉ khi $\alpha' = 0$. Vậy nên $\mathrm{Hom}(N, M') \to \mathrm{Hom}(N, M)$ là đơn ánh.

Một đồng cấu $\alpha : N \to M$ xác định một đồng cấu $\alpha'' : N \to M$. α'' bằng không khi và chỉ khi ảnh của α nằm trong $\ker[M \to M''] = M'$ vậy nên $\alpha'' = 0$ khi và chỉ khi α cảm sinh từ $\alpha' : N \to M'$. Vậy nên dãy thứ nhất là khớp trái.

Dãy thứ hai khớp trái cũng chứng minh tương tự. □

Mệnh đề 5 (⊗ khớp phải) *Cho một dãy khớp phải* A*-mođun* $M' \to M \to M'' \to 0$*. Khi đó với mọi* A*-mođun* N*, ta có dãy khớp phải*

$$M' \otimes_A N \to M \otimes_A N \to M'' \otimes_A N \to 0.$$

Theo mệnh đề Hom khớp trái, ta chỉ cần chứng minh rằng với mọi A-mođun P, dãy

$$0 \to \mathrm{Hom}(M'' \otimes_A N, P) \to \mathrm{Hom}(M \otimes_A N, P) \to \mathrm{Hom}(M \otimes_A N, P)$$

là khớp trái. Theo định nghĩa của ⊗, ta có

$$\mathrm{Hom}(M \otimes_A N, P) = \mathrm{Bil}(M \times N, P)$$

với $\mathrm{Bil}(M \times N, P)$ là tập các ánh xạ song tuyến tính $M \times N \to P$. Dãy

$$0 \to \mathrm{Bil}(M'' \times N, P) \to \mathrm{Bil}(M \times N, P) \to \mathrm{Bil}(M' \times N, P)$$

hiển nhiên là khớp. □

3.2 Phạm trù abel

Phạm trù abel là các phạm trù có cấu trúc mô phỏng câu trúc của phạm trù các mođun trên một vành giao hoán.

Định nghĩa 6 Phạm trù Abel *là một phạm trù $\mathcal{A}$ được trang bị thêm các cấu trúc sau*

1. *Với mọi vật $M, N \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M, N)$ được cho một cấu trúc nhóm Abel. sao cho với mọi vật M, N, P của $\mathcal{A}$, ánh xạ hợp thành*
$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M, N) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(N, P) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M, P)$$
là ánh xạ song tuyến tính.

2. *Với mọi ánh xạ $f : M \to N$, ta cho một vật $\ker(f)$ cùng với một đồng cấu $\iota : \ker(f) \to M$ thỏa mãn $f \circ \iota = 0$ và phổ dụng đối với tính chất này như trong mệnh đề hạch-đối hạch.*

3. *Với mọi ánh xạ $f : M \to N$ ta cho một vật $\mathrm{coker}(f)$ cùng với mọt đồng cấu $\pi : N \to \mathrm{coker}(f)$ thỏa mãn $\pi \circ f = 0$ và phổ dụng đối với tính chất này như trong mệnh đề hạch-đối hạch.*

4. *Với ι là phép nhúng của $\ker(f)$ và π là phép chiếu xuống $\mathrm{coker}(f)$ như trên, đặt $\mathrm{coim}(f) = \mathrm{coker}(\iota)$ và $\mathrm{im}(f) = \ker(\pi)$. Khi đó, đồng cấu chuẩn tắc $\mathrm{coim}(f) \to \mathrm{im}(f)$ là một đẳng cấu như trong mệnh đề ảnh-đối ảnh.*

5. *Tồn tại tổng trực tiếp $M \oplus N$ tức là một vật của $\mathcal{A}$ cùng với các đồng cấu π_M, π_N và ι_M, ι_N như trong mệnh đề tổng trực tiếp. Tồn tại một vật 0 trong $\mathcal{A}$ thỏa mãn các tính chất hiển nhiên.*

Ta cần phân tích kỹ lại năm tiên đề của phạm trù Abel.

1. Tiên đề 1 có thể diễn đạt mọt cách khác như sau : với mọi $M \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$, hàm tử
$$P \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M, P)$$
là một hàm tử từ phạm trù $\mathcal{A}$ vào phạm trù Ab các nhóm Abel. Một vật M là bằng không nếu như hàm tử liên kết $\mathcal{A} \to \mathrm{Ab}$ là hàm tử không.

2. Tiên đề 2 nói là với mọi đồng cấu $f : M \to N$, hàm tử

$$P \mapsto \ker[\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P, M) \xrightarrow{f\circ -} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P, N)]$$

biểu diễn được bằng một vật ký hiệu là $\ker(f)$: ta có

$$\mathrm{Hom}(P, \ker(f)) = \ker[\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P, M) \xrightarrow{f\circ -} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P, N)]$$

với $\mathrm{id}_{\ker(f)}$ tương ứng với nhúng hạch $\iota : \ker(f) \to M$ sao cho $f \circ \iota = 0$ và ι có tích chất phổ dụng.

Theo mệnh đề Hom khớp trái, ker theo nghĩa hàm tử như ở trên, trùng với ker theo nghĩa thông thường trong trường hợp phạm trù A-Mod.

3. Tiên đề 3 nói là với mọi đồng cấu $f : M \to N$, hàm tử

$$P \mapsto \ker[\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(N, P) \xrightarrow{-\circ f} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M, P)]$$

biểu diễn được bằng một vật ký hiệu là $\mathrm{coker}(f)$. Vật này được trang bị một đồng cấu $\pi : N \to \mathrm{coker}(f)$ gọi là phép chiếu xuống đối hạch.

Theo mệnh đề Hom khớp trái, coker theo nghĩa hàm tử như ở trên, trùng với coker theo nghĩa thông thường trong trường hợp phạm trù A-Mod.

4. Ta cần bàn kỹ lại xem đồng cấu chuẩn tắc $\mathrm{coim}(f) \to \mathrm{im}(f)$ là đồng cấu nào ? Vì hợp thành

$$M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{\pi} \mathrm{coker}(f)$$

là bằng không cho nên f phân tích qua $\mathrm{im}(f) := \ker(\pi)$. Ta có một đồng cấu chuẩn tắc $f' : M \to \mathrm{im}(f)$ sao cho $f : M \to N$ phân tích qua nó $f = \iota' \circ f'$ với $\iota' : \ker(\iota) \to N$ là phép nhúng của hạch của π. Xét đồng cấu nhóm Abel

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\ker(f), \ker(pi)) \xrightarrow{\iota'\circ -} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\ker(f), N$$

định nghĩa bằng cách hợp thành với α'. Theo định nghĩa của $\ker(\pi)$ như đối tượng biểu diễn hàm tử $P \mapsto \ker[\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P, M) \xrightarrow{f\circ -} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P, N)]$, đông cấu kể trên nhất thiết là đơn ánh. Vì $f \circ \iota = 0$ cho nên ta suy ra

$$f' \circ \iota : \ker(f) \to M \to N$$

là bằng không. Theo tính phổ dụng của $\text{coker}(\iota)$, ta thấy $f' : M \to \text{im}(f)$, ta có một đồng cấu chuẩn tắc

$$\text{coim}(f) \to \text{im}(f).$$

Tiên đề cuối cùng của phạm trù Abel nói là đồng cấu này phải là đẳng cấu. Đồng cấu $\text{coim}(f) \to \text{im}(f)$ là một đồng cấu với ker và coker bằng không. Vì vậy tiên đề 4 tương đương với đòi hỏi mọi $f : M \to N$ với ker và coker bằng không, f có thể nghịch đảo được.

5. Cho $M, N \in \text{Ob}(\mathcal{A})$. Xét hai hàm tử, một hiệp biến, một nghịch biến

$$S_1 : P \to \text{Hom}_{\mathcal{A}}(P, M) \oplus \text{Hom}_{\mathcal{A}}(P, N)$$

$$S_2 : P \to \text{Hom}_{\mathcal{A}}(M, P) \oplus \text{Hom}_{\mathcal{A}}(N, P)$$

Sự tồn tại của vật $M \oplus N$ cùng các đồng cấu π_M, π_N, ι_M và ι_N như trong mệnh đề tổng trực tiếp tương đương với việc tồn tại một vật $M \oplus N$ và các đẳng cấu hàm tử

$$S_1(P) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{A}}(P, M \oplus N)$$

$$S_2(P) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{A}}(M \oplus N, P)$$

thỏa mãn các tính chất hiển nhiên khi ta lấy $P = M, N$ hay $M \oplus N$. **phân tích kỹ thêm**

Mệnh đề 7 *Với mọi vành giao hoán A, phạm trù A-*Mod *các A-mođun là một phạm trù abel.*

Hầu hết những gì ta có thể làm trên phạm trù mođun ta đều có thể làm trên một phạm trù abel bất kỳ : ví dụ như lấy hạch, đối hạch, ảnh, đối ảnh và tổng trự tiếp. Cái ta không được làm trong một phạm trù bất kỳ là lấy một phần tử trong một vật vì điều này không có nghĩa. Tuy nhiên, thay vì việc lấy một phần tử trong một vật M, ta có thể lấy một phần tử của $\text{Hom}(P, M)$ với P biến thiên. Đây là cách ta đã dùng để định nghĩa hạch và đối hạch trong một phạm trù abel trừu tượng. Đây cũng là một phương pháp để chuyển các chứng minh trong các phạm trù cụ thể như phạm trù Ab hay A-Mod sang các phạm trù abel trìu tượng.

Ví dụ cơ bản các phạm trù Abel mà không phải là phạm trù các môdun trên một vành là ví dụ phạm trù các bó nhóm Abel và bó các mođun trên một không gia tôpô hay trên một lược đồ. Điều này không có gì đáng ngạc nhiên vì ngay khái niệm phạm trù Abel cũng được đưa ra chủ yếu để hình thức hóa các tính chất chung nhất giữa phạm trù các nhóm Abel và phạm trù các bó các nhóm Abel trên một không gian tôpô. Chúng ta sẽ quay lại nghiên cứu kỹ càng các bó ở phần sau của sách.

Như vậy ta phải gác lại sau các ví dụ thú vị nhất của phạm trù abel để chờ một số chuẩn bị về tôpô. Ta kết thúc mục này bằng một ví dụ hơi kỳ cục.

Cho $\mathcal{A}$ là một phạm trù abel. Khi đó phạm trù đối $\mathcal{A}^{\mathrm{opp}}$ cũng là một phạm trù abel. Thật vậy

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^{\mathrm{opp}}}(M, N) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(N, M)$$

nên có thể được trang bị cùng một cấu trúc nhóm abel. Với mọi $f^{\mathrm{opp}} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^{\mathrm{opp}}}(N, M)$ tương ứng với $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M, N)$, hạch của f^{opp} trong $\mathcal{A}^{\mathrm{opp}}$ là đối hạch của f trong $\mathcal{A}$

$$\ker(f^{\mathrm{opp}}) = \mathrm{coker}(f).$$

Như vậy phạm trù đối của phạm trù Ab cũng là một phạm trù abel nhưng quả là không dễ hình dung cho lắm.

3.3 Dãy khớp và hàm tử khớp

Cho $\mathcal{A}$ là một phạm trù Abel, $M, N \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ và $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M, N)$. Ta nói f là đơn ánh nếu như $\ker(f) = 0$ và f là toàn ánh nếu như $\mathrm{coker}(f) = 0$. Theo định nghĩa của ker và coker ta thấy

- f là đơn ánh nếu như với mọi $P \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$, ánh xạ

  $$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P, M) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P, N)$$

  là đơn ánh.

- f là toàn ánh nếu như với mọi $P \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$, ánh xạ

  $$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(N, P) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M, P)$$

  là đơn ánh.

Định nghĩa 8 *Cho một* **dãy khớp ngắn** *trong $\mathcal{A}$ là cho*

$$0 \to M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \to 0$$

với $M, N, P \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$, $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M, N)$ và $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(N, P)$ sao cho f là đơn ánh, g là toàn ánh và

$$\mathrm{im}(f) = \ker(g).$$

Dãy trên gọi là **khớp trái** *nếu ta bỏ đi điều kiện g toàn ánh ; gọi là* **khớp phải** *nếu ta bỏ đi điều kiện f đơn ánh.*

Khái niệm giãy khớp ngắn tương đương với khái niệm mođun con và mođun thương trong phạm trù các mođun trên một vành, vì vậy nó là một khái niệm mấu chốt trong việc mô tả cấu trúc nội tại của một phạm trù Abel.

Định nghĩa 9 *Cho $\mathcal{A}$ và $\mathcal{B}$ là hai phạm trù Abel. Khi ta nói đến hàm tử phạm trù abel từ $\mathcal{A}$ vào $\mathcal{B}$ ta hiểu là một hàm tử $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ sao cho*

- *với mọi $M, N \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$, ánh xạ*

  $$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M, N) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(F(M), F(N))$$

  là một đông cấu nhóm abel.

- *F bảo toàn tổng trực tiếp $F(M \oplus N) = F(M) \oplus F(N)$.*

F gọi là khớp nếu nó biến dãy khớp ngắn thành dãy khớp ngắn, gọi là khớp trái nếu nó biến dãy khớp trái thành dãy khớp trái, gọi là khớp phải nếu nó biến dãy khớp phải thành dãy khớp phải.

Như ta đã nhấn mạnh trong chương trước, ví dụ cơ bản nhất của hàm tử là các hàm tử Hom. Đối với các phạm trù Abel, các hàm tử Hom đều khớp trái. Vậy nên các hàm tử ta hay gặp nhất là các hàm tử khớp trái.

Mệnh đề 10 *Cho $\mathcal{A}$ là một phạm trù abel và $P \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ là một vật bất kỳ của $\mathcal{A}$. Khi đó hàm tử*

$$M \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P, M)$$

là một hàm tử khớp trái.

Cho một dãy khớp trái

$$0 \to M_0 \xrightarrow{f_0} M_1 \xrightarrow{f_1} M_2$$

là cho $M_0 = \ker(f_1)$. Theo định nghĩa của vật $\ker(f_1)$, với mọi $P \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P, \ker(f_1)) = \ker[\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P, M_1) \xrightarrow{f_1 \circ} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P, M_2)].$$

Vậy nên hàm tử $M \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P, M)$ là hàm tử khớp trái. □

Thường thì hàm tử $M \mapsto \mathrm{Hom}(P, M)$ chỉ khớp trái chứ không khớp phải. Ví dụ đơn giả nhất là với phạm trù Ab các nhóm Abel và $P = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Xét dãy khớp ngắn

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\times n} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to 0.$$

Áp dụng hàm tử $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \_)$ vào dãy khớp này ta có dãy

$$0 \to \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \to \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \to \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$$

chỉ khớp trái chứ không khớp phải bởi vì $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = 0$ và trong khi đó thì $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Định nghĩa 11 *Vật P của phạm trù abel $\mathcal{A}$ gọi là vật* **xạ ảnh** *nếu như hàm tử*

$$M \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M, P)$$

là hàm tử khớp, trái và phải. Vật $P \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ gọi là **nội xạ** *nếu như hàm tử nghịch biến $M \mapsto \mathrm{Hom}(M, P)$ là hàm tử khớp từ $\mathcal{A}^{\mathrm{opp}} \to \mathrm{Ab}$.*

Xét trường hợp $\mathcal{A} = \mathrm{Ab}$ là phạm trù các nhóm abel. Khi đó $\mathbb{Z}$ là một vật xạ ảnh. Thật vậy, với mọi nhóm abel M, ta có $M = \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, M)$, vì thế nên hiển nhiên hàm tử $M \mapsto \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, M)$ là hàm tử khớp. Tương tự như vậy trong phạm trù các A-mođun, vậy A xem như A-mođun là vật xạ ảnh. Ta dễ dang kiểm tra rằng tổng trực tiếp của hai vật xạ ảnh vẫn là xạ ảnh, và hạng tử trực tiếp của một vật xạ ảnh vẫn là xạ ảnh cho nên ta có :

Mệnh đề 12 *Cho M là một A-mođun là hạng tử trực tiếp của một A-mođun tự do, tức là sao cho tồn tại M' sao cho $M \oplus M' \simeq A^{\oplus n}$, n có thể là vô hạn. Khi đó M là một vật xạ ảnh của phạm trù A-Mod. Ngược lại mọi vật xạ ảnh là hạng tử trực tiếp của một mođun tự do.*

Vì là ta không hình dung được là phạm trù đối của Ab là như thế nào nên việc xác định các vật nội xạlà việc khó hơn nhiều.

Mệnh đề 13 *Trong phạm trù* Ab *các nhóm abel,* $\mathbb{Z}$ *không phải là vật nội xạnhưng tập các số hữu tỉ* $\mathbb{Q}$ *là một vật nội xạ.*

Lại xét dãy khớp ngắn

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\times n} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to 0.$$

Ap dụng hàm tử $\mathrm{Hom}(\_, \mathbb{Z})$ vào dãy khớp này ta có dãy

$$0 \to \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \to \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\times n} \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \to 0$$

là khớp trái chứ không khớp phải. Vậy nên $\mathbb{Z}$ không phải là vật nội xạ.

Để chứng ming rằng $\mathbb{Q}$ là vật nội xạta cần chứng minh rằng với mọi đồng cấu đơn ánh $M \to N$ giữa hai nhóm abel M, N, mọi đồng cấu nhóm $i_M : M \to \mathbb{Q}$, có thể kéo dài thành một đồng cấu nhóm $i_N : N \to \mathbb{Q}$. Để đơn giản ký hiệu ta có thể giả sử là M và N là các nhóm abel dạng hữu hạn. Dùng định lý mô tả các nhóm abel dạng hữu hạn, ta có thể đưa về trường hợp $M = \mathbb{Z}$, $N = \mathbb{Z}$ và $M \to N$ là đồng cấu $x \mapsto xn$. Cho $i_M : M \to \mathbb{Q}$ là cho một số hữu tỉ q_M. Muốn thác triển i_M thành một đồng cấu $i_N : N \to \mathbb{Q}$ ta cần một số hữu tỉ q_N sao cho $q_M = nq_N$. Vì $q_N \in \mathbb{Q}$ thỏa mãn tính chất này luôn tồn tại cho nên $\mathbb{Q}$ là một vật nội xạ. Tương tự như vậy $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ cũng là vật nội xạcủa Ab. □

Ví dụ cơ bản của hàm tử khớp phải là hàm tử tích tenxơ với một môdun cho trước. Nhắc lại mệnh đề ⊗ khớp phải. Cho P là một A-mođun. Hàm tử $M \mapsto M \otimes_A P$ là một hàm tử khớp phải từ phạm trù các A-mođun vào chính nó. Nếu B là một A-đại số thì hàm tử $M \mapsto M \otimes B$ là một hàm tử khớp phải từ phạm trù các A-mođun vào phạm trù các B-mođun.

Định nghĩa 14 *Một A-mođun P được gọi là* **phẳng** *nếu như hàm tử $M \mapsto M \otimes_A P$ là hàm tử khớp.*

3.4 Phức, phức giải và hàm tử dẫn xuất

Cho $\mathcal{A}$ là một phạm trù abel. Một **phức** $M^\bullet$ trong $\mathcal{A}$ là

$$\cdots M^i \xrightarrow{d_i} M^{i+1} \xrightarrow{d_{i+1}} \cdots$$

với $M^i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ và $d_i \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M^i, M^{i+1})$ sao cho $d_{i+1} \circ d_i = 0$. Phức $M^\bullet$ gọi là **phức khớp** nếu như với mọi i ta có

$$\mathrm{im}(d_i) = \ker(d_{i+1}).$$

Cho $M^\bullet$ là một phức trong $\mathcal{A}$. **Đối đồng điều** của $M^\bullet$ là các vật

$$\mathrm{H}^i(M^\bullet) = \ker(d_i)/\mathrm{im}(d_{i-1}).$$

Phức $M^\bullet$ là khớp khi và chỉ khi $\mathrm{H}^i(M^\bullet) = 0$ với mọi $i \in \mathbb{Z}$.

Cho hai phức $M^\bullet$ và $N^\bullet$ trong $\mathcal{A}$. Một đồng cấu phức

$$f^\bullet : M^\bullet \to N^\bullet$$

là một họ $f^i \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M^i, N^i)$ sao cho ta có các biểu đồ giao hoán

$$\begin{array}{ccc} M^i & \xrightarrow{d_i^M} & M^{i+1} \\ f_i \Big\downarrow & & \Big\downarrow f_{i+1} \\ N^i & \xrightarrow[d_i^N]{} & N^{i+1} \end{array}$$

Cấu cạ phức $f^\bullet : M^\bullet \to N^\bullet$ cảm sinh ra các đồng cấu

$$\ker(d_i^M) \to \ker(d_i^N) \text{ và } \mathrm{im}(d_{i-1}^M) \to \mathrm{im}(d_{i-1}^N)$$

cho nên nó cảm sinh một đồng cấu

$$\mathrm{H}^i(f^\bullet) : \mathrm{H}^i(M^\bullet) \to \mathrm{H}^i(N^\bullet).$$

Mệnh đề 15 *Nếu ta cho với mỗi $i \in \mathbb{Z}$ một đồng cấu $h^i : M^i \to N^{i-1}$, và ta lấy*

$$f^i = d_{i-1} \circ h^i + h^{i+1} \circ d_i$$

thì họ $f^\bullet$ là một đồng cấu phức. Đồng cấu phức xây dựng như trên cảm sinh ra các đồng cấu $\mathrm{H}^i(f^\bullet) = 0$. Các đồng cấu phức $f^\bullet$ xây dựng như trên gọi là **đồng luân**.

Định nghĩa 16 *Phạm trù $C(\mathcal{A})$ là phạm trù với vật là các phức trong $\mathcal{A}$ và với tập các đồng cấu $\mathrm{Hom}_{C(\mathcal{A})}(M^\bullet, N^\bullet)$ là nhóm các đồng cấu phức từ $M^\bullet$ vào $N^\bullet$ chia cho nhóm các đồng luân. Phạm trù $C(\mathcal{A})$ gọi là* **phạm trù các phức với sai khác đồn luân**.

Ta ký hiệu $C_I(\mathcal{A})$ là phạm trù con đầy của $C(\mathcal{A})$

Các vật nội xạcó một vị trí đặc biệt trong các phạm trù abel. Để nghiên cứu các hàm tử khớp trái, người ta thương phải thay một vật bằng cái gọi là giải nội xạ. Cho một vật $M \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$. **Giải nội xạ** của M là một phức $I^\bullet$

$$\cdots 0 \to I^0 \to I^1 \to \cdots$$

với các thành phần I^i là các vật nội xạvà sao cho $\mathrm{H}^i(I^\bullet) = 0$ với mọi $i \neq 0$, với $i = 0$, ta có một đẳng cấu cho trước

$$\mathrm{H}^0(M^\bullet) \simeq M$$

Định nghĩa 17 *Một phạm trù abel $\mathcal{A}$ được gọi là đủ nội xạnếu với mọi vật M trong $\mathcal{A}$ tồn tại một vât nội xạI cùng với một đồng cấu*

$$f : M \to I$$

với $\ker(f) = 0$.

Định lý 18 *Cho $\mathcal{A}$ là một phàm trù đủ nội xạ. Khi đó mọi vật M của $\mathcal{A}$ đều có giải nội xạ. Hai giải nội xạbất kỳ $I^\bullet$ và $J^\bullet$ của M có một đẳng cấu*

$$g : I^\bullet \simeq J^\bullet$$

cảm sinh ra đẳng cấu đơn vị $1_M : \mathrm{H}^0(I^\bullet) \to \mathrm{H}^0(J^\bullet)$. Hơn nữa, hai đẳng cấu như vậy sai khác nhau một đồng luân vậy nên đẳng cấu là duy nhất trong phạm trù $C_I(\mathcal{A})$. Hơn nữa, ta có một hàm tử

$$R : \mathcal{A} \to C_I(\mathcal{A})$$

ứng với mỗi vật trong $\mathcal{A}$ giải nội xạcủa nó trong phạm trù các phức đơn ảnh với sai khác đồng luân.

Cho $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ là một dãt khớp ngắn ở trong $\mathcal{A}$. Khi đó tồn tại các giải đơn ảnh $I'^\bullet, I^\bullet$ và $I''^\bullet$ của M', M và M'' cùng với các cấu xạ phức $I'^\bullet \to I^\bullet \to I''^\bullet$, cảm sinh ra dãy khớp đã cho $M' \to M \to M''$ trên H^0, và sao với mọi $i \in \mathbb{N}$, dãy

$$0 \to I'^i \to I^i \to I''^i \to 0$$

là khớp.

Bạn đọc có thể xem chứng minh trong [Cartan-Eilenberg, V 1.1 và 2.2]. ở đó các tác giả xét các giải xạ ảnh trong phạm trù mođun nhưng cách chứng minh trong trường hợp giải nội xạtrong mọt phạm trù abel bất kỳ cũng không có gì khác.

Bây giờ, ta có thể xây dựng các hàm tử dẫn xuất như sau. Cho $\mathcal{A}$ và $\mathcal{B}$ là hai phạm trù abel và giả thiết rằng phạm trù $\mathcal{A}$ có đủ nội xạ. Cho $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ là một hàm tử khớp trái. Khi đó ta xây dựng các **hàm tử dẫn xuất** của F theo các bước như sau. Cho M là một đối tượng của $\mathcal{A}$

1. lấy $I^\bullet = R(M)$ là một đối tượng của phạm trù $\mathcal{C}_I(A)$ các phức đon ảnh với sai khác đồng luân,

2. lấy $F(I^\bullet)$ là phức

$$\cdots \to F(I^0) \to F(I^1) \to \cdots$$

   là một đối tượng của phạm trù $C(\mathcal{B})$,

3. lấy đối đồng điều $\mathrm{H}^i(F(I^\bullet)$ và gọi chúng là các hàm tử dẫn xuất

$$R^iF(M) := \mathrm{H}^i(F(I^\bullet))$$

   với mọi $i = 0, 1, \ldots$

Cách xây dựng trên áp dụng được cho cả các đồng cấu trông $\mathcal{A}$ vì $M \mapsto R(M)$ là một hàm tử. Tính chất cơ bản nhất của các hàm tử đẫn xuất là ta có một dãy khớp dài.

Định lý 19 *Cho $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ một hàm tử khớp trái từ một phạm trù abel đủ nội xạ$\mathcal{A}$ vào một phạm trù abel $\mathcal{B}$. Gọi R^iF là các hàm tử dẫn xuất của F. Khi đó với mọi dayư khớp ngắn trong $\mathcal{A}$*

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

ta có một dãy khớp dài trong $\mathcal{B}$

$$0 \to F(M') \to F(M) \to F(M'') \to R^1F(M') \to R^1F(M) \to \cdots$$

Ta thay thế dãy khớp $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ bằng các dãy khớp

$$0 \to I'^{\bullet} \to I^{\bullet} \to I''^{\bullet} \to 0$$

của giải nội xạ. Vì là I'^{i} là vật nội xạ, sau khi áp dụng hàm tử F, ta vẫn còn các dãy khớp ngắn

$$0 \to F(I'^{\bullet}) \to F(I^{\bullet}) \to F(I''^{\bullet}) \to 0.$$

Từ dãy khớp ngắn giữa các phức, ta suy ra dãy khớp dài các đối đồng điều :

$$0 \to \mathrm{H}^0(F(I'^{\bullet})) \to \mathrm{H}^0(F(I^{\bullet})) \to \mathrm{H}^0(F(I''^{\bullet})) \to \mathrm{H}^1(F(I'^{\bullet})) \to \cdots$$

và suy ra điều phải chứng minh.

Phần II

Lược đồ

Ta có thể quan niệm lược đồ theo hai cách rất khác nhau. Nó có thể xem như một hàm tử từ phạm trù các vành giao hoán vào phạm trù các tập hợp. Ví dụ như nếu ta có một hệ phương trình đại số, ta có thể xét tập các nghiệm của hệ này trong một vành giao hoán biến thiên. Nó cũng có thể xem như một không gian tôpô được trang bị thêm một cấu trúc bao gồm tất cả các hàm đại số xác định trên một tập mở đủ nhỏ. Tập các hàm đại số trên tập mở biến thiên của không gian tôpô đươc gọi là bó vành cấu trúc. Chúng ta sẽ cùng nhau nghiên cứu lý thuyết lược đồ đông thời từ góc độ đối lập như vậy.

Chương 4

Lược đồ aphin

4.1 Tập đại số

Trong mục này, ta xem xét khái niệm rất thô sơ là khái niệm tập đại số. Nó cho phép ta tiếp cận một cách êm ái với khái niệm chính qui của hình học đại số là khái niệm lược đồ, và đồng thời cho phép ta hiểu được tại sao người ta cần đưa ra khái niệm rắc rối này. Mục này có tính giới thiệu cho các mục sau. Các mục sau không phụ thuộc về mặt logic vào mục này.

Ngược lại vưới khái niệm lược đò rất tổn quát, khái niệm tập đại số chỉ có giá trị trên một trường đóng đại số. Cho k là một trường đóng đại số. Ta xét tập V các nghiệm

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in k^n$$

của một hệ phương trình đại số

$$\begin{aligned} f_1(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) &= 0 \\ &\cdots \\ f_m(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) &= 0 \end{aligned}$$

với $f_1, \ldots, f_m \in k[x_1, \ldots, x_n]$ là m đa thức n biến. Một tập V như vậy gọi là một tập đại số trong không gian aphin k^n.

Cho một tập $V \subset k^n$, ta có thể hỏi rằng liệu nó có phải là một tập đại số hay không. Muốn trả lời câu hỏi này, ta xét iđêan

$$I = \{f \in k[x_1, \ldots, x_n] \mid f(\alpha) = 0 \ \forall \alpha \in V\}.$$

Idêan I của ưvành $A = k[x_1, \dots, x_n]$ thỏa mãn tính chất với mọi $f \in A$ sao cho

tồn tại $n \in \mathbb{N}$ với $f^n \in I$ thì $f \in I$, ta có thể viết gọn lại là $I = \sqrt{I}$. Một iđêan thỏa

mãn tính chất này gọi là **iđêan căn**. Iđêan I các đa thức nhận giá trị không trên một tập con $V \subset k^n$ là một iđêan căn.

Theo định nghĩa của I, với mọi $\alpha \in V$, với mọi $f \in I$ ta có $f(\alpha) = 0$. Muốn cho V là một tập đại số trong k^n ta phải có mệnh đề đảo, tức là với mọi $\alpha \in k^n$ sao cho $f(\alpha) = 0$ với mọi $f \in I$ ta có $\alpha \in V$.

Định nghĩa 1 *Tập con đại số của k^n là tập các không điểm của một iđêan $I \subset k[x_1, \dots, x_n]$.*

Ta có thể đặt câu hỏi liệu một tập đại số định nghĩa như trên có là tập các không điểm của một hệ hữu hạn các phương trình đại số hay không. Câu trả lời là có vì theo định lý Hilbert, vành đa thức $k[x_1, \dots, x_n]$ là một vành Noether cho nên mọi iđêan I của nó là hữn hạn sinh. Tồn tại $f_1, \dots, f_m \in I$ sao cho với mọi $f \in I$ tồn tại $g_1, \dots, g_m \in A$ sao cho

$$f = f_1 g_1 + \cdots + f_m g_m.$$

Vậy nên nếu $\alpha \in k^n$ sao cho $f_i(\alpha) = 0$ với mọi $i = 1, \dots, n$ thì $f(\alpha) = 0$ với mọi $f \in I$. Tập các không điểm của hệ phương trình $f_1(\alpha) = \cdots = f_m(\alpha) = 0$ cũng là tập các không điểm của cả iđêan I.

Nếu ta không cho trước một hệ sinh của I, thì dù nó luôn tồn tại, việc chỉ ra tường minh một hệ sinh là việc không dễ. Hươn nữa, ngay khi có một hệ sinh cụ thể cũng rất ít hiếm khi thật sự là có ích. Vì thế người ta thường chỉ xét các tập đại số như tập không điểm của một iđêan chứ không tìm kiếm một hệ phương trình cụ thể trừ khi hệ phương trình này được cho trước trong một bài toán cụ thể.

Định lý 2 *Cho k là một trường đóng đại số, I là một iđêan của $A = k[x_1, \dots, x_n]$. Ta có một song ánh giữa tập hợp*

$$V(I) = \{\alpha \in k^n \mid f(\alpha) = 0 \ \forall f \in I\}$$

và tập $\mathrm{Spm}(A/I)$ các iđêan cực đại của A/I.

Nhắc lại là một iđêan $\mathfrak{p}$ của R là cực đại khi và chỉ khi thương $R/\mathfrak{p}$ là một trường. Cho $\alpha \in k^n$. Ta có một đồng cấu k-đại số toàn ánh

$$\mathrm{ev}_\alpha : A = k[x_1, \ldots, x_n] \to k$$

cho bởi $\mathrm{ev}_\alpha(f) := f(\alpha)$. Nếu $\alpha \in V(I)$, với mọi $f \in I$ ta có $\mathrm{ev}_\alpha(f) = 0$. Tức là đồng cấu ev_α phân tích qua vành thương A/I. Đồng cấu $\overline{\mathrm{ev}}_\alpha : A/I \to k$ cũng sẽ là toàn ánh. Hạch của nó là một iđêan cực đại của A/I. Như vậy ta đã xây dựng một ánh xạ

$$V(I) \to \mathrm{Spm}(A/I)$$

mà ta muốn xây dựng một ánh xạ nghịch đảo.

Để xây dựng ánh xạ nghịch đảo ta cần sử dụng giả thiết trường k là trường đóng đại số và bổ đề sau đây.

Bổ đề 3 *Cho k là một trường đóng đại số. Cho k' là một trường chứa k và là một k-đại số hữu hạn sinh. Khi đó $k' = k$.*

Bạn đọc có thể xem cuốn Mumford, xoắn 1 để xem cách chứng minh của định lý này sử dụng định lý chuẩn hóa của Noether và định lý Cohen-Seidenberg. Sau đây là một cách chứng minh ngắn gọn hơn trong trường hợp $k = \mathbb{C}$ là trường các số phức.

Nhắc lại là nói k' là một k-đại số dạng hữu hạn có nghĩa là tồn tại một đồng cấu toàn ánh

$$k[x_1, \ldots, x_n] \to k'$$

từ một vành đa thức vào k'. Như vây k-không gian vectơ k' có một cơ sở với nhiều nhất là đếm được các phần tử. Ta schỉ cần chứng minh không gian vectơ này có chiều hữu hạn trên k vì khi đó do k là đóng đại số nên k' ắt phải bằng k. Muốn thế, ta chỉ cần chứng minh là với mọi $i = 1, \ldots, n$ ảnh của

$$f_i : k[x_i] \to k'$$

là một k-đại số hữu hạn. Nếu không f_i phải là đơn ánh mà khi đó các phần tử

$$\left\{ \frac{1}{f_i(x_i) - \alpha} \mid \alpha \in k \right\} \subset k'$$

phải là các phần tử độc lập tuyến tính trong k'. Vì $k = \mathbb{C}$ nên tập này là tập không đếm được, nó mâu thuẫn với việc k' có một cơ sở đếm được trên k. $\square$

Cho một iđêan cực đại $\mathfrak{p}$ của $R = A/I$, ta có một đồng cấu toàn ánh $R \to R/\mathfrak{p} = k'$ với k' là một trường. Lấy hợp thành với $A \to R$, ta có một đồng cấu toàn ánh $\phi : A \to k'$ cho nên theo bổ đề, $k' = k$. Với mọi $i = 1, \ldots, n$, đặt

$$\alpha_i = \phi(x_i) \in k$$

và $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Ta có ngay với mọi $f \in I$, $f(\alpha) = \phi(f)$ trong $k = A/I$ cho nên $f(\alpha) = 0$. Vậy ta đã xây dựng được ánh xạ nghịch đảo

$$\mathrm{Spm}(A/I) \to V(I).$$

Bạn đọc tự kiểm tra rằng hai ánh xạ xây dựng ở trên là nghịch đảo của nhau. □

Ta phải nhận xét ngay là nếu bỏ đi giả thiết trường k đóng đại số thì khẳng định không còn đúng nữưa. Xét ví dụ $k = \mathbb{F}_p$ là trương hữu hạn có p phần tử. Lấy $A = \mathbb{F}_p[x]$ và $I = 0$. Khi đó $V(I) = \mathbb{F}_p$ chỉ có p phần tử trong khi đó tập các iđêan cực đại của $\mathbb{F}_p[x]$ là tập các đa thức bất khả qui với hệ số đầu bằng 1 nên có vô hạn phần tử. Một tập có hữu hạn phần tử không ther cố song ánh với một tập có vô hạn phần tử. Trong ví dụ này ta cũng thấy là tập $\mathbb{F}_p$ là quá nhỏ để coi là tập các điểm của đường thẳng aphin trên $\mathbb{F}_p$. Tập các iđêan cực đại $\mathrm{Spm}(\mathbb{F}_p[x])$ có vẻ tốt hơn.

Tập các iđêan cực đại có một ưu điểm nữa là nó chỉ phụ thuộc vào vành $R = A/I$ chứ không phụ thuộc vào cách biểu diễn R như là thương của một vành đa thức. Như vậy ta đã hoàn thành bước xê dịch quan điểm thứ nhất : thay vì xét tập các nghiệm của một hệ phương trình trong k^n, ta xem xét tập các iđêan cực đại của một k-đại số hữu hạn sinh R.

Sau này ta sẽ thấy ngưòi ta xét tới tập $\mathrm{Spec}(R)$ tất cả các iđêan nguyên tố chứ không phải chỉ $\mathrm{Spm}(R)$ các iđêan cực đại. Nhưng bước này chỉ mang tính kỹ thuật chứ không có tính cách mạng. Với R là các k-đại sô dạng hữu hạn thi $\mathrm{Spec}(R)$ không có gì hay hơn so với $\mathrm{Spm}(R)$ nhưng tất nhiên là đối với một vành bất kỳ, chẳng hạn như một vành địa phương thì $\mathrm{Spec}(R)$ giàu có hơn nhiều so với $\mathrm{Spm}(R)$ chỉ có mỗi một điểm trong trường hợp vành địa phương.

Định nghĩa 4 *Cho k là một trường đóng đại số. Cho một đa tạp aphin trên k là cho một k-đại số dạng hữu hạn R. Cho một điểm của nó là cho một phần tử của* $\mathrm{Spm}(R)$.

Mệnh đề 5 *Cho R là một k-đại số hữu hạn sinh với k là một trường đóng đại số. Khi đó ta có một song ánh chuẩn tắc giữa tập* $\mathrm{Hom}_{k-Alg}(R,k)$ *các đông cấu k-đại số từ R vào k và tập các iđêan cực đại* $\mathrm{Spm}(R)$ *của R.*

Cho một đồng cấu k-đại số $\phi : R \to k$, ưϕ ắt phải là toàn ánh vì R chứa k. Hạch của nó là một iđêan cực đại của R. Ngược lại nếu ta cho một iđêan cực đại $\mathfrak{p}$ của R, trường $R/\mathfrak{p}$ là môtk k-đại số dạnh hữu hạn nên ắt phải bằng k. Vậy đồng cấu thương $R \to R/\mathfrak{p}$ cho ta một phần tử của $\mathrm{Hom}_{k-Alg}(R,k)$. Ta dã xây dựng hai ánh xạ nghịch đảo giữa $\mathrm{Hom}_{k-Alg}(R,k)$ và tập $\mathrm{Spm}(R)$.

Định nghĩa 6 *Cho R là một k-đại số dạng hữu hạn. Cho một nhúng (đóng) của đa tạp aphin* $\mathrm{Spm}(R)$ *tương ứng với R vào không gian aphin là cho một đồng cấu toàn ánh*

$$A = k[x_1, \ldots, x_n] \to R$$

từ vành đa thức vào R.

Một đồng cấu toàn ánh như trên $\phi : A \to R$ cũng là một biểu diễn R như thương của một vành đa thức $R = A/I$ với iđêan I là hạch của ϕ. Với mọi điểm

$$\psi \in \mathrm{Hom}_{k-Alg}(R,k)$$

ta có thể cho ứng với một điểm

$$\psi \circ \phi \in \mathrm{Hom}_{k-Alg}(A,k).$$

Vì thế ta có một ánh xạ đơn ánh từ $\mathrm{Hom}_{k-Alg}(R,k) \to \mathrm{Hom}_{k-Alg}(A,k)$ với ảnh là các đồng cấu $A \to k$ bằng không trên iđêan I. Vì ta biết rằng với các k-đại số dạng hữu hạn trên trường đóng đại số k, $\mathrm{Hom}_{k-Alg}(R,k) = \mathrm{Spm}(R)$ cho nên ta cũng có một ánh xạ đơn ánh $\mathrm{Spm}(R) \to \mathrm{Spm}(A)$.

Định nghĩa 7 *Cho hai k-đa tạp aphin ứng với hai k-đại số dạng hữu hạn R và R'. Ta gọi một đồng cấu k-đại số $R' \to R$ là một cấu xạ từ đa tạp aphin tương ứng với Rư vào đa tạp aphin tương ứng với R'. Cấu xạ này gọi là một nhúng đóng nếu như đồng cấu $R' \to R$ là toàn ánh.*

Tương tự như ở trên, nếu cho một đồng cấu $R' \to R$, ta có một ánh xạ $\mathrm{Hom}_{k-Alg}(R,k) \to \mathrm{Hom}_{k-Alg}(R',k)$. Cũng tương tự như trên , trong trường hợp ta xét, R, R' là các k-đại số dạng hữu hạn, cho nên

$\mathrm{Hom}_{k-Alg}(R,k) = \mathrm{Spm}(R)$ và $\mathrm{Hom}_{k-Alg}(R',k) = \mathrm{Spm}(R')$ cho nên ta cũng có một ánh xạ $\mathrm{Spm}(R) \to \mathrm{Spm}(R')$. Ta có thể kiểm tra được là ánh xạ này cho ứng với iđêan cực đại $\mathfrak{p}$ của R, iđêan $\mathfrak{p}'$ tạo ảnh của $\mathfrak{p}$ trong R'.

Nói chung cho một đồng cấu vành $\phi : R' \to R$, cho một iđêan nguyên tố $\mathfrak{p}$ của R thì tạo ảnh $\mathfrak{p}' = \phi^{-1}(\mathfrak{p})$ cũng là một iđêan nguyên tố vì khi đó $R'/\mathfrak{p}'$ là một vành con của $R/\mathfrak{p}$ mà vành con của một vành nguyên vẹn ắt phải là một vành nguyên vẹn. Nhưng mà vành con của một trường thì không nhất thiết là một trường cho nên tạo ảnh của một iđêan cực đại không nhất thiết là một iđêan cực đại vậy cho nên nếu R, R' không phải là các k-đại số dạng hữu hạn, ta không có ánh xạ $\mathrm{Spm}(R) \to \mathrm{Spm}(R')$ mà chỉ có ánh xạ $\mathrm{Spec}(R) \to \mathrm{Spec}(R')$. *Đối với các k-đại số dạng hữu hạn, ta có thể coi điểm là các iđêan cực đại, còn đối với một vành bất kỳ thì ta phải coi điểm là các iđêan nguyên tố.*

Nhận xét cuối cùng, và là nhận xét rất quan trọng là : cho đồng cấu $\phi : R' \to R$, ta không chỉ có ánh xạ $\mathrm{Hom}_{k-Alg}(R,k) \to \mathrm{Hom}_{k-Alg}(R',k)$ mà ta có ánh xạ $\phi \mapsto \psi \circ \phi$

$$\mathrm{Hom}_{k-Alg}(R,S) \to \mathrm{Hom}_{k-Alg}(R',S)$$

với mọi vành S. Trong trường hợp $k = \mathbb{F}_p$ ta đã thấy chỉ một tập điểm $\mathrm{Hom}(R,k)$ không đủ để xác định R nhưng khi cho vành S biến thiên thì theo định lý Yoneda, hàm tử $S \mapsto \mathrm{Hom}(R,S)$ hoàn toàn xác định R.

Tóm lại, ta có đã trình bốn cách mô tả hình học của một k-đại số dạng hữu hạn R trên một trường k đóng đại số,

1. Sau khi chọn một cách biểu diễn R dưới dạng $R = A/I$ với $A = k[x_1, \ldots, x_n]$ là một vành đa thức và $I = \langle f_1, \ldots, f_m \rangle$ là iđêan sinh bởi các đa thức $f_1, f_2, \ldots, f_m$, ta lấy đối tượng hình học ứng với R là tập đại số các điểm $\alpha \in k^n$ sao cho $f_1(\alpha) = \cdots = f_m(\alpha) = 0$. Tập bày hiển nhiên cũng bằng tập $\mathrm{Hom}_{k-Alg}(R,k)$. Tập $\mathrm{Hom}_{k-Alg}(R,k)$ thì không phụ thuộc nữa vào cách biểu diễn R thành thương $R = A/I$.

2. Mô tả bằng tập các iđean cực đại $\mathrm{Spm}(R)$.

3. Mô tả bằng tập các iđean nguyên tố $\mathrm{Spec}(R)$.

4. Mô tả bằng hám tử $k - \mathbf{Alg} \to \mathbf{Set}$ ứng với mỗi k-đại số S là tập $\mathrm{Hom}_{k-Alg}(R,S)$.

Trong trường hợp k đóng đại số hai cách mô tả đầu tương đương với nhau. Trong trương hợp tổng quát ta cần thay tập các nghiệm $\mathrm{Hom}_{k-Alg}(R, k)$ với giá trị trong k bằng tập các nghiệm với giá trị trong một vành biến thiên S, và thay tập các iđêan cực đại bằng tập các iđêan nguyên tố.

4.2 Phạm trù đối của phạm trù các vành

Như đã phân tích ở mục trước, với mỗi vành giao hoán A ta có một hàm tử h_A từ phạm trù các vành giao hoán **Ring** vào phạm trù các tập hợp, cho bởi

$$h_A(R) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ring}}(A, R).$$

Định nghĩa 8 *Lược đồ aphin là một hàm tử F : **Ring** $\to$ **Set** sao cho tồn tại một vành giao hoán A và một đẳng cấu hàm tử $F \to h_A$.*

Ta có ví dụ cơ bản sau đây đã nêu ở mục trước trong trường hợp đặc biệt. Cho R là một vành bất kỳ. Cho $f_1, \ldots, f_r \in R[x_1, \ldots, x_n]$

là r đa thức n biến với hệ số trong R. Xét hàm tử F : **Ring** $\to$ **Set** cho ứng với mỗi vành R' tập các bộ $(\phi; \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ với $\phi : R \to R'$ là một đồng cấu vành và $\alpha_1 \ldots, \alpha_n \in R'$ sao cho

$$\phi(f_i)(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 0$$

với mọi $i = 1, \ldots, r$. Ơ đay đa thức $\phi(f_i)$ là ảnh của đa thức ϕ_i qua đồng cấu hiển nhiên $R[x_1, \ldots, x_n] \to R'[x_1, \ldots, x_n]$ cảm sinh từ ϕ.

Ta có thể chứng minh tồn tại một đẳng cấu ham tử

$$F \simeq h_A$$

với $A = R[x_1, \ldots, x_n]/\langle f_1, \ldots, f_r\rangle$. Thật vậy, cho một phân tử $(\phi; \alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in F(R')$ ta có một đồng cấu vành từ vành các đa thức $R[x_1, \ldots, x_n]$ vào R' ; nó gửi R vào R' qua ϕ và gửi mỗi biến x_i lên phần tử α_i. Đa thức f_i được gửi lên phần tử $\phi(f_i)(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 0$ tròn R' cho nên ảnh của iđêan sinh ra bởi các đa thức này là $\{0\}$. Vậy nên đồng cấu $R[x_1, \ldots, x_n] \to R'$ phải phân tích qua thương $R[x_1, \ldots, x_n]/\langle f_1, \ldots, f_r\rangle$ và cho ta một phần tử

$$\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ring}}(R[x_1, \ldots, x_n]/\langle f_1, \ldots, f_r\rangle, R').$$

Ngược lại nếu ta có đồng cấu α như trên, hạn chế vào R cho ta ϕ, và ảnh $\alpha(x_i)$ cho ta lại các phần tử α_i.

Ví dụ này cho ta thấy quan niệm hàm tử rât gần với cách hiểu ngây thơ nhất về hình học đại số tức là nghiên cứu nghiệm của các hệ phương trình đại số.

4.3 Không gian tôpô $\mathrm{Spec}(A)$

Cho A là một vành giao hoán. Như ở mục 1.3, tập phổ $\mathrm{Spec}(A)$ là tập các iđêan nguyên tố của A. Trên tập này có một cấu trúc tôpô gọi là tôpô Zariski định nghĩa như sau.

Với mỗi A-mođun con I của A, tức là I là một iđêan của A hoặc $I = A$, ta đặt $V(I)$ là tập các iđêan nguyên tố $\mathfrak{p}$ của A chứa I, đặt $U(I)$ phần bù của $V(I)$ trong $\mathrm{Spec}(A)$, tức là tập các iđêan nguyên tố $\mathfrak{p}$ không chứa I. Nếu $I = A$ rõ rang $V(I)$ là tập trống và $U(I)$ là toàn bộ $\mathrm{Spec}(A)$. Ngược lại, nếu $I = \{0\}$ ta có $V(I) = \mathrm{Spec}(A)$ còn $U(I)$ là tập trống.

Định nghĩa 9 *Tôpô Zariski trên* $\mathrm{Spec}(A)$ *có họ các tập đóng là các tập* $V(I)$ *và họ các tập mở là cac tập* $U(I)$ *chỉ số hoá bởi các* A*-mođun con* I *của* A*.*

Ta lấy ví dụ $A = k[t]$ là vành các đa thức một biến trên một trường k đóng đại số. Ta biết tập $\mathrm{Spec}(A)$ bao gồm một điểm tổng quát tương ứng vơi iđêan nguyên tố $\{0\}$, các điểm khác của nó có dạng $\langle t-\alpha\rangle$ và tương ứng một một với các phần tử $\alpha \in k$. Một iđêan bất kỳ $I \neq \{0\}$ của A có dạng $I = \langle f\rangle$. Iđêan tối đại tương ứng với $\alpha \in k$ thuộc vào tập đóng $V(I)$ khi và chỉ khi $f(\alpha) = 0$. Như vậy một tập con đóng của $\mathrm{Spec}(A)$ hoặc là cả $\mathrm{Spec}(A)$ hoặc chỉ chứa một số hữu hạn các điểm dạng $\langle t-\alpha\rangle$. Tập con của $\mathrm{Spec}(A)$ với đúng một phần tử là điểm tổng quát, không phải là một tập đóng.

Để cho định nghĩa 2 có nghĩa, ta cần kiểm tra rằng họ các tập đóng $V(I)$ và họ các tập mở $U(I)$ thoả mãn các tiên đề của một tôpô.

Bổ đề 10 *Cho* I_1, I_2 *là hai* A*-mođun con của* A*. Ta có*

$$V(I_1) \cap V(I_2) = V(I_1 + I_2)$$

với $I_1 + I_2$ *là tập các phần tử của* A *có thể viết được dưới dang* $\alpha_1 + \alpha_2$ *với* $\alpha_1 \in I_1$ *và* $\alpha_2 \in I_2$*. Ta cũng có*

$$V(I_1) \cup V(I_2) = V(I_1 I_2)$$

với I_1I_2 là iđêan sinh ra bởi các phần tử có dạng $\alpha_1\alpha_2$ với $\alpha_1 \in I_1$ và $\alpha_2 \in I_2$. Ta có các đẳng thức tương tự cho tập mở $U(I_1) \cup U(I_2) = U(I_1 + I_2)$ và $U(I_1) \cap U(I_2) = U(I_1I_2)$.

Nếu $\mathfrak{p} \in V(I_1) \cap V(I_2)$ thì theo định nghĩa $I_1 \subset \mathfrak{p}$ và $I_2 \subset \mathfrak{p}$. Mà $I_1 + I_2$ là A-mođun nhỏ nhất chứa cả I_1 và I_2 cho nên $I_1 + I_2 \subset \mathfrak{p}$. Ngược lại nếu $I_1 + I_2 \subset \mathfrak{p}$ thì hiển nhiên ta có $I_1 \subset \mathfrak{p}$ và $I_2 \subset \mathfrak{p}$.

Nếu $\mathfrak{p} \in V(I_1) \cup V(I_2)$ thì $\mathfrak{p}$ phải chứa hoặc I_1 hoặc I_2. Trong cả hai trường hợp, $\mathfrak{p}$ đều chứa I_1I_2. Ngược lại nếu $I_1 \not\subset \mathfrak{p}$ và $I_2 \not\subset \mathfrak{p}$ thì ta co thể chọn $x_1 \in I_1 - \mathfrak{p}$ và $x_2 \in I_2 - \mathfrak{p}$. Vì $\mathfrak{p}$ là một iđêan nguyên tố nên tích $x_1x_2 \notin \mathfrak{p}$. Vậy mà $x_1x_2 \in I_1I_2$ cho nên $I_1I_2 \not\subset \mathfrak{p}$.

Ta có thể nhận xét là, trong chứng minh trên, giao một số vô hạn các tập đóng $V(I_j)$ vẫn là một tập đóng có dạng $V(I)$ với I là A-mođun con nhỏ nhất trong A chứa tất cả các I_j. Ngược lại thì hợp một số vô hạn các $V(I_j)$ có thể không còn có dạng $V(I)$ nữa. Thât vậy, lấy $A = \mathbb{Z}$ và xét hợp của một số vô hạn các tập $I(\langle p_j\rangle)$ tương ứng với các số nguyên tố p_j. Nếu hợp này có dạng $V(I)$ thì iđêan I phải nằm trong giao $\bigcap_j \langle p_j\rangle$ mà giao này bằng không nếu tập các số nguyên tố $\{p_j\}$ ta chọn là tập vô hạn. Vậy nên $I = \{0\}$. Điều này cũng vô lý vì điểm tổng quát $\{0\}$ nằm trong $V(I)$ mà không hề nằm trong hợp các $Y(\langle p_j\rangle)$.

Bổ đề 11 (Phân hoạch đơn vị) *Cho I_1 và I_2 là hai iđêan sao cho $U(I_1 + I_2) = \mathrm{Spec}(A)$. Khi đó tồn tại $\alpha_1 \in I_1$ và $\alpha_2 \in I_2$ sao cho $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$.*

Từ đẳng thức thứ nhất ta suy ra nếu hợp của hai tập mở $U(I_1)$ và $U(I_2)$ là $\mathrm{Spec}(A)$ thì $U(I_1 + I_2) = \mathrm{Spec}(A)$. Thế có nghĩa là $I_1 + I_2$ không bị chứa trong bất kỳ một iđêan nguyên tố hay một iđêan tối đại nào. Điều này chỉ có thể xảy ra nếu $I_1 + I_2 = A$, tức là tồn tại $\alpha_1 \in I_1$ và $\alpha_2 \in I_2$ sao cho $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$.

Bổ đề 12 (Nullstellensatz yếu) *Cho I là một iđêan của vành A. Khi đó $U(I) = \emptyset$ khi và chỉ khi mọi phần tử của I là luỹ linh.*

Nếu α là một phần tử luỹ linh, tức là $\alpha^n = 0$ với $n \geq 1$ nào đó, thì với mọi iđêan nguyên tố $\mathfrak{p}$ ta có $\alpha \in \mathfrak{p}$ vì $\alpha^n \in \mathfrak{p}$. Vì thế nếu mọi phần tử của I là luỹ linh thì $I \subset \mathfrak{p}$ với mọi iđêan nguyên tố $\mathfrak{p}$, tức là $U(I) = \emptyset$.

Nếu ngược lại cho α là một phần tử của I, $\alpha \in \mathfrak{p}$ với mọi iđêan nguyên tố $\mathfrak{p}$. Ta cần chứng minh α là một phần tử luỹ linh. Xét vành đa thức một biến $A[x]$ và phần tử $1-\alpha x$ trong vành này. Với mọi iđêan nguyên tố $\tilde{\mathfrak{p}}$ của $A[x]$, giao $\mathfrak{p} = \tilde{\mathfrak{p}} \cap A$ là một iđêan nguyên tố của A. Vì $\alpha \in \mathfrak{p}$ cho nên $\alpha x \in \tilde{\mathfrak{p}}$. Ta suy ra $1-\alpha x \notin \tilde{\mathfrak{p}}$. Phần tử $1-\alpha x$ không nằm trong bất kỳ một iđêan nguyên tố nào nên nó là phần tử khả nghịch trong $A[x]$. Tức là tồn tại môt đa thức

$$\beta_0 + \beta_1 x + \cdots + \beta_n x^n \in A[x]$$

sao cho

$$(1-\alpha x)(\beta_0 + \beta_1 x \cdots + \beta_n x^n) = 1.$$

Đồng nhất các hệ số ở hai vế, ta có $\beta_0 = 1, \beta_1 = \alpha, \ldots, \beta_n = \alpha^n$ và $\alpha^{n+1} = 0$. Vậy nên α là một phần tử luỹ linh.

Định nghĩa 13 *Một không gian tôpô X gọi là liên thông nếu không tồn tại hai tập con đóng Y_1 và Y_2 cả hai cùng khác rỗng sao cho $Y_1 \cap Y_2 = \emptyset$ và $Y_1 \cup Y_2 = X$. Trong đinh nghĩa này ta có thể thay tập con đóng bằng tập con mở.*

Không gian tôpô X gọi là bất khả qui nếu không tồn tại hai tập con đóng Y_1 và Y_2 cả hai cùng khác rỗng sao cho $Y_1 \cup Y_2 = X$.

Bổ đề 14 *Không gian phổ $\operatorname{Spec}(A)$ là liên thông khi và chỉ khi không tồn tại phần tử $\alpha \in A$ thoả mãn $\alpha(1-\alpha) = 0$.*

Giả A là một vành rút gọn, tức là một vành không có phần tử luỹ linh khác không. Không gian phổ $\operatorname{Spec}(A)$ là bất khả qui khi và chỉ khi không tồn tại $\alpha_1, \alpha_2 \in A$ khác không mà $\alpha_1\alpha_2 = 0$.

Nếu tồn tại $\alpha \in A$ với $\alpha(1-\alpha) = 0$ thì ta có thể lấy $I_1 = \langle \alpha \rangle$ và $I_2 \langle \alpha_2 \rangle$ là các iđêan sinh bởi α và bởi $1-\alpha$. Vì $I_1 + I_2 = A$ cho nên hợp của $U(I_1)$ và $U(I_2)$ là $\operatorname{Spec}(A)$. Vì $I_1 I_2 = 0$ cho nên giao của $U(I_1)$ và $U(I_2)$ là tập rỗng. Vậy nên $\operatorname{Spec}(A)$ không liên thông.

Giả sử $\operatorname{Spec}(A)$ không liên thông tức là tồn tại hai iđêan I_1 và I_2 sao cho hai tập mở $U(I_1)$ và $U(I_2)$ có giao bằng rỗng và hợp bằng $\operatorname{Spec}(A)$. Khi đó tồn tại $\alpha_1 \in I_1$ và $\alpha_2 \in I_2$ sao cho $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$. Vì giao $U(I_1) \cap U(I_2) = U(I_1 I_2)$ là rỗng cho nên tích $\alpha_1\alpha_2$ là một phần tử luỹ linh. Nếu A là rút gọn thì ta có ngay $\alpha_1\alpha_2 = 0$. Nếu không ta chỉ biết rằng tồn tại $n \geq 1$ sao cho $\alpha_1^n \alpha_2^n = 0$. Nhưng vì $U(\langle \alpha_1^n \rangle) = U(\langle \alpha_1 \rangle)$ và $U(\langle \alpha_2^n \rangle) = U(\langle \alpha_2 \rangle)$ cho nên hợp $U(\langle \alpha_1^n \rangle) \cup U(\langle \alpha_2^n \rangle)$ vẫn là cả $\operatorname{Spec}(A)$. Theo bổ đề phân hoạch đơn vị, tồn tại $\beta_1 \in \langle \alpha_1^n \rangle$ và $\beta_2 \in \langle \alpha_2^n \rangle$ sao cho $\beta_1 + \beta_2 = 1$. Rõ ràng $\beta_1\beta_2$ là bội của $\alpha_1^n \alpha_2^n$ cho nên $\beta_1\beta_2 = 0$.

4.4 Bó cấu trúc

Ta bị mất một số thông tin khi chuyển từ vành A sang không gian tôpô Spec(A), chẳng hạn như các thông tin về luỹ linh. Để bảo toàn mọi thông tin về A, người ta trang bị thêm cho Spec(A) một bó cấu trúc.

Ta có thể hiểu nôm na bó cấu trúc trên Spec(A) như sau. Ta cho ứng với mọi tập mở U của Spec(A), vành $\mathcal{O}(U)$ tất cả các hàm đại số trên U, tất nhiên ta cần làm chính xác hơn thế nào là hàm đại số sau. Nếu U' là một tập mở con của U, thì ta có thể hạn chế một hàm trên U vào một hàm trên U'. Như vậy ta có một hàm tử từ phạm trù các tập mở của Spec(A) vào phạm trù các vành. Hàm tử này thỏa mãn một tích chất đặc biệt là nếu họ các tập mở $\{U_i\}_i \in \mathcal{I}$ phủ một tập mở U thì một hàm f trên U hoàn toàn bị xác định bởi các hạn chế f_i của nó vào các tập mở U_i, va hơn nữa một họ các hàm f_i trên U_i có thể dán lại được thành một hàm f trên U khi và chỉ khi $f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j}$. Các hàm tử như vậy gọi là các bó. Trước khi tìm hiểu bó cấu trúc, ta dduwa ra định nghĩa tổng quát thế nào là một bó.

Cho X là một không gian tôpô. Tiền bó trên X là một quy tắc gán cho

mỗi tập mở U của X một tập hợp $\mathcal{F}(U)$ nào đó và gán cho mỗi cặp hai tập mở $U \subset V$ một ánh xạ $\mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(U)$ nào đó sao cho

- đối với cặp $U = V$, ánh xạ tương ứng $\mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(U)$ là ánh xạ đơn vị,
- nếu $U \subset V \subset W$, hợp thành của $\mathcal{F}(W) \to \mathcal{F}(V)$ và $\mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(U)$ là ánh xạ $\mathcal{F}(W) \to \mathcal{F}(U)$ tương ứng với cặp $U \subset W$.

Ta có thể diễn đạt khái niệm tiền bó một cách súc tích hơn như sau. Xét phạm trù $\mathcal{U}$ với vật là các tậưp mở U của X và với Hom(U, V) là tập rỗng nếu $U \not\subset V$, là tập hợp với đúng một phần tử nếu $U \subset V$. Khi đó một *tiền bó* là một hàm tử $\mathcal{F}$ từ phạm trù $\mathcal{U}^{\text{opp}}$ vào phạm trù **Set**. Tương tự như vậy, tiền bó nhóm, tiền bó vành, là một hàm tử từ $\mathcal{U}^{\text{opp}}$ vào phạm trù các nhóm hay phạm $\mathbb{A}b$ trù các vành **Ring**.

Một phần tử $f \in \mathcal{F}(V)$ gọi là một lớp cắt của $\mathcal{F}$ trên V. Nếu $U \subset V$, ảnh của $f \in \mathcal{F}(V)$ trong $\mathcal{F}(U)$ được ký hiệu là $f|_U$, và gọi là hạn chế của f vào U.

Định nghĩa 15 *Bó (nhóm, vành) trên một không gian tôpô X là một tiền bó (nhóm, vành) thoả mãn tính chất dán được. Cho U, V là hai tập mở của X, khi đó bằng cách hạn chế vào U và V, tập $\mathcal{F}(U \cup V)$ có thể đồng nhất với tập con của $\mathcal{F}(U) \times \mathcal{F}(V)$ các cặp $(f, g) \in \mathcal{F}(U) \times \mathcal{F}(V)$ thoả mãn $f|_{U \cap V} = g|_{U \cap V}$. Tổng quát hơn nếu U là hợp của một họ có thể vô hạn*

$(U_i)_{i\in\mathcal{I}}$ khi đó $\mathcal{F}(U)$ có thể đồng nhất với tập con của tích $\prod_{i\in\mathcal{I}}\mathcal{F}(U_i)$ các phần tử $(f_i)_{i\in\mathcal{I}}$ sao cho với mọi cặp $i,j\in\mathcal{I}$ ta có $f_i|_{U_i\cap U_j} = f_j|_{U_i\cap U_j}$.

Trong trường hợp Noether thì ta chỉ cần xét tới các họ phủ hữu hạn.

Trong số các tập mở của $\mathrm{Spec}(A)$ có một hệ cơ sở đặc biệt tiện lợi cho việc tính toán trong các bó mà ta sẽ gọi là tập mở chính. Mỗi phần tử $f\in A$ sinh ra một iđêan chính $\langle f\rangle$. *Tập mở chính* $U(f)$ là tập mở tương ứng với iđêan chính $\langle f\rangle$ hay nói cách khác là tập các iđêan nguyên tố $\mathfrak{p}$ của A sao cho $f\notin\mathfrak{p}$. Như ta đã biết, tập mở chính $U(f)$ có thể đồng nhất với tập các iđêan nguyên tố của $A[f^{-1}]$; không gian tôpô cảm sinh lên $U(f)$ cũng đẳng cấu chuẩn tắc với không gian tôpô $\mathrm{Spec}(A[f^{-1}]$.

Bổ đề 16 *Giao hai tập mở chính là một tập mở chính. Với mọi điểm $x\in\mathrm{Spec}(A)$ và với mọi tập mở U chứa điểm này, tồn tại môt tập mở chính $U(f)$ sao cho $x\in U(f)$ và $U(f)\subset U$.*

Khẳng định thứ nhất là hiển nhiên vì

$$U(f_1)\cap U(f_2) = U(f_1f_2).$$

Khẳng định sau cũng chỉ là viết lại các định nghĩa. Giả sử điểm x tương ứng với iđêan nguyên tố $\mathfrak{p}$ và tập mở U tương ứng với iđêan I. Giả thiết $x\notin U$ tương đương với $I\not\subset\mathfrak{p}$. Vậy nên tồn tại một phần tử $f\in I$ mà $f\notin\mathfrak{p}$. Khi đó hiển nhiên $x\in U(f)$ và $U(f)\subset U$.

Bổ đề 17 *Mọi tập mở U của $\mathrm{Spec}(A)$ đều có thể phủ được bởi một họ, không nhất thiết hữu hạn, các tập mở chính. Nếu A là vành Noether, mọi tập mở U của $\mathrm{Spec}(A)$ đều có thể phủ được bởi một họ hữu hạn các tập mở chính.*

Nếu U là tập mở tương ứng với iđêan I và nếu I sing bởi mọt họ các phần tử $(f_i)_{i\in\mathcal{I}}$, khi đó $U=\bigcup_{i\in\mathcal{I}}U(f_i)$. Nếu A là vành Noether, mọi iđêan I có một hệ sinh bao gồm một số hữu hạn các phần tử $f_1,\ldots,f_n$ khi đó $U=U(f_1)\cup\cdots\cup U(f_n)$.

Định lý 18 *Cho A là một vành giao hoán bất kỳ. Tồn tại duy nhất, với sai khác là một đẳng cấu duy nhất, một bó vành $\mathcal{O}$ trên $\mathrm{Spec}(A)$ gán với mỗi tập mở chính $U(f)$ vành $A[f^{-1}]$ là vành địa phương hoá của A theo tập nhân $\{1,f,f^2,\ldots\}$. Bó vành $\mathcal{O}$ gọi là bó vành cấu trúc của $\mathrm{Spec}(A)$.*

Ta có thể phủ mọi tập mở U của $\mathrm{Spec}(A)$ bằng một họ các tập mở chính $U = \bigcup_{i\in I} U(f_i)$. Giao $U(f_i) \cap U(f_j) = U(f_i f_j)$ cũng là môt tập mở chính. Thế cho nên vành các lớp cắt của $\mathcal{O}$ trên U nhất thiết phải bằng vành các bộ $(a_i)_{i\in\mathcal{I}} \in \prod_{i\in\mathcal{I}} A[f_i^{-1}]$ sao cho với mọi cặp chỉ số $i,j \in \mathcal{I}$, ảnh của a_i và a_j ở trong $A[f_i^{-1}f_j^{-1}]$ bằng nhau.

Ta cần phải chứng minh rằng $\mathcal{O}(U)$ định nghĩa như trên không phụ thuộc vào phủ U bởi các tập mở chính mà ta chọn. Muốn vậy ta phải xét một phủ khác của $U = \bigcup_{j\in\mathcal{J}} U(g_j)$ rồi xét tính chất dán đối với phủ của $U(f_i)$ bởi các tập mở $U(f_i) \cap U(g_j)$ với $j \in \mathcal{J}$. Thay A bằng $A[f_i^{-1}]$ ta qui về chứng ming bổ đề sau đây.

Bổ đề 19 *Giả sử* $\mathrm{Spec}(A)$ *có thể phủ được bằng một họ các tập mở chính* $\bigcup_{j\in\mathcal{J}} U(g_j)$. *Khi đó hạn chế vào các* $U(g_j)$ *cho phép ta đồng nhất* A *với vành con của* $\prod_{j\in\mathcal{J}} A[g_j^{-1}]$ *các phần tử* (a_j) *sao cho ảnh của* a_i *và* a_j *trong* $A[g_i^{-1}g_j^{-1}]$ *bằng nhau.*

Vì $\mathrm{Spec}(A) = \bigcup_{j\in\mathcal{J}} U(g_j)$, theo bổ đề phân hoạch đơn vị, tồn tại một số hữu hạn các chỉ số $j = 1,\ldots,n \in \mathcal{J}$ sao cho $1 = b_1g_1 + \cdots + b_ng_n$ với các phần tử $b_1,\cdots,b_n \in A$ nào đó. Khi đó ta có $\mathrm{Spec}(A) = \bigcup_{j=1}^{n} U(g_j)$ và ta có thể qui về trường hợp tập chỉ số $\mathcal{J}$ hữu hạn.

Giả sủ cho $a_j \in A[g_j^{-1}]$ sao cho ảnh của a_i và a_j trong $A[g_i^{-1}g_j^{-1}]$ bằng nhau. Chọn mẫu số thích hợp cho phép ta viết a_j ở dạng $a_j = \frac{c_j}{g_j^N}$ với một số tự nhiên N đủ lớn đối với mọi a_j, và sao cho

$$c_i g_j^N = c_j g_i^N$$

với mọi cặp $i,j \in \{1,\ldots,n\}$.

Vì $U(f_j^N) = U(f_j)$ cho nên theo bổ đề phân hoạch đơn vị ta có thể tìm được $b_1,\ldots,b_n$ sao cho

$$b_1g_1^N + \cdots + b_ng_n^N = 1.$$

Đặt $a = b_1c_1 + \cdots + b_nc_n \in A$. Ta muốn chứng minh rằng ảnh của a trong $A[g_j^{-1}]$ bằng a_j. Thật vậy

$$\begin{array}{rcl} ag_j^N & = & \sum_{i=1}^{n} b_ic_ig_j^N \\ & = & c_j \sum_{i=1}^{n} b_ig_i^N \\ & = & c_j \end{array}$$

Như vậy ta đã chứng minh được tính toàn ánh. Tính đơnh ánh cũng chứng minh tương tự như vậy. Cho $a \in A$ với ảnh trong các địa phương hoá $A[g_j^{-1}]$ bằng 0. Tức là tồn tại N đủ lớn sao cho với mọi

$j = 1, \ldots, n$ ta có $ag_j^N = 0$. Lại dùng bổ đề phân hoạch đơn vị ta có $a = 0$. □

Mệnh đề 20 *Cho A là một miền nguyên và gọi K là trường các thương của A. Với mọi tập mở U của* $\operatorname{Spec}(A)$*, $\mathcal{O}(U)$ là vành con của K bao gồm các phần tử $f \in K$ sao cho với mọi iđêan nguyên tố $x \in U \subset \operatorname{Spec}(A)$, ta có $f \in A_x$, với A_x xem như là một vành con của K*

$$\mathcal{O}(U) = \bigcap_{x \in U} A_x.$$

Cho một tập mở U của $\operatorname{Spec}(A)$ và cho một phủ của U bởi các tập mở chính $U(g_i)$ với các chỉ số i chạy trong một tập $\mathcal{I}$, không nhất thiết hữu hạn.

Theo cách xây dựng của bó cấu trúc $\mathcal{O}$, một phần tử $f \in \mathcal{O}(U)$ là một họ $f_i \in A[g_i^{-1}]$, sao cho $f_i|_{U(g_i g_j)} = f_j|_{U(g_i g_j)}$. Vì

A là miền nguyên cho nên các vành $A[g_i^{-1}]$ đều có thể coi là vành con của K. Điều kiện $f_i|_{U(g_i g_j)} = f_j|_{U(g_i g_j)}$ tương đương với việc ảnh của các f_i trong K đều như nhau. Vậy nên

$$\mathcal{O}(U) = \bigcap_{i \in \mathcal{I}} A[g_i^{-1}].$$

Cho một điểm $x \in U$, tồn tại $i \in \mathcal{I}$ sao cho $x \in U(g_i)$ tức là g_i không nằm trong iđêan nguyên tố x, $g_i(x) \neq 0$. Khi đó $A[g_i^{-1}] \subset A_x$ và ta suy ra

$$\mathcal{O}(U) \subset \bigcap_{x \in U} A_x.$$

Ngược lại với mọi $f \in \bigcap_{x \in U} A_x$, với mọi $x \in U$, f có thể viết dưới dạng $f = c_x/g_x$ với $c_x, g_x \in A$ và $g_x \notin x$. Nhân thêm g_x với một hàm bằng không trên phần bù của U, ta có thể giả sử $U(g_x) \subset U$. Như vậy ta có một phủ của U bằng họ các tập mở chính $U(g_x)$ và hàm $f \in A[g_x^{-1}]$ theo xxây dựng của bó cấu trúc $\mathcal{O}$ là một phân tử của $\mathcal{O}(U)$. □

Bó $\mathcal{O}$ trên $\operatorname{Spec}(A)$ xây dựng như trên gọi là **bó cấu trúc** của $\operatorname{Spec}(A)$. Vành các lớp cắt của $\mathcal{O}$ trên $\operatorname{Spec}(A)$ lại là A cho nên cặp $(\operatorname{Spec}(A), \mathcal{O})$, chỉ phụ thuộc vào A, và cũng chứa mọi thông tin về A. Nói cách khác là nói hoàn toàn tương đương với A. Ta có thể đặt câu hỏi rằng tại sao ta lại đi một con đường vô cùng rắc rối để đến một kết quả hoàn toàn tương đương với điểm xuất phát. Câu trả lời là điểm ta đến nằm trong một thế giới khác, thế giới của hình học. Cái ta thu lượm được là một đối tượng hình học thân thiện hơn so với đối tượng đại số một là vành giao hoán.

4.5 Thớ của bó và thớ của bó cấu trúc

Định nghĩa 21 *Cho X là một không gian tôpô, $\mathcal{F}$ là một bó trên X. Cho $x \in X$. Thớ của $\mathcal{F}$ ở trên X là tập hợp các lớp tương đương (U, f) với U là một tập mở chứa x và $f \in \mathcal{F}(U)$ là một lớp cắt của $\mathcal{F}$ ở trên U ; (U, f) tương đương với (U', f') nếu $f|_{U\cap U'} = f'|_{U\cap U'}$. Ta ký hiệu $\mathcal{F}_x$ thớ của $\mathcal{F}$ tại điểm x.*

Ta có thể định nghĩa thớ của một bó như một giới hạn quy nạp. Xét tập $\mathcal{J}$ các tập mở U chứa điểm $x \in X$. Ta xét quan hệ thứ tự $U' \leq U$ nếu $U \subset U'$. Ta có một hệ quy nạp các tập $\mathcal{F}(U)$ với chỉ số trong $\mathcal{J}$với các ánh xạ chuyển tiếp $\mathcal{F}(U') \to \mathcal{F}(U)$ là ánh xạ hạn chế. Dò lại cách xây dựng giới hạn quy nạp, ta nhận thấy giới hạn của hệ quy nạp $\mathcal{F}(U)$, trùng với định nghĩa của thớ của $\mathcal{F}$ tại x. Rõ ràng nếu $\mathcal{F}$ là một bó nhóm Abel hoặc là một bó vành thì các thớ của nó cũng sẽ là nhóm Abel hoặc là vành. Ta cũng nhận xét là thay vì việc xét tất cả các lân cận của điểm x, ta chỉ cần xét một cơ sở là đủ. Vì thế nên thớ của hạn chế của một bó $\mathcal{F}$ trên X vào một tập mở U của X, cũng vẫn là thớ của F tại điểm này.

Với mỗi vành A, ta đã xây dựng một không gian tôpô $\mathrm{Spec}(A)$ và một bó vành $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}$. Ta sẽ tìm hiểu xem thớ của nó là gì.

Mệnh đề 22 *Cho A là một vành giao hoán,* $\mathrm{Spec}(A)$ *là không gian tôpô các iđean nguyên tố của A, $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}$ bó vành cấu trúc trên* $\mathrm{Spec}(A)$. *Với mọi $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$, thớ của $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}$ ở điểm $\mathfrak{p}$ là vành địa phương hoá $A_{\mathfrak{p}}$ của A theo tập nhân $S = A - \mathfrak{p}$. Đặc biệt, mọi thớ của $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec} A}$ đều là vành địa phương.*

Cho một tập mở bất kỳ U của A, ta không biết cách viết tường minh vành $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}(U)$. Tuy vậy, trong tính toán giới hạn quy nạp, ta chỉ cần xét các tập mở chính là đủ vì các tập mở chính chứa điểm $\mathfrak{p}$ đã cho, tạo nên một cơ sở trong số các lân cận của $\mathfrak{p}$. Nếu $\mathfrak{p}$ nằm trong một tập mở chính $U(f)$ thì hiển nhiên $f \notin \mathfrak{p}$ và ta có

$$\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}(U(f)) = A[f^{-1}].$$

Vậy nên ta cần tìm giới hạn quy nạp của các vành dạng $A[f^{-1}]$ đánh số bởi các phần tử $f \in S = A - \mathfrak{p}$ xếp thứ tự theo quan hệ chia hết. Dò theo định nghĩa, ta nhận thấy giới hạn này chính là vành $A_{\mathfrak{p}}$ vì $A_{\mathfrak{p}}$ là vành "nhỏ nhất" chứa A mà trong đó mọi phần tử $f \in S$ đều khả nghịch. $\square$

Qua hai mệnh đề 20 và 22, ta thấy là nói chung ta có thể xây dựng lại bó từ các thớ của nó : các thớ của một bó cô đọng các thông tin về bó. Đấy là một lý do vì sao ít khi người ta nghĩ về bó như là một hàm tử, một hàm tử quả là khó hình dung, mà chỉ nghĩ xem tại một điểm đã cho, thớ của nó là gì.

4.6 Cấu xạ giữa hai lược đồ aphin

Mệnh đề 23 *Cho $\phi : A \to B$ là một đồng cấu vành bất kỳ. Khi đó ánh xạ cảm sinh $f : \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$ là một ánh xạ liên tục.*

Với mọi iđêan nguyên tố $\mathfrak{p}_B$ của B ta có $f(\mathfrak{p}_B)$ là iđêan nguyên tố $\phi^{-1}(\mathfrak{p}_B)$. Cho I_A là một iđêan của A và $U(I_A)$ là tập mở tương ứng của $\mathrm{Spec}(A)$. Tạo ảnh $f^{-1}(U(I_A))$ là tập các iđêan nguyên tố $\mathfrak{p}_B$ của B sao cho $I_A \not\subset \phi^{-1}(\mathfrak{p}_B)$, tức là $\phi(I_A) \not\subset \mathfrak{p}_B$. Vậy nên tạo ảnh $f^{-1}(U(I_A))$ là tập mở $U(\phi(I_A))$. $\square$

Định nghĩa 24 *Cho $(X, \mathcal{O}_X)$ và $(Y, \mathcal{O}_Y)$ là hai không gian tôpô với bó vành. Cho một cấu xạ $f : (Y, \mathcal{O}_Y) \to (X, \mathcal{O}_X)$ là cho*

- một ánh xạ liên tục $f : Y \to X$,

- với mỗi cặp tập mở $U \subset X$ và $V \subset Y$ sao cho $V \subset f^{-1}(U)$, cho một đồng cấu vành $\phi_{U,V} : \mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_Y(V)$ tương thích đối với U và V, tức là, với mọi $U' \subset U$ và $V' \subset V$ thì lược đồ sau phải giao hoán

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_Y(V) & \xrightarrow{\phi_{U,V}} & \mathcal{O}_X(U) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{O}_Y(V') & \xrightarrow{\phi_{U',V'}} & \mathcal{O}_X(U') \end{array}$$

Ở đây, hai mũi tên đi xuống là các đồng cấu hạn chế.

Cho $f : (Y, \mathcal{O}_Y) \to (X, \mathcal{O}_X)$ là một cấu xạ giữa hai không gian tôpô với bó vành. Cho $y \in Y$ và $x = f(y) \in X$. Vưới mọi lân cận U của x, $f^{-1}(U)$ là một lân cận của x thế nên ta có một đồng cấu vành

$$\phi_{f^{-1}(U),U} : \mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_Y(f^{-1}(U)).$$

Nếu hợp thành với đồng cấu từ $\mathcal{O}_Y(f^{-1}(U))$ vào $\mathcal{O}_{Y,y}$ giới hạn quy nạp của hệ các vành $\mathcal{O}_Y(V)$

với $y \in V$, thì ta có một đồng cấu vành $\mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_{Y,y}$. Nếu lấy giới hạn theo U thì ta có một đồng cấu vành

$$\phi_{x,y} : \mathcal{O}_{X,x} \to \mathcal{O}_{Y,y}.$$

Mệnh đề 25 *Với mọi đồng cấu vanh $\phi : A \to B$ ta có một cấu xạ*

$$(\mathrm{Spec}(B), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(B)}) \to (\mathrm{Spec}(A), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}).$$

Với mọi iđêan nguyên tố $y \in Y = \mathrm{Spec}(B)$ với ảnh là $x \in X = \mathrm{Spec}(A)$, đồng cấu vành $\phi_{x,y} : \mathcal{O}_{X,x} \to \mathcal{O}_{Y,y}$ là một **đồng cấu địa phương**, *tức là, nếu $\mathfrak{m}_y$ là iđêan tối đại của vành địa phương $\mathcal{O}_{Y,y}$ và $\mathfrak{m}_x$ là iđêan tối đại của vành địa phương $\mathcal{O}_{Y,x}$ thì $\phi_{x,y}^{-1}(\mathfrak{m}_y) = \mathfrak{m}_x$.*

Ta đã xây dựng một ánh xạ liên tục $f : Y \to X$ gửi một iđêan nguyên tố $\mathfrak{p}_B$ của B lên iđêan nguyên tố $\phi^{-1}(\mathfrak{p}_B)$. Ta còn cần xây dựng các đồng cấu vành $\phi_{U,V}$.

Lấy một lân cận U của $x \in X$ và V của $y \in Y$ sao cho $V \subset f^{-1}(U)$. Ta cần xây dựng $\phi_{U,V} : \mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_Y(V)$. Vì $V \subset f^{-1}(U)$ nên ta đã có đồng cấu vành hạn chế $\mathcal{O}_Y(f^{-1}(U)) \to \mathcal{O}_Y(V)$. Vì vậy ta có thể giả sử $V = f^{-1}(U)$. Cũng như trong chứng minh định lý 11, ta có thể quy về trường hợp U là tập mở chính $U = \mathrm{Spec}(A[a^{-1}])$ với $a \in A$ nào đó. Nhưng khi đó $f-1(U) = \mathrm{Spec}(B[\phi(a)^{-1}])$ và ta có một đồng cấu hiển nhiên $\phi_{U,f^{-1}(U)} : A[a^{-1}] \to B[\phi(a)^{-1}]$.

Để trông quen mắt, ta ký hiệu $\mathfrak{p}_x$ là iđêan nguyên tố của A tương ứng với điểm $x \in X$. Tương tự như vậy, ta có iđêan nguyên tố $\mathfrak{p}_y$ của B tương ứng với điểm

$y \in Y$. Ta có $\phi^{-1}(\mathfrak{p}_y) = \mathfrak{p}_x$. Vì nếu hạn chế $\phi_{x,y} : \mathcal{O}_{X,x} \to \mathcal{O}_{Y,y}$ vào A ta tìm lại $\phi : A \to B$ cho nên ảnh ngược của iđêan tối đại $\mathfrak{m}_y$ của $\mathcal{O}_{Y,y}$ sinh bởi $\mathfrak{p}_y$ là iđêan $\mathfrak{m}_x$ sinh bởi $\mathfrak{p}_x$. Vậy nên $\phi_{x,y}$ là một đồng cấu địa phương. □

Mỗi đồng cáu vành $\phi : A \to B$ cảm sinh một cấu xạ giữa hai lược đồ aphin $f : (Y, \mathcal{O}_Y) \to (X, \mathcal{O}_X)$. Ta có thể đặt câu hỏi rằng với điều kiện nào thì cấu xạ f có thể cảm sinh từ một đồng cấu vành ϕ. Ta biết điều kiện địa phương như trong phát biểu mệnh đề 17, là điều kiện cần. Ta sẽ chứng minh nó cũng là điều kiện đủ.

Mệnh đề 26 *Cho $Y = \mathrm{Spec}(B)$ với bó cấu trúc $\mathcal{O}_Y$. Cho $X = \mathrm{Spec}(A)$ với bó cấu trúc $\mathcal{O}_X$. Cho $f : (Y, \mathcal{O}_Y) \to (X, \mathcal{O}_X)$ một cấu xạ giữa hai không gian tôpô với bó vành sao cho với mọi $y \in Y$ và $x = f(y) \in X$, đồng cấu thớ $\mathcal{O}_{X,x} \to \mathcal{O}_{Y,y}$ là đồng cấu địa phương. Thế thì f là cấu xạ cảm sinh từ đồng cấu vành $A = \mathcal{O}_X(X) \to \mathcal{O}_Y(Y) = B$.*

Cho $y \in Y$ và $x = f(y) \in X$. Ký hiệu $\mathfrak{p}_y$ là iđêan nguyên tố của B tương ứng với điểm y, $\mathfrak{p}_x$ là iđêan nguyên tố của A tương ứng với điểm x. Ta có sơ đồ giao hoán

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[d, "\beta"] \\ A_x \arrow[r, "\phi_{x,y}"'] & B_y \end{tikzcd}$$

với α và β là các đồng cấu địa phương hoá. Đặt $\mathfrak{m}_x$ là iđêan tối đại của A_x, $\mathfrak{m}_y$ là iđêan tối đại của B_y. Ta có $\alpha^{-1}(\mathfrak{m}_x) = \mathfrak{p}_x$ và $\beta^{-1}(\mathfrak{m}_y) = \mathfrak{p}_y$. Theo giả thiết về tính địa phương của f, ta có $\phi_{x,y}^{-1}(\mathfrak{m}_y) = \mathfrak{m}_x$. Ta suy ra $\phi^{-1}(\mathfrak{p}_y) = \mathfrak{p}_x$. Vì vậy ánh xạ liên tục $f : Y \to X$ bắt buộc phải là ánh xạ cảm sinh từ ϕ.

Ta còn cần kiểm tra là các đồng cấu vành $\phi_{U,V}$ là các đồng cấu vành được xây dựng trong chứng minh

mệnh đề 17. Ta lại có thể qui về trường hợp $U = \mathrm{Spec}(A[a^{-1}])$ là một tập mở chính của X, $V = f^{-1}(U)$. Vì ta đã chứng minh là ánh xạ liên tục $f : Y \to X$ là ánh xạ cảm sinh từ đồng cấu vành $\phi : A \to B$ cho nên $V = \mathrm{Spec}(B[\phi(a)^{-1}])$. Đồng cấu vành $\phi_{U,V}$ bắt buộc phải là đồng cấu vành xây dựng trong chứng minh mệnh đề 17, vì theo tính chất phổ dụng của địa phương hoá chỉ tồn tại duy nhất một đồng cấu vành $\psi : A[a^{-1}] \to B[\phi(a)^{-1}]$ sao cho sơ dồ sau giao hoán :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[d, "\beta"] \\ A[a^{-1}] \arrow[r, "\psi"'] & B[\phi(a)^{-1}] \end{tikzcd}$$

Mệnh đề 18 đã được chứng minh. $\square$

Chương 5

Lược đồ và cấu xạ

5.1 Đinh nghĩa lược đồ bằng cách dán các lược đồ aphin

Cho X là một không gian tôpô với bó vành $\mathcal{O}_X$ trên X. Với mọi tập mở $U \subset X$, trên U có môt cấu trúc tôpô cảm sinh từ X và một bó vành là hạn chế của $\mathcal{O}_X$ vào không gian tôpô U.

Định nghĩa 1 *Một cặp* $(X, \mathcal{O}_X)$ *bao gồm một không gian tôpô* X *và một bó vành* $\mathcal{O}_X$ *là một* **lược đồ** *nếu tồn tại một phủ mở* $X = \bigcup_{j \in \mathcal{J}} U_j$ *sao cho với mọi* $j \in \mathcal{J}$ *cặp* $(U_j, \mathcal{O}_X|_{\mathcal{O}_j})$ *đẳng cấu với* $(\mathrm{Spec}(A_j), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A_j)})$ *với một vành* A_j *nào đó.*

Ta có một điều kiện cần hiển nhiên để một cặp $(X, \mathcal{O}_X)$ là một lược đồ.

Mệnh đề 2 *Nếu* $(X, \mathcal{O}_X)$ *là một lược đồ thì với mọi điểm* $x \in X$ *thớ của* $\mathcal{O}_X$ *tại điểm là một vành địa phương.*

Thật vậy, với mọi $x \in X$, tồn tại một lân cận U của X sao cho $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ đẳng cấu với $(\mathrm{Spec}(A), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)})$. Nếu diểm x tương ứng với một iđêan nguyên tố $\mathfrak{p}$ của A thì thớ của $\mathcal{O}_X$ tại điểm x đẳng cấu với vành địa phương $A_{\mathfrak{p}}$. □

Mệnh đề 3 *Cho* $(X, \mathcal{O}_X)$ *la một lược đồ. Khi đó tồn tại một cơ sở của không gian tôpô* X *chỉ bao gồm các lược đồ aphin.*

Với mọi $x \in X$, tồn tại một lân cận U của x sao cho $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ là một lược đồư aphin. Ta lại biết là tròn một lược đồ aphin các tập mở chính tạo nên một có sở của không gian tôpô, mà các tập mở chính cũng là lược đồ aphin. Vậy nên không gian tôpô X có một cơ sở chỉ bao gồm lược đồ aphin. $\square$

5.2 Ví dụ : xây dựng đường thẳng xạ ảnh

Ví dụ cơ bản nhất là cách xây dựng đường thẳng xạ ảnh bằng cách dán hai đường thẳng aphin. Cho k là một trường, $A_1 = k[x_1]$ và $A_2 = k[x_2]$ là vành các đa thức với hệ số trong k và với một biến số x_1 hoặc x_2. Ta có hai đường thẳng aphin $U_1 = \mathrm{Spec}(A_1)$ và $U_2 = \mathrm{Spec}(A_2)$. Trong U_1 ta có tập mở chính $U_1(x_1) = \mathrm{Spec}(k[x_1, x_1^{-1}])$. Tương tự trong U_2 ta có tập mở chính $U_2(x_2) = \mathrm{Spec}(k[x_2, x_2^{-1}])$. Đẳng cấu vành

$$\phi : k[x_1, x_1^{-1}] \to k[x_2, x_2^{-1}]$$

xác định bởi $x_1 \mapsto x_2^{-1}$ và $x_1^{-1} \mapsto x_2$, cảm sinh một đẳng cấu giữa hai không gian tôpô

$$f : U_1(x_1) \to U_2(x_2).$$

Đẳng cấu f cho phép ta dán U_1 và U_2 dọc theo tập mở $U_1(f_1) = U_2(f_2)$. Xét tập hợp X là tập các lớp tương đương trong $U_1 \cup U_2$ đối với quan hệ tương đương $u_1 \sim f(u_1)$. Ta có thể đồng nhất U_1 và U_2 với hai tập con của X với giao là

$$U_1 \cap U_2 = U_1(x_1) = U_2(x_2).$$

Cấu trúc tôpô trên X được xác định như sau : $U \subset X$ là một tập mở nếu $U \cap U_1$ là một tập mở của U_1 và $U \cap U_2$ là một tập mở của U_2.

Tồn tại duy nhất trên X một bó vành $\mathcal{O}_X$ sao cho $\mathcal{O}_X|_{U_1} = \mathcal{O}_{U_1}$ và $\mathcal{O}_X|_{U_2} = \mathcal{O}_{U_2}$. Thật vậy, cho U là một tập mở bất kỳ của X, ta có $U \cap U_1$ là một tập mở của U_1 và $U \cap U_2$ là một tập mở của U_2.

Ta đã cho hạn chế của $\mathcal{O}_X$ vào U_1 và U_2 vì thế các vành $\mathcal{O}_X(U \cap U_1)$, $\mathcal{O}_X(U \cap U_2)$ và $\mathcal{O}_X(U \cap U_1 \cap U_2)$ cùng với các đồng cấu hạn chế, vậy nên $\mathcal{O}_X(U)$ được xác định duy nhất như là tập các cặp $(f_1, f_2) \in \mathcal{O}_X(U \cap U_1) \times \mathcal{O}_X(U \cap U_2)$ thoả măn $f_1|_{U \cap U_1 \cap U_2} = f_2|_{U \cap U_1 \cap U_2}$. Ta kiểm tra được là hàm tử $U \mapsto \mathcal{O}_X(U)$ xac định như trên là bó vành duy nhất trên X sao cho hạn chế nó vào U_1 thì ta có $\mathcal{O}_{U_1}$, hạn chế nó vào U_2 thì ta có $\mathcal{O}_{U_2}$.

Để có trực giác tốt hơn đối với khái niệm tương đối trừu tượng là khái niệm bó, ta cần thực hiện một số tính toán cụ thể.

Bổ đề 4 *Cho X là đường thẳng xạ ảnh trên trường k với bó vành cấu trúc $\mathcal{O}_X$ xây dựng như trên. Khi đó vành các lớp cắt của $\mathcal{O}_X$ trên X là $\mathcal{O}_X(X) = k$.*

Ta cần xác định các cặp (f_1, f_2) với $f_1 \in k[x_1]$ và $f_2 \in k[x_2]$ sao cho $f_1|_{U_1 \cap U_2} = f_2|_{U_1 \cap U_2}$. Đồng cấu $k[x_2] \to k[x_1, x_1^{-1}]$ xác định bởi $x_2 \mapsto x_1^{-1}$ cho phép ta đồng nhất $k[x_2]$ với vành con $k[x_1^{-1}]$ của $k[x_1, x_1^{-1}]$. Như vậy $\mathcal{O}_X(X)$ là giao

$$k[x_1] \cap k[x_1^{-1}]$$

ở trong $k[x_1, x_1^{-1}]$. Xem như k-không gian vectơ $k[x_1, x_1^{-1}]$ là không gian vô hạn chiều với tập $\{x_1^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ là cơ sở. Không gian con $k[x_1]$ có $\{x_1^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ là cơ sở còn $k[x_1^{-1}]$ có $\{x_1^{-n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ là cơ sở. Vậy thì giao $k[x_1] \cap k[x_1^{-1}]$ có vectơ 1 là cơ sở ; ta có $\mathcal{O}_X(X) = k$. □

5.3 Dán trong trương hựp tổng quát

5.4 Cấu xạ giữa hai lược đồ

Định nghĩa 5 *Cho $(X, \mathcal{O}_X)$ và $(Y, \mathcal{O}_Y)$ là hai lược đồ. Cho một cấu xạ $f : (Y, \mathcal{O}_Y) \to (X, \mathcal{O}_X)$ là*

- *cho một ánh xạ liên tục $f : Y \to X$,*
- *với mọi tập mở $U \subset X$ vạ $V \subset Y$ sao cho $V \subset f^{-1}(U)$, ta cho một đông cấu vành $\phi_{U,V} : \mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_Y(V)$ sao cho tương thích đối với U và V, tức là, với mọi $U' \subset U$ và $V' \subset V$ thì lược đồ sau phải giao hoán*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_Y(V) & \xrightarrow{\phi_{U,V}} & \mathcal{O}_X(U) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{O}_Y(V') & \xrightarrow{\phi_{U',V'}} & \mathcal{O}_X(U') \end{array}$$

Ở đây hai mũi tên đi xuống là các đồng cấu hạn chế. Các đồng cáu $\phi_{U,V}$ phải thoả mãn điều kiện địa phương sau đây : Với mọi $y \in Y$ và $x = f(y) \in X$, đồng cấu vành $\phi_{x,y} : \mathcal{O}_{X,x} \to \mathcal{O}_{Y,y}$ cảm sinh từ các $\phi_{U,V}$ là một **đồng cấu địa phương** *giữa hai vành địa phương.*

Chọn một phủ aphin $X = \bigcup_{i\in\mathcal{I}} U_i$ của X với $U_i = \mathrm{Spec}(A_i)$. Với mọi $i \in \mathcal{I}$, ta lại có một phủ aphin $f^{-1}(U_i) = \bigcup_{j\in\mathcal{J}} V_j$ với $V_j = \mathrm{Spec}(B_j)$. Theo mệnh đề 3.18, hạn chế của f vào V_j cảm sinh từ một đồng cấu vành $\phi_{i,j} : A_i \to B_j$. Ta có thể coi f như là tập các đồng cấu vành $\phi_{i,j}$ dán lại với nhau theo tôpô Zariski. *Điều kiện $\phi_{x,y}$ là đồng cấu địa phương tương đương với việc trong một lân cận đủ nhỏ, f cảm sinh từ một đồng cấu vành.*

Ta định nghĩa **phạm trù Sch** với vật là các lược đồ và với đồng cấu là các cấu xạ định nghĩa như trên. Một cách nhìn khác về lược đồ là xem nó không phải như một không gian tôpô được trang bị một bó vành mà xem như là một hàm tử. Ta cho ứng với mỗi lược đồ $X = (X, \mathcal{O}_X)$, hàm tử

$$\mathbb{Y}(X) : \mathbf{Ring} \to \mathbf{Set}$$

gán cho mỗi vành A tập các cấu xạ từ lược đồ aphin $\mathrm{Spec}(A)$ vào X

$$\mathbb{Y}(X)(A) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sch}}(\mathrm{Spec}(A), X).$$

Mệnh đề sau chứng tỏ ta có thể thay X bởi hàm tử $\mathbb{Y}(X)$ mà không mất bất kỳ thông tin nào.

Mệnh đề 6 *Hàm tử $X \mapsto \mathbb{Y}(X)$ từ phạm trù* **Sch** *các lược đồ vào phạm trù* $\mathbb{F}(\mathbf{Ring})$ *các hàm tử từ* **Ring** *vào* **Set***, là một hàm tử đầy và chung thuỷ.*

Cho một cấu xạ lược đồ Y bất kỳ. Chọn một phủ aphin $Y = \bigcup_{j\in\mathcal{J}} V_j$. Với mỗt $j, j' \in \mathcal{J}$, chọn một phủ aphin của giao $V_j \cap V_{j'} = \bigcup_{i\in\mathcal{I}_{j,j'}} U_i$. Với mọi lược đồ X, cho một cấu xạ $f : Y \to X$ là cho một bộ các cấu xạ $f_j : V_j \to X$ sao cho với mọi $i \in \mathcal{I}_{j,j'}$ ta có $f_j|_{U_i} = f'_j|_{U_i}$. Từ đây ta suy ra tập các cấu xạ $Y \to X$ là tập các cấu xạ từ hàm tử $\mathbb{Y}(Y)$ vào hàm tử $\mathbb{Y}(X)$. $\square$

5.5 Điểm : tổng quát hoá và đặc biệt hoá

Trong hình học đại số, khái niệm điểm là một khái niêm tương đối khó nắm bắt vì thật ra có hai khái niệm điểm khác nhau : điểm như phần tử trong không gian tôpô hay là điểm có giá trị trong một vành cho trước. Khái niệm tổng quát hoá và đặc biệt hoá cũng thay đổi tuỳ theo ta nói về loại điểm nào. Việc ngay đến như khái niệm tưởng như đơn giản như một điểm như vậy mà cũng rắc rối đến như vậy chính là cái khó nhưng cũng là cái hay của hình học đại số. Nó phản ánh cái đối ngẫu cơ bản giữa quan điểm coi các đối tượng hình học như các không gian tôpô được trang bị một bó vành và quan điểm coi các đối tượng hình học như một hàm tử. Khi đọc các tài liệu tham khảo về hình học đại số, người đọc cần luôn quan tâm đến xem người ta đang nói về loại điểm nào.

Cho $(X, \mathcal{O}_X)$ là một lược đồ. Khi người ta nói đến **điểm trong không gian tôpô** X thì chỉ đơn giản là các phần tử $x \in X$. Với mọi $x \in X$ như vậy, ta có một vành địa phương $\mathcal{O}_{x,X}$ và một trường các dư $\kappa(x)$ của $\mathcal{O}_{X,x}$. Chọn một lân cận mở aphin $U = \mathrm{Spec}(A)$ của x, ta có một đồng cấu vành $A \to \kappa(x)$. Với mọi hàm f xác định trên lân cận $U = \mathrm{Spec}(A)$ của x, tức là $f \in A$, ta có thể lấy giá trị $f(x) \in \kappa(x)$ là ảnh của f trong $\kappa(x)$. Với khái niệm điểm không gian tôpô, các điểm thuộc vào một tập hợp cố định, nhưng các giá trị $f(x)$ thì lại thuộc vào một trường biến thiên $\kappa(x)$.

Mệnh đề 7 *Với mọi $x \in X$ ta có một cấu xạ ký hiệu là $x : \mathrm{Spec}(\kappa(x)) \to X$. Cấu xạ này phân tích qua $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$.*

Như ta đã phân tích ở trên : ta có một lân cận mở aphin $U = \mathrm{Spec}(A)$ của $x \in X$. Cấu xạ $x : \mathrm{Spec}(\kappa(x)) \to X$ phân tích qua U và đựoc cho bởi một đồng cấu $A \to \kappa(x)$ với hạch là iđêan nguyên tố $\mathfrak{p}_x$ của A. Đồng cấu này hiển nhiên là phân tích qua vành địa phương $A_{\mathfrak{p}_x} = \mathcal{O}_{X,x}$. $\square$

Chú ý là khác với các không gian tôpô thông thường, một điểm trong không gian tôpô Zariski có thể không phải là một tập đóng. Vì vậy với mỗi điểm ta có thể lấy bao đóng của nó. Bao đóng của một điểm là tập đóng nhỏ nhất chứa điểm đó. Cho $X = \mathrm{Spec}(A)$ với A là một vành nguyên vẹn. Cho η là điểm tương ứng với iđêan (0) của A gọi là điểm tông quát. Khi đó bao đóng của η là toàn bộ $\mathrm{Spec}(A)$. Mệnh đề 8 sau đây chứng minh một khẳng định tổng quát hơn.

Định nghĩa 8 *Cho một lược đồ $(X, \mathcal{O}_X)$ và hai điểm x, y trong không gian tôpô X. Khi đó x là một đặc biệt hoá của y, hay y là một tổng quát hoá của x nếu như x nằm trong bao đóng của y.*

Mệnh đề 9 *Cho $X = \mathrm{Spec}(A)$ là một lược đồ aphin. Cho hai điểm $x, y \in \mathrm{Spec}(A)$ tương ứng với hai iđêann nguyên tố $\mathfrak{p}_x, \mathfrak{p}_y$ của A. Khi đó x là một đặc biệt hoá của y khi và chỉ khi $\mathfrak{p}_x \supset \mathfrak{p}_y$.*

Nhắc lại là các tập đóng trong không gian tôpô Zariski của $\mathrm{Spec}(A)$ đều có dạng $Y(I)$ với $Y(I)$ là tập các điểm x tương ứng với iđêan nguyên tố $\mathfrak{p}_x \supset I$. Vì vậy nên bao đóng của y là tập các iđêan nguyên tố $\mathfrak{p}_x \supset \mathfrak{p}_y$. $\square$

Mệnh đề 10 *Cho một lược đồ* $(X, \mathcal{O}_X)$ *và hai điểm* $x, y \in X$. *Điểm* x *là một đặc biệt hoá của* y *khi và chỉ khi cấu xạ* $y : \mathrm{Spec}(\kappa(y)) \to X$ *phân tích được qua cấu xạ* $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}) \to X$.

Khái niệm điểm thứ hai trong hình học đại số là khái niệm điểm với giá trị trong một vành A. Một **điểm của** X **có giá trị trong** A chỉ đơn giản là một cấu xạ

$$x : \mathrm{Spec}(A) \to X.$$

Đối với loại điểm này thì các giá trị nằm trong một vành cố định nhưng tập các điểm lại biến thiên theo vành. Ta ký hiệu $X(A)$ là tập các điểm cua X có giá trị trong A, đôi khi còn được gọi tập các A-điểm của X.

Định nghĩa 11 *Cho* X *là một lược đồ,* A *là một vành và* $x \in X(A)$ *là một* A*-điểm của* X. *Một đặc biệt hoá của* x *là một cặp* (A', x') *với* A' *là một* A*-đại số được cho bởi một đồng cấu* $\phi : A \to A'$ *và* $x' \in X(A')$ *sao cho* $x' = \phi(x)$.

Ngoài hai khái niệm điểm nêu ở trên còn có khái niệm điểm hình học là trường hợp đặc biệt của khái niệm điểm có giá trị trong một vành nào đó. **Điểm hình học** của X là các điểm của X có giá trị trong một trường đóng đại số $\bar{k}$ nào đó.

Mệnh đề 12 *Cho một điểm hình học* $\bar{x} : \mathrm{Spec}(\bar{k}) \to X$, *tồn tại duy nhất một phần tử* x *trong không gian tôpô* $x \in X$ *sao cho* $\bar{x} : \mathrm{Spec}(\bar{k}) \to X$ *phân tích được qua* $x : \mathrm{Spec}(\kappa(x)) \to X$. *Ta nói điểm tôpô* x *làm giá đỡ cho điểm hình học* $\bar{x}$.

Vì không gian tôpô $\mathrm{Spec}(\bar{k})$ chỉ có đúng một điểm, ảnh của nó trong X là một điểm $x \in X$. Thay thế X bằng một lân cận aphin của X, ta có thể giả sử $X = \mathrm{Spec}(A)$ aphin. Khi đó $\bar{x} : \mathrm{Spec}(\bar{k}) \to X$ cảm sinh từ một đồng cấu vành $\phi : A \to \bar{k}$ va sử dụng tính địa phương của ϕ, ta biết ϕ phân tích thành

$$A \to \kappa(x) \to \bar{k}$$

là điều phải chứng minh. □

Xét một ví dụ cụ thể. Cho p là một số nguyên tố và $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ là trường hữu hạn với p phần tử. $X = \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p[t])$ đường thẳng aphin trên trường hữu hạn $\mathbb{F}_p$. Khi đó không gian tôpô X bao gồm điểm tổng quát là iđean

(0) của $\mathbb{F}_p[t]$ và các điểm đóng là các iđêan $\langle f\rangle$ sinh bởi f với f là một đa thức bất khả qui trong $\mathbb{F}_p[t]$. Không gian tôpô X có vô hạn phần tử. Với mọi vành A, để cho $X(A)$ư khác rỗng, vành A phải chứa $\mathbb{F}_p$ tức là A phải là một $\mathbb{F}_p$-đại số. Khi đó cho một cấu xạ $\mathrm{Spec}(A)\to\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p[t])$ là cho một đồng cấu vành $\mathbb{F}_p[t]\to A$ tức là cho một phần tử $a\in A$. Vậy nên với mọi $\mathbb{F}_p$-đại số A ta có $X(A)=A$.

Xét trường hợp đặc biệt $A=\bar{\mathbb{F}}_p$ bao đóng đại số của $\mathbb{F}_p$. Tập các điểm hình học $X(\bar{\mathbb{F}}_p)$ là $\bar{\mathbb{F}}_p$. Với mọi $\alpha\in\bar{\mathbb{F}}_p$, ta có một cấu xạ

$$\alpha:\mathrm{Spec}(\bar{\mathbb{F}}_p)\to\mathrm{Spec}(k[x]).$$

Cấu xạ này phân tích qua điểm đóng $\langle f\rangle$ của X tương ưứng vời đa thức cực tiểu $f\in\mathbb{F}_p[t]$ sao cho $f(\alpha)=0$. Như vậy, điểm đóng $\langle f\rangle$ tương ứng với một đa thức bất khả qui $f\in\mathbb{F}_p[x]$ làm giá đỡ cho n điểm hình học $\alpha_1,\ldots,\alpha_n\in\bar{\mathbb{F}}_p$ với n là bậc của f và $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ là nghiệm của f.

5.6 Nhúng mở và lược đồ con mở

Cho một lược đồ $(X,\mathcal{O}_X)$. Cho U là môt tập mở của không gian tôpô X. Ta trang bị cho U cấu trúc không gian tôpô cảm suy từ X : $V\subset U$ là một tập mở của U nếu V là một tập mở trong X. Ta trang bị cho U bó vành cảm sinh $\mathcal{O}_U(V):=\mathcal{O}_X(V)$.

Ví dụ điển hình là nhúng một tập mở chính trong một lược đồ aphin. Cho $X=\mathrm{Spec}(A)$ và $f\in A$ là một phần tử không luỹ linh. Khi đó $U(f)=\mathrm{Spec}(A[f^{-1}])$ là một tập mở của $X=\mathrm{Spec}(A)$ và bó cấu trúc $\mathcal{O}_X$ hạn chế vào $U(f)$ là bó cấu trúc của $U(f)$.

Mệnh đề 13 *Với ký hiệu như trên, không gian tôpô U trang bị bó vành $\mathcal{O}_U$ cảm sinh từ $\mathcal{O}_X$ là một lược đồ.*

Giả sử $X=\mathrm{Spec}(A)$ là một lược đồ aphin. Khi đó phần bù của U trong X là tập đóng Y các iđêan nguyên tố x của X chứa một iđêan I nào đó. Giả sử iđêan I được sinh bởi $\{f_i\}$. Với mọi $x\in U$, tồn tại một chỉ số i sao cho $f_i\notin x$. Vậy nên U là hợp các tập mở chính $U(f_i)$. Nói cách khác ta có thể phủ U bằng các tập mở aphin $U(f_i)=\mathrm{Spec}A[f_i^{-1}]$.

Trường hợp tổng quát có thể qui về trường hợp X aphin. Nếu $\{X_j\}$ là một phủ mở aphin của X, ta xét các giao $U\cap X_j$ và qui về trường hợp X aphin như ở trên. □

Vẫn giữ các ký hiệu như ở trên, ta có một cấu xạ $j : (U, \mathcal{O}_U) \to (X, \mathcal{O}_X)$. Trên không gian tôpô nó là phép nhúng hiển nhiên $U \hookrightarrow X$. Trên bó vành, với mọi tập mở $V \subset U$ và $W \subset X$ sao cho $V \subset W$, ta cần cho một đồng cấu vành

$$j^{\#} : \mathcal{O}_X(W) \to \mathcal{O}_U(V) = \mathcal{O}_X(V).$$

Ta lấy đồng cấu hạn chế $\mathcal{O}_X(W) \to \mathcal{O}_X(V)$.

Định nghĩa 14 *Một cấu xạ $j : (U, \mathcal{O}_U) \to (X, \mathcal{O}_X)$ được gọi là* **nhúng mở** *nếu $j : U \to X$ là nhúng một tập con mở U trong X sao cho với mọi tập mở $V \subset U$ và $W \subset X$ với $V \subset W$, đồng cấu vành*

$$j^{\#} : \mathcal{O}_X(W) \to \mathcal{O}_U(V) = \mathcal{O}_X(V)$$

là đồng cấu hạn chế $r_{V,W} : \mathcal{O}_X(W) \to \mathcal{O}_X(V)$.

Định lý 15 *Cho X_i và U_{ij} là các lược đồ cùng với các nhúng mở $f_{ij}^- : U_{ij} \to X_i$ và $f_{ij}^+ : U_{ij} \to X_j$ sao cho với mọi vành R, hai ánh xạ*

$$f^{\pm}(R) : \coprod_{ij} U_{ij}(R) \to \coprod_i X_i(R)$$

xác định một quan hệ tương đương. Khi đó hàm tử $R \mapsto \operatorname{coker}[f^{\pm}(R)]$ là hàm tử biểu diễn đợc bằng lược đồ : lược đồ dán các X_i theo quan hệ tương đương U_{ij}.

Xét X là không gian tôpô thương của hợp rời $\coprod_i X_i$ bởi quan hệ tương đương sinh giữa $x_i \in X_i$ và $x_j \in X_j$

$$x_i \sim x_j \Leftrightarrow \exists u \in U_{ij} \text{ sao cho } f_{ij}^-(u) = x_i \text{ và } f_{ij}^+(u) = x_j.$$

Ta có thể đồng nhất X_i với một tập mở của X. Một tập con $V \subset X$ là một tập mở khi và chỉ khi $V \cap X_i$ là tâp mở trong X_i với mọi i. Tồn tại duy nhất mọt bó vành cấu trúc $\mathcal{O}_X$ trên X sao cho hạn chế $\mathcal{O}_X$ vào X_i ta có $\mathcal{O}_{X_i}$. Với mọi tập mở V của X ta định nghĩa $\Gamma(V, \mathcal{O}_X)$ là tập các bộ $s_i \in \Gamma(V \cap X_i, \mathcal{O}_{X_i})$ sao cho ta có đẳng thức giữa hai lớp cắt trên $V \cap U_{ij}$

$$(f_{ij}^-)^{-1}(s_i) = (f_{ij}^+)^{-1}(s_j).$$

Ta có thể kiểm tra là hàm tử $V \mapsto \Gamma(V, \mathcal{O}_X)$ định nghĩa như vậy là một bó vành và cặp $(X, \mathcal{O}_X)$ là một lược đồ. Hơn nữa, lược đồ này biểu diễn hàm tử $R \mapsto \operatorname{coker}[f^{\pm}(R)]$. □

Cho $(X, \mathcal{O}_X)$ là một lược đồ. Cho U là một tập mở của X. Ta có một cấu trúc lược đồ con mở duy nhất trên U. Bạn đọc cần chú ý là dù cho Xư aphin thì U vẫn không nhất thiết là aphin. Từ quan điểm hàm tử, ta cũng không có cách nào mô tả hàm tử của U một cách có ích. Ta có thể mô tả các A-điểm $\mathrm{Spec}(A) \to U$ như các điểm $\mathrm{Spec}(A) \to X$ với ảnh trong không gian tôpô X chứa trong tập mở U. Tuy nhiên ta có thể nhận thấy là cách mô tả này không làm sáng sủa gì hơn vấn đề. Trong trường hợp U và X aphin, thường thì ta có thể mô tả hàm tử của U một cách rơ ràng hơn. Xét ví dụ $X = \mathrm{Spec}k[t]$ đường thẳng aphin trên một trường k và $U = \mathrm{Spec}k[t, t^{-1}]$ là đường thẳng aphin bỏ đi điểm không. Vớ mọi k-đại số A, $X(A) = A$ còn $U(A) = A^\times$ tập các phần tử nghịch đảo đợc của A.

5.7 Nhúng đóng và lược đồ con đóng

Định nghĩa 16 *Một cấu xạ $i : (Y, \mathcal{O}_Y) \to (X, \mathcal{O}_X)$ được gọi là* **nhúng đóng** *nếu $i : Y \to X$ là nhúng một tập đóng trong X sao cho với mọi $y \in Y$ và $x \in X$ với $x = i(y)$, đông cấu địa phương giữa các vành địa phương*

$$i^{\#}_{x,y} : \mathcal{O}_{X,x} \to \mathcal{O}_{Y,y}$$

là một đồng cấu toàn ánh.

Xét trường hợp aphin $X = \mathrm{Spec}(A)$ và $f \in A$ là một phần tử không nghịch đảo được. Đặt $Y = \mathrm{Spec}(A/\langle f \rangle)$. Khi đó ta có nhúng đóng $i : Y \to X$ mà trên bó cấu trúc là các đồng cấu cảm sinh từ đồng cấu toàn ánh $A \to A/\langle f \rangle$.

Nhận xét là bó vành cấu trúc $\mathcal{O}_U$ trên tập mở $U \subset X$ được xác định một cách duy nhất. Đối với các tập đóng thì không như vậy. Các lược đồ con $\mathrm{Spec}(A/\langle f \rangle)$, $\mathrm{Spec}(A/\langle f^2 \rangle)$, ... đều được đỡ bởi cùng một tập đóng Y của không gian tôpô X nhưng Y có thể mang nhiều bó vành cấu trúc khác nhau cảm sinh từ $A/\langle f \rangle$ hay $A/\langle f^2 \rangle$ ...

Mệnh đề 17 *Cho $f : (Y, \mathcal{O}_Y) \to (X, \mathcal{O}_X)$ là một nhúng đóng vào một lược đồ aphin $X = \mathrm{Spec}(A)$. Khi đó Y cũng là một lược đồ aphin $Y = \mathrm{Spec}(B)$ với $B = \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y)$. Còn cấu xạ f là cấu xạ cảm sing từ một đồng cấu vành $\phi : A \to B$ toàn cấu.*

Đặt $B = \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y)$, ta có một đồng cấu vành $\phi : A \to B$ trong các dữ kiện của cấu xạ $f : (Y, \mathcal{O}_Y) \to (X, \mathcal{O}_X)$. Trước hết ta muốn chứng minh rằng $\phi : A \to B$ là một đồng cấu toàn ánh.

Đồng cấu ϕ cho phép ta coi B như một A-mođun. Với mọi iđêan nguyên tố $x \in \mathrm{Spec}(A)$ ta có thể xét địa phương hoá B_x của B tại điểm x. Có hai trường hợp co thể xảy ra. Nếu x không nằm trong tập con đóng Y ở trong X, khi đó ta tìm được một hàm $a \in A$ sao cho $a \neq 0$ tại điểm x nhưng $a = 0$ ở trên tập đóng Y. Trong trường hợp này, địa phương hoá B_x phải bằng không. Nếu x nằm trong Y, tức là $x = f(y)$ với $y \in Y$, ta chứng minh được rằng $B_x = B_y$ vì trong $y \in Y$ có một cơ sở lân cận là giao các lân cận của y trong X với Y. Trong cả hai trường hợp kể trên ta đều có $\phi_x : A_x \to B_x$ la toàn ánh. Vậy nên $\phi : A \to B$ là toàn ánh, xem [...].

Định nghĩa 18 *Một cấu xạ được gọi là nhúng đóng địa phương nếu như nó phân tích được thành tích một nhúng đóng và một nhúng mở.*

5.8 Tích theo thớ của lược đồ và thớ của cấu xạ

Cho ba lược đồ X, Y, Z và hai cấu xạ lược đồ $f : Y \to X$ và $g : Z \to X$. Lợc đồ X cảm sinh ra một hàm tử $\mathbb{Y}(X)$: **Ring** $\to$ **Set** cho ứng với mỗi vành R tập các R-điểm của X

$$X(R) = \mathrm{Hom}(\mathrm{Spec}(R), X).$$

Như vậy với mỗi vành giao hoán A, ta có các ánh xạ $f : Y(R) \to X(R)$ và $g : Z(R) \to X(R)$. Xét hàm tử tích phân thớ

$$A \mapsto (Y \times_X Z)(R) = Y(R) \times_{X(R)} Z(R)$$

Định lý 19 *Hàm tử $A \mapsto (Y \times_X Z)(A)$ biểu diễn được bằng một lược đồ.*

Trong trường hợp aphin $X = \mathrm{Spec}(A), Y = \mathrm{Spec}(B), Z = \mathrm{Spec}(C)$, ta đã chứng minh ở mệnh đề 11 mục 2 rằng hàm tử $R \mapsto Y(R) \times_{\mathbb{Y}} X(R) Z(R)$ biểu diễn được bằng lược đồ aphin

$$Y \times_X Z := \mathrm{Spec}(B \otimes_A C).$$

Ta cần rất chú ý là không gian tôpô $\mathrm{Spec}(B \otimes_A C)$ hoàn toàn khác với tích phân thớ ngây thơ các không gian tôpô $Y \times_X Z$ các cặp $(y, z) \in Y \times Z$ sao cho $f(y) = g(z)$. Nói chung, người ta không bao giờ xét đến tích phân thớ ngây thơ các không gian tôpô như vậy, và tích phân thớ luôn phải được hiểu theo nghĩa hàm tử.

Tiếp đến, ta xét trường hợp tổng quát hơn khi X là aphin, còn Y và Z thì không nhất thiết phải aphin. Ta có thể phủ Y bởi một họ các tập mở aphin $\{Y_i\}$ và Z bởi bởi một họ các tập mở aphin $\{Z_j\}$. Với mỗ cặp chỉ số (i, j) hàm tử $Y_i \times_X Z_j$ biểu diễn được bằng một lược đồ. Giả sử ta biết được các giao $Y_i \cap Y_{i'}$ và $Z_j \cap Z_{j'}$ là aphin, vậy thì tích $(Y_i \cap Y_{i'}) \times_X (Z_j \cap Z_{j'})$ cũng biểu diễn được bằng một lược đồ. Lược đồ $Y \times_X Z$ được xây dựng bàng cách dán các $Y_i \times_X Z_j$ lại như sau theo quan hệ tương đương

$$(Y_i \times_X Z_j) \cap (Y_{i'} \times_X Z_{j'}) = (Y_i \cap Y_{i'}) \times_X (Z_j \cap Z_{j'})$$

như trong định lý 9.

Như ta sẽ thấy trong mục sau, hầu hết các lược đồ ta gặp (lược đồ tách), đều thoả mãnư tính chất là giao hai tập mở aphin là một tập mở aphin. Nếu không may, ta gặp phải một trong các lược đồ không tách thì ta vẫn có thể phủ các giao $Y_i \cap Y_i'$ và $Z_j \cap Z_{j'}$ bằng các tập mở aphin và lý luận như ở trên vẫn đúng.

Cuối cùng thì ta luôn có thể phủ X bằng các tập mở aphin và nhờ đó qui về trường hợp X aphin sau đó dùng định lý 9 để dán lại. □

Định nghĩa 20 *Cho $f : Y \to X$ là một cấu xạ. Cho $x \in X$ là một điểm trong không gian tôpô của X và $x : \mathrm{Spec}(\kappa(x)) \to X$ là cấu xạ điểm ứng với x. Khi đó* **thớ** *của f ở trên x ký hiệu là $f^{-1}(x)$ là lược đồ*

$$f^{-1}(x) = Y \times_{X,x} \mathrm{Spec}(\kappa(x)).$$

Cho $\bar{x} : \mathrm{Spec}(\bar{k}) \to X$ là một điểm hình học của X. Khi đó **thớ hình học** *của f ở trên $\bar{x}$ ký hiệu là $f^{-1}(\bar{x})$ là lược đồ*

$$f^{-1}(\bar{x}) = Y \times_{X,\bar{x}} \mathrm{Spec}(\bar{k}).$$

Để thấy thớ của cấu xạ định nghĩa như trên không khác xa lắm so với thớ của ánh xạ liên tục trên không gian tôpô, ta chứng minh khẳng định sau. Ta cũng phải nhận xét ngay là khẳng định này không mấy quan trọng, vì nói chung người ta chỉ quan tâm đến thớ theo định nghĩa trên, còn thớ hiểu theo nghĩa ngây thơ trên không gian tôpô không dùng làm gì cả. Ngay giữa thớ và thớ hình học thì thớ hình học cũng có ý nghĩa hình học hơn.

Mệnh đề 21 *Cho* $X = \mathrm{Spec}(A)$ *và* $Y = \mathrm{Spec}(B)$ *là hai lược đồ aphin và* $f : Y \to X$ *là một cấu xạ cho bởi một đồng cấu vành* $\phi : A \to B$. *Cho* $x \in \mathrm{Spec}(A)$ *là một iđêan nguyên tố của* A, $\kappa(x)$ *là trường các thương của miền nguyên* A/x. *Khi đó ta có một song ánh chuẩn tắc giữa không gian tôpô*

$$\{y \in Y \mid f(y) = x\}$$

và không gian tôpô $\mathrm{Spec}(B \otimes_A \kappa(x))$.

Ta nhận xét rằng $\mathrm{Spec}(B/xB)$ là tập con đóng của $\mathrm{Spec}(B)$ bao gồm các các iđêan của y của B sao cho $\phi(x) \subset y$. Thay A bằng A/x, B bằng B/xB ta có thể giả sủ là A là miền nguyên, x là iđêan 0. Gọi κ là trường các thương của A. Khi đó $B \otimes_A \kappa$ là địa phương hóa của B theo tập nhân $S = \{\phi(a) \mid a \in A - \{0\}\}$. Theo mô tả tập phỏ của một địa phương hóa ta biết

$$\mathrm{Spec}(B \otimes_A \kappa) \to \mathrm{Spec}(B)$$

là một đơn ánh và ảnh của nó là các iđêan của y của B sao cho y không có giao với tập nhân S. Cái này thì hiển nhiên tương đương với $\phi^{-1}(y)$ là iđêan $\{0\}$ của A. $\square$

Mệnh đề 22 *Cho* $f : Y \to X$ *là một nhúng mở (hoặc đóng). Khi đó, với mọi cấu xạ* $g : Z \to X$, *cấu xạ* $f_Z : Y \times_X Z \to Z$ *cũng là một nhúng mở (hoặc đóng).*

Cấu xạ $f_Z : Y \times_X Z \to Z$ gọi là đổi cơ sở của f từ X lên Z. Mệnh đề trên nói rằng tính chất nhúng đóng mở được bảo toàn bởi phép đổi cơ sở. Hầu hết các tính chất của các cấu xạ mà ta có thể xem xét trên từng thớ đều được bảo toàn bởi phép đổi cơ sở.

5.9 Cấu xạ đường chéo

Cho X, Y là hai lược đồ và $f : X \to Y$ là một cấu xạ. Ta đã xây dựng tích phân thớ $X \to_Y X$ là luợc đồ biểu diễn hàm tử $R \mapsto (X \times_Y X)(R)$ với $(X \times_Y X)(R)$ là tập các cặp R-điểm $x_1, x_2 \in X(R)$ sao cho $f(x_1) = f(x_2)$ trong $Y(R)$. Anh xạ $x \mapsto (x, x)$ là một ánh xạ từ hàm tử X vào hàm tử $X \times_Y X$ cho nên xác định một cấu xạ giữa các lược đồ tương ứng, gọi là cấu xạ đường chéo

$$\Delta_{X/Y} : X \to X \times_Y X.$$

Cấu xạ đường chéo là một cấu xạ vô cùng quan trọng trong hình học. Trong hình học đại số, nó là khởi điểm cho mọi tính toán vi phân.

Định lý 23 *Cấu xạ đường chéo là một nhúng đóng địa phương. Nếu X, Y là các lược đồ aphin, cấu xạ đường chéo là một nhúng đóng.*

Trước hết ta xét trường hợp aphin $X = \operatorname{Spec}(A)$, $Y = \operatorname{Spec}(B)$ và f cảm sinh từ một đồng cấu vành $\phi : B \to A$. Khi đó theo định lý 2.11

$$X \times_Y X = \operatorname{Spec}(A \otimes_B A).$$

Cấu xạ đường chéo

$$X \to X \times_Y X$$

được cho trong trường hợp này bởi đồng cấu vành

$$\phi : A \otimes_B A \to A$$

xác định bởi $\phi(a_1 \otimes a_2) = a_1 a_2$ với mọi $a_1, a_2 \in A$ bởi vì đây là đồng cấu duy nhất $A \otimes_B A \to A$ cảm sinh từ hai phiên bản của đồng cấu đơn vị $\mathrm{id}_A : A \to A$ như trong 2.11. Trong trường hợp aphin, cấu xạ đường chéo là một nhúng đóng vì $\phi : A \otimes_B A \to A$ là một toàn ánh.

Trong trường hợp tổng quát, giả sử X có thể được phủ bằng các tập mở aphin $X = \bigcup_i X_i$ và cấu xạ hạn chế $X_i \to Y$ phân tích qua môt tập mở aphin Y_i của Y. Khi đó $X \times_Y X$ có thể được phủ bởi

$$X \times_Y X = \bigcup_{i,j} X_i \times_Y X_j.$$

Trong $X \times_Y X$, ta có tập mở $\bigcup_i X_i \times_Y X_i$, và tập mở này chứa ảnh của cấu xạ đường chéo $\Delta_{X/Y}$ như một tập đóng. Như vậy, $\Delta_{X/Y}$ có thể phân tích thành tích một nhúng đóng và một nhúng mở nên nó là một nhúng đóng địa phương. □

Bổ đề 24 *Cho B là một vành giao hoán và A là một A-đại số. Khi đó hạch của đồng cấu vành*

$$\phi : A \otimes_B A \to A$$

cho bởi $\phi(a_1 \otimes_B a_2) = a_1 a_2$ là iđêan của $A \otimes_B A$ sinh bởi các phần tử có dạng

$$a \otimes_B 1 - 1 \otimes_B a.$$

Rõ ràng $\phi(a \otimes_B 1 - 1 \otimes_B a) = 0$ cho các phần tử có dạng này nằm trong iđêan hạch của ϕ. Ký hiệu I là iđêan của $A \otimes_B A$ sinh bởi các phần tử $a \otimes_B 1 - 1 \otimes_B a$ với $a \in A$, khi đó ta có một đồng cấu vành cảm sinh từ ϕ

$$\bar{\phi} : (A \otimes_B A)/I \to A$$

mà ta muốn chứng minh là một đẳng cấu. Xét đồng cấu

$$p_1 : A \to A \otimes_B A$$

cho bởi $a \mapsto a \otimes_B 1$ và đồng cấu cảm sinh $\bar{p}_1 : A \to (A \otimes_B A)/I$. Rõ ràng

$$\bar{\phi} \circ \bar{p}_1 = \mathrm{id}_A$$

vì $\bar{\phi} \circ \bar{p}_1(a) = \bar{\phi}(a \otimes 1) = 1$. Ta muốn chứng minh là ngược lại ta cũng có

$$\bar{p}_1 \circ \bar{\phi} = \mathrm{id}_{(A \otimes_B A)/I}.$$

Cái này tương đương với việc chứng minh là với mọi $a_1, a_2 \in A$ ta có $a_1 \otimes_B a_2 - a_1 a_2 \otimes_B 1 \in I$. Nhưng điều này là hiển nhiên vì

$$a_1 \otimes_B a_2 - a_1 a_2 \otimes_B 1 = (a_1 \otimes_B 1)(1 \otimes_B a_2 - a_2 \otimes_B 1) \in I.$$

Như vậy ta đã kiểm tra xong là trong trường hợp aphin, cấu xạ đường chéo

$$\mathrm{Spec}(A) \to \mathrm{Spec}(A \otimes_B A)$$

là một nhúng đóng và iđêan của $A \otimes_B A$ xác định đường chéo là iđêan của $A \otimes_B A$ sinh bởi các phần tử có dạng $a \otimes_B 1 - 1 \otimes_B a$ với $a \in A$. □

Định nghĩa 25 *Một cấu xạ $f : X \to Y$ gọi là* **tách** *nếu cấu xạ đường chéo $\Delta_{X/Y} : X \to X \times_Y X$ là một nhúng đóng.*

Nhiều chứng minh liên quan đến phủ mở aphin trong tôpô Zariski sẽ bớt cồng kềnh nhiều nếu ta biết trước là giao của hai tập mở aphin vẫn là một tập mở aphin. Điều này đúng cho các lược đồ tách.

Mệnh đề 26 *Cho $f : X \to Y$ là một cấu xạ tách trên một lược đồ aphin Y. Khi đó với mọi tập mở aphin U, V của X, giao $U \cap V$ vẫn là một tập mở aphin.*

Ta dùng công thức **rút gọn về đường chéo**

$$U \cap V = U \times_Y V \cap \Delta_{X/Y}(X).$$

Do U, V và Y là aphin nên $U \times_Y V$ư là aphin. Do $\Delta_{X/Y}(X)$ nhúng đóng vào $X \times_Y X$, $U \times_Y V \cap \Delta_{X/Y}(X)$ư là một lược đồ con đóng của $U \times_Y V$. Mà theo mệnh đề [...], các lược đồ con đóng của lược đồ aphin là lược đồ aphin.
□

Ví dụ điển hình của lược đồ không tách là như sau. Xét X_1, X_2 là hai phiên bản của mặt phẳng aphin trên một trường k

$$X_1 = X_2 = \mathrm{Spec}(k[x, y]).$$

Ký hiệu U là tập con mở phần bù của điểm toạ độ $(0, 0)$. Nếu ta dán X_1 và X_2 theo U, ta sẽ được một lược đồ không tách X. Trong X ta có hai tập mở là X_1 và X_2 với $X_1 \cap X_2 = U$. Rõ ràng X_1, X_2 là aphin. Như ta sẽ thấy trong [...] phần bù U của một điểm trong một mặt không thể là một lược đồ aphin.

Phần III

Bó mođun

Chương 6

Bó $\mathcal{O}_X$-môđun

6.1 Bó $\mathcal{O}_X$-mođun nhất quán và tựa nhất quán

Ta nhắc lại khái niệm bó nhóm Abel trên một không gian tôpô X. Tiền bó nhóm Abel $\mathcal{F}$ trên một không gian tôpô X là một quy tắc cho ứng với mỗi tập mở $U \subset X$ một nhóm Abel $\mathcal{F}(U)$ và với mọi $U \subset V$ một đồng cấu

$$\rho_U^V : \mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(U)$$

thoả tính chất bắc cầu $\rho_U^V \circ \rho_V^W = \rho_U^W$ với mọi tập mở $U \subset V \subset W$. Một bó là một tiền bó thoả mãn thêm tinh chất dán được nghĩa là, với mọi tập mở U phủ được bàng một họ các tập mở $U = \bigcup_i U_i$, khi đó $\mathcal{F}(U)$ song ánh với tập các bộ $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ sao cho với mọi cặp chỉ số i, j ta có

$$s_i|_{U_{ij}} = s_j|_{U_{ij}},$$

ở đây ta đã ký hiệu $U_{ij} = U_i \cap U_j$.

Định nghĩa 1 *Một bó $\mathcal{O}_X$ môđun $\mathcal{F}$ là một bó nhóm Abel như trên được trang bị thêm trên mỗi tập mở U một cấu trúc $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$-mođun trên nhóm Abel $\mathcal{F}(U)$, sao cho đồng cấu hạn chế $\rho_U^V : \mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(U)$ là một đồng cấu $\Gamma(V, \mathcal{O}_X)$-tuyến tính với mọi tập mở $U \subset V$. Chú ý là đông cấu vành $\rho_U^V : \Gamma(V, \mathcal{O}_X) \to \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ cho phép ta trang bị $\mathcal{F}(U)$ một cấu trúc $\Gamma(V, \mathcal{O}_X)$-mođun.*

Trong trường hợp $X = \mathrm{Spec}(A)$ là một lược đồ aphin, ta có thể xây dựng bó $\mathcal{O}_X$-mođun từ A-mođun.

Mệnh đề 2 *Cho $X = \mathrm{Spec}(A)$ và M là một A-mođun. Khi đó tồn tại một bó $\mathcal{O}_X$-mođun $\widetilde{M}$, duy nhất với sai khác là một đẳng cấu duy nhất, sao cho với mọi tập mở chính $U(f) = \mathrm{Spec}A[f^{-1}]$, ta có*

$$\widetilde{M}(U(f)) = M \otimes_A A[f^{-1}].$$

Khi đó với mọi $x \in X$, thớ $\widetilde{M}_x$ của $\widetilde{M}$ tại điểm x, là $\widetilde{M}_x = M \otimes_A A_x$.

Mệnh đề này chứng minh hoàn toàn tương tự như chứng minh định lý 3.11 về đặc trưng của bó cấu trúc $\mathcal{O}_X$ như là bó vành duy nhất sao cho $\Gamma(\mathcal{O}_X, U(f)) = A[f^{-1}]$.

Định nghĩa 3 *Một bó $\mathcal{O}_X$-mođun $\mathcal{M}$ trên X gọi là bó* **tựa nhất quán** *nếu với mọi tập mở aphin $U = \mathrm{Spec}(A)$ của X, hạn chế của $\mathcal{M}$ vào U đẳng cấu với bó $\widetilde{M}$ với một A-mođun M nào đó. Nếu hơn nữa với mọi tập mở aphin $U = \mathrm{Spec}(A)$, $M = \Gamma(U, \mathcal{M})$ là một A-mođun dạng hưũu hạn thì ta nói $\mathcal{M}$ gọi là bó* **nhất quán**.

Theo mệnh đề 2 ta thấy trong trương hợp lược đồ aphin $X = \mathrm{Spec}(A)$, phạm trù các bó $\mathcal{O}_X$-mođun tựa nhất quán tương đương với phạm trù các A-mođun, phạm trù các $\mathcal{O}_X$-mođun nhất quán thì tương đương với phạm trù các Aư-mođun dạng hữu hạn.

6.2 Dán bó tựa nhất quán

Ta đã biết là các bó tựa nhất quán trên một lược đồ aphin $X = \mathrm{Spec}(A)$ không phải cái gì khác mà là các A-mođun; các bó nhất quán là các A-mođun dạng hữu hạn. Câu hỏi tự nhiên đặt ra là liệu ta có thể mô tả bó (tựa) nhất quán trên một lược đồ tuỳ ý X dựa trên các phủ aphin của nó được không.

Xét trường hợp đơn giản nhất. Giả sử ta có thể phủ một lược đồ X bằng hai lược đồ aphin $X_1 = \mathrm{Spec}(A_1)$ và $X_2 = \mathrm{Spec}(A_2)$. Giả sử nữa là $X_{12} = X_1 \cap X_2$ cũng là aphin $X_{12} = \mathrm{Spec}(A_{12})$. Trường hợp này hay xảy ra, chẳng hạn như khi ta biết lược đồ X là tách. Giả sử X là tách cho đơn giản.

Mệnh đề 4 *Với ký hiệu như trên, cho một bó tựa nhất quán trên X là cho một bộ ba (M_1, M_2, ϕ) với M_1 là một A_1-mođun, M_2 là một A_2-mođun, còn ϕ là một đẳng cấu A_{12}-tuyến tính $\phi : M_1 \otimes_{A_1} A_{12} \simeq M_2 \otimes_{A_2} A_{12}$. Bó là nhất quán khi và chỉ khi M_i là A_i-mođun dạng hữu hạn với $i = 1, 2$.*

Cho $\mathcal{M}$ là một bó tựa nhất quán trên X. Khi đó ta có thể lấy $M_1 = \Gamma(X_1, \mathcal{M})$ và $M_2 = \Gamma(X_2, M)$. Tính chất tựa nhất quán của $\mathcal{M}$ làm cho $\Gamma(X_{12}, \mathcal{M})$ vừa là $M_1 \otimes_{A_1} A_{12}$, vừa là $M_2 \otimes_{A_2} A_{12}$ cho nên ta phải có một đẳng cấu giữa hai mođun này.

Cho bộ ba (M_1, M_2, ϕ) như trong mệnh đề. Cho U là một tập mở aphin bất kỳ của X. Đặt $U_1 = U \cap X_1$, $U_2 = U \cap X_2$ và $U_{12} = U \cap X_{12}$. Vì X là tách cho nên U_1, U_2 và U_{12} là các tập mở aphin. Đặt $U_1 = \mathrm{Spec}(B_1)$, $U_2 = \mathrm{Spec}(B_2)$ và $U_{12} = \mathrm{Spec}(B_{12})$. Đặt $\mathcal{M}(U_1) = M_1 \otimes_{A_1} B_1$, $\mathcal{M}(U_2) = M_2 \otimes_{A_2} B_2$ và $\mathcal{M}(U_{12}) = M_1 \otimes_{A_{12}} B_{12}$. Ta lấy

$$\mathcal{M}(U) = \{(v_1, v_2) \in \mathcal{M}(U_1) \times \mathcal{M}(U_2) \mid v_1, v_2 \text{ có cùng ảnh trong } \mathcal{M}(U_{12})\}.$$

Ta kiểm tra như trong chứng minh mệnh đề 2 là tồn tại duy nhất một bó tựa nhất quán $\mathcal{M}$ trên X sao cho với mọi tập mở aphin U của X, $\mathcal{M}(U)$ được cho như trên. □

Xét trường hợp phủ mở tổng quát U_i với nhiều hơn hai tập mở. Trên mỗi U_i ta cho một bó $\mathcal{O}_{U_i}$-mođun tựa nhất quát $\mathcal{M}_i$. Tren mỗi giao hai tập mở một $U_{ij} = U_i \cap U_j$, ta cho một đẳng cấu

$$\phi_{ij} : \mathcal{M}_j|_{U_{ij}} \simeq \mathcal{M}_i|_{U_{ij}}.$$

Nếu $i = j$, rõ ràng ta phải lấy $\phi_{ii} = 1$ là tự đẳng cấu đơn vị của $\mathcal{M}_i$. Muốn cho các ϕ_{ij} dán các bó M_i lại được, chúng phải thoả mãn một điều kiện tương thích trên giao ba tập mở một

$$U_{ijk} = U_i \cap U_j \cap U_k.$$

Các đẳng cấu ϕ_{ij} được gọi là một 1-đối chu trình nếu như với mọi bộ ba chỉ số i, j, k ta có

$$\phi_{ij} \circ \phi_{jk} \circ \phi_{ki} = 1.$$

Bộ các ϕ_{ij} thoả mãn điều kiện 1-đối chu trình như trên được gọi là một **dữ kiện dán** của bộ các bó tựa nhất quán $\mathcal{M}_i$ trên U_i.

Định lý 5 *Cho X là một lược đồ và $\{U_i\}_{i \in \mathcal{J}}$ là một phủ mở của X. Ta có một tương đương phạm trù giữa phạm trù các bó $\mathcal{O}_X$-mođun tựa nhất quán $\mathcal{M}$ trên X và phạm trù các bộ các bó $\mathcal{U}_i$-mođun tựa nhất quán $\mathcal{M}_i$ trên mỗi U_i trang bị thêm dữ kiện dán nghĩa là*

- *với mọi $i, j \in \mathcal{J}$, cho một đẳng cấu $\phi_{ij} : \mathcal{M}_j|_{U_{ij}} \to \mathcal{M}_i|_{U_{ij}}$ sao cho*

- *$\phi_{ii} = 1$ với mọi $i \in \mathcal{J}$,*
- *hạn chế vào U_{ijk} ta có $\phi_{ij} \circ \phi_{jk} \circ \phi_{ki} = 1$ với mọi $i, j, k \in \mathcal{J}$.*

Cho $\mathcal{M}$ là một bó tựa nhất quán trên X. Rõ ràng là ta phải cho ứng với nó bộ các $\mathcal{M}_i = \mathcal{M}|_{U_i}$ cùng với ϕ_{ij} là các đẳng cấu hiển nhiên vì $\mathcal{M}_j|_{U_{ij}}$ và $\mathcal{M}_i|_{U_{ij}}$ đều đẳng cấu với $\mathcal{M}|_{U_{ij}}$.

Ngược lại nếu cho $\mathcal{M}_i$ và các ϕ_{ij} thoả mãn điều kiện 1-đối chu trình ta có thể xây dựng lại được $\mathcal{M}$ bằng cách cho ứng với mỗi tập mở U của X tập

$$\mathcal{M}(U) = \{m_i \in \mathcal{M}_i(U \cap U_i) \mid \text{trên } U \cap U_{ij} \text{ ta có } \phi_{ij}(m_j) = m_i\}.$$

Bạn đọc có thể tự kiểm tra rằng $\mathcal{M}$ định nghĩa như trên là một bó $\mathcal{O}_X$-mođun tựa nhất quán dựa theo các bước như sau :

- $\mathcal{M}(U)$ là một nhóm abel vì ta có thể cộng hai bộ (m_i) và (m'_i) thành $(m_i + m'_i)$,
- $\mathcal{M}(U)$ là một $\mathcal{O}_X(U)$-mođun vì với mọi $\alpha \in \mathcal{O}_X(U)$

  ta có thể nhân một bộ (m_i) với α thành $(\alpha_i m_i)$ với $\alpha_i \in \mathcal{O}_X(U_i)$ là hạn chế của α vào $U \cap U_i$.
- để chứng minh tính chất **dán được** của $\mathcal{M}$ đối với hai tập mở U và U' : $\mathcal{M}(U \cup U')$ là tập các cặp $m \in \mathcal{M}(U)$ và $m' \in \mathcal{M}(U')$ sao cho $m|_{U \cap U'} = m'|_{U \cap U'}$, ta hạn chế vào từng U_i rồi sử dụng tính dán được của $\mathcal{M}_i$ để có $\mathcal{M}((U \cup U') \cap U_i)$ là tập các bộ $m_i \in \mathcal{M}(U \cap U_i)$ và $m'_i \in \mathcal{M}(U' \cap U_i)$ sao cho $m_i|_{U \cap U' \cap U_i} = m'_i|_{U \cap U' \cap U_i}$

Bạn đọc có thể kiểm tra được hai hàm tử ta xây dựng $\mathcal{M} \mapsto (\mathcal{M}_i, \phi_{ij})$ và $(\mathcal{M}_i, \phi_{ij}) \mapsto \mathcal{M}$ là các tựa nghịch đảo của nhau và cho ta một tương đương phạm trù. □

Định lý 6 *Ta giữ ký hiệu như trong định lý trên. Bó $\mathcal{O}_X$-mođun $\mathcal{M}$ là nhất quán khi và chỉ khi mỗi bó $\mathcal{M}_i = \mathcal{M}|_{U_i}$ là nhất quán.*

Nếu $\mathcal{M}$ là nhất quán thì theo định nghĩa mỗi bó $\mathcal{M}_i = \mathcal{M}|_{U_i}$ phải là nhất quán. Trong chiều ngược lại tao có thể thay phủ $(U_i)_{i \in \mathcal{J}}$ bằng một phủ mịn hơn cho nên ta có thể đưa về trường hợp $X = \mathrm{Spec}(A)$ và $(U_i)_{i \in \mathcal{J}}$ là một phủ aphin chính của $\mathrm{Spec}(A)$.

Nhắc lại một số lập luận đã trở nên quen thuộc trong các chương trước. Giả sử $U_i = \mathrm{Spec}(A[f_i^{-1}])$ với $f_i \in A$. Các tập mở U_i phủ $\mathrm{Spec}(A)$ khi và chỉ khi A-mođun con sinh bởi các f_i là toàn bộ A, vậy nên tồn tại một số hữu hạn $f_1, \ldots, f_n$ và $g_1, \ldots, g_n \in A$ sao cho

$$f_1 g_1 + \cdots + f_n g_n = 1.$$

Đây là nội dung của bổ đề phân hoạch đơn vị. Vì vậy ta có thể thay phủ $(U_i)_{i \in \mathcal{J}}$ bằng phủ hữu hạn $(U_i)_{i=1}^n$. Đây là lập luận để chứng minh không gian tôpô $\mathrm{Spec}(A)$ là tựa compact.

Cho M là một A-mođun sao cho với mọi $i = 1, \ldots, n$

$$M_i = M \otimes_A A[f_i^{-1}]$$

là một $A[f_i^{-1}]$-mođun dạng hữu hạn. Ta cần chứng minh rằng M là một A-mođun dạn hữu hạn. Với mọi $i = 1, \ldots, n$, chọn một hệ sinh hữu hạn $(x_i^j)_{j=1}^{r_i}$ của M_i. Nếu cần thiết ta có thể thay các phần tử x_i^j bằng $f_i^N x_i^j$ với N đử lớn nên ta có thể giả sử $x_i^j \in M$. Ta muốn chứng minh rằng với i, j biến thiên, tập hữu hạn các phần tử $x_i^j \in M$ là một hệ sinh của M.

Gọi $r = r_1 + \ldots + r_n$ là tổng số các phần tử x_i^j. Các phần tử này cho ta một đồng cấu A-mođun

$$\phi : A^r \to M$$

Ta muốn chứng minh ϕ là toàn ánh. Gọi $\bar{M}$ là đối hạch của ϕ. Cho $\bar{y} \in \bar{M}$ và $y \in M$ với ảnh là $\bar{y}$. Cố định một chỉ số i. Vì $(x_i^j)_{j=1}^{r_i}$ là một hệ sinh của M_i, tồn tại $g_1, \ldots, g_{r_i} \in A[f_i^{-1}]$ sao cho trong M_i,

$$y = \sum_{j=1}^{r_i} g_j x_i^j.$$

Thế nên tồn tại $N_i \in \mathbb{N}$ đủ lớn sao cho $f_i^{N_i} \bar{y} = 0$. Giải phóng ký hiệu g_j.

Lại dùng phân hoạch đơn vị, tồn tại $g_1, \ldots, g_n \in A$ sao cho

$$g_1 f_1^{N_1} + \cdots + g_n f_n^{N_n} = 1.$$

Vậy nên

$$\bar{y} = (g_1 f_1^{N_1} + \cdots + g_n f_n^{N_n}) \bar{y} = 0.$$

Cách chứng minh này có thể viết lại một cách đơn giản hơn dựa trên việc các bó tựa nhất quán không có H^1 trên lược đồ aphin. Nhưng chứng minh dùng đồng điều về cơ bản cũng không có gì khác với chừng minh trên vì $\mathrm{H}^1 = 0$ đối với lược đồ aphin cũng suy ra từ bổ đề phân hoạch đơn vị. $\square$

Hệ quả 7 *Cho $(X, \mathcal{O}_X)$ là một lược đồ. Cho một bó $\mathcal{O}_X$-mođun tựa nhất quán M trên X là cho, với mỗi tập mở aphin $U = \mathrm{Spec}(A)$, một A-mođun M_A và với mỗi tập mở aphin $U' = \mathrm{Spec}(A') \subset U$ một đẳng cấu $M_{A'} \simeq M_A \otimes_A A'$. Bó M là nhất quán khi và chỉ khi các M_A là A-mođun hữu hạn sinh.*

6.3 Ví dụ bó nhất quán trên đường thẳng xạ ảnh

Để minh hoạ việc dán bó nhất quán, ta sẽ miêu tả các bó tự do địa phương cấp một trên đường thẳng xạ ảnh.

Nhắc lại là đường thẳng xạ ảnh được xây dựng bằng cách dán hai đường thẳng aphin trên một trường k. Cho $U_1 = \mathrm{Spec}(k[u_1])$ và $U_2 = \mathrm{Spec}(k[u_2])$ là hai phiên bản của đường thẳng xạ ảnh. Đặt $U_{12} = \mathrm{Spec} k[u_1, u_1^{-1}]$ đồng nhất với $U_{21} = \mathrm{Spec} k[u_2, u_2^{-1}]$ bằng cách đặt $u_1 = u_2^{-1}$ và $u_1^{-1} = u_2$. Dán U_1 và U_2 theo tập mở $U_{12} = U_{21}$ như trên cho ta đường thẳng xạ ảnh $X = \mathbb{P}^1_k$.

Như ta biết qua định lý 9, cho một $\mathcal{O}_X$-mođun $\mathcal{M}$ là cho một bộ ba $(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \phi_{12})$ với $\mathcal{M}_1$ là bó nhất quán trên U_1 tương ứng với một $k[u_1]$-mođun M_1, $\mathcal{M}_2$ tương ứng với một $k[u_2]$-mođun M_2 và một đẳng cấu mođun

$$\phi : M_2 \otimes_{k[u_2]} k[u_2, u_2^{-1}] \to M_1 \otimes_{k[u_1]} k[u_1, u_1^{-1}]$$

tương thích với đẳng cấu vành $k[u_2, u_2^{-1}] \simeq k[u_1, u_1^{-1}$ gửi $u_2 \mapsto u_1^{-1}$.

Ta sẽ chỉ xét ở đây trường hợp $M_1 = k[u_1]m_1$ môđun tự do sinh bởi phần tử ưm_1, tương tự $M_2 = k[u_2]m_2$. Khi đó $M_{12} = k[u_1, u_1^{-1}]m_1$ và $M_{21} = k[u_2, u_2^{-1}]m_2$. Cho một đẳng cấu giữa M_{12} và M_{21} là cho

$$m_2 = \alpha m_1$$

với ưưα một **phần tử khả nghịch**

$$k[u_1, u_1^{-1}]^\times$$

Như vậy nó phải có dạng $\alpha = \bar{\alpha} u_1^n$ với $n \in \mathbb{Z}$ và $\bar{\alpha} \in \mathbb{Z}$. Thay đổi phần tử sinh m_1, ta có thể giả sử $\bar{\alpha} = 1$.

Định nghĩa 8 *Ta ký hiệu $\mathcal{O}_X(n)$ là bó $\mathcal{O}_X$-mođun cho bởi bộ ba*
- *mođun $M_1 = k[u_1]m_1$ trên $U_1 = \mathrm{Spec}(k[u_1])$,*
- *mođun $M_2 = k[u_2]m_2$ trên $U_1 = \mathrm{Spec}(k[u_2])$,*
- *đẳng cấu $\phi = M_{2,1} = k[u_2, u_2^{-1}] \to k[u_1, u_1^{-1}]$ cho bởi $m_2 \mapsto u_1^n m_1$.*

Chỉ thoáng nhìn thì quả là khó phân biệt các bó nhất quán $\mathcal{O}_X(n)$ với nhau vì trong các tập mở U_1, U_2 chúng hoàn toàn giống nhau. Để thấy rơ sự khác nhau của chúng ta cần xét các lớp cắt toàn cục.

Mệnh đề 9 *Với $n < 0$, $\Gamma(X, \mathcal{O}_X(n)) = 0$. Với $n \geq 0$, ta có*

$$\dim_k \Gamma(X, \mathcal{O}_X(n)) = n + 1.$$

Theo tính dán được của bó $\Gamma(X, \mathcal{O}_X(n))$ là tập các cặp $s_1 \in M_1$ và $s_2 \in M_2$ có cùng ảnh trong $M_{12} = M_{21}$. Ta có M_{12} là không gian vectơ sinh bởi cơ sở

$$\langle u_1^r m_1 \mid r \in \mathbb{Z} \rangle$$

trong đó có không gian con M_1 sinh bởi

$$\langle u_1^r m_1 \mid r \in \mathbb{N} \rangle.$$

Không gian $\phi(M_2)$ ảnh của M_2 trong M_{12} sinh bởi

$$\langle u_1^{n-r} m_1 \mid r \in \mathbb{N} \rangle.$$

Rõ ràng là

$$M_1 \cap \phi(M_2) = 0$$

với $n < 0$ và giao này có chiều là $n + 1$ với $n \geq 0$. Ta suy ra điều phải chứng minh. □

6.4 Phạm trù abel các bó (tựa) nhất quán

Định lý 10 *Cho $(X, \mathcal{O}_X)$ là một lược đồ. Phạm trù các bó $\mathcal{O}_X$-mođun tựa nhất quán và nhất quán là các phạm trù abel.*

Cho M, N là hai bó $\mathcal{O}_X$-mođun tựa nhất quán và $f : M \to N$ là một đồng cấu bó $\mathcal{O}_X$-tuyến tính. Hạch, đối hạch, ảnh, đối ảnh của f được định nghĩa như sau.

Với mọi tập mở aphin $U = \mathrm{Spec}(A)$ của X, hạn chế của M và N vào U được cho bởi A-mođun M_A và N_A. Hạn chế của đồng cấu f được cho bởi $f_A : M_A \to N_A$. Ta có thể lấy hạch, đối hạch, ảnh và đối ảnh của f_A.

Cho $U' = \mathrm{Spec}(A')$ là một tập mở aphin nằm trong $U = \mathrm{Spec}(A)$. Khi đó A' là A-đại số phẳng. Vậy nên ta có

$$\ker(f_{A'}) = \ker(f_A) \otimes_A A'$$

và các đẳng thức tương tự đối với đối hạch, ảnh và đối ảnh. Ta còn có

$$\mathrm{coim}(f_A) = \mathrm{im}(f_A).$$

Tồn tại duy nhất bó $\mathcal{O}_X$-mođun $\ker(f)$ sao với mọi tập mở $U = \mathrm{Spec}(A)$, $\ker(f)(U) = \ker(f_A)$. Ta cưng có các bó đối hạch, ảnh và đối ảnh với ảnh và đối ảnh là các bó đẳn cấu.

Nếu Mư và N là các bó nhất quán thì hạch, đối hạch, ảnh và đối ảnh của một đồng cấu $M \to N$ là các bó nhất quán. $\square$.

Định nghĩa 11 *Cho $M \to N$ là đồng cấu bó $\mathcal{O}$-mođun trên một lược đồ $(X, \mathcal{O}_X)$. Ta nói $M \to N$ là đơn ánh nếu hạch của nó bằng không. Ta nói nó là toàn ánh nếu đối hạch của nó bằng không. Dãy*

$$0 \to M \to N \to P \to 0$$

gọi là khớp nếu như $M \to N$ là đơn ánh, $N \to P$ là toàn ánh, và ảnh của $M \to N$ là hạch của $N \to P$.

Mệnh đề 12 *Cho $M \to N$ là đồng cấu bó $\mathcal{O}$-mođun trên một lược đồ $(X, \mathcal{O}_X)$. $M \to N$ là đơn ánh (hoặc toàn ánh) nếu như vưói mọi $x \in X$, trên thớ $M_x \to N_x$ là ánh xạ đơn ánh (hay toàn ánh) của $\mathcal{O}_{X,x}$-mođun. Tương tự như vậy một dãy $0 \to M \to N \to P \to 0$ là khớp khi và chỉ khi với mọi $x \in X$, dãy các $\mathcal{O}_{X,x}$-mođun $0 \to M_x \to N_x \to P_x \to 0$ là khớp.*

6.5 Ảnh xuôi

Đầu tiên ta xét trường hợp aphin. Cho $f : \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$ cấu xạ tương ứng với đồng cấu vành $\phi : A \to B$. Ta có ngay một hàm tử

$$f_* : \mathrm{Mod}_B \to \mathrm{Mod}_A$$

từ phạm trù các B-mođun vào phạm trù các A-mođun. Nó cho ứng với một B-mođun M chính M nhưng chỉ xem như A-mođun. Do là phạm trù các

B-mođun tương đương với phạm trù các bó $\mathcal{O}_Y$-mođun tựa nhất quán trên $Y = \operatorname{Spec}(B)$, và khẳng định tương tự cũng đúng với $X = \operatorname{Spec}(A)$ ta có một hàm tử ảnh xuôi f_* từ phạm trù các bó tựa nhất quán $\mathcal{O}_Y$-mođun vào phạm trù các bó các $\mathcal{O}_X$-mođun tựa nhất quán trên $X = \operatorname{Spec}(A)$

$$f_* : \mathrm{Mod}_{\mathcal{O}_Y} \to \mathrm{Mod}_{\mathcal{O}_X}.$$

Bây giờ ta muốn mở rộng định nghĩa ảnh xuôi cho mọi cấu xạ giữa hai lược đồ bất kỳ. Cho $f : Y \to X$ là một cấu xạ giữa hai lược đồ. Cho M là một bó $\mathcal{O}_Y$-mođun tựa nhất quán. Cho U là một tập mở Zariski của X. Anh ngược của nó $V = f^{-1}(U)$ là một tập mở của Y. Cấu xạ f bao gồm một đồng cấu vành

$$f^{\#} : \Gamma(U, \mathcal{O}_X) \to \Gamma(V, \mathcal{O}_Y).$$

Vì vậy $\Gamma(V, \mathcal{O}_Y)$-mođun $\Gamma(V, M)$ tự động sẽ được trang bị một cấu trúc $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$-mođun. Vậy nên hàm tử

$$f_*M : U \mapsto \Gamma(f^{-1}(U), M)$$

là một hàm tử với giá trị là $\mathcal{O}_X$-mođun.

Bổ đề 13 *Cho $f : Y \to X$ là một cấu xạ lược đồ. Cho M là một bó $\mathcal{O}_Y$-mođun tựa nhất quán. Hàm tử f_*M định nghĩa như ở trên là một bó $\mathcal{O}_X$-mođun tựa nhất quán.*

Trước hét ta cần chứng minh rằng f_*M là một bó. Muốn thế ta cần kiểm tra được tính dán được của f_*M đối với một phủ mở $(U_i)_{i\in\mathcal{I}}$ của một tập mở U. Theo định nghĩa của f_*M nó tương đương với tính dán được của M đối với phủ mở $(f^{-1}(U_i))_{i\in\mathcal{I}}$ của $f^{-1}(U)$. Do là M là một bó nên nó có tính dán được.

Lấy $U = \operatorname{Spec}(A)$ là một tập mở aphin của X và $U' = \operatorname{Spec}(A')$ là một tập mở chính của U. Giả sử $A' = A[g^{-1}]$ với $g \in A$ nào đó. Đặt $V = f^{-1}(U)$ và $V' = f^{-1}(U')$. Xét $(V_i)_{i\in\mathcal{I}}$ là một phủ aphin của V và (V_{ij}^k) là một phủ aphin của $V_{ij} = V_i \cap V_j$. Theo định nghĩa của f_*M ta có

$$\Gamma(U, f_*M) = \ker[\prod_i M(V_i) \to \prod_{i,j}^k M(V_{ij}^k)]$$

còn

$$\Gamma(U', f_*M) = \ker[\prod_i M(V_i') \to \prod_{i,j}^k M({V'}_{ij}^k)]$$

với $V_i' = V_i \times_U U'$ và $V'^k_{ij} = V^k_{ij} \times_U U'$. Vì là tích phân thớ bảo tồn phạm trù các lược đồ aphin cho nên V_i' là một phủ aphin của V' và V'^k_{ij} là một phủ aphin của V_{ij}'. Vì M là bó $\mathcal{O}_Y$-mođun tựa nhất quán cho nên

$$M(V'_i) = M(V_i) \otimes_A A' \text{ và } M(V'^k_{ij}) = M(V^k_{ij}) \otimes_A A'.$$

Từ đó ta suy ra rằng

$$\Gamma(U', f_*M) = \Gamma(U, f_*M) \otimes_A A'$$

bởi vì hàm tử $N \mapsto N \otimes_A A'$ là hàm tử khớp khi $A' = A[g^{-1}]$ là một địa phương hóa của A (xem ...) □

Như vậy ảnh xuôi của bó tựa nhất quán là bó tựa nhất quán. Thế nhưng M là bó $\mathcal{O}_Y$-nhất quán không suy ra f_*M là bó $\mathcal{O}_X$-mođun nhất quán. Xét trường hợp đơn giản nhất $A = k$ là một trường, $B = k[x]$ là vành các đa thức một biến trên k. Lấy $M = B$. Khi đó M xem như k-mođun rõ ràng không phải là dạng hữu hạn. Có một trường hợp riêng quan trọng là *ảnh xuôi của bó nhất quán vẫn là nhất quán đó*

đối với các cấu xạ xạ ảnh. Ta sẽ quay lại vấn đề này sau.

Mệnh đề 14 *Cho $f : Y \to X$ là một cấu xạ aphin từ lược đồ $(Y, \mathcal{O}_Y)$ vào $(X, \mathcal{O}_X)$. Khi đó hàm tử f_* từ uphạm trù các bó $\mathcal{O}_Y$-mođun nhất quán vào phạm trù các bó $\mathcal{O}_X$-mođun nhất quán, là một hàm tử khớp.*

Cho một dãy khớp $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ bó $\mathcal{O}_Y$-mođun tựa nhất quán. Với mọi tập mở aphin $U = \operatorname{Spec}(A)$ của X, $V = U \times_X Y$ là tập mở aphin $V = \operatorname{Spec}(B)$ của Y. Khi đó theo định nghĩa của f_*, $f_*M(U)$ là A-mođun cảm sinh từ B-mođun $M(V)$. Dãy B-mođun $0 \to M'(V) \to M(V) \to M''(V) \to 0$ là khớp nên dãy các A-mođun cảm sinh hiển nhiên cũng là khớp. □

Như vậy đối với cấu xạ aphin, ảnh xuôi là hàm tử khớp nhưng thương thì không bảo tồn tính nhất quán trừ trương hợp cấu xạ hữu hạn. Đối với cấu xạ xạ ảnh thì ngược lại, ảnh xuôi bảo toàn tính nhất quán nhưng lại không là hàm tử khớp.

6.6 Ảnh ngược

Cho $f : (Y, \mathcal{O}_Y) \to (X, \mathcal{O}_X)$ là một cấu xạ giữa hai lược đồ. Ta cò một hàm tử

$$f^* : \mathcal{O}_X\text{-Mod} \to \mathcal{O}_Y\text{-Mod}$$

đinhn ghĩa như sau. Nếu $Y = \mathrm{Spec}(B)$ và $X = \mathrm{Spec}(A)$ thì hàm tử f^* được cho bởi hàm tử

$$f^* : A\text{-Mod} \to B\text{-Mod}$$

xác định bởi $f^*M = M \otimes_A B$.

Trong trường hợp tổng quát, với mọi tập aphin $V = \mathrm{Spec}(B) \subset Y$ đủ nhỏ sao cho $f(V)$ chứa trong tập mở aphin $U = \mathrm{Spec}(A) \subset X$, ta đặt $(f^*M)(V) = M(U) \otimes_A B$. Ta cần chứng minh là $(f^*M)(V)$ không phụ thuộc vào sụ lựa chọn của U. Để đơn giản hóa ta giả sử là X là tách. Khi đó trong X, giao hai tập mở aphin là một tập mở aphin. Nếu $f(V) \subset U_1$ và $f(V) \subset U_2$ với $U_1 = \mathrm{Spec}(A_1)$ và $U_2 = \mathrm{Spec}(A_2)$ là tập mở aphin của X thì $f(V) \subset U_1 \cap U_2$ với $U_1 \cap U_2 = \mathrm{Spec}(A_{12})$ cũng là tập mở aphin. Khi đó ta có

$$M(U_1) \otimes_{A_1} B = M(U_1 \cap U_2) \otimes_{A_{12}} B = M(U_2) \otimes_{A_2} B$$

vì $M(U_1 \cap U_2) = M(U_1) \otimes_{A_1} A_{12}$ và $M(U_1 \cap U_2) = M(U_2) \otimes_{A_2} A_{12}$.

Cho $V' = \mathrm{Spec}(B')$ là một tập mở aphin chứa trong V.Theo đinh nghĩa ở trên thì ta có

$$f^*M(V') = f^*M(V) \otimes_B B'.$$

Vậy nên theo định lý [?], $f^*M(V)$ xacs định cho mọi tập mở aphin V đủ bé, hoàn toàn xác định bó tựa nhất quán f^*M.

Mệnh đề 15 *Hàm tử* $f^* : \mathcal{O}_X\text{-Mod} \to \mathcal{O}_Y\text{-Mod}$ *là hàm tử khớp phải, bảo toàn tính nhất quán.*

Hàm tử $M \mapsto M \otimes_A B$ từ A-Mod vào B-Mod là khớp phải, nên dán chúng lại với nhau, hàm tử f^* cũng là khớp phải. Nếu M là một A-mođun dạn hữu hạn thì $M \otimes_A B$ là B-mođun dạng hữu hạn. Vật nên hàm tử f^* biến bó nhất quán thanh bó nhất quán. □

Định nghĩa 16 *Một cấu xạ* $f : Y \to X$ *gọi là* **phẳng** *nếu hàm tử* $f^* : \mathcal{O}_X\text{-Mod} \to \mathcal{O}_Y\text{-Mod}$ *là hàm tử khớp.*

Mệnh đề 17 *Nhúng mở là cấu xạ phẳng, còn nhúng đóng thường thì không.*

6.7 Bó tự do địa phương

Định nghĩa 18 *Một bó $\mathcal{O}_X$-mođun nhất quán $\mathcal{M}$ trên X gọi là một bó* **tự do địa phương** *nếu như với mọi điểm $x \in X$, thớ $\mathcal{M}_x$ là một mođun tự do dạng hữu hạn trên vành địa phương $\mathcal{O}_{X,x}$.*

Mệnh đề 19 *Bó nhất quán $\mathcal{M}$ trên X là bó tự do địa phương khi và chỉ khi với mọi điểm $x \in X$, tồn tại một lân cận U của x sao cho $\Gamma(U, \mathcal{M})$ là một $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$-mođun tự do.*

Theo định nghĩa, thớ $\mathcal{M}_x$ là một $\mathcal{O}_{X,x}$-mođun tự do. Ta có thể chọn một cơ sở $v_1, \ldots, v_r$ của $\mathcal{M}_x$. Theo định nghĩa của thớ, tồn tại một lân cận đủ nhỏ U sao cho ảnh của

$$\Gamma(U, \mathcal{M}) \to \mathcal{M}_x$$

chứa $v_1, \ldots, v_r$. Thay thế $v_1, \ldots, v_r$ bằng tạo ảnh của chúng, ta có thể giả sử $v_1, \ldots, v_r \in \Gamma(U, \mathcal{M})$. Tất nhiên là ta có thể giả sử $U = \mathrm{Spec}(A)$ là một tập mở aphin vì các tập mở aphin là một cơ sở trong tôpô Zariski và ký hiệu $M = \Gamma(U, \mathcal{M})$ là một A-mođun hữu hạn sinh. Để đơn giản hoá chứng minh, ta giả thiết vành A là vành noether. Điểm $x \in \mathrm{Spec}(A)$ tương ứng với một iđêan nguyên tố p_x. Vành địa phương $\mathcal{O}_{X,x}$ là địa phương hoá A_x theo tập nhân $S = A - p_x$.

Các vectơ $v_1, \ldots, v_r \in M$ xác định duy nhất một ánh xạ A-thuyến tính

$$v : A^r \to M$$

cho bởi $(a_1, \ldots, a_r) \mapsto a_1 v_1 + \cdots + a_r v_r$. Gọi $\ker(v)$ là hạch của v và $\mathrm{coker}(v)$ là đối hạch của v. Theo giả thiết $v_1, \ldots, v_r$ là một cơ sở cho vành $M_x = M \otimes_A A_x$, cho nên ánh xạ A_x-tuyến tính cảm sinh

$$v \otimes_A 1_{A_x} : A_x^r \to M \otimes_A A_x$$

là một song ánh. Vậy nên

$$\ker(v) \otimes_A A_x = 0 \text{ và } \mathrm{coker}(v) \otimes_A A_x = 0.$$

Giả sử A là vành Noether, khi đó $\ker(v)$ và $\mathrm{coker}(v)$ là các A-mođun hữu hạn sinh cho nên tồn tại một số hữu hạn phần tử

$$f_1, \ldots, f_N \in A - p_x$$

sao cho
$$\ker(v) \otimes_A A[f^{-1}] = 0 \text{ và } \operatorname{coker}(v) \otimes_A A[f^{-1}] = 0.$$
với $f = f_1 \dots f_N$. Khi đó rõ ràng là $M \otimes_A A[f^{-1}]$ là một $A[f^{-1}]$-mođun tự do, hay nói cách khác, hạn chế của $\mathcal{M}$ vào tập mở $U(f)$ là một $\mathcal{O}_{U(f)}$-mođun tự do.

6.8 Hàm cấp của một bó nhất quán

Cho $\mathcal{M}$ là một bó $\mathcal{O}_X$-mođun nhất quán trên X. Với mọi $x \in X$, thớ $\mathcal{M}_x$ là một môđun dạng hữu hạn trên vành địa phương $\mathcal{O}_{X,x}$. Đăc biệt là thớ các dư
$$\mathcal{M}_{\kappa(x)} = M_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \kappa(x)$$
là một không gian vectơ hữu hạn chiều trên trường các dư $\kappa(x)$. Đặt
$$\mathrm{rk}_x(\mathcal{M}) = \dim_{\kappa(x)}(\mathcal{M}_{\kappa(x)}),$$
ta có một hàm $X \to \mathbb{N}$, cho ứng vưói mỗi điểm $x \in X$ số tự nhiên $\mathrm{rk}_x(\mathcal{M})$, ta gọi là **hàm cấp** của $\mathcal{M}$.

Định lý 20 *Cho $\mathcal{M}$ là một bó $\mathcal{O}_X$-mođun nhất quán trên một lược đồ X. Khi đó hàm cấp $x \mapsto \mathrm{rk}_x(\mathcal{M})$ là hàm liên tục trên. Nghĩa là với mọi $x \in X$, tồn tại một lân cận U của x sao cho với mọi $x' \in U$ ta có*
$$\mathrm{rk}_x(\mathcal{M}) \geq \mathrm{rk}_{x'}(\mathcal{M}).$$

Trường hợp đặc biệt là cho hai điểm $x_1, x_2 \in X$ với x_2 là một điểm tổng quát hoá của x_1. Khi đó ta có bất đẳng thức
$$\mathrm{rk}_{x_1}(\mathcal{M}) \geq \mathrm{rk}_{x_2}(\mathcal{M}).$$

Mệnh đề yếu hơn hàm cấp tăng khi ta đặc biệt hóa là hệ quả trực tiếp của bổ đề Nakayama. Hạn chế của $\mathcal{M}$ vào $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x_1})$ là một $\mathcal{O}_{X,x_1}$-mođun dạn hữu hạn $\mathcal{M}_{x_1}$. Thớ các dư $\mathcal{M}_{\kappa(x_1)}$ là một không gian vectơ trên $\kappa(x_1)$ chiều $r_1 = \mathrm{rk}_{x_1}(M)$. Theo bổ đề Nakayama tồn tại một đồng cấu toàn ánh $\mathcal{O}_{X,x_1}$-mođun
$$\mathcal{O}_{X,x_1}^{r_1} \to \mathcal{M}_{x_1}.$$

Vì điểm x_2 là một tổng quát hoá của x_1, cấu xạ $x_2 : \mathrm{Spec}(\kappa(x_2)) \to X$ phân tích qua $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x_1})$. Qua đó ta có

$$\mathcal{M}_{\kappa(x_2)} = \mathcal{M}_{x_1} \otimes_{\mathcal{O}_{X,x_1}} \kappa(x_2)$$

và có một ánh xạ $\kappa(x_2)$-tuyến tính toàn ánh $\kappa(x_2)^{r_1} \to \mathcal{M}_{\kappa(x_2)}$. Vậy nên, $\mathrm{rk}_{x_2}(\mathcal{M}) \leq r_1$.

Bây giờ ta quay sang chứng minh mệnh đề mạnh hơn là hàm cấp là hàm liên tục trên. Lấy $x \in X$. Sau khi lấy một lân cận aphin của x, ta có thể giả sử X là một lược đồ aphin $X = \mathrm{Spec}(A)$, và bó nhất quán $\mathcal{M}$ tương ứng với một A-mođun hữu hạn sinh M. Gọi A_x là địa phương hóa của A ở điểm x và $M_x = M \otimes_A A_x$. Đặt $n = \mathrm{rk}_{\kappa(x)} M_{\kappa(x)}$ là cấp của M ở điểm x, với $\kappa(x)$ là trường dư của A_x và $M_{\kappa(x)} = M \otimes_A \kappa(x)$. Chọn $v_1, \ldots, v_n$ trong M_x với ảnh $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n$ là một cơ sở của không gian vectơ $M_{\kappa(x)}$. Khi đó theo bổ đề Nakayama $v_1, \ldots, v_n$ là một hệ sinh của M_x.

Viết các vectơ $v_i \in M_x$ dưới dạng

$$v_i = \sum_j m_{ij} \otimes a_{ij}$$

với $m_{ij} \in M$ và $a_{ij} \in A_x$. Vì là ta chỉ có một số hữu hạn các vectơ v_i, khi viết v_i dưới dạng tổng hữu hạn như trên, số các $a_{ij} \in A_x$ xuất hiện là hữu han. Vậy nên tồn tại $f \in A - x$ sao cho

$$a_{ij} \in A[f^{-1}]$$

với mọi cặp chỉ số ij, và khi đó ta có thể coi

$$v_i \in M \otimes_A A[f^{-1}].$$

Xét đồng cấu

$$\phi : A[f^{-1}]^n \to M \otimes_A A[f^{-1}]$$

cho bởi $(a_1, \ldots, a_n) \mapsto a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$. Gọi Nư là đối hạch của ϕ. Vì ta biết $x_1, \ldots, x_n$ là một hệ sinh của $M_x = M \otimes_A A_x$ cho nên sau khi tenxơ với A_x, ϕ trở thành toàn ánh. Vì tenxơ là khớp phải cho nên điều này có nghĩa là $N \otimes_{A[f^{-1}]} A_x = 0$. Vậy nên sau khi hạn chế vào một tập mở nhỏ Uư hơn $\mathrm{Spec}(A[f^{-1}])$, đồng cấu ϕ sẽ trở thành toàn ánh. Lúc đó vưới mọi $x' \in U$, ta có $\mathrm{rk}_x(M) \leq n$.

Trong trường hợp $X = \mathrm{Spec}(A)$ với A là một vành Noether, ta có thể lập luận đơn giản hơn như sau. Vì M là hữu hạn sinh, tồn tại một đồng cấu toàn ánh $A^n \to M$. Gọi N là hạch của đồng cấu này. Vì A là Noether cho nên N cũng là A-mođun hữu hạn sinh, tức là tồn tại một đồng cấu toàn ánh $A^m \to N$. Tóm lại là ta có thể biểu diễn M như đối hạch của một đồng cấu

$$F : A^m \to A^n$$

với F là một ma trận $m \times n$ với hệ số trong A. Với mọi điểm $x \in \mathrm{Spec}(A)$, ta có

$$M_{\kappa(x)} = \mathrm{coker}[\kappa(x)^m \xrightarrow{F \otimes_A \kappa(x)} \kappa(x)^n]$$

vì tenxơ là khớp phải. Vậy nên

$$\mathrm{rk}_x(M) = n - \mathrm{rk}(F \otimes_A \kappa(x))$$

với $\mathrm{rk}(F \otimes_A \kappa(x))$ là hạng của ánh xạ tuyến tính $F \otimes_A \kappa(x)$.

Vứi mọi $r \in \mathbb{N}$, ký hiệu

$$Y_r = \{x \in \mathrm{Spec}(A) \mid \mathrm{rk}_x(M) \geq r\}.$$

Ta cần chứng minh là Y_r là tập đóng Zariski. Bất đẳng thức $\mathrm{rk}_x(M) \geq r$ rơ ràng tương đương với $\mathrm{rk}(F \otimes_A \kappa(x)) \leq n - r$ và điều này thì tương đương với việc là tất cả các định thức của các ma trận con $(n-r) \times (n-r)$ của F đều bằng không tại điểm x. Như vậy Y_r là tập đóng $Y(I)$ với I là iđêan sinh bởi các định thức này. □

Ví dụ lấy $M = A/I$ với I là một iđean của một vành giao hoán A. Khi đó ta có thể thấy ngay là $\mathrm{rk}_x(M) = 1$ nếu $x \in V(I)$ tập đóng không điểm của I và $\mathrm{rk}_x(M) = 0$ nếu x ở ngoài tập đóng này.

Một ví dụ khác cho ta thấy sự cần thiết của giả thiết M dạng hữu hạn. Lấy $A = k[t]$ và $M = k[t, t^{-1}]$. M không là một A-mođun hữu hạn sinh nhưng với mọi $x \in \mathrm{Spec}(A)$, không gian vectơ $M_{\kappa(x)}$ vẫn có chiều hữu hạn. Nó có chiều 1 nếu x khác với iđean tương ứng với điểm $t = 0$ và nó bằng 0 tại điểm này. Hàm này rõ ràng là không liên tục trên mà là liên tục dưới.

Định lý 21 *Cho X là một lược đồ nguyên vẹn, có nghiã là với mọi tập mở $U \subset X$, vành $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ là vành nguyên vẹn. Cho $\mathcal{M}$ là một bó $\mathcal{O}_X$-mođun nhất quán. Khi đó $\mathcal{M}$ là tự do địa phương khi và chỉ khi hàp cấp $x \mapsto \mathrm{rk}_x(M)$ là một hàm hằng.*

Vì X là nguyên vẹn, không gian tôpô X phải liên thông; mọi hàm hằng địa phương là hàm hằng. Nói hàm $x \mapsto \mathrm{rk}_x(M)$ là một hàm hằng địa phương có nghĩa là với mọi $x \in X$, tồn tại một tập mở $U \subset X$ chứa x sao cho hàm này là hàm hằng số trên U. Theo ngôn ngữ điểm tổng quát hoá và điểm đặc biệt hoá, định nghĩa này tương đương với mệnh đề : cho x_2 là một điểm tổng quát hoá của x_1, khi đó $\mathrm{rk}_{x_1}(\mathcal{M}) = \mathrm{rk}_{x_2}(\mathcal{M})$. Ta luôn có bất đẳng thức $\mathrm{rk}_{x_1}(\mathcal{M}) \geq \mathrm{rk}_{x_2}(\mathcal{M})$ cho mọi bó nhất quán. Vấn đề là chứng minh dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi M là một bó tự do địa phương dưới giả thiết X nguyên vẹn.

Giả sử $\mathcal{M}$ là một bó $\mathcal{O}_X$-mođun nhất quán tự do địa phương. Cho hai điểm $x_1, x_2 \in X$ với x_2 là một điểm tổng quát hoá của x_1. Khi đó cấu xạ $\mathrm{Spec}(\kappa(x_2)) \to X$ phân tích qua $\mathrm{Spec}(\kappa(x_2))\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x_1})$. Vì $\mathcal{M}_{x_1}$ là một

$\mathcal{O}_{X,x_1}$-mođun tự do cấp hữu hạn r,

$$\mathcal{M}_{\kappa(x_2)} = \mathcal{M}_{x_1} \otimes_{\mathcal{O}_{X,x_1}} \kappa(x_2)$$

là không gian vectơ trên trường $\kappa(x_2)$ với chiều cũng là r. Vậy nên hàm cấp là hàm hằng địa phương.

Chưng minh chiều ngược lại của định lý khó hơn một chút, và ở đây ta cần đến giả thiết nguyên vẹn. Giả sử $\mathcal{M}$ là một bó $\mathcal{O}_X$-mođun nhất quán với hàp cấp là hàm hằng : tồn tại $r \in \mathbb{N}$ sao cho với mọi $x \in X$ ta có $\mathrm{rk}_x(\mathcal{M}) = r$. Cho $x \in X$. Ta cần chứng ming rằng $\mathcal{M}_x$ là một $\mathcal{O}_{X,x}$-mođun

tự do cáp r.

Đặt $A = \mathcal{O}_{X,x}$, A là một vành địa phương toàn vẹn. Gọi K là trường các thương của A, ta có $A \subset K$. Khi đó $y = \mathrm{Spec}(K)$ cũng là một điểm của X, tổng quát hơn điểm x ban đầu. Với giả thiết X toàn vẹn, y là điểm tổng quát nhất của X.

Theo bổ đề Nakayama, tồn tại $v_1, \ldots, v_r \in \mathcal{M}_x$ sao cho cấu xạ A-tuyến tính tương ứng

$$v : A^r \to \mathcal{M}_x$$

là toàn ánh. Cấu xạ K-tuyến tính cảm sinh

$$v_K : K^r \to \mathcal{M}_x \otimes_A K = \mathcal{M}_y$$

là toàn ánh. Đây là một ánh xạ giữa hai không gian vectơ trên trường K có cùng cấp cho nên toàn ánh suy ra đơn ánh. Vì $A^r \to K^r$ cũng là đơn ánh cho nên ánh xạ hợp thành

$$A^r \to \mathcal{M}_y$$

cũng là đơn ánh. Anh xạ này lại phân tích qua $v : A^r \to \mathcal{M}_x$ cho nên v phải là đơn ánh. Vậy nên v là một đẳng cấu và $\mathcal{M}_x$ là một A-mođun tự do. $\square$

Ta lấy ví dụ $X = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[t])$ và $\mathcal{M}$ là bó $\mathcal{O}_X$-mođun tương ứng với mođun $M = \mathbb{C}[t]/(t-\alpha)$ với $\alpha \in \mathbb{C}$ là một số phức nào đó. Khi đó hàm cấp có giá trị $\mathrm{rk}_x(\mathcal{M}) = 0$ nếu $x \neq \alpha$ và $\mathrm{rk}_x(\mathcal{M}) = 1$ nếu $x = \alpha$. Tương tự, ta có thể lấy $X = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ và $M = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ với p là một số nguyên tố nào đó. Khi đó hàm cấp có giá trị $\mathrm{rk}_x(\mathcal{M}) = 0$ nếu $x \neq p$ và $\mathrm{rk}_x(\mathcal{M}) = 1$ nếu $x = p$. Trong cả hai trường hợp trên, $\mathcal{M}$ không là tự do địa phương. Nói chung các vành thương không bao giờ là tự do địa phương.

Ta xét một ví dụ thú vị hơn. Cho $X = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[t,u])$ là mặt phẳng aphin trên $\mathbb{C}$. Lấy M là iđêan của $A = \mathbb{C}[t,u]$ sinh bởi $\langle u, v\rangle$. Có hia trường hợp :

- Cho $t_0, u_0 \in \mathbb{C}$ là hai số phức. Điểm (t_0, u_0) của mặt phẳng phức tương ứng với iđêan tối đại $\langle t - t_0, u - u_0\rangle$. Nếu $u_0 \neq 0$ hoặc $v_0 \neq 0$ khi đó một trong hai phần tử sinh t và u của M trở nên nghịch đảo được trong vành địa phương $A_{(u_0,v_0)}$. Vậy nên ánh xạ đơn ánh $M \to A$ trở thành song ánh sau khi tenxơ với $\otimes_A A_{(u_0,v_0)}$. Khi đó hiển nhiên hàm cấp lấy giá trị $\mathrm{rk}_{(t_0,u_0)}(M) = 1$.

- Nếu $(t_0, u_0) = (0,0)$, khi đó thớ dư có dạng
$$M_{\kappa(t_0,u_0)} = M/M^2$$
với M/M^2 là không gian vectơ trên $\mathbb{C}$ cấp hai sinh bởi ảnh của t và u. Vậy nên hàm cấp lấy giá trị $\mathrm{rk}_{(t_0,u_0)}(M) = 2$.

Như vậy, iđêan M sinh bởi $\langle t, u\rangle$ không là tự do địa phương. Ta có thể nói nó tự do địa phương khắp nơi trù tại điểm $(0,0)$. Nói chung các iđêan cũng không mấy khi là tự do địa phương trừ trong trường hợp nó xac định một **mẫu số**, một khái niệm quan trọng mà ta sẽ xem xét sau. Ta còn có một phép toán tổng quát biến một iđêan bất kỳ thành một iđêan tự do địa phương gọi là **phép nổ** mà ta cũng sẽ quay lại xem xét sau.

Chương 7

Mođun vi phân

7.1 Điểm vô cùng gần cấp một

Cho $f : X \to Y$ là cấu xạ giữa hai lược đồ aphin, $X = \mathrm{Spec}(A)$ và $Y = \mathrm{Spec}(B)$. Ký hiệu

$$\Delta : X \to X \times_Y X$$

là cấu xạ đường chéo và I_Δ là iđêan của $A \otimes_B A$ xác định đường chéo $\Delta(X)$ ở trong $X \times_Y X$. Ta gọi

$$P_1(\Delta(X)) = \mathrm{Spec}((A \otimes_B A)/I_\Delta^2).$$

là **lân cận vô cùng bé cấp** 1 của đường chéo $\Delta(X)$ ở trong $X \times_Y X$. Nó phân loại các cặp điểm vô cùng gần cấp 1 của X theo nghĩa như sau.

Định nghĩa 1 *Cho R là một vành giao hoán.* **Làm dầy** *R là cho một vành R' có thương là R*

$$R = R'/J$$

với J là một iđêan lúy linh của R'. Nếu $J^2 = 0$ thì ta nói R' là một làm dầy cấp 1 của R. Cặp (R, R') là một cặp dầy cấp 1.

Cho một cặp dày cấp 1 như trên, ta có một nhúng đóng

$$\mathrm{Spec}(R) \to \mathrm{Spec}(R')$$

với ánh xạ trên không gian tôpô là đẳng cấu. Cấu xạ này chỉ sai khác bởi các phần tử lũy linh của R'.

Định nghĩa 2 *Cho $f : X \to Y$ là một cấu xạ giữa hai lược dồ aphin, $X = \mathrm{Spec}(A)$ $Y = \mathrm{Spec}(B)$. Cho (R, R') một cặp dày cấp 1 các B-đại số. Hai điểm vô cung gần của X/Y với giá trị trong cặp dầy (R, R') là hai Y-cấu xạ:*

$$x_1, x_2 : \mathrm{Spec}(R') \to X$$

với hạn chế vào $\mathrm{Spec}(R)$ cho hai điểm bằng nhau

$$x_1|_{\mathrm{Spec}(R)} = x_2|_{\mathrm{Spec}(R)}.$$

Mệnh đề 3 *Cho (R, R') một cặp dày cấp 1 các B-đại số. Cho hai điểm x_1, x_2 của X/Y với giá trị trong cặp dày R'. Hai điểm này là vô cùng gần cấp 1 khi và chỉ khi cấu xạ*

$$(x_1', x_2') : \mathrm{Spec}(R') \to X \times_Y X$$

phân tích qua $P_1(\Delta(X))$.

Viết dưới dạng đại số ta có hai đồng cấu vành $x_1', x_2' : A \to R'$ sao cho khi hợp thành với $R' \to R$ ta được hai đồng cấu vành $x_1, x_2 : A \to R$ bằng nhau. Như vậy ảnh của iđêan I_Δ của $A \otimes_B A$, xác định đường chéo, qua đồng cấu

$$x_1' \otimes x_2' : A \otimes_B A \to R'$$

bị chứa trong iđêan J với $R = R'/J$. Vì $J^2 = 0$, ảnh của iđêan I_Δ^2 xác định $P_1(\Delta(X))$ trong $X \times_Y X$, qua đồng cấu $x_1' \otimes x_2' : A \otimes_B A \to R'$ là bằng không. Tức là $x_1' \otimes x_2'$ phân tích qua $(A \otimes_B A)/I_\Delta^2$, nói cách khác là cấu xạ $(x_1', x_2') : \mathrm{Spec}(R') \to X \times_Y X$ phân tích qua lân cận vô cùng bé cấp 1 của đường chéo $P_1(\Delta(X))$. □

Cho $R = R'/J$ là một cặp dày cấp 1. Cho $x_1', x_2' : A \to R$ là hai đồng cấu B-đại số vô cùng gần cấp 1. Hợp thành chúng với đồng cấu $R' \to R$ cho ta hai đồng cấu vành $x_1, x_2 : A \to R$ bằng nhau. Xét ánh xạ $d : A \to J$ cho bởi

$$d_J(a) = x_1'(a) - x_2'(a).$$

Vì là x_1' và x_2' là đồng cấu B-đại số cho nên

$$d_J(ab) = x_1'(a) d_J(b) + x_2'(b) d_J(a).$$

Vì J là iđêan có bình phương bàng không cho nên là R'-mođun của J thật ra là R-mođun. Hai đồng cấu $x_1, x_2 : A \to R$ là bằng nhau cho nên ta chỉ có một cấu trúc A-đại số trên R và A-mođun trên J. Công thức trên có thể viết lại dưới dạng quen thuộc của Leibnitz

$$d_J(ab) = ad_J(b) + bd_J(a).$$

Định nghĩa 4 *Cho B là một vành giao hoán và A là một B-đại số. Khi đó một* **đạo hàm** *của A trên B với giá trị trong môt A-mođun M là một ánh xạ B-tuyến tính $d_M : A \to M$ thỏa mãn* **công thức Leibnitz**

$$d_M(ab) = ad_M(b) + bd_M(a)$$

với mọi $a, b \in A$.

Ta đi đến một kết luận phù hợp với trực quan thông thường : đạo hàm là sai khác giữa hai điểm vô cùng gần cấp 1.

7.2 Mođun đối chuẩn

Cho A là một vành giao hoán và $B = A/I$ với I là một iđêan của A. Cấu xạ tương ứng với đồng cấu toàn ánh $A \to B$ là một nhúng đóng $\mathrm{Spec}(B) \hookrightarrow \mathrm{Spec}(A)$.

Với mọi $x \in I/I^2$ và $f \in I$, $fx = 0$ trong I/I^2 vì vậy I/I^2 có một cấu trúc B-mođun, gọi là *môđun đối pháp tuyến* của $\mathrm{Spec}(B)$ trong $\mathrm{Spec}(A)$ và ký hiệu là

$$N^*_{B/A} = I/I^2.$$

Nhận xét là ta có thể viết một cách khác là

$$N^*_{B/A} = I \otimes_A B.$$

Trong trường hợp N^*B/A là môđun tự do địa phương, ta lấy đối ngẫu của nó

$$N_{B/A} = \mathrm{Hom}_B(I/I^2, B)$$

là *môđun chuẩn.*

Xét một ví dụ đơn giản. Lấy $A = k[x, y]$ vành các đa thức hai biến trên một trường k. Xét $B = k[x, y]/\langle xy\rangle$, thương của A chia cho iđêan sinh bởi đa thức xy. Khi đó ta thấy I/I^2 là B-mođun tự do cấp 1 sinh bởi một phần tử là ảnh của xy trong I/I^2. Ta thấy là nhận xét này vẫn đúng cho mọi miền nguyên A và cho mọi iđêan chính I sinh bởi một phần tử f. Thương I/I^2 là B-mođun tự do sinh bởi ảnh của f ở trong I/I^2.

Mệnh đề 5 *Cho A là một k-đại số dạng hữu hạn, $B = A/I$ với I là một iđêan của A. Khi đó I/I^2 là một B-mođun hữu hạn sinh.*

Vì A là vành Noether, mọi iđêan I của nó là A-mođun hữu hạn sinh. Vậy nên $I/I^2 = I \otimes_A B$ là B-mođun hữu hạn sinh. □

Cho Y là một lược đò con đóng trong X. Ta biết nhúng đóng $Y \to X$ là một cấu xạ aphin, nói cách khác với mọi tập mở aphin $U = \mathrm{Spec}(A) \subset X$, ảnh ngược của nó trong Y là một lược đò aphin

$$U_Y = U \cap Y = \mathrm{Spec}(B)$$

với $B = A/I$, I là một iđêan nào đó của A. Trên tập mở aphin U_Y của Y ta lấy mmođun đối tiếp tuyến là I/I^2. Các mođun này có thể dán lại được với nhau và cho ta một bó $\mathcal{O}_Y$-mođun nhất quán $N_{Y/X}$.

7.3 Mođun vi phân tương đối

Cho Bư là một vành giao hoán và A là một B-đại số. Đặt $X = \mathrm{Spec}(A)$ và $Y = \mathrm{Spec}(B)$. Cấu xạ đường chéo

$$\Delta : X \mapsto X \times_Y X$$

cho bởi $A \otimes_B A \to A$ với công thức $\phi : a_1 \otimes_B a_2 \mapsto a_1 a_2$. Gọi I_Δ là iđêan của $A \otimes_B A$ hạch của ϕ.

Định nghĩa 6 *Ta gọi mođun vi phân tương đối $\Omega_{A/B}$ là môđun chuẩn I_Δ/I_Δ^2 của đường chéo X nhúng trong $X \times_Y X$.*

Ta biết iđêan I sinh bởi các phần tử có dạng

$$a \otimes_B 1 - 1 \otimes_B a.$$

Ký hiệu $\mathrm{d}a \in \Omega_{A/B} = I/I^2$ là ảnh của $a \otimes_B 1 - 1 \otimes_B a$.

Mệnh đề 7 *Ánh xạ $A \to \Omega_{A/B}$ cho bởi $a \mapsto \mathrm{d}a$ là một ánh xạ B-tuyến tính nhưng không A-tuyến tính. Nó thỏa mãn công thức Leibnitz*

$$\mathrm{d}(ab) = a\mathrm{d}b + b\mathrm{d}a$$

với mọi $a, b \in A$.

Hơn nữa, mọi B-đạo hàm d_M từ A vào một A-mođun M đều phân tích qua $\mathrm{d} : A \to \Omega_{A/B}$ và một ánh xạ A-tuyến tính $\Omega_{A/B} \to M$.

Ta có

$$ab \otimes 1 - 1 \otimes ab = (a \otimes 1)(b \otimes 1 - 1 \otimes b) + (1 \otimes b)(a \otimes 1 - 1 \otimes a).$$

Ảnh của công thức này trong I/I^2 là công thức Leibnitz $\mathrm{d}(ab) = a\mathrm{d}b + b\mathrm{d}a$.

Bây giờ ta cho M là một A-mođun với một ánh xạ

$$\mathrm{d}_M : A \to M$$

thỏa mãn công thức Leibnitz $\mathrm{d}_M(ab) = a\mathrm{d}_M(b) + b\mathrm{d}_M(a)$.

Gọi A' là vành $A_M = A \oplus M$ với cấu truc nhân cho bởi

$$(a_1 \oplus m_1) \times (a_2 \oplus m_2) = a_1a_2 \oplus (a_1m_2 + a_2m_1)$$

chứa M như một iđêan lũy linh bậc 1, tức là $M^2 = 0$. Rõ ràng A là thương của A_M chia cho iđêan lũy linh M. Ta có 2 *đồng cấu vành* $A \to A'$ là nghịch đảo bên phải của phép chiếu $\pi : A_M \to A$. Một là đồng cấu hiển nhiên $A \to A \oplus M$ cho bởi $\epsilon_1 : a \mapsto a \oplus 0_M$. Hai là đồng cấu

$$\epsilon_2 : a \mapsto a \oplus \mathrm{d}_M(a).$$

Công thức Leibnitz có thể viết lại là

$$(a \oplus \mathrm{d}_M(a))(b \oplus \mathrm{d}_M(b)) = ab \oplus \mathrm{d}_M(ab)$$

có nghĩa là ϵ_2 là một đồng cấu vành.

Hai đồng cấu vành B-tuyến tính $\epsilon_1, \epsilon_2 : A \to A_M$, cho ta một đồng cấu vành

$$\epsilon_1 \otimes \epsilon_2 : A \otimes_B A \to A_M$$

với $(\epsilon_1 \otimes \epsilon_2)^{-1}(M) = I$. Vì là $M^2 = 0$ cho nên $(\epsilon_1 \otimes \epsilon_2)$ phân tích qua $(A \otimes_B A)/I^2$. Từ đó ta có ánh xạ $\Omega_{A/B} \to M$. □

Chứng minh trên có thể trình bày một cách hình học hơn theo ngôn ngữ điểm vô cùng gần cấp 1. Cho R là một A-đại số. Một **dày hóa bị chẻ** của R là đại số R' có dạng $R' = R \oplus M_R$ với M_R là một R-mođun. Cấu trúc nhân của R' được cho bởi

$$(a_1 \oplus m_1) \times (a_2 \oplus m_2) = a_1a_2 \oplus (a_1m_2 + a_2m_1)$$

với mọi $a_1, a_2 \in R$ và $m_1, m_2 \in M_R$. Trong R', M_R là một iđêan với bình phương bằng không.

Cho một dày hóa bị chẻ như vậy, ta lập tức có một đồng cấu vành $A \to R'$ cho bởi $a \mapsto a \oplus 0_{M_R}$ tức là một cấu xạ $x : \mathrm{Spec}(R') \to \mathrm{Spec}(A)$. Cho một cấu xạ B-lược đồ khác $x' : \mathrm{Spec}(R') \to \mathrm{Spec}(A)$, là điểm vô cùng gần cấp 1 của x, ta có một cấu xạ

$$(x, x') : \mathrm{Spec}(R') \to X \times_Y X$$

phân tích qua lân cận vô cùng bé cấp 1 của đường chéo $P_1(\Delta(X))$. Tức là ta có một đồng cấu vành

$$(A \otimes_B A)/I_\Delta^2 \to R'.$$

Đồng cấu này cho ta một đồng cấu A-mođun $\Omega^1_{A/B} \to M_R$.

Hệ quả 8 *Mođun các B-đạo hàm từ A vào A, ký hiệu là $\mathrm{Der}_B(A)$, đẳng cấu chuẩn tắc với $\mathrm{Hom}_A(\Omega^1_{A/B}, A)$. Người ta gọi môđun này là mođun tiếp tuyến của A/B.*

Cách gọi này phù hợp với những gì ta biết về các vectơ tiếp tuyến. Muốn lấy dạo hàm của một hàm số tại một điểm trên một đa tạp, ta phải có một vectơ tiếp tuyến tại điểm đó. Và đạo hàm là sai khác giưữa điểm không của không gian tiếp xúc và điểm vô cùng gần tương ứng với vectơ tiếp tuyến đã cho.

Bây giờ ta xét ví dụ đơn giản nhất là mođun vi phân tương đối của một không gian aphin.

Mệnh đề 9 *Cho $X = \mathrm{Spec}(A)$ với $A = k[x_1, \ldots, x_n]$. Khi đó $\Omega_{A/k}$ là A-mođun tự do với cơ sở là $dx_1, \ldots, dx_n$.*

Ta có

$$A \otimes_k A = k[u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_n]$$

mà để đơn giản ký hiệu ta đã đặt $u_i = x_i \otimes 1$ và $v_i = 1 \otimes x_i$. Đặt $d_i = u_i - v_i$. Dễ thấy $A = k[u_1, \ldots, u_n, d_1, \ldots, d_n]$ bằng phép đổi biến hiển nhiên.

Iđêan xác định đường chéo của X trong $X \times_k X$ là iđêan sinh bởi $\langle d_1, \ldots, d_n \rangle$. Dễ thấy I_Δ / I_Δ^2 là một A-mođun tự do với cơ sở là $d_1, \ldots, d_n$.

7.4 Thớ của $\Omega_{A/k}$ ở các k-điểm

Mệnh đề 10 *Cho k là mọt trường và A là một k-đại số. Cho $x : A \to k$ là một k-điểm của A với $\mathfrak{m}_x$ là iđêan cực đại của A xác định điểm x. Khi đó thớ dư của bó vi phân tương đối $\Omega_{A/k}$ tại điểm x là*

$$\Omega_{A/k} \otimes_{A,x} k = \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2.$$

Đồng cấu $x : A \to k$ cho k một cấu trúc A-đại số. Để nhấn mạnh cấu trúc k-đại số mà ta ký hiệu lại là $x : A \to \kappa(x)$ với $\kappa(x) = k$ như một trường. Ta có

$$\mathrm{Hom}_A(\Omega_{A/k}, \kappa(x)) = \mathrm{Hom}_{\kappa(x)}(\Omega_{A/k} \otimes_A \kappa(x), \kappa(x)).$$

Như vậy mỗi một phần tử của $\mathrm{Hom}_{\kappa(x)}(\Omega_{A/k} \otimes_A \kappa(x), \kappa(x))$ tương ứng $1-1$ với một k-đạo hàm ∂ của A lấy giá trị trong $\kappa(x)$ xem như A-mođun, và như vậy lại tương ứng $1-1$ với một đồng cấu vành

$$x_\partial : A \to \kappa(x)[\epsilon]/\epsilon^2 = \kappa(x) \oplus \kappa(x)\epsilon$$

sao cho hợp thành với $\kappa(x)[\epsilon]/\epsilon^2 \to \kappa(x)[\epsilon]/\epsilon = \kappa(x)$ cho lại ta đồng cấu $x : A \to \kappa(x)$. Tương ứng giữa ∂ và x_∂ cho bởi công thức

$$x_\partial(a) = x(a) \oplus \partial(a)\epsilon \in \kappa(x) \oplus \kappa(x)\epsilon.$$

Các đồng cấu vành có dạng như vậy gửi iđêan cực đại $\mathfrak{m}_x$ vào iđêan $k\epsilon$ của $k[\epsilon]/\epsilon^2$ vì thế ảnh của $\mathfrak{m}_x^2$ phải bằng không. Các đồng vành dạng x_∂ tương ứng $1-1$ với các đồng cấu vành

$$A/\mathfrak{m}_x^2 \to \kappa(x)[\epsilon]/\epsilon^2.$$

Vành $A/\mathfrak{m}_x^2$ có cấu trúc rất đơn giản. Nó có thương là $A/\mathfrak{m}_x = \kappa(x)$ và nó có đại số con là k. Ta ở trong trường hợp đặc biệt là $k = \kappa(x)$ cho nên $A/\mathfrak{m}_x^2 = \kappa(x) \oplus \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$. Vậy nên cho một đồng cấu vành $A/\mathfrak{m}_x^2 \to \kappa(x)[\epsilon]/\epsilon^2$ đồng nghĩa với việc cho một ánh xạ $\kappa(x)$-tuyến tính $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2 \to k\epsilon$. Tóm lại ta có một đẳng cấu giữa hai $\kappa(x)$-không gian vectơ

$$\mathrm{Hom}_k(\Omega_{A/k} \otimes_A \kappa(x), \kappa(x)) = \mathrm{Hom}_{\kappa(x)}(\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2, \kappa(x))$$

và từ đó mà suy ra đẳng cấu $\Omega_{A/k} \otimes_A \kappa(x) = \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$ mà ta muốn. $\square$

Trong hình học vi phân đôi khi người ta định nghĩa bó vi phân là bó có thớ là không gian vectơ $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$. Trong hình học đại số, việc các thớ này có thể dán lại với nhau thành một A-mođun với A là vành các hàm trên đa tạp là một việc hoàn toàn không tầm thường. Hơn nữa, bạn đọc nên chú ý là công thức $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$ chỉ đúng cho các k-điểm. Lấy điểm tổng quát của một miền nguyên, iđêan tương ứng với nó là iđêan không, mà không có ngiã là thớ của bó vi phân tương đối tại điểm tổng quát bằng không.

7.5 Hai dãy khớp cơ bản

Để tính toán các môđun vi phân tương đối, người ta dùng đến hai dãy khớp cơ bản mà ta sẽ phát biểu và chứng minh ở trong mục này.

Định lý 11 *Cho k là một vành giao hoán, A là một k-đại số và $B = A/J$ với J là một iđêan của A. Khi đó ta có dãy khớp phải B-mođun*

$$J/J^2 \to \Omega_{A/k} \otimes_A B \to \Omega_{B/k} \to 0.$$

Đồng cấu $J/J^2 \to \Omega \otimes_A B$ là đồng cấu cho bởi công thức $f \mapsto df \otimes_A 1_B$ với mọi $f \in J$.

Định lý 12 *Cho k là một vành giao hoán, A là một k-đại số và B là một A-đại số. Khi đó ta có dãy khớp phải B-mođun*

$$\Omega_{A/k} \otimes_A B \to \Omega_{B/k} \to \Omega_{B/A} \to 0.$$

Định nghiã mođun vi phân tương đối như I_Δ/I_Δ^2 cho ta một định nghĩa xúc tích nhưng hoàn toàn không phù hợp cho việc tích toán nó và cũng không phù hợp cho viịec chứng minh các tích chất của nó. Để chứng minh hai dãy khớp cơ bản trên ta lại phải quay lại dùng ngôn ngữ điểm vô cùng gần. Trước hết ta cần bổ đề tổng quát sau, một biến thể của định lý Yoneda.

Bổ đề 13 *Cho B là một vành giao hoán. Với mọi B-mođun M, ký hiệu*

$$h_M : B - Mod \to B - Mod$$

hàm tử cho bởi $N \mapsto \mathrm{Hom}_B(M, N)$. Khi đó cho một đồng cấu $M \to M'$ tương đương với cho một cấu xạ hàm tử $h_{M'} \to h_M$.

Cho M_1, M_2, M_3 là ba M mođun và cho các cấu xạ hàm tử $h_{M_3} \to h_{M_2}$ và $h_{M_2} \to h_{M_1}$ cao cho vưới mọi B-mođun N, dãy

$$0 \to h_{M_3}(N) \to h_{M_2}(N) \to h_{M_1}(N)$$

là khớp trái. Khi đó dãy tương ứng

$$M_1 \to M_2 \to M_3 \to 0$$

là khớp phải.

Như trong định lý Yoneda, nếu ta có một cấu xạ giữa hai hàm tử với biến là một B-mođun N

$$\mathrm{Hom}_B(M', N) \to \mathrm{Hom}_B(M, N),$$

lấy $N = M'$ và lấy ảnh của $1_{M'} \in \mathrm{Hom}_B(M', M')$ ta có được một đồng cấu B-mođun $M \to M'$.

Cho một dãy khớp hàm tử

$$0 \to h_{M_3}(N) \to h_{M_2}(N) \to h_{M_1}(N)$$

ta có các đồng cấu $M_1 \to M_2$ và $M_2 \to M_3$. Trước hết ta chứng minh $M_2 \to M_3$ là toàn ánh. Gọi P là ảnh của M_2 trong M_3. Nếu $P \neq M_3$, ta có thể lấy $N = M_3/P$ xét $\alpha \in \mathrm{Hom}_B(M_3, M_3/P)$ cho bởi phép chiếu $\pi : M_3 \to M_3/P$. Nếu $P \neq M_3$, thì $\pi \neq 0$. Nhưng nếu ta hợp thành với đồng cấu $M_2 \to M_3$ với π thì được một một đồng cấu $M_2 \to N$ bằng không, vì π bằng không trên ảnh của M_2. Vì điều này mâu thuẫn với giả thiết $h_{M_3}(N) \to h_{M_2}(N)$ là đơn ánh cho nên đồng cấu $M_2 \to M_3$ ắt phải là toàn ánh.

Vì hàm tử $M \to h_M$ là chung thủy cho nên từ giả thiết hợp thành $h_{M_3} \to h_{M_2} \to h_{M_1}$ bằng không ta suy ra hợp thành $M_1 \to M_2 \to M_3$ cưng bằng không.

Ta chỉ còn cần chứng minh là ảnh của $M_1 \to M_2$ đúng bằng hạch của $M_2 \to M_3$. Ta lại lấy P là ảnh của $M_1 \to M_2$. Ta đã biết P bị chứa trong hạch $K = \ker[M_2 \to M_3]$ Ta cần chứng minh quan hệ chứa ngược lại. Gọi $\pi : M_2 \to M_2/P$ là phép chiếu hiển nhiên xuống thương. Tron dãy khớp

$$0 \to \mathrm{Hom}(M_3, M_2/P) \to \mathrm{Hom}(M_2, M_2/P) \to \mathrm{Hom}(M_1, M_2/P)$$

ảnh của π vào trong $\mathrm{Hom}(M_1, M_2/P)$ bằng không vì theo định nghiã π bằng không trên ảnh P của M_1 trong M_2. Như vậy π là ảnh của một phần tử của $\mathrm{Hom}(M_3, M_2/P)$, có nghĩa là đồng cấu $M_2 \to M_2/P$ phân tích qua $M_2 \to M_3$. Vậy nên hạch của $M_2 \to M_2/P$ phải chứa hạch K của $M_2 \to M_3$. Như vậy $P \supset K$. Mà ta đã biết từ trước là $P \subset K$ cho nên $P = K$. □

Sử dụng bổ đề này ta đã quy việc chứng minh dãy khớp giữa các mođun vi phân tương đối $\Omega_{A/B}$ về việc chứng minh dãy khớp giưũa các hàm tử $M \mapsto \mathrm{Hom}_A(\Omega_{A/B})$ trên phạm trù các A-mođun. Bình thương thì đây là một cách phức tạp thêm vấn đề, nhưng trong trường hợp này thì không vì ta không biết rõ mođun vi phân tương đối $\Omega_{A/B}$ như là hàm tử mà nó biểu diễn, nhất là vì hàm tử này có thể mô tả được theo ngôn ngữ hình học điểm vô cùng gần.

Chứng minh dãy khớp thứ nhất. Cho k là một vành giao hoán, A là một k-đại số và $B = A/J$ với J là một iđêan của A. Với mọi B-mođun N, ta có

- $\mathrm{Hom}_B(\Omega_{B/k}, N)$ là tập các k-đạo hàm với giá trì trong N, tức là các ánh xạ k-tuyến tính $d_N : B \to N$ thỏa mãn công thức Leibnitz. Nó cũng là tập các điểm

  $$\mathrm{Spec}(B \oplus N) \to \mathrm{Spec}(B)$$

  với $B \oplus N$ là dày hóa bị chẻ của B cho bởi B-mođun N, vô cùng gần "điểm không" $B \mapsto B_N = B \oplus N$ là điểm cho bởi $b \mapsto b \oplus 0$. Ứng với k-đạo hàm $d_N : B \to N$ là đồng cấu k-đại số $B \to B_N$ cho bởi $b \mapsto b \oplus d_N(b)$. Như ta đã thấy ở mục trước, d_N là k-đạo hàm khi và chỉ khi $b \mapsto b \oplus d_N(b)$ là đồng cấu k-đại số. Tóm lại $\mathrm{Hom}_B(\Omega_{B/k}, N)$ là tập các điểm

  $$x_B : \mathrm{Spec}(B_N) \to \mathrm{Spec}(B)$$

  vô cung gần điểm không.

- Tương tự như vậy, cho một phần tử của $\mathrm{Hom}_B(\Omega_{A/k} \otimes B, N)$ cũng là cho một đồng cấu A-tuyến tính $\Omega_{A/k} \to N$ và cưng là cho một điểm

  $$x_A : \mathrm{Spec}(B_N) \to \mathrm{Spec}(A)$$

  vô cùng gần điểm không.

- Hợp thành với cấu xạ $j : \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$, ta có một ánh xạ

  $$x_B \mapsto x_A = j \circ x_B$$

  từ tập các điểm $x_B : \mathrm{Spec}(B_N) \to \mathrm{Spec}(B)$ vô cùng gần điểm không vào tập các điểm $x_A : \mathrm{Spec}(B_N) \to \mathrm{Spec}(A)$ vô cùng gần điểm không. Cho nên ta có một ánh xạ

  $$\mathrm{Hom}_B(\Omega_{B/k}, N) \to \mathrm{Hom}_B(\Omega_{A/k} \otimes_A B, N).$$

  Ta có thể kiểm tra được ánh xạ này là B-tuyến tính.

- Vì $A \to B$ là đồng cấu toàn ánh, cho nên nếu hai điểm

  $$x_B, x'_B : B \to B_N$$

  cảm sinh ra hai điểm $x_A, x'_A : A \to B_N$ bằng nhau thì $x_B = x'_B$. Tức là đồng cấu cho ở trên là toàn ánh.

- Cho một đồng cấu $x_A : A \to B \oplus N$ cho bởi $a \mapsto \bar{a} \oplus d_N(a)$ với $\bar{a}$ là ảnh của a ở trong B và $d_N : A \to N$ là một k-đạo hàm. Vì $x_A : A \to B_N$ là một đồng cấu đại số, cho nên hiển nhiên x_A là A-tuyến tính. Hạn chế x_A vào iđêan J sẽ có ảnh chưứa trong iđêan N của B_N. Vì bình phương của N trong B_N bằng không cho nên ảnh của J^2 trong B_N bằng không. Vậy nên x_A cảm sinh một đồng cấu B-mođun $J/J^2 \to N$ và ta có một đồng cấu

  $$\mathrm{Hom}_B(\Omega_{A/k}, N) \to \mathrm{Hom}_B(J/J^2, N).$$

- Đồng cấu $x_A : A \to B_N$ phân tích qua $A \to A/J = B$, khi và chỉ khi hạn chế x_A vào J bằng không. vậy nên có dãy khớp

  $$0 \to \mathrm{Hom}_B(\Omega_{B/k}, N) \to \mathrm{Hom}_B(\Omega_{A/k} \otimes_A B, N) \to \mathrm{Hom}_B(J/J^2, N)$$

  có tính hàm tử đối với B-mođun N biến thiên.

- Theo bổ đề ta có một dãy khớp B-mođun

  $$J/J^2 \to \Omega_{A/k} \otimes_A B \to \Omega_{B/k} \to 0.$$

  và ta kết thúc việc chứng minh dãy khớp thứ nhất.

- Ta còn cần viết rõ công thức của đồng cấu B-mođun

$$J/J^2 \to \Omega_{A/k} \otimes_A B$$

trong dãy khớp. Lấy $N = \Omega_{A/k} \otimes_A B$. Phần tử đơn vị

$$1 \in \mathrm{Hom}_B(\Omega_{A/k} \otimes B, N)$$

tương ứng với đồng cấu vành

$$A \to B_N \oplus N$$

cho bởi $a \mapsto \bar{a} \oplus da \otimes_A 1_B$ với $\bar{a}$ là ảnh của a ở trong B. Hạn chế vào J ta có đồng cấu $f \mapsto df$ vì $\bar{f} = 0$. Ta có thể kiểm tra thêm tính tuyến tính của đồng cấu này. Với mọi $f \in J$ và $a \in A$, ảnh của af

$$d(af) \otimes_A 1_B = (adf + fda) \otimes_A 1_B = adf \otimes_A 1_B$$

vì $f \otimes_A 1_B = 0$. □

Chứng minh dãy khớp thứ hai. Cũng như với dãy khớp thứ nhất, ta muốn xây dựng với mọi B-mođun N, một dãy khớp

$$0 \to \mathrm{Hom}_B(\Omega_{B/A}, N) \to \mathrm{Hom}_B(\Omega_{B/k}, N) \to \mathrm{Hom}_B(\Omega_{A/k} \otimes_A B, N)$$

biến thiên một cách hàm tử theo N.

- Cho một phần tử của $\mathrm{Hom}_B(\Omega_{B/A}, N)$ là cho một ánh xạ A-tuyến tính $d_x : B \to N$ thỏa mãn công thức Leibnitz và cũng là cho một đồng cấu A-đại số $x : B \to B_N = B \oplus N$ với $x(b) = b \oplus d_x(b)$, vô cùng gần với điểm không $x_0 : B \to B_N$ với $x_0(b) = b \oplus 0_N$.

- Tương tự, cho một phần tử của $\mathrm{Hom}_B(\Omega_{B/k}, N)$ là cho một ánh xạ k-tuyến tính $d_y : B \to N$ thỏa công thức Leibnitz và cũng là cho một đồng cấu k-đại số $y : B \to B_N$ với $y(b) = b \oplus d_y(b)$, vô cùng gần điểm không.

- Một đồng cấu A-tuyến tính thì hiển nhiên phải k-tuyến tính. Nếu ánh xạ k-tuyến tính mà bằng không thì tất nhiên ánh xạ A-tuyên tính ban đầu cũng bằng không. Điều này dẫn đến một đồng cấu chuẩn tắc

$$\mathrm{Hom}_B(\Omega_{B/A}, N) \to \mathrm{Hom}_B(\Omega_{B/A}, N)$$

và đồng cấu này là đơn ánh.

- Tương tự như trong chứng minh dãy khớp thứ nhất, với mọi đồng cấu k-đái số $y_B : B \to B_N$ vô cùng gần điểm không, hợp thành với $A \to B$ cho ta một đồng cấu k-đại số $y_A : A \to B_N$.Và cái này thì tương đương với một k-đạo hàm $A \to B_N$ tức là một phần tử của

$$\mathrm{Hom}_A(\Omega_{A/k}, N) = \mathrm{Hom}_B(\Omega_{A/k} \otimes_A B, N).$$

- Ánh xạ trên còn có thể được mô tả như sau. Cho $d_B : B \to N$ là một k-đạo hàm của B. Thế thì hợp thành với $A \to B$ cho ta một k-đạo hàm $d_A : A \to N$. Và ta cũng thấy ngay là d_B là A-tuyến tính khi và chỉ khi $d_A = 0$.

Như vậy với mọi B-môđun N ta có một dãy khớp chuẩn tắc

$$0 \to \mathrm{Hom}_B(\Omega_{B/A}, N) \to \mathrm{Hom}_B(\Omega_{B/k}, N) \to \mathrm{Hom}_B(\Omega_{A/k} \otimes_A B, N)$$

và từ đó dùng bổ đề ta suy ra dãy khớp thứ hai

$$\Omega_{A/k} \otimes_A B \to \Omega_{B/k} \to \Omega_{B/A} \to 0$$

và kết thúc chứng minh hai dãy khớp cơ bản. □

7.6 Ma trận Jacobi

Mệnh đề 14 *Cho k là một vành giao hoán và A là một k-đại số dạng hữu hạn. Khi đó $\Omega_{A/k}$ là một A-đại số dạng hữu hạn.*

Vì A là k-đại số dạng hữu hạn nên nó có dạng $A = R/I$ với $R = k[x_1, \ldots, x_n]$ là một đại số đa thức và I là một iđêan của R. Khi đó ta có một đồng cấu toàn ánh A-mođun

$$\Omega_{R/k} \otimes_R A \to \Omega_{A/k}.$$

Ta đã biết là $\Omega_{R/k}$ là một R-mođun tự do cấp n cho nên $\Omega_{A/k}$ ắt là A-mođun hữu hạn sinh.

Mệnh đề 15 *Cho k là một vành giao hoán, $R = k[x_1, \ldots, x_n]$ là vành các đa thức n biến trên R, J là một iđean của R sinh bởi các phần tử $f_1, \ldots, f_m$. và $A = R/J$. Khi đó ta có một dãy khớp A-mođun*

$$A^m \xrightarrow{F} A^n \to \Omega_{A/k} \to 0$$

với F là đồng cấu A-tuyến tính cho bởi ma trận các đạo hàm riêng

$$F = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right]_{j=1,\dots,m}^{i=1,\dots,m}.$$

Với mọi điểm $\alpha : A \to \kappa(\alpha)$, cấp của $\Omega_{A/k}$ ở α được cho bởi công thức

$$\mathrm{rk}_\alpha(\Omega_{A/k}) = n - \mathrm{rk}\left[\alpha\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)\right]_{j=1,\dots,m}^{i=1,\dots,m}.$$

Mệnh đề này chỉ là một cách trình bày lại cụ thể của dãy khớp thứ nhất. Iđêan J sinh bởi các phần tử $f_1, \dots, f_m$ cho nên trong dãy khớp trái, ta có thể thay J/J^2 bàng một A-mođun tự do với m phần tử. Xét A-mođun tự do A^m với cơ sở là $\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_m$ cùng với một đồng cấu toàn ánh $A^n \mapsto J/J^2$ gửi $\tilde{f}_i$ lên f_i.

Mặt khác ta biết là $\Omega_{R/k}$ là một R-mođun tự do sinh bởi $dx_1, \dots, dx_n$ cho nên, hợp thành lại ta có một dãy khớp

$$A^m \xrightarrow{F} A^n \to \Omega_{A/k} \to 0$$

với F là đồng cấu được miêu tả như sau. Ta biết ảnh của của $f_i \in J$ trong $\Omega_{R/k} \otimes_R A$ là $df_i \otimes_R 1_A$ cho nên ảnh của $\tilde{f}_i$ là

$$F(\tilde{f}_i) = df_i \otimes_R 1_A = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} dx_j \otimes_R 1_A.$$

Công thức cấp suy ra từ tính chất khớp phải của tích tenxơ. □

Ma trận F gọi là ma trận Jacobi.

7.7 Phần mở trơn của môt đa tạp đại số

Cho $X = \mathrm{Spec}(A)$ với A là một miên nguyên, dạng hữu hạn trên một trường k. Khi đó $\Omega_{A/k}$ là một A-mođun hữu hạn sinh. Ta có hàm cấp của nó $x \to \mathrm{rk}_x \Omega_{A/k}$ là một hàm liên tục trên ở trên không gian tôpô $\mathrm{Spec}(A)$.

Định nghĩa 16 *Đa tạp $X = \mathrm{Spec}(A)$ gọi là trơn nếu như $\Omega_{A/k}$ là một A-mođun tự do địa phương, hay nói cách khác là hầm cấp là hàm hằng.*

Với mọi đa tạp $X = \mathrm{Spec}(A)$ với A là một miền nguên, giá trị cực tiểu của hàm liên tục trên $x \to \mathrm{rk}_x \Omega_{A/k}$ đạt được trên tập một tập mở X^0 của X. Hạn chế của $\Omega_{A/k}$ trên tập mở này là $\Omega_{X^0/k}$ có hàm cấp là hàm hằng. X^0 là tập mở trơn cực đại của X.

Mệnh đề 17 *Cho Y là một k-đa tạp trơn, nhúng đóng vào trong một k-đa tạp trơn X. Khi đó dãy khớp phải cơ bản thứ hai cũng còn là một dãy khớp trái*

$$0 \to J/J^2 \to \Omega_{X/k} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_Y \to \Omega_{Y/k} \to 0.$$

Phần IV

Chiều và chuẩn hóa

Chương 8

Chiều

8.1 Cấu xạ hữu hạn và chiều Krull

Định nghĩa 1 *Một cấu xạ $f : Y \to X$ giữa hai lược đồ aphin $X = \mathrm{Spec}(A)$ và $Y = \mathrm{Spec}(B)$ gọi là hữu hạn, nếu A-đại số B xem như A-mođun là hữu hạn sinh. Ta còn nói B là một A-đại số hữu hạn.*

Một cấu xạ $f : Y \to X$ là hữu hạn nếu tồn tại một phủ của X bởi các tập mở aphin $\{U_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ sao cho tạo ảnh $f^{-1}(U_i)$ là tập mở aphin của Y và hạn chế f vào $f^{-1}(U_i) \to U_i$ là cấu xạ hữu hạn giữa hai lược đồ aphin.

Theo đinh nghĩa của cấu xạ hữu hạn, ta có thể dễ dàng quy trường hợp tổng quát về trường hợp cấu xạ hữu hạn giữa hai lược đồ aphin $f : \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$.

Mệnh đề 2 *Cho B là một A-đại số dạng hữu hạn. Khi đó B là một A-mođun hữu hạn sinh khi và chỉ khi với mọi phần tử $x \in B$, tồn tại $n \in \mathbb{N}$ là $a_0, \ldots, a_{n-1} \in A$ sao cho ta có đẳng thức ở trong B*

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0.$$

Một phần tử $x \in B$ thỏa mãn điều kiện trên gọi là **nguyên trên** A. Mệnh đề có thể phát biểu lại là với mọi A-đại số B dạng hữu hạn, B là một A-mođun hữu hạn sinh khi và chỉ khi mọi phần tử của B là nguyên trên A.

Giả sử B là một A-mođun dạng hữu hạn. Chọn $b_1, \ldots, b_n$ là một hệ sinh của A-mođun B. Với mọi $x \in B$, ánh xạ $b \mapsto bx$ là một ánh xạ B-tuyến tính nên hiển nhiên là A-tuyến tính. Với mọi $i = 1, \ldots, n$, ta có thể viết xb_i ở dạng

$$xb_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} b_j$$

với $\alpha_{ij} \in A$ có thể không xác định duy nhất. Trong vành $A[t]$ các đa thức một biến t với hệ số trong A, ta có đa thức đặc trưng

$$P = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_0 \in A[t]$$

của ma trận (α_{ij}). Theo định lý Cayley-Hamilton, ánh xạ A-tuyến tính $B \to B$

$$b \mapsto P(x)b$$

đồng nhất bằng không. Lấy $b = 1$ ta có $P(x) = 0$.

Ngược lại, cho B là một A-đại số sinh bởi n-phân tử $x_1, \ldots, x_m$ như là một A-đại số. Giả sử mọi phần tử của B đều là nguyên trên A, đặc biệt các phần tử $x_1, \ldots, x_n$ là nguên trên A.

Xét B_1 là A-đại số con của B sinh bởi một phần tử x_1, tức là ta có một đồng cấu A-đại số toàn ánh

$$\phi_1 : A[t] \to B_1$$

gửi t lên x_1. Theo giả thiết tồn tại một đa thức

$$P = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_0 \in A[t]$$

sao cho $\phi_1(P) = P(x_1) = 0$. Nói cách khác là đồng cấu vành $A[t] \to B_1$ phân tích qua thương $A[t]/\langle P \rangle$ với $\langle P \rangle$ là iđêan của $A[t]$ sinh bởi P. Mà ta có thể thấy ngay là thương này là một A-mođun tự do với cơ sở là ảnh của $1, t, \ldots, t^{n-1}$ theo định lý chia Euclid. Đồng cấu $\phi_1 : A[t] \to B_1$ là toàn ánh, cho nên B_1 là một A-mođun hữu hạn sinh. Ở đây, ta thấy giả thiết đa thức $P(t)$ có hệ số đầu bằng một là giả thiết quan trọng, vì nếu không thương $A[t]/P$ chua chắc đã là A-mođun hữu hạn sinh.

Ta lần lượt làm như vậy bằng qui nạp với các phần tử sinh khác của B là $x_2, \ldots, x_m$. □

Cho $\phi : A \to B$ là đồn cấu vành với B là A-đại số hữu hạn. Gọi iđêan J là hạch của đông cấu vành $A \to B$, A/J đồng nhất với một vành con của B. Nếu B là A-mođun hữu hạn sinh thì hiển nhiên nó cũng là một A/J-mođun hữu hạn sinh. Vì thế ta có thể nhanh chóng qui về trường hợp đồng cấu $A \to B$ là đơn ánh.

Mệnh đề 3 (Cohen-Seidenberg) *Cho $\phi : A \to B$ là một đồng cấu đơn ánh vành giao hoán. Giả thiết là B là A-đại số hữu hạn. Khi đó ánh xạ* $\mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$ *là toàn ánh.*

Cho $x \in X = \mathrm{Spec}(A)$. Ký hiệu $\kappa(x)$ là trường các thương của A/x với x ở đây là iđêan nguyên tố của A tương ưng với x. Ký hiệu $f : Y = \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$ là cấu xạ cảm sonh từ ϕ.

Ta biết có một song ánh chuẩn tắc giữa tập các iđêan nguyên tố $y \in \mathrm{Spec}(B)$ sao cho $f(y) = x$ và tập phổ $\mathrm{Spec}(B \otimes_A \kappa(x))$. Muốn chứng minh phổ này khác rỗng ta cần chứng minh là vành $B \otimes_A \kappa(x)$ không phải là vành tầm thường, hay nói cách khác là trong vành này $0 \neq 1$.

Ký hiệu A_x là địa phương hóa của A tai điểm x. Ký hiệu $\mathfrak{p}_x$ là iđêan tối đại của A_x, giao nó với A ta nhận lại được x.

Trước hết ta nhận xét là $B \otimes_A A_x$ không phải là vành tầm thường, tức là vành có một phần tử $0 = 1$. Nếu nó là vành tầm thường thì theo định nghiã của địa phương hóa, tồn tại $s \in A - x$, sao cho $\phi(s) = 0$ và điều này mâu thuẫn với giả thiết ϕ đơn ánh.

Vì $B \otimes_A A_x$ một A_x-mođun hữu hạn sinh cho nên ta có thể dùng bổ đề Nakayama. Nếu

$$(B \otimes_A A_x) \otimes_{A_x} \kappa(x) = B \otimes_A \kappa(x)$$

bằng không thì $B \otimes_A A_x$ phải bằng không và cái này thì mâu thuẫn với cái ta biết : $B \otimes_A A_x$ là vành không tầm thường. □

Định lý 4 *Cho $f : Y \to X$ là một cấu xạ hữu hạn. Khi đó ảnh của một tập đóng trong Y là một tập đóng trong X. Nói cách khác, cấu xạ hữu hạn là một ánh xạ đóng trên không gian tôpô.*

Trong một lược đồ, các tập mở aphin lập thành một cơ sở của tôpô Záiki, cho nên một tập con V của X là đóng khi và chỉ khi giao của nó với mọi tập mở aphin U của X là tập đóng của U. Vì thê ta có thể giả sử Y và X là các lược đồ aphin $Y = \mathrm{Spec}(B)$ và $X = \mathrm{Spec}(A)$.

Lấy V là một tập đóng của Y, nó có dạng $V = \mathrm{Spec}(B/I)$ với I là một iđêan của B. Gọi J là hạch của đồng cấu hợp thành $A \to B \to B/I$. Cấu xạ $\mathrm{Spec}(B/I) \to \mathrm{Spec}(A)$ phân tích qua nhúng đóng $\mathrm{Spec}(A/J) \to \mathrm{Spec}(A)$. Vì B là một A-đại số hữu hạn cho nên B/I là một A/J-đại số hữu hạn và hon nữa $A/I \to B/J$ là đông cấu đơn ánh. Theo Cohen-Seidenberg, $\mathrm{Spec}(B/I) \to \mathrm{Spec}(A/J)$ là toàn ánh. Vậy nên ảnh của $V = \mathrm{Spec}(B/I)$ là tập con đóng

$\mathrm{Spec}(A/J)$ của A. □

Mệnh đề 5 *Cho B là một A-đại số hữu hạn. Cho y và y' là hai phàn tử của $Y = \mathrm{Spec}(B)$ có cùng một ảnh $x \in X = \mathrm{Spec}(A)$. Nếu xem như iđêan của A ta có $y \subset y'$ thì khi đó ắt có $y = y'$.*

Thay A bằng $\kappa(x)$, B bằng $B \otimes_A \kappa(x)$ và y, y' bởi các iđêan nguyên tố tương ứng với chúng trong $B \otimes_A \kappa(x)$ ta đưa về trường hợp A là một trường $k = \kappa(x)$ và B là một k-đại số hữu hạn.

Cho B là một k-đại số hữu hạn, J là iđêan các phần tử lũy linh của B. Khi đó ta biết B/J phải có dạng

$$B/J = k_1 \times \cdots \times k_m$$

với $k_1, \ldots, k_m$ là các mở rộng hữu hạn của k. Từ đó ta thấy mọi iđêan nguyên tố của B là iđêan tối đại, và có đúng m iđêan tối đại như vậy. Thế nên nếu có hai iđêan nguyên tố $y \subset y'$ thì ta ắt có $y = y'$.

Định nghĩa 6 *Cho X là một lược đồ.* **Chiều Krull** *của X là số tự nhiên n cực đại sao cho tồn tại của một dãy*

$$Y_0 \subset Y_1 \subset \cdots \subset Y_n$$

với Y_i là các tập đóng bất khả qui, đôi một khác nhau, của X. Ký hiệu chiều Krull là $\dim(X)$.

Trong định nghĩa trên ta ngầm hiểu là chiều Krull chỉ có nghĩa nếu độ dài của các dãy $Y_0 \subset Y_1 \subset \cdots \subset Y_n$ như trên là bị chặn.

Định lý 7 *Cho $f : X' \to X$ là một cấu xạ hữu hạn toàn ánh. Khi đó chiều Krull của X' và của X bằng nhau.*

Ta chỉ xét trường hợp aphin. Trường hợp tổng quát dễ dàng qui về trương hợp này.

Một dãy $Y_0 \subset Y_1 \subset \cdots \subset Y_n$ các tập đóng bất khả qui đôi một khác nhau của $X = \mathrm{Spec}(A)$ tương ứng với một dãy các iđêan nguyên tố $x_0 \supset x_1 \supset \cdots \supset x_n$ đôi một khác nhau của X.Theo định lý Cohen-Seidenberg, tồn tại một iđean nguyên tố $x'_n \in X' = \mathrm{Spec}(A')$ sao cho có ảnh là x_n. Thay A bằng A/x_n và A' bằng A'/x'_n và tiếp tục với dãy $\bar{x}_0 \supset \bar{x}_1 \cdots \supset x_{n-1}$ với $\bar{x}_i$ là ảnh của x_i trong A/x_n. Qui nạp như vậy cuối cùng ta sẽ có một dãy các iđêan nguyên tố

$$x'_0 \supset x'_1 \supset \cdots \supset x'_n$$

của A' mà ảnh trong Spec(A) là dãy $x_0 \supset \cdots \supset x_n$. Rõ rang là các iđêan nguyên tố x'_i phải đôi một khác nhau, vì nếu không ảnh của chúng trong Spec(A) ắt phải bằng nhau. Như vậy $\dim(A') \geq \dim(A)$.

Nếu ta cho một dãy các iđêan nguyên tố đôi một khác nhau trong A'

$$x'_0 \supset x'_1 \supset \cdots \supset x'_n$$

ảnh của nó trong Spec(A) là một dãy các iđêan nguyên tố $x_0 \supset x_1 \supset \cdots \supset x_n$. Theo mệnh đề 5, các x_i cũng phải đôi một khác nhau. Vì vậy $\dim(A') \leq \dim(A)$. Cuối cùng ta thu được $\dim(A) = \dim(A')$. □

8.2 Bậc siêu việt và bổ đề chuẩn hóa Noether

Cho k là một trường, cho R là một k-đại số. n phần tử $x_1, \ldots, x_n \in R$ gọi là đọc lập đại số nếu như đồng cấu k-đai số từ vành các đa thức n biến vào R

$$k[t_1, \ldots, t_n] \to R$$

gửi $t_i \mapsto x_i$, là đơn ánh.

Định nghĩa 8 *Cho k là một trường và R là một miền nguyên chứa k. Ta gọi bậc siêu việt của R trên k là số tự nhiên n lớn nhất sao cho tồn tại một họ các phần tử $x_1, \ldots, x_n \in K$ độc lập đại số trên k.*

Ta ngầm hiểu là khái niệm bậc siêu việt chỉ có nghĩa trong trường hợp số các phân tử của một họ các phần tử độc lập đại số trong R là bị chặn.

Mệnh đề 9 *1. Cho R là một k-đại số dạng hữu hạn va là miền nguyên. Khi đó R có bậc siêu việt hữu hạn.*

2. Vành các đa thức n biến $k[t_1, \ldots, t_n]$ có bậc siêu việt bằng n.

3. Cho f là một đa thức bất khả qui trong vành các đa thức n biến $k[t_1, \ldots, t_n]$. Đặt $R = k[t_1, \ldots, t_n]/\langle f \rangle$. Khi đó bậc siêu việt của R trên k là bằng $n - 1$.

Định lý 10 (Chuẩn hóa Noether) *Cho R là một k-đại số dạng hữu hạn và là một miền nguyên. Thế thì tồn tại $x_1, \ldots, x_n \in R$ đọc lập đại số trên k và sao cho R là đại số hữu hạn trên vành đa thức $k[x_1, \ldots, x_n]$, và khi đó bậc siêu việt của R trên k là bằng n.*

Định lý 11 *Cho R là một k-đại số dạng hữu hạn và là một miền nguyên. Thế thì bậc siêu việt của R bằng với chiều Krull của R.*

Ta chứng minh bằng qui nạp và sử dụng định lý chuẩn hóa của Noether. Giả sử mệnh đề là đúng cho các R-đại số bâc hữu hạn với bậc siêu việt bằng $n-1$. Cho R là k-đại số dạng hữu hạn với bậc siêu việt bằng n. Theo định lý chuẩn hóa Noether, tồn tai một đong cấu đơn ánh hữu hạn

$$k[t_1, \dots, t_n] \to R$$

từ vành các đa thức n biến vào R. Khi đó chiều Krull của R bằng với chiều Krull của vành các đa thức n biến $k[t_1, \dots, t_n]$. Ta chỉ còn cần chứng minh rằng chiều Krull của vành các đa thức $A = k[t_1, \dots, t_n]$ là bằng n. Ta sẽ sử dụng tích chất sau (tích chất UFD) của vành đa thức.

Mệnh đề 12 *Cho $A = k[t_1, \dots, t_n]$. Mọi phần tử $f \in A$ có một phân tích duy nhất thành tích $f = f_1 \dots f_r$ các đa thức bất khả qui $f_1, \dots, f_r$. Phân tích này là duy nhất với sai khác là hoán vị các thừa số hoặc nhân các thừa số với một hằng số trong $k^\times$.*

Cho $Y \subset \mathrm{Spec}(A)$ là một tập con thật đóng, và cực đại. Ta có $Y = V(I)$ với I là một iđean nguyên tố của A. Lấy $f \in I$. Khi đó $V(I) \subset V(\langle f \rangle)$, với $V(\langle f \rangle f)$. Ta biết là f có một phân tích thành tích $f = f_1 \dots f_r$ với $f_1, \dots, f_r$ là các đa thức bất khả qui. Ta có

$$V(f) = V(f_1) \cup V(f_2) \cup \dots \cup V(f_r)$$

với $V(f_i)$ là các tập đóng bất khả qui của $\mathrm{Spec}(A)$. Vậy nên tồn tại $i = 1, \dots, r$ sao cho $V(I) \subset V(f_i)$. Vì $V(I)$ là tập đóng thật sự cực đại cho nên $V(I) = V(f_i)$.

Ta biết là A/f_i coa bậc siêu việt bằng $n-1$. Theo giả thiết qui nạp, nó phải có chiều Krull bằng $n-1$. Vậy nên A có chiều Krull bằng n. □

8.3 Cấp tổng quát của bó vi phân tương đối

Định lý 13 *Cho k là một trường* **đặc số không** *và R là một k-đại số dạng hữu hạn có bậc siêu việt bằng n. Khi đó tồn tại một tập mở U của $X = \mathrm{Spec}(R)$ sao cho hạn chế $\Omega_{R/k}$ vào U là một $\mathcal{O}_U$-mođun tự do địa phương cấp n.*

Theo định lý chuẩn hóa Noether, tồn tại một đồng cấu k-đại số đơn ánh và hữu hạn

$$A = k[t_1, \ldots, t_n] \to R$$

từ vành đa thức n biến vào R. Sử dụng dãy khớp cơ bản thứ hai ta có

$$\Omega_{A/k} \otimes_A R \to \Omega_{R/k} \to \Omega_{R/A} \to 0.$$

Ta đã biết là $\Omega_{A/k}$ là một A-mođun tự do cấp n, và ta muốn dùng dãy khớp này để chứng minh rằng $\Omega_{R/k}$, hạn chế vào một tập mở đủ nhỏ U của $\mathrm{Spec}(R)$, là một $\mathcal{O}_U$-mođun tự do cấp n.

Gọi L là trường các thương của R. Ta biết với $\Omega_{L/k} = \Omega_{R/k} \otimes_R L$. Muốn chưng minh là hạn chế của $\Omega_{R/k}$ vào một tập mở đủ nhỏ U là một $\mathcal{O}_U$-mođun tự do cấp n, ta chỉ can chứng minh là $\Omega_{L/k}$ là một L-không gian vectơ chiều n.

Gọi K là trường các thương của A. Dãy khớp cơ bản thứ hai áp dụng vào

$k \to K \to L$, cho ta

$$\Omega_{K/k} \otimes_K L \to \Omega_{L/k} \to \Omega_{L/K} \to 0$$

Bổ đề 14 *Cho k là một trường đạc số không. Cho L là một mở rộng hữu hạn của trường các thương K của vành các đa thức n biến $A = k[t_1, \ldots, t_n]$. Khi đó ánh xạ*

$$\Omega_{K/k} \otimes_K L \to \Omega_{L/k}$$

là một đẳng cấu giữa hai không gian vectơ trên trường L.

Như thông lệ, để chứng minh một tích chất với bó vi phân tương đối, ta chúng minh tính chất đối ngẫu với các đạo hàm. Ta sẽ chưng minh là ánh xạ L-tuyến tính

$$\mathrm{Hom}_L(\Omega_{L/k}, L) \to \mathrm{Hom}_L(\Omega_{K/k} \otimes_K L, L) = \mathrm{Hom}_K(\Omega_{K/k}, L)$$

là một đẳng cấu. Cho một phần tử của $\mathrm{Hom}_L(\Omega_{L/k}, L)$, là cho một k-đạo hàm $D : L \to L$ tức là một ánh xạ k-tuyến tính thỏa mãn công thức Leibnitz. Còn một phần tử của $\mathrm{Hom}_K(\Omega_{K/k}, K)$ thì là một k-đạo hàm từ $K \to L$. Đồng cấu $\mathrm{Hom}_L(\Omega_{L/k}, L) \to \mathrm{Hom}_K(\Omega_{K/k}, L)$ cho ứng với một k-đạo hàm $D : L \to L$ hạn chế của nó $D|_K : K \to L$.

Như vậy cái ta cần chứng minh là mọi k-đạo hàm $D_K : K \to L$ có thể thác triển một cách duy nhất thành một k-đạo hàm $D : L \to L$.

Trước hết ta sẽ giả sử tồn tại một phần tử sinh $x \in L$ như một K-đại số. Các mở rộng hữu hạn của một trường đặc số không đều có một phần tử sinh như vậy. Nếu không biết kết quả này thì ta có thể qui nạp dần. Tóm lại, ta sẽ giả sử tồn tại một phần tử $x \in L$ sao cho đồng cấu từ vành đa thức một biến $K[t] \to L$ gửi $t \mapsto x$ là toàn ánh. Vì L là K-hữu hạn nên đồng cấu này có hạch khác không.

Vì L là một trường nên hạch này là iđêan sinh bởi một đa thức bất khả qui $P \in K[t]$ bậc n với $n = \dim_K(L)$ và với hệ số đầu bằng 1. Ta viết

$$P = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_0$$

với $a_0, \ldots, a_{n-1} \in K$. P gọi là đa thức cực tiểu của x.

Cho $D_K : K \to L$ là một k-đạo hàm. Muốn thác triển D_K thành một k-đạo hàm $D : L \to L$, ta phải chọn ảnh $D(x) \in L$ sao cho $D(P(x)) = 0$. Ta có

$$D(P(x)) = \frac{\partial P}{\partial t}(x)Dx + Q.$$

với Q là một tổ hợp tuyến tính của các phần tử $D(a_i) \in L$ với hệ số trong L. Đạo hàm riêng

$$\frac{\partial P}{\partial t} = nt^{n-1} + (n-1)a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_1$$

có ảnh trong L

$$nx^{n-1} + \cdots + a_1 \neq 0.$$

Vì thế phương trình $D(P(x)) = 0$ xác định giá trị $D(x) \in L$ một cách duy nhất. Ta có thể kiểm tra rằng với giá trị này của $D(x)$, ta có một k-đạo hàm $D : L \to L$ mà hạn chế vào K là $D_K : K \to L$ là k-đạo hàm cho trước. $\square$

Chương 9

Chuẩn hóa

9.1 Vành đóng nguyên

Định nghĩa 15 *Cho A là một miền nguyên, K là trường các thương của A. A gọi là* **đóng nguyên** *nếu với mọi phần tử $x \in K$ thỏa mãn một phương trình*

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$$

với $a_1, \ldots, a_n \in A$, thì x ắt phải thuộc A. Vành đóng nguyên còn gọi là **vành chuẩn**.

Tính chất đóng nguyên được bảo toàn với địa phương hóa. Ta chứng minh một trường hợp đặc biệt của khẳng định này. Tương hợp tổng quát cũng chứng minh giống như thế.

Mệnh đề 16 *Cho A là một vành đóng nguyên, $\mathfrak{p}$ là một iđêan nguyên tố của A. Khi đó vành địa phương $A_\mathfrak{p}$ cũng là vành đóng nguyên.*

Vì A giả thiết là miền nguyên, cho nên A và địa phương hóa $A_\mathfrak{p}$ của A có cùng một trường các thương K. Cho $x \in K$ thỏa mãn một phương trình

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

với $a_1, \ldots, a_n \in A_x$. Viết $a_i = c_i/g_i$ với $c_i \in A$ và $g_i \in A - \mathfrak{p}$. Thay x bởi $y = gx$ vưới g là tích các g_i, $g \in A - \mathfrak{p}$, ta có một phương trình

$$y^n + b_1 y^{n-1} + \cdots + b_n = 0$$

với $b_1, \ldots, b_n \in A$. Vì A là đóng nguyên cho nên $y \in A$ và từ đó ta có $x \in A_\mathfrak{p}$. $\square$

Định nghĩa 17 *Một vành địa phương A, là miền nguyên, với trường các thương K, gọi là* **vành định giá rời rạc** *nếu như tồn tại một đồng cấu nhóm toàn ánh*

$$v : K^\times \to \mathbb{Z}$$

sao cho $A - \{0\} = \{x \in K^\times \mid v(x) \geq 0\}$.

Từ góc độ đại số, các trường là các vành đơn giản nhất và tiếp theo là đến các vành định giá rời rạc.

Mệnh đề 18 *Một vành định giá rời rạc A là một vành địa phương có chiều Krull bằng một. Nó chỉ có một iđêan cực đại là*

$$\mathfrak{m} = \{x \in A \mid v(x) > 0\} \cup \{0\}$$

và ngoài $\mathfrak{m}$, nó còn có đúng một iđêan nguyên tố là iđêan không.

Với mọi $x \in A - \mathfrak{m}$, $v(x) = 0$ cho nên $v(x^{-1}) = 0$ và thế thì $x^{-1} \in A$. Tức là $x \in A - \mathfrak{m}$ ắt là khả nghịch trong A. Điều này thì tương đương với việc A là vành địa phương và $\mathfrak{m}$ là iđêan cực đại của nó.

Trong A, quan hệ chia hết vô cùng đơn giản : x chia hết cho y khi và chỉ khi $v(x) \geq v(y)$ và vì vậy hoặc x chia hết cho y, hoặc y chia hết cho x. Từ đó ta suy ra tất cả các iđêan khác không của A đều có dạng

$$\mathfrak{m}^n = \{x \in A \mid v(x) \geq n\}.$$

Trong số này chỉ có $\mathfrak{m}$ là nguyên tố. Tóm lại A chỉ có hai iđêan nguyên tố là $\mathfrak{m}$ và iđêan không. Chiều Krull của nó hiển nhiên bằng 1. □

Mệnh đề 19 *Một vành định giá rời rạc A là vành chuẩn. Ngược lại, nếu A là một vành Noether, địa phương, chuẩn, có chiều Krull bằng 1 thì A phải là một vành định giá rời rạc.*

Xem [Atyah-Macdonald] trang 94. □

Định nghĩa 20 *Cho A là một miền nguyên và $\mathfrak{p}$ là một iđêan nguyên tố khác không của A. Ta nói $\mathfrak{p}$ có* **độ cao** *1 nếu như nó chỉ chứa đúng một iđêan nguyên tố khác nó là iđêan không.*

Định lý 21 *Cho A là một miền nguyên và chuẩn. Khi đó với mọi iđêan nguyên tố $\mathfrak{p}$ đọ cao 1 của A, $A_{\mathfrak{p}}$ là một vành định giá. Trong trường các thương K của A, ta có*

$$A = \bigcap_{\mathfrak{p}} A_{\mathfrak{p}}$$

với giao lấy trên tập tất cả các iđêan nguyên tố độ cao 1 của A. Ngược lại nếu miền nguyên A thỏa mãn đồng thời hai tính chất trên thì nó là chuẩn.

Phần V

Hình học xạ ảnh

Chương 10

Không gian xạ ảnh

10.1 Tập các siêu phẳng

Cho k là một trường đóng đại số, k^{n+1} là không gian vectơ chiều $n+1$ với cơ sở cho trước là $v_0, \ldots, v_n$. Ta ký hiệu $\mathbb{P}^n_k$ la tập hợp tất cả các siêu phẳng L của k^{n+1} tức là tập các hạch của môt ánh xạ tuyến tính khác không $l : k^{n+1} \to k$. Hai ánh xạ tuyến tính l và $l' : k^{n+1} \to k$ có cùng một hạch khi và chỉ khi chúng sai khác nhau một hằng số khác không : $l' = \alpha l$ với $\alpha \in k^\times$.

Bổ đề 1 *Với mọi $i = 0, \ldots, n$, gọi U_i là tập con của $\mathbb{P}^n_k$ các siêu phẳng L của k^{n+1} sao cho $v_i \notin L$. Khi đó tồn tại một song ánh chuẩn tắc giữa U_i và không gian aphin n-chiều k^n.*

Một siêu phẳng L là hạch của một ánh xạ tuyến tính khác không $l : k^{n+1} \to k$. Vectơ cho trước $v_i \notin L$ khi và chỉ khi $l(v_i) \neq 0$. Ánh xạ tuyến tính l với hạch là L chỉ được xác định với sai khác là một hằng số khác không, nhưng nếu ta đặt thêm điều kiện $l(v_i) = 1$ thì nó xác định duy nhất. Như vậy ta có một song ánh giưữa các phần tử của U_i và tập các ánh xạ tuyến tính $l : k^{n+1} \to k$ thỏa mãn $l(v_i) = 1$. Một ánh xạ tuýen tính như vậy được xác sịnh hoàn toàn bởi n giá trị $l(v_j) \in k$ với $j = 0, \ldots, n$ và $j \neq i$. Vậy nên U_i là song ánh chuẩn tắc với k^n. $\square$

Bổ đề 2 *Ta có $\mathbb{P}^n_k = \bigcup_{i=0}^n U_i$ với U_i là tập các siêu phẳng L với $v_i \notin L$.*

Nếu có một siêu phẳng nào không là phần tử của bất kỳ U_i nào thì nó phải chứa tất cả các vectơ $v_0, \ldots, v_n$ và do đó L bằng k^{n+1} và không còn là siêu phẳng nữa. $\square$

Vì mỗi không gian aphin U_i là một tập đại số theo nghĩa của 4.1, nên bước đầu ta có thể hiểu một cách nôm na $\mathbb{P}^n_k$ như là một tập đại số tạo thành bằnh cách dán các không gian aphin U_i lại với nhau. Ta cần mô tả lại việc này dùng ngôn ngữ lược đồ.

10.2 Iđêan phân bậc của vành đa thức

Cho A là một vành giao hoán. Vành $S = A[t_0, \ldots, t_n]$ các đa thức biến $t_0, t_1, \ldots, t_n$ với hệ số trong A có thể phân bậc theo bậc của đa thức

$$S = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} S_d$$

với S_d là tập các đa thức thuần nhất bậc d. Ta có $S_0 = A$ và các S_d là A-mođun tự do hữu hạn sinh.

Một **iđêan phân bậc** của S là một iđêan của S có dạng $J = \bigoplus_{d \in \mathbb{N}} J_d$ với J_i là một A-mođun con của S_d. Ký hiệu $S_+ = \bigoplus_{i \geq 1} S_i$.

Định nghĩa 3 *Tập* Proj(S) *là tập các iđêan nguyên tố phân bậc* $\mathfrak{p}$ *của* S *không chứa* S_+.

Để hiểu rõ tập Proj(S) ta cần địa phương hóa. Xét $S[t_0^{-1}]$ là địa phương hóa của S theo tập nhân sinh bởi phần tử t_0. Vành $S[t_0^{-1}]$ là vành các phân thức ở dạng f/x_0^r với $f \in S$ và $r \in \mathbb{N}$ với phép cộng và nhân hiển nhiên.Ta có thể phân bậc $S[t_0^{-1}]$ như sau

$$S[t_0^{-1}] = \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} S[t_0^{-1}]_d$$

với $S[t_0^{-1}]_d$ là tập các phân thức có dạnh f/x_0^r với f là một đa thức thuần nhất bậc $d + r$. Ta có thể mô tả cấu trúc phân bậc của $S[t_0^{-1}]$ như sau.

Bổ đề 4 *Ta có đẳng cấu giữa vành phân bậc* $S[t_0^{-1}]$ *với vành phân bậc*

$$R_0[t_0^{\pm 1}] = \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} R_0 t_0^d$$

với R_0 *là vành các đa thức* n *biến* $R_0 = k[u_1, \ldots, u_n]$*. Đẳng cấu này dược xác định bởi* $u_i = t_i/t_0$*.*

Khẳng định chỉ là cách đổi biến quen thuộc giữa đa thức thuần nhất $n+1$ biến và đa thức không thuần nhất n biến. Mọi đa thức thuần nhất $f(t_0, t_1, \ldots, t_n)$ bậc d có thể viết một cách duy nhất dưới dạng

$$f(t_0, \ldots, t_n) = t_0^d f_0\left(\frac{t_1}{t_0}, \ldots, \frac{t_n}{t_0}\right)$$

với f_0 là đa thức không (nhất thiết) thuần nhất cho bởi

$$f_0(u_1, \ldots, u_n) = f(1, u_1, \ldots, u_n).$$

Thế nên mọi phân thức ở dạng f/t_0^r với f là một đa thức thuần nhất biến $t_0, \ldots, t_n$ có thể viết được một cách duy nhất dưới dạng

$$\frac{f}{t_0^r} = t_0^d f_0\left(\frac{t_1}{t_0}, \ldots, \frac{t_n}{t_0}\right)$$

với $d = \deg(f) - r$, và từ đó ta suy ra khẳng định. □

Mệnh đề 5 *1. Mọi iđêan phân bậc của vành $R_0[t_0^{\pm 1}]$ đều có dạng*

$$I = \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} I_0 t_0^d$$

với I_0 là iđêan của R_0. Iđêan phân bậc I của $R_0[t_0^{\pm 1}]$ là nguyên tố khi và chỉ khi thành phần bậc không I_0 là iđêan nguyên tố của R_0.

2. Ta có một song ánh giữa tập các iđêan phân bậc I của S với

$$I \cap \{1, t_0, t_0^2, \ldots\} = \emptyset$$

và tập các iđêan thật sự của R_0. Nó cho ta một song ánh giữa tập các iđêan phân bậc nguyên tố I của S với $x_0 \notin I$, và tập các iđêan nguyên tố của R_0. Song ánh này cho ta một song ánh giữa tập các iđêan phân bậc cực đại I của S, $x_0 \notin I$ và tập các iđêan cực đại của R_0.

Khẳng định thứ nhất suy ra từ sự tồn tại một phần tử bậc 1 khả nghịch của $R_0[t_0^{\pm 1}]$ là phần tử t_0. Thật vậy, cho $I = \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} I_d$ là một iđêan phân bậc của $R_0[t_0^{\pm 1}]$, khi đó ánh xạ nhân với t_0, cho ta một đẳng cấu không gian vectơ $I_d \to I_{d+1}$ vì t_0 là phần tử khả nghịch bậc 1. Vậy nên $I_d = I_0 t_0^d$.

Cho $I = \bigoplus_{d\in\mathbb{Z}} I_0 t_0^d$ ta thấy ngay là

$$R_0[t_0^{\pm 1}]/I = (R_0/I_0)[t_0^{\pm 1}]$$

cho nên $R_0[t_0^{\pm 1}]/I$ là miền nguyên khi và chỉ khi R_0/I_0 là miền nguyên. Ta cũng thấy ngay là I là iđêan phân bậc cực đại trong số các iđêan phân bậc của $R_0[t_0^{\pm 1}]$ khi và chỉ khi I_0 là iđêan cực đại của R_0.

Cho I là một iđêan phân bậc của S. Khi đó dịa phương hóa $I[x_0^{-1}]$ là một iđêan phân bậc của $S[x_0^{-1}] = R_0[t_0^{\pm 1}]$ nên ắt phải có dạng

$$I[t_0^{-1}] = \bigoplus_{d\in\mathbb{Z}} I_0 t_0^d$$

với I_0 là một iđêan của R_0. Điều kiện I không có giao với tập nhân $\{1, t_0, t_0^2, \ldots\}$ tương đương với điều kiện $I[t_0^{-1}]$ là một iđêan thật sự của $S[t_0^{-1}]$ và nó cũng tương đương với điều kiện là I_0 là iđêan thật sự của S_0. Dưới cùng một điều kiện này, ta biết là I hoàn toàn được xác định bởi $I[t_0^{-1}]$ nhờ vào công thức

$$I = I[t_0^{-1}] \cap S.$$

Đối với các iđêan nguyên tố điều kiện I không có giao với tập nhân $\{1, t_0, t_0^2, \ldots\}$ tương đương với $t_0 \notin I$.Vì vậy song ánh xây dựng như trên cho ta một song ánh giữa các iđêan phân bậc nguyên tố I của S không chứa t_0 và tập các iđêan nguyên tố của S_0. Tương tự như vậy ta có song ánh giữưa các iđêan phân bậc cực đại không chứa x_0 của S và các iđêan cực đại của R_0. □

Trong mệnh đề trên, ta có thể thay biến t_0 bằng bất kỳ biến t_i khác. Gọi U_i là tập các idêan nguyên tố phân bậc I của S không chứa t_i. Khi đó ta có một song ánh giữa tập U_i và tập phổ $\mathrm{Spec}(R_i)$ với R_i là vành các đa thức trên k với n biến u_j^i với chỉ số j chạy trong tập $\{0, \ldots, n\} - \{i\}$ và $u_i^j = t_i/t_j$. Và một iđêan phân bậc I không chứa S_+ không thể đồng thời chứa các phần tử $t_0, \ldots, t_n$ cho nên ta có

$$\mathrm{Proj}(S) = \bigcup_{i=0}^{n} U_i.$$

Mệnh đề 6 *Trong $U_i = \mathrm{Spec}(R_i)$, $U_{ij} = U_i \cap U_j$ là tập mở chính xác định bởi $u_j^i \neq 0$. Đặt $R_{ij} = R_i[(u_j^i)^{-1}]$. Trong $U_j = \mathrm{Spec}(R_j)$, $U_{ji} = U_j \cap U_i$ là tập mở chính xác định bởi $u_i^j \neq 0$. Đặt $R_{ji} = R_j[(u_i^j)^{-1}]$.*

Khi đó, giữa hai vành R_{ij} và R_{ji} đẳng cấu chuẩn tắc ι_{ij}. Chúng đều có thể đồng nhất với vành các phân thức có dạng $f/t_i^r t_j^s$ với f là một đa thức thuần nhất bậc $r+s$.

Các không gian tôpô $U_i = \mathrm{Spec}(R_i)$ với bó vành cấu trú được trang bị dữ kiện để dán lại với nhau. Với mọ cặp chỉ số $i, j \in \{0, \dots, n\}$ ta có tập mở $U_{ij} \subset \mathrm{Spec}(R_i)$ và $U_{ji} \subset \mathrm{Spec}(R_i)$ và một đẳng cấu $\iota_{ij} : U_{ij} \to U_{ji}$ là đẳng cấu giưa hai không gian tôpô có trang bị một bó vành. Các đẳng cấu u_{ij} thỏa mãnư phương trình đối chu trình có ngiã là hạn chế vào $U_{ijk} = U_{ij} \cap U_{ik}$, ta có

$$\iota_{ki} \circ \iota_{jk} \circ \iota_{ij} = 1$$

với 1 là tự đẳng cấu đơn vị của không gian tôpô U_{ijk} có trang bị một bó vành. Dán các không gian tôpô $\mathrm{Spec}(R_i)$ có trang bị bó vành thao dữ kiện dán ι_{ij} ta được một cấu trúc không gian tôpô trên $\mathrm{Proj}(S)$ và một bó vành $\mathcal{O}$ trên $\mathrm{Proj}(S)$.

Định nghĩa 7 *Tôpô Zariski của* $\mathrm{Proj}(S)$ *là tôpô tối thiểu sao cho mọi tập mở của U_i là tập mở của* $\mathrm{Proj}(S)$.

Một tập con $U \subset \mathrm{Proj}(S)$ gọi là tập mở nếu giao của nó với U_i là tập mở Zariski của $U_i = \mathrm{Spec}(R_i)$ với mọi $i = 0, \dots, n$.

Định nghĩa 8 *Bó vành cấu trúc $\mathcal{O}$ trên* $\mathrm{Proj}(S)$ *là bó vành xác định duy nhất, với sai khác một đẳng cấu duy nhất, sao cho hạn chế $\mathcal{O}$ vào mỗi tập mở U_i ta có bó vành cấu trúc của $U_i = \mathrm{Spec}(R_i)$, và sau cho nếu hạn chế $\mathcal{O}$ theo hai cách vào $U_i \cap U_j$, qua U_i, hay qua U_j, ta được đẳng cấu $\iota_{ij} : R_{ij} \to R_{ji}$.*

Ta có thể mô tả tôpô định nghĩa như trên, cũng như thớ của bó vành cấu trúc theo ngôn ngữ iđêan như sau.

Mệnh đề 9 *Một tập con $U \subset$* $\mathrm{Proj}(S)$ *là tập mở khi và chỉ khi tồn tại một iđêan phân bậc I của S sao cho $U = U_+(I)$ là tập các iđêan nguyên tố phân bậc I của S, khác S_+ và không chứa I.*

Ta chứng minh mệnh đề tương đương : một tập con V là tập đóng khi và chỉ khi tồn tại một iđêan phân bậc I của S sao cho $V = V_+(I)$ với $V_+(I)$ là tập các iđêan nguyên tố phân bậc của S, khác S_+ và chứa I.

Giả sử $V = V_+(I)$ với I là một iđêan phân bậc của S. Ta muốn chứng ming là với mọi $i = 0, 1, \dots, n$, $V_i = V \cap U_i$ là một tập đóng của $U_i =$

$\operatorname{Spec}(R_i)$. Theo định nghĩa V_i là tập các iđêan nguyên tố phân bậc $\mathfrak{p}$ của S, không chứa t_i và chứa I. Muốn cho V_i khác rỗng, điều kiện cần là $t_i \notin I$. Giả sử V_i khác rỗng, khi đó cả I và $\mathfrak{p}$ đều đuợc xác định bởi địa phương hóa của chúng theo tập nhân sinh bởi t_i, và ta có $I \subset \mathfrak{p}$ khi và chỉ khi

$$I[t_i^{-1}] \subset \mathfrak{p}[t_i^{-1}].$$

Mà ta đã biết là do cấu trúc đơn giản của $S[t_i^{-1}] = R_i[t_i^{\pm 1}]$ cho nên $I[t_i^{-1}] = \bigoplus_{d\in\mathbb{Z}} I[t_i^{-1}]_0 t_i^d$ và $\mathfrak{p}[t_i^{-1}] = \bigoplus_{d\in\mathbb{Z}} \mathfrak{p}[t_i^{-1}]_0 t_i^d$. Như vậy $\mathfrak{p}$ hoàn toàn được xác định bởi iđêan nguyên tố $\mathfrak{p}[t_i^{-1}]_0$ của R_i và $I \subset \mathfrak{p}$ khi và chỉ khi $I[t_i^{-1}]_0 \subset \mathfrak{p}[t_i^{-1}]_0$. Như vậy $V_i = \operatorname{Spec}(R_i/)\mathfrak{p}[t_i^{-1}]_0$ là một tập con đóng của U_i.

Tương tự như trong trường hợp aphin, với mọi iđêan phân bậc I, J của S, ta có

$$V_+(I) \cap V_+(J) = V_+(I+J)$$

và

$$V_+(I) \cup V_+(J) = V_+(IJ).$$

Vì vậy tập các $V_+(I)$ tạo thành tập các tạp đóng của một không gian tôpô. Như ta đã thấy ở trên một tôpô trên $\operatorname{Proj}(S)$ với các tập con mở của U_i là tập mở, ắt phải có các tập $V_+(I)$ là tập đóng. Như vậy tôpô với các tập mở là phần bù $U_+(I)$ của $V_+(I)$, I chạy trong tập các iđêan phân bậc của S, là tôpô tối thiểu có các tập mở của U_i là tập mở. □

Mệnh đề 10 *Cho f là một đa thức thuần nhất. Ký hiệu $U^+(f)$ là tập mở của $\operatorname{Proj}(S)$ bao gồm các iđêan nguyên tố phân bậc $\mathfrak{p}$ không chứa f. Khi đó, không gian tôpô $U^+(f)$ trang bị hạn chế của bó vành $\mathcal{O}$ vào $U^+(f)$ là lược đò aphin. Chính xác hơn, địa phương hóa $S[f^{-1}]$ có một phân bậc*

$$S[f^{-1}] = \bigoplus_{d\in\mathbb{Z}} S[f^{-1}]_d$$

với $S[f^{-1}]_d$ là tập các phân thức có dạng g/f^r với g thuần nhất bậc $\deg(g) = r\deg(f) + d$. Khi đó ta có $U^+(f)$ cùng với hạn chế của $\mathcal{O}$ vào $U^+(f)$, đẳng cấu với $\operatorname{Spec}(R[f^{-1}]_0)$ cùng với bó cấu trúc của nó.

Tập các iđêan nguyên tố phân bậc $\mathfrak{p} \in \operatorname{Proj}(S)$ với $f \notin \mathfrak{p}$ rõ ràng bằng với tập các iđêan nguyên tố phân bậc của vành phân bậc $S[f^{-1}]$. Thế nhưng so sánh giữa tập các iđêan nguyên tố phân bậc của S không chứa f với tập các iđêan nguyên tố của thành phần bậc không $S[f^{-1}]_0$ là không hiển nhiên vì ta không có một phần tử khả nghịch bậc một như trong trường hợp riêng $f = t_0$.

Tuy thế mọi iđêan nguyên tố phân bậc $J = \bigoplus_{d\in\mathbb{N}} J_d$ của S, $J \neq S_+$ và $f \notin J$, ta vẫn có một iđêan phân bậc $J[f^{-1}] = \bigoplus_{d\in\mathbb{Z}} J[f^{-1}]_d$, và vẫn xác định một iđêan nguyên tố $J[f^{-1}]_0$ của $S[f^{-1}]_0$. Vấn đề là làm sao chứng minh ngược lại $J[f^{-1}]_0$ xác định hoàn toàn J. J_0 là tập các phân thức có dạng g/f^r với $\deg(g) = r\deg(f)$.

Theo giả thiết tồn tại i sao cho $t_i \notin J$. Giả sử $i = 0$. Khi đó Jư xác dịnh một iđêan phân bậc $J[f^{-1}t_0^{-1}] = \bigoplus_{d\in\mathbb{Z}} J[f^{-1}t_0]_d$, của $S[t_0^{-1}]$, và bây giừo thành phần bậc không $J[f^{-1}t_0]_0$ hoàn toàn xác định J vì vành phân bậc $S[t_0^{-1}]$ có một phần tử khả nghịch bậc 1 là t_0.

Ta chỉ còn cần chứng minh là $J[f^{-1}]_0$ hoàn toàn xác định $J[f^{-1}t_0]_0$. Các phần tử của $J[f^{-1}t_0]_0$ có dạng tổ hợp tuyến tính của $g/f^r t_0 r_0$ với $\deg(g) = r\deg(f) + r_0$. Gọi r_1 là số tự nhiên nhỏ nhất sao cho $\deg(g) + r_1 = r'\deg(f)$ với $r' \in \mathbb{N}$. Khi đó phần tử như thế có thể viết lại là

$$\frac{g}{f^r t_0^{r_0}} = \frac{g t_0^{r_1}}{f^{r'}} \frac{1}{f^{r-r'} t_0^{r_0 - r_1}}$$

với $\frac{g t_0^{r_1}}{f^{r'}} \in J[f^{-1}]_0$. Đẳng thức này nói là tập con $J[f^{-1}]_0$ của $J[f^{-1}t^{-1}]_0$ sinh ra iđêan này. Vì thế $J[f^{-1}]_0$ xác định hoàn toàn $J[f^{-1}t^{-1}]_0$ và cho nên xác định hoàn toàn iđêan nguyên tố phân bậc J ban đầu.

Ta có thể lập luận hơi khác bằng cách nhận xét là $S[f^{-1}t_0^{-1}]_0$ là địa phương hóa của $S[f^{-1}]_0$ theo hệ nhân sinh bởi phần tử $t_0^{\deg(f)}/f \in S[f^{-1}]_0$ và phép địa phương hóa này biến $J[f^{-1}]_0$ thành $J[f^{-1}t_0^{-1}]_0$.

Tóm lại là ta đã xây dựng được một song ánh giưua tập $U_+(f)$ và tập $\mathrm{Spec}(S[f^{-1}]_0)$ các iđêan nguyên tố của $R[f^{-1}]_0$. Ta cần chứng minh song ánh này là một đẳng cấu giữa hai không gian tôpô trang bị bó vành; $U_+(f)$ được trang bị tôpô và bó vành hạn chế từ $\mathrm{Proj}(S)$, còn $\mathrm{Spec}(R[f^{-1}]_0)$ có tôpô Zariski và bó vành cấu trúc. Hạn chế song ánh này vào $U_+(f) \cap U_i$, thì hiển nhiên là một đẳng cấu không gian tôpô trang bị bó vành vì cả hai vế đều là $\mathrm{Spec}(S[f^{-1}t_i^{-1}]_0)$. Các đẳng cấu này cũng lại tương thích với nhau trên $U_+(f) \cap U_i \cap U_j$. Vì tôpô Zariski cũng như bó vành cấu trúc hoàn toàn được xác định bởi hạn chế của nó vào một phủ mở và dữ kiện dán, cho nên ta có đẳng cấu giữa tôpô Zariski và bó vành trên $U_+(f)$ và trên $\mathrm{Spec}(S[f^{-1}]_0)$.

Mệnh đề 11 *Cho $\mathfrak{p} \in \mathrm{Proj}(S)$. Gọi $S_{\mathfrak{p}}^+$ là tập các phân thức có dạng f/s với $f \in S$ và s là một phần tử thuần nhất trong $S - \mathfrak{p}$. Vành $S_{\mathfrak{p}}^+$ có một phân* *bậc*

$$S_{\mathfrak{p}}^{+} = \bigoplus_{d \in \mathbb{N}} (S_{\mathfrak{p}}^{+})_d$$

với $(S_{\mathfrak{p}}^{+})_d$ *là tập các phân thức có dạng* f/s *với* f *và* s *là các đa thức thuần nhất,* s *không nằm trong* $\mathfrak{p}$*, và* $\deg(f) - \deg(s) = d$*. Khi đó, thớ của bó cấu trúc* $\mathcal{O}$ *ở điểm* $\mathfrak{p}$ *là thành phần bậc không* $(S_{\mathfrak{p}}^{+})_0$ *của* $S_{\mathfrak{p}}^{+}$*.*

Các tập mở $U_+(f)$ tạo thành một hệ cơ sở của tôpô trên $\mathrm{Proj}(S)$. Thật vậy với mọi $x \in \mathrm{Proj}(S)$, và U là một lân cận của x. Tồn tại iư sao cho $x \in U_i$, ta có $U \cap U_i$ là một lân cận của x trong U_i. Vì $U_i = \mathrm{Spec}(R_i)$ là một lược dồ aphin, tôpô Zariski sinh bởi các tập mở chính. Tồn tại $f_i \in R_i$ sao cho $x \in U(f_i) \subset U \cap U_i$. Viết f_i ở dạng $f_i = f/t_i^d$ với f là một đa thức thuần nhất bậc d ta có $U(f_i) = U_+(ft_i)$.

Mệnh đề suy ra từ mênh đề trước. □

10.3 Phân thớ đường thẳng $\mathcal{O}(d)$ trên $\mathbb{P}_k^n$

Từ vành $S = k[t_0, \ldots, t_n]$ các đa thức $n+1$ biến, với phân bậc tự nhiên của nó, ta đã xây dựng một không gian tôpô $\mathbb{P}_k^n = \mathrm{Proj}(S)$ có trang bị một bó vành $\mathcal{O}$. Nếu chỉ có $\mathbb{P}_k^n$ và bó vành $\mathcal{O}$ ta không thể xây dựng ngược lại được vành phân bậc S. Để tìm lại S ta cần trang bị cho $\mathbb{P}_k^n$ một cấu trúc khac nữa, đó là các phân thớ đương thẳng $\mathcal{O}(d)$.

Với mọi $i = 0, \ldots, n$, ta đã định nghĩa một tập mở U_i của $\mathrm{Proj}(S)$ các iđêan nguyên tố phân bậc của S không chứa t_i. Địa phương hóa vành S theo tập nhân sinh bởi t_i ta được một vành phân bậc

$$S[t_i^{-1}] = \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} S[t_i^{-1}]_d$$

với thành phần bậc không $S[t_i^{-1}]_0 = R_i$ là vành tọa độ của $U_i = \mathrm{Spec}(R_i)$. Vì t_i là phần tử bậc một khả nghịch của $S[t_i^{-1}]$, thành phần bậc d $S[t_i^{-1}]_d$ là một R_i-mođun tự do sinh bởi phần tử t_i^d. Toàn bộ $S[t_i^{-1}]$ cũng là một R_i-mođun tự do, tổng trực tiếp của các mođun tự do cấp 1 là $S[t_i^{-1}]_d = R_i t_i^d$. Ta tạm thời không quan tâm đến cấu trúc nhân ở trong $S[t_i^{-1}]$ mà chỉ để ý đến cấu trúc R_i-mođun của nó.

Gọi $\mathcal{O}_{U_i}(d)$ là bó $\mathcal{O}_{U_i}$-mođun ở trên $U_i = \mathrm{Spec}(R_i)$ tương ứng với R_i-mođun tựu do $S[t_i^{-1}]_d$. Tổng trực tiếp $\bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} \mathcal{O}_{U_i}(d)$ là bó $\mathcal{O}_{U_i}$-mođun tương ứng với R_i-mođun $S[t_i^{-1}]$.

Hạn chế $\bigoplus_{d\in\mathbb{Z}} \mathcal{O}_{U_i}(d)$ vào giao $U_{ij} = U_i \cap U_j$ là $\mathcal{O}_{U_{ij}}$ tương ứng với R_{ij}-mođun $S[t_i^{-1}t_j^{-1}]$ với R_{ij} là thành phần bậc không $S[t_i^{-1}t_j^{-1}]$ ưcủa $S[t_i^{-1}t_j^{-1}]$. Vì thế ta có một đẳng cấu chuẩn tắc giữa hạn chế của $\bigoplus_{d\in\mathbb{Z}} \mathcal{O}_{U_i}(d)$ và $\bigoplus_{d\in\mathbb{Z}} \mathcal{O}_{U_j}(d)$ vào U_{ij}, và các đẳng cấu chuẩn tắc này thỏa mãn phương trình đối chu trình trên $U_i \cap U_j \cap U_k$ vì trên đó hạn chế của $\bigoplus_{d\in\mathbb{Z}} \mathcal{O}_{U_i}(d)$ $\bigoplus_{d\in\mathbb{Z}} \mathcal{O}_{U_j}(d)$ và $\bigoplus_{d\in\mathbb{Z}} \mathcal{O}_{U_k}(d)$ đều là các bó $\mathcal{O}_{U_{ijk}}$-mođun ứng với R_{ijk}-mođun $S[t_i^{-1}t_j^{-1}t_k^{-1}]$ với R_{ijk} là thành phần bậc không của $S[t_i^{-1}t_j^{-1}t_k^{-1}]$. Như vậy theo định lý dán các bó $\mathcal{O}$-mođun, tồn tại duy nhất, với sai khác là đẳng cấu duy nhất, một bó $\mathcal{O}$-mođun $\bigoplus_{d\in\mathbb{Z}} \mathcal{O}(d)$ trên $\mathbb{P}_k^n$ với hạn chế vào mỗi U_i là $\bigoplus_{d\in\mathbb{Z}} \mathcal{O}_{U_i}(d)$, và với dữ kiên dán trên các giao $U_i \cap U_j$ được cho như ở trên.

Xét cụ thể thành phần bậc d là $\mathcal{O}(d)$. Ta biết hạn chế của nó vào U_i là $\mathcal{O}_{U_i}$-mođun tương ứng với R_i-mođun tự do cấp một với phân tử sinh là t_i^d. Trên giao $U_i \cap U_j = \mathrm{Spec}(R_{ij})$, đẳng cấu giữa hạn chế của $\mathcal{O}_{U_i}(d)$ và $\mathcal{O}_{U_j}$ vào U_{ij} dược cho bởi sự sai khác giữa hai cơ sở t_i^d và t_j^d

$$t_j^d = (u_j^i)^d t_i^d$$

với $u_j^i = t_j/t_i$ là một phần tử khả nghịch của R_{ij}. Phương trình đối chu trình ở trên U_{ijk} chỉ đơn giản là đẳng thức

$$(u_i^k)^d (u_k^j)^d (u_j^i)^d = 1.$$

Như vậy với mọi $d \in \mathbb{Z}$, ta có một phân thớ đương thẳng $\mathcal{O}(d)$ trên $\mathbb{P}^n$.

Định lý 12 *Với mọi $d \in \mathbb{Z}$, ta có đẳng cấu giữa k-không gian các lớp cắt toàn cục $\Gamma(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(d))$ của $\mathcal{O}(d)$ trên $\mathbb{P}^n$ và k-không gian vectơ S_d các đa thức thuần nhất bậc d ở trong $S = k[t_0, \ldots, t_n]$. Đặc biệt là với $d < 0$, ta có $\Gamma(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(d)) = 0$.*

Ta sẽ chứng minh tồn tại một đẳng cấu phân bậc

$$\Gamma(\mathbb{P}^n, \bigoplus_{d\in\mathbb{Z}} \mathcal{O}(d)) = S$$

và suy ra khẳng định trên mỗi thành phần bậc d. Với mọi i, theo định nghĩa của $\mathcal{O}(d)$ ta có đẳng cấu phân bậc

$$\Gamma(U_i, \bigoplus_{d\in\mathbb{Z}} \mathcal{O}(d)) = S[t_i^{-1}]$$

và với mọi i, j,

$$\Gamma(U_{ij}, \bigoplus_{d\in\mathbb{Z}} \mathcal{O}(d)) = S[t_i^{-1}t_j^{-1}].$$

Như vậy $\Gamma(\mathbb{P}^n, \bigoplus_{d\in\mathbb{Z}} \mathcal{O}(d))$ là tập các bộ $f_i \in S[t_i^{-1}]$ có cung một ảnh ở trong

$$S' = S[t_0^{-1}t_1^{-1}\dots t_n^{-1}].$$

Nói một cách khác $\Gamma(\mathbb{P}^n, \bigoplus_{d\in\mathbb{Z}} \mathcal{O}(d))$ là tập các phân tử $f \in S'$ sao cho với mọi $i = 0, \dots, n$ tồn tại $r \in \mathbb{N}$ sao cho $ft_i^r \in S$.

Vì tính chất UFD của vành đa thức, mọi phần tử $f \in S'$ viết được một cách duy nhất dưới dạng

$$f = \frac{f_0}{t_0^{r_0}\dots t_n^{r_n}}$$

với $r_0, \dots, r_n \in \mathbb{N}$ và $f_0 \in S$ không chia hết cho bất kỳ t_i nào. Điều kiện tồn tại r_i sao cho $t_i^{r_i}f \in S$ suy ra $r_j = 0$ với $i \neq j$. Điều kiện này với một chỉ số khác suy ra $r_j = 0$ với mọi j và vì vậy $f \in S$. Vậy nên ta có $\Gamma(\mathbb{P}^n, \bigoplus_{d\in\mathbb{Z}} \mathcal{O}(d)) = S$. Lấy thành phần bậc d của cả hai vế ta có $\Gamma(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(d)) = S_d$. $\square$

Mệnh đề 13 *Với mọi $d \in \mathbb{Z}$, ta có $\mathcal{O}(d) = \mathcal{O}(1)^{\otimes d}$.*

Trên mỗi tập mở aphin $U_i = \mathrm{Spec}(R_i)$, $\mathcal{O}(d)|_{U_i}$ là bó tương ứng với R_i-mođun tự do cấp một với cơ sở cho trước là t_i^d. Như vậy, trên U_i, ta có đẳng cấu chuẩn tắc $\mathcal{O}(d)|_{U_i} = \mathcal{O}(1)^{\otimes d}|_{U_i}$. Trên $U_i \cap U_j$, các đẳng cấu này tương thích với nhau cho nên ta có khẳng định.

Các phân thớ đương thẳng trên $U_i = \mathrm{Spec}(R_i)$ đều đẳng cấu với nhau vì R_i là một vành UFD, nên nội dung của bổ đề là ở chỗ có thể chọn các đẳng cấu trên các U_i sao cho tương thích trên $U_i \cap U_j$. Sự tương thích này được phản ảnh bởi quan hệ giữa hai đối chu trình $(t_1/t_j)^d = (t_i^d/t_j^d)$. $\square$

10.4 Bó $\mathcal{O}$-mođun trên $\mathbb{P}_k^n$

Trên một lược đồ aphin $\mathrm{Spec}(A)$, cho một bó $\mathcal{O}$-mođun tựa nhất quán tương đương với cho một A-mođun. Trên không gian xạ ảnh $\mathbb{P}_k^n$, cho một $\mathcal{O}$-mođun tựa nhất quán "hầu như" tương đương với cho một S-mođun phân bậc. Cái khó ở đay là làm sao hiểu được chữ "hầu như". Ta sẽ phân tích nó trong mục này.

Ta vẫn ký hiệu $S = k[t_0, \ldots, t_n]$ là vành các đa thức $n+1$ biến với phân bậc tự nhiên của nó. Một S-mođun phân bậc là một S-mođun M với một cấu trúc phân bậc $M = \bigoplus_{d\in\mathbb{Z}} M_d$ tương thích với cấu trúc môđun tức là : $S_d M_e \subset M_{d+e}$. Ký hiệu S-Mod$_+$ là phạm trù các S-mođun phân bậc. Ký hiệu $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}$-Mod là phạm trù các bó $\mathcal{O}$-mođun tựa nhất quán trên $\mathbb{P}^N_k$.

Cho $M = \bigoplus_{d\in\mathbb{Z}} M_d$ là một S-mođun phân bậc tức là cấu trúc môdun tương thích với cấu trúc phân bậc : $S_d M_e \subset M_{d+e}$. Khi đó với mọi $i = 0, \ldots, n$, địa phương hóa $M[t_i^{-1}]$ là một mođun phân bậc của $S[t_i^{-1}]$ và $M_i = M[t_i^{-1}]_0$ là một $R_i = S[t_i]_0$-mođun.Như vậy ta có một $\mathcal{O}$-mođun tựa nhất quán $\tilde{M}_i$ trên $U_i = \mathrm{Spec}(R_i)$ tương ứng với R_i-mođun M_i. Trên giao $M_i \cap M_j = \mathrm{Spec}(R_{ij})$, thành phần bậc không của $M[t_i^{-1}t_j^{-1}]$ vừa bằng $M_i \otimes_{R_i} R_{ij}$ vừa bằng $M_j \otimes_{R_j} R_{ij}$ cho nên a có mọt đẳng cấu chuẩn tắc giữa $M_i \otimes_{R_i} R_{ij}$ và $M_j \otimes_{R_j} R_{ij}$, và các đẳng cấu này thỏa mãn phương trình đối chu trình. Vậy nên các bó $\mathcal{O}$-mođun $\tilde{M}_i$ trên U_i có thể dán lại với nhau thành một bó $\tilde{M}$ ở trên $\mathbb{P}^n_k$. Như vậy ta có một hàm tử từ phạm trù các S-mođun phân bậc vào phạm trù các bó $\mathcal{O}$-mođun tựa nhất quán ở trên $\mathbb{P}^n_k$ ký hiệu là

$$\Phi : S\text{-Mod}_+ \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}\text{-Mod}.$$

Mệnh đề 14 *Hàm tử Φ là một hàm tử khớp.*

Ngược lại nếu ta cho một $\mathcal{M}$ là một $\mathcal{O}$-mođun tựa nhất quán trên $\mathbb{P}^n_k$ ta có thể cho ứng với nó một S-mođun phân bậc như sau. Đạt

$$\Gamma_+(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{M}) = \bigoplus_{d\in\mathbb{Z}} \Gamma(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{M}(d))$$

với $\mathcal{M}(d) = \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}(d)$. Vì $\mathcal{O}(d) \otimes \mathcal{O}(e) = \mathcal{O}(d+e)$ nên ta có $\mathcal{M}(d+e) = \mathcal{M}(e) \otimes \mathcal{O}(d)$. Lấy các lớp cắt trên $\mathbb{P}^n$, ta có một ánh xạ k-tuyến tính

$$\Gamma(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{O}(d)) \times \Gamma(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{M}(e)) \to \Gamma(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{M}(d+e)).$$

Vì ta đã biết $S_d = \Gamma(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{O}(d))$ cho nên ta có một cấu trúc $S = \bigoplus_d S_d$-mođun phân bậc ở trên $\Gamma_+(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{M})$. Cho nên ta có một hàm tử từ phạm trù các $\mathcal{O}$-mođun tựa nhất quán trên $\mathbb{P}^n_k$ vào phạm trù các S-mođun phân bậc ký hiệu là

$$\Psi : \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}\text{-Mod} \to S\text{-Mod}_+.$$

Hàm tử Ψ thì không khớp cho nên Ψ không thể là nghịch đảo của Φ được. Tuy nhiên, ta có khẳng định sau đây.

Định lý 15 *Ta có một đẳng cấu hàm tử*

$$\Phi \circ \Psi \to \mathrm{id}_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}\text{-Mod}}$$

và một ánh xạ hàm tử

$$\mathrm{id}_{S\text{-Mod}_+} \to \Psi \circ \Phi.$$

Nếu M là một S-mođun phân bậc hữu hạn sinh thì ánh xạ phân bậc $M \to \Psi(\Phi(M))$ cảm sinh ra các đẳng cấu giữa các thành phần bậc d đủ lớn.

Cho $\mathcal{M}$ là một $\mathcal{O}$-mođun tựa nhất quán trên $\mathbb{P}^n_k$. Khi đó $\Phi \circ \Psi(\mathcal{M})$ là bó $\mathcal{O}$-mođun tựa nhất quán $\mathcal{M}'$ trên $\mathbb{P}^n_k$ ứng với S-mođun phân bậc $\Psi(M) = \Gamma_+(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{M})$. Để xây dựng đẳn cấu chuẩn tắc $\mathcal{M}' \to \mathcal{M}$ ta chỉ cần xây dựng nó trên mỗi tập mở U_i, có nghĩa là một đẳng cấu từ thành phần bậc không của

$$\bigoplus_{d\in\mathbb{Z}} \Gamma(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{M}(d))[t_i^{-1}]$$

vào $\Gamma(U_i, \mathcal{M})$. ánh xạ được xây dựng như sau. Cho một lớp cắt $f \in \Gamma(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{M}(d))$, hạn chế nó vào U_i cho ta một lớp cắt $f|_{U_i} \in \Gamma(U_i, \mathcal{M}(d))$. Theo định nghĩa của $\mathcal{O}(d)$, $\mathcal{O}(d)|_{U_i}$ tương ứng với R_i-mođun tự do với cơ sở là t_i^d. Vậy nên tồn tại duy nhất $f_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{M})$ sao cho $f = f_i t_i^d$. Ánh xạ ta muốn xây dựng gửi phần tử bậc không f/t_i^d ở trong $\bigoplus_{d\in\mathbb{Z}} \Gamma(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{M}(d))[t_i^{-1}]$ lên phần tử f_i, và tính chất này xác định ánh xạ một cách duy nhất.

Ta cần chứng minh là ánh xạ xây dựng như ở trên là đơn ánh và toàn ánh. Đây là nội dung của bổ đề II 5.14 của [Hartshorne] mà ta sẽ chỉ trình bày lại một cách vắn tắt.

- **Đơn ánh** Cho $f \in \Gamma(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{M}(d))$ sao cho $f_i = 0$, tức là $f|_{U_i} = 0$. Ta cần chứng minh là phần tử f/t_i^d bằng không ở trong $\bigoplus_{d\in\mathbb{Z}} \Gamma(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{M}(d))[t_i^{-1}]$, tức là tồn tại $r \in \mathbb{N}$ đủ lớn sao cho $f t_i^r = 0$ như là một lớp căt của $\mathcal{M}(d+r)$.

  Với mọi $j = 0, \ldots, n$, gọi $f_j t_j^d = f|_{U_j}$. Ta có $f_j|_{U_i \cap U_j} = 0$. Mà hạn chế này là ảnh của f_j trong phép địa phương hóa $M_j \otimes_{R_j} R_{ij}$. cho nên theo định nghĩa của địa phương hóa, tồn tại r_j dủ lớn để sao cho $t_i^{r_j} f_j = 0$. Lấy r là cực đại của các r_j thì ta có $f t_i^r|_{U_j} = 0$ với mọi j cho nên là $f t_i^r = 0$.

- **Toàn ánh** Ta cần chứng minh là với mọi phần tử $f_i \in M_i = \Gamma(U_i, \mathcal{M})$, tồn tại d đủ lớn sao cho lớp cắt $f_i t_i^d \in \Gamma(U_i, \mathcal{M}(d))$ có thể thác triển thành một lớp cắt của $\Gamma(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{M}(d))$.

  Với mọi $j = 0, \ldots, n$, $f_i|_{U_i \cap U_j}$ là một phần tử của $M_j \otimes_{R_j} R_{ij}$ cho nên tồn tại r_j sao cho $t_j^{r_j} f_i|_{U_i \cap U_j} \in M_j$, tức là lớp cắt $t_j^{r_j} f_i|_{U_i \cap U_j} \in \Gamma(U_{ij}, \mathcal{M}(r_j))$ có thể thác triển thành một lớp cắt trên U_j. Như vật với r chọn đủ lớn $t_i^r f_i|_{U_i \cap U_j} \in \Gamma(U_{ij}, \mathcal{M}(r))$ có thể thác triển ra thành một lớp cắt $f'_j \in \Gamma(U_j, \mathcal{M}(r))$ với mọi j. Trên $U_j \cap U_k$ hai lớp cắt f'_j và f'_k chưa chắc đã bằng nhau, nhưng vì chúng bằng nhau ở trên $U_i \cap U_j \cap U_k$ cho nên nếu nhân thêm một lần nữa với t_i^s với s đủ lớn ta có thể giả sử là f'_j và f'_k bằng nhau ở trên $U_j \cap U_k$. Khi đó các lớp cắt này có thể dán lại với nhau và cho ta một lớp cắt trên toàn bộ $\mathbb{P}^n$.

Ta cần nhận xét ngay là trong chứng minh trên, việc ta có một phủ aphin hữu hạn là giả thiết không thể thiếu, tức là ta đã sử dụng tính tựa compact của $\mathbb{P}^n_k$.

Ta đã xây dựng được đẳng cấu chuẩn tắc $\Phi \circ \Psi(\mathcal{M}) \to \mathcal{M}$ cs tính hàm tử đối với bó $\mathcal{M}$ biến thiên. Bây giờ ta xây dựng cấu xạ

$$M \to \Psi \circ \Phi(M)$$

có tính hàm tử đối với S-mođun phân bậc M biến thiên. Thành phần bậc d của $\Psi \circ \Phi(M)$ là $\Gamma(\mathbb{P}^n_k, \tilde{M}(d))$ với $\tilde{M} = \Phi(M)$ là bó $\mathcal{O}$-mođun trên $\mathbb{P}^n_k$ ứng với M. Trên phân bậc d, ánh xạ chuẩn tắc

$$M_d \to \Gamma(\mathbb{P}^n_k, \tilde{M}(d))$$

được xây dựng như sau. Cho $f \in M_d$. Với mọi $i = 0, \ldots, n$, tồn tại duy nhất một lớp cất của $f_i \in \Gamma(U_i, \tilde{M}(d))$ sao cho

$$f_i = \frac{f}{t_i^d} t_i^d,$$

ở đây ta phải xem f/t_i^d như một phần tử của M_i, và f_i là phần tử tương ứng trong $\Gamma(U_i, \tilde{M}(d))$. Các lớp cát f_j và f_k hiển nhiên là trung nhau trên $U_j \cap U_k$ cho nên dán lại được thành một lớp cắt trên $\mathbb{P}^n_k$.

Cho M là một S-mođun phân bậc bất kỳ. Ta đã xây dựng một ánh xạ chuẩn tắc $M \to \Psi \circ \Phi(M)$. Áp dụng thêm Φ một lần nứa, ta có một đồng cấu giữa hai bó $\mathcal{O}$-mođun trên $\mathbb{P}^n_k$

$$\Phi(M) \to \Phi \circ \Psi \circ \Phi(M).$$

Vì $\Phi \circ \Psi = 1$ cho nên ánh xạ này là một đẳng cấu.

GIả sử M là một S-mođun dạng hữu hạn. Khi đó $M' = \Psi \circ \Phi(M)$ cũng là một S-mođun dạng hữu hạn. [1] Gọi K là hạch và Q là đối hạch của $M \to M'$, khi đó K và Q là các S-mođun phân bậc dạng hữu hạn. Vì đồng cấu cảm sinh $\tilde{M} \to \tilde{M}'$ là đẳng cấu cho nên $\tilde{K} = \tilde{Q} = 0$ vì Φ là hàm tử khớp. Với mọi $i = 0, 1, \ldots, n$, tồn tại r_i sao cho $t_i^{r_i} K = t_i^{r_i} Q$ bằng không. Vì K và Q là hữu hạn sinh nên điều này dẫn đến $K_d = Q_d = 0$ với mọi d đủ lớn. □

Định nghĩa 16 *Cho $\mathcal{M}$ là một bó $\mathcal{O}$-mođun trên một lược đồ. Ta biết rằng cho mọt lớp cát toàn cục $s \in \Gamma(X, \mathcal{M})$ tương đương với cho một đồng cấu $\mathcal{O}_X \to \mathcal{M}$. Cho n lớp cắt $s_1, \ldots, s_n$. Nếu đồng cấu cảm sinh*

$$\mathcal{O}_X^n \to \mathcal{M}$$

là một toàn ánh trong phạm trù abel các bó, thì ta nói là bó $\mathcal{M}$ **sinh bởi các lớp cắt** *$s_1, \ldots, s_n$. Nếu tồn tại các lớp cắt $s_1, \ldots, s_n$ như vậy thì ta nói là $\mathcal{M}$ sinh bởi các lớp cắt toàn cục của nó.*

Định lý 17 *Cho $\mathcal{M}$ là một bó nhất quán trên $\mathbb{P}_k^n$. Với mọi n đủ lớn, bó $\mathcal{M}(k)$ sinh bởi các lớp cắt toàn cục của nó.*

Gọi $M_i = \Gamma(U_i, \mathcal{M})$ với mọi $i = 0, \ldots, n$. Vì $\mathcal{M}$ là nhất quán cho nên M_i là R_i-mođun hữu hạn sinh. Chọn một hệ sinh hữu hạn $s_1^i, \ldots, s_{m_i}^i$ của M_i. Như ta đã biết trong chứng minh định lý trước (phần toàn ánh), tồn tại r_i đủ lớn sao cho các lớp cắt $t^{r_i} s_j^i \in \Gamma(U_i, \mathcal{M}(r_i))$ có thể thác triển ra toàn bộ

$\mathbb{P}_k^n$. Chọn r cực đại trong số các r_i. Khi đó, với mọi i, j, lớp cắt $t^r s_j^i \in \Gamma(U_i, \mathcal{M}(r))$ thác triển được ra toàn bộ $\mathbb{P}_k^n$. Các lớp cắt tòan cục này sinh ra bó $\mathcal{M}(r)$, vì hạn chế chúng vào mỗi tập mở U_i là một hệ sinh của $t_r^i M_i = \Gamma(U_i, \mathcal{M}(r))$. □

Định lý 18 *Cho $\mathcal{M}$ là một bó nhất quán trên $\mathbb{P}_k^n$. Khi đó $\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}}$ là một Sư-mođun hữu hạn sinh. Đặc biệt là, $\Gamma(\mathbb{P}_k^n, \mathcal{M})$ là một k-mođun hữu hạn sinh.*

Chứng minh sáng sủa nhất dùng đối đòng điều. □

[1] Cái này sẽ chứng minh sau.

10.5 Dãy khớp Euler

Định lý 19 *Trên $\mathbb{P}^n_A$ ta có dãy khớp phân thớ vectơ*

$$0 \to \Omega_{\mathbb{P}^n_A/A} \to \mathcal{O}(-1)^{n+1} \to \mathcal{O} \to 0.$$

Ta biết $\Gamma(\mathbb{P}^n_A, \mathcal{O}(1))$ là A-mođun tự do với cơ sở là $t_0, \ldots, t_n$. Lớp cắt $t_i \in \Gamma(\mathbb{P}^n_A, \mathcal{O}(1)$ cho ta một đồng cấu $\mathcal{O} \to \mathcal{O}(1)$, và vì vậy một đồng cấu $\mathcal{O}(-1) \to \mathcal{O}$. Lất tổng trực tiếp của chúng, ta có một đồng cấu

$$\mathcal{O}(-1)^{n+1} \to \mathcal{O}.$$

Trên các tập mở aphin U_i ta có thể viết tương minh đồng cấu này như sau. Để đơn giản ký hiệu, chỉ xét trên tập mở U_0. Gọi $e_0, \ldots, e_n$ là có sở hiển nhiên của tông tực tiếp $\mathcal{O}(1)^{n+1}$ Đồng cấu trên này cho bởi

$$\bigoplus_{i=0}^{n} f_i e_i \mapsto \sum_{i=0}^{n} f_i t_i$$

với f_i là các phân thức ở dạng g_i/t_0^d với g_i là một đa thức thuần nhất có bậc $\deg(g_i) = d - 1$.

Bây giứo ta xây dựng đồng cấu $\Omega \to \mathcal{O}(1)^{n+1}$. Trên tập mở U_0, ta biết $U_0 = \mathrm{Spec}(R_0)$ với R_0 là đại số đa thức

$$R_0 = A[t_1/t_0, \ldots, t_n/t_0]$$

và do đó $\Omega_{R_0/A}$ là R_0-mođun tự do với cớ sở là $d(t_i/t_0)$ với $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Dựa theo công thức hình thức

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xdy}{y^2}$$

ta xây dựng đồng cấu $\Omega \to \mathcal{O}(1)^{n+1}$ trên U_0 cho bởi công thức

$$d\left(\frac{t_i}{t_0}\right) \mapsto \frac{t_0 e_i - t_i e_0}{t_0^2}$$

coi các phần tử e_i như các biến hình thức dt_i. Định nghĩa tương tự ánh xạ này trên U_i với $i \neq 0$ và định nghiă trên U_i và U_j là tương thích với nhau khi ta hạn chế vào $U_i \cap U_j$.

Ta cũng dễ dàng kiểm tra trên mỗi tập mở aphin, dãy ta xây dựng là dãy khớp. Vì thế, khi dán lại, ta có một dãy khớp phân thớ vectơ trên $\mathbb{P}^n_A$. □

Tôi không rõ tại sao người ta gọi dãy khớp trên là dãy hkớp Euler. Có lẽ nó làm ta liên tưởng đến công thức Euler

$$f = \frac{1}{d}\sum_{i=0}^{n} \frac{\partial f}{\partial t_i} t_i$$

đúng cho mọi đa thức $f \in A[t_0, \ldots, t_n]$, thuần nhất bậc d.

Ta có một hệ quả đáng chú ý của dãy khớp Euler.

Hệ quả 20 *Ta có đẳng cấu chuẩn tắc*

$$\bigwedge^n \Omega_{\mathbb{P}^n_A/A} \simeq \mathcal{O}(-n-1).$$

Từ dãy khớp Euler, ta suy ra đẳng cấu

$$\bigwedge^{n+1} \mathcal{O}(1)^{n+1} \simeq \bigwedge^n \Omega_{\mathbb{P}^n_A/A} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}$$

và từ đó suy ra hệ quả. □

Chương 11

Cấu xạ vào không gian xạ ảnh

11.1 Hàm tử biểu diễn bởi không gian xạ ảnh

Từ đại số phân bậc $S = k[t_0, \ldots, t_n]$ ta đã xây dựng lược đồ $\mathbb{P}^n_k$. Lược đồ này còn được trang bị thêm một câu trúc đặc biệt là phân thớ đường thẳng $\mathcal{O}(1)$ với

$$\Gamma(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(1)) = S_1$$

với S_1 là k-mođun tự do các đa thức bậc 1 trong S. Nó có một cơ sở là $t_0, \ldots, t_n$. Ta đã chứng minh là các lớp cắt $t_0, \ldots, t_n$ sinh ra bó $\mathcal{O}(1)$ có nghĩa là đồng cấu chuẩn tắc

$$\mathcal{O}^{n+1} \to \mathcal{O}(1)$$

là một toàn ánh.

Cho X là một k-lược đồ và $f : X \to \mathbb{P}^n_k$ là một k-cấu xạ. Khi đó ảnh ngược của $\mathcal{L} = f^*\mathcal{O}(1)$ là một phân thớ đương thẳng và ảnh ngược $s_i = f^*(t_i)$ với $i = 0, \ldots, n$ là các lớp cắt toàn cục cả nó. Vì hàm tử f^* là hàm tử khớp phải cho nên đồng cấu

$$\mathcal{O}_X^{n+1} \to \mathcal{L}$$

ứng với các lớp cắt $s_0, \ldots, s_n$, là một toàn ánh. Như vậy cho một k-cấu xạ $f : X \to \mathbb{P}^n_k$ ta lập tức có một phân thớ đương thẳng $\mathcal{L}$ và $n+1$ lớp cắt toàn cục $s_0, \ldots, s_n$ của $\mathcal{L}$ sinh ra $\mathcal{L}$. Khăng định ngược lại cũng đúng và là nội dung của định lý sau đây.

Định lý 21 *Hàm tử F từ phạm trù các k-lược đồ vào phạm trù tập hợp, cho ứng với mỗi k-lược đồ X tập các lớp đẳng cấu của các cặp $(\mathcal{L}, (s_i)_{i=0}^n)$ tạo thành bởi một phân thớ đường thẳng $\mathcal{L}$ trên X và $n+1$ lớp cắt toàn cục $s_0, \ldots, s_n \in \Gamma(X, \mathcal{L})$ sinh ra $\mathcal{L}$, biểu diễn được bởi không gian xạ ảnh $\mathbb{P}_k^n$.*

Ở trên, ta đã xây dựng một cặp $(\mathcal{L}, (s_i)_{i=0}^n)$ ứng với mỗi k-cấu xạ $f : X \to \mathbb{P}_k^n$. Nó cho ta một ánh xạ từ hàm tử $[X \mapsto \mathrm{Hom}(X, \mathbb{P}_k^n)]$ vào hàm tử $[F \mapsto F(X)]$. Bây giờ ta cần xây dựng ánh xạ nghịch đảo, tức là xây dựng một cấu xạ $f : X \to \mathbb{P}_k^n$ ứng với mỗi cặp $(\mathcal{L}, (s_i)_{i=}^n)$.

Trên mỗi điểm x trong không gian tôpô của X, ta có thớ dũ $\mathcal{L}_{\kappa(x)}$ là không gian vectơ chiều một trên trương dư $\kappa(x)$ của điểm x. Gọi $s_i(x)$ là ảnh của s_i trong $\mathcal{L}_{\kappa(x)}$, ta có thể coi là giá trị của lớp cắt s_i tại điểm x. Ta gọi $U(s_i)$ là tập các điểm $x \in X$ sao cho $s_i(x) \neq 0$. Nếu $s_i(x) \neq 0$ thì $s_i(x') \neq 0$ với mọi x' nằmg trong một lân cận đủ bé của x, cho nên $U(s_i)$ là tập mở của X. Theo giả thiết, các lớp cắt $s_0, \ldots, s_n$ sinh ra $\mathcal{L}$ cho nên với mọi $x \in X$, các giá trị $s_0(x), \ldots, s_n(x) \in \mathcal{L}_{\kappa(x)}$ không thể đồng thời bằng không. Tức là các tập mở $U(s_i)$ tạo thành một phủ mở của X.

Ta sẽ xây dựng một ánh xạ từ $U(s_i)$ vào tập mở U_i của $\mathbb{P}_k^n$ với mọi $i = 0, \ldots, n$. Để đơn giản ký hiệu ta xét trường hợp $i = 0$. Nhắc lại là $U_0 = \mathrm{Spec}(R_0)$ là tập mở của $\mathbb{P}_k^n$ các iđêan nguyên tố phân bậc $\mathfrak{p} \in \mathbb{P}_k^n$ sao cho $t_0 \notin \mathfrak{p}$ và $R_0 = k[u_1, \ldots, u_n]$ với $u_i = t_i/t_0$. Ta cũng có thể nhận xét là U_0 cũng là tập các điểm của $\mathbb{P}_k^n$ mà tại đó lớp cắt t_0 của $\mathcal{O}(1)$ nhận giá trị khác không.

Quay lại với tập mở $U(s_0)$ của X. Lớp cãt s_0 cho ta một đồng cấu bó $\mathcal{O}$-mođun trên $U(s_0)$

$$\mathcal{O}_{U(s_0)} \to \mathcal{L}$$

gửi lớp cắt toàn cục $1 \in \Gamma(U(s_0), \mathcal{O}_X)$ lên lớp cắt $s_0 \in \Gamma(U(s_0), \mathcal{L})$. Trên mọi điểm $x \in U(s_0)$, đòng cấu này cảm sinh ra một ánh xạ tuyến tính khác không giữa hai không gian vectơ chiều 1 trên trường dư $\kappa(x)$. ánh xạ tuyến tính như vậy ắt là đẳng cấu. Vậy nên đồng cấu $\mathcal{O}_{U(s_0)} \to \mathcal{L}$ át là một đẳn cấu bó. Hạn chế các lớp cắt khác $s_1, \ldots, s_n$ vào $U(s_0)$ phải tương ứng duy nhất với các lớp cắt của $\Gamma(U(s_0), \mathcal{O}_X)$ ta ký hiệu là $s_1/s_0, \ldots, s_n/s_0$. Các lớp cắt này cho ta một cấu xạ

$$U_0 \to U_0 = \mathrm{Spec}(u_1, \ldots, u_n)$$

gửi $u_i = t_i/t_0$ lên s_i/s_0 với mọi $i = 1, \ldots, n$.

Rõ ràng là hạn chế các cấu xạ $U(s_i) \to U_i$ và $U(s_j) \to U_j$ cho ta cùng một cấu xạ $U(s_i) \cap U(s_j) \to U_i \cap U_j$. Thế nên chún dán lại với nhau cho ta một cấu xạ $X \to \mathbb{P}^n_k$.

Ta có thể kiểm tra là hai ánh xạ hàm tử xây dựng như trên là nghịch đảo của nhau. □

Ta nhận xét là với quan niệm không gian xạ ảnh như một hàm tử như trên, ta gần như quay lại với khái niệm thô sơ coi không gian xạ ảnh như tập các siêu mặt. Giả sử k là một trường đóng đại số. Lấy $X = \mathrm{Spec}(k)$. Cho một phân thớ đường thẳng $\mathcal{L}$ trên $\mathrm{Spec}(k)$ là cho một k-không gian vectơ L chiều 1. Cho $n+1$ lớp cát $s_0, \dots, s_n$ sinh ra $\mathcal{L}$ là cho $n+1$ phần tử $s_0, \dots, s_n \in L$ không đồng thời bằng không. Rõ ràng cho các s_i tương đương với cho một ánh xạ tuyến tính $k^{n+1} \to L$ bằng cách gửi cơ sở cho trước $v_0, \dots, v_n$ của k^{n+1} lên $s_0, \dots, s_n$. Hạch của ánh xạ này là một siêu phẳng của k^{n+1}, và tập các lướp đẳng cấu $(L, (s_i)_{i=0}^n)$ là tập các siêu phẳng.

Cho một đa tạp đại số X trên k. Cho $(\mathcal{L}, (s_i)_{i=0}^n)$ là một phân thớ đường thẳng và $n+1$ lớp cắt sinh ra nó. Với mỗi điểm $x \in X(k)$, thớ của $\mathcal{L}$ư tại x là một k-không gian vectơ chiều một $\mathcal{L}_{\kappa(x)}$ chứa $n+1$ giá trị $s_0(x), \dots, s_n(x)$ không đồng thời bằng không. Ta có một ánh xạ tuyên tính khác không $k^{n+1} \to \mathcal{L}_{\kappa(x)}$ gửi cơ sở cho trước $v_0, \dots, v_n$ lên $s_0(x), \dots, s_n(x)$. Hạch của nó là một siêu phẳng trong k^{n+1} và cấu xạ f gửi điểm x lên siêu phẳng đó.

Việc mô tả $\mathbb{P}^n$ như một hàm tử giúp ta chứng minh một tính chất quan trọng nhất của không gian xạ ảnh là tính riêng.

Định lý 22 *Cho A là một vành giao hoán, $\mathbb{P}^n_A$ là không gian xạ ảnh trên A. Khi đó cấu xạ cấu trúc $\mathbb{P}^n_A \to \mathrm{Spec}(A)$ là riêng.*

Ta xét trường hợp $A = k$ là một trường. Ta cần chứng mminh $\mathbb{P}^n_k$ là riêng. Cho $\mathcal{O}$ là một k-đại số và là vành định giá rời rạc và F là trường các thương của A. Ta cần chứng minh là mọi cấu xạ $f_F : \mathrm{Spec}(F) \to \mathbb{P}^n_k$ có thể thác triển một cách duy nhất thành một cấu xạ $f_{\mathcal{O}} : \mathrm{Spec}(\mathcal{O}) \to \mathbb{P}^n_k$.

Cho cấu xạ f_F là cho một ánh xạ tuyến tính khác không từ không gian vectơ F^{n+1} với cơ sở đã cho, vào một F-không gian vectơ chiều một. Gọi $V \subset V^{n+1}$ là hạch của ánh xạ tuyến tính này. Cho cấu xạ $f_{\mathcal{O}}$ là cho một ánh xạ $\mathcal{O}$-tuyến tính **toàn ánh** từ $\mathcal{O}^{n+1}$ vào một $\mathcal{O}$-mođun tự do cấp một. Hạch của nó là $\mathcal{V}$ là một $\mathcal{O}$-mođun con của $\mathcal{O}^{n+1}$ thoả mãn $\mathcal{O}^{n+1}/\mathcal{V}$ là $\mathcal{O}$-mođun tự do cấp một. Đòi hỏi này bao gồm việc $\mathcal{V}$ là $\mathcal{O}$-mođun tự do cấp n.

Cấu xạ $f_{\mathcal{O}}$ thác triển cấu xạ f_F khi và chỉ khi $\mathcal{V} \subset V$ vi khi đó hiển nhiên $\mathcal{V}$ là một giàn của V, $\mathcal{V} \otimes_{\mathcal{O}} F = V$ và tenxơ ánh xạ tuyến tính $\mathcal{V} \to \mathcal{O}^{n+1}$ với $\otimes_{\mathcal{O}} F$ ta được ánh xạ tuyến tính $V \to F^{n+1}$. Vậy ta có $\mathcal{V}$ bị chứa trong giao $V \cap \mathcal{O}^{n+1}$. Điều kiện $\mathcal{O}^{n+1}/\mathcal{V}$ là $\mathcal{O}$-mođun tự do kéo theo $\mathcal{V} = V \cap \mathcal{O}^{n+1}$. □

11.2 Proj **của một vành phân bậc và nổ**

Cách xây dựng lược đồ Proj của vành đa thức với phân bậc mà ta trình bày ở trên có thể mở rộng ra cho tất cả các vành phân bậc. Các lập luận hoàn toàn được dữ nguyên nếu ta chỉ xét các vành phân bậc ở dạng như sau. Trong thực tế, ta cũng chỉ xét các không gian Proj ứng với các vành phân bậc có dạng này. Xét $S = \bigoplus_{d \in \mathbb{N}} S_d$ là vành phân bậc với

- $S_0 = A$ là một vành giao hoán,
- S_1 là một A-mođun hữu hạn sinh,
- vành S xem như một A-đại số được sinh bởi S_1. Vì đã có giả thiết S_1 là A-môđun hữu hạn sinh, điều này kéo theo S_d là A-mođun hữu hạn sinh với mọi $d \in \mathbb{N}$.

Gọi $S_+ = \bigoplus_{d \geq 1} S_d$. Khi đó ta ký hiệu Proj$(S)$ là tập các iđêan nguyên tố phân bậc của S không chứa S_+.

Chọn một hệ sinh $s_0, \ldots, s_n$ của S_1 và gọi $U(s_i)$ là tập con của Proj(S) các iđêan nguyên tố phân bậc không chứa s_i. Vì là một iđêan nguyên tố phân bậc $\mathfrak{p} \in \mathrm{Proj}(S)$ theo định nghĩa không chứa S_+ nên không thể đông thời chứa $s_0, \ldots, s_n$. Cái này có nghĩa là

$$\mathrm{Proj}(S) = \bigcup_{i=0}^{n} U(s_i).$$

Vì là vành địa phương hóa $S[s_i^{-1}]$ với phân bậc tự nhiên chứa một phần tử kha nghịch bậc 1 là s_i cho nên hệt như trong trường hợp S là vành đa thức, tập con $U(s_i)$ của Proj(S) đẳng cấu chuẩn tắc với Spec(R_i) với $R_i = S[s_i^{-1}]_0$ là thành phần bậc không của $S[s_i^{-1}]$. Nếu ta lấy giao $U_i \cap U_j$ thì ta cũng được Spec(R_{ij}) với $R_{ij} = S[s_i^{-1}s_j^{-1}]_0$. Và ta có thể dán các Spec(R_i) lại với nhau để được một cấu trúc lược đồ trên tập Proj(S).

Hoàn toàn tương tự như trong trường hợp Proj của vành đa thức, ta có luôn các phân thớ đường thẳng $\mathcal{O}(d)$ trên Proj(S). Trên U_i, $calO(d)$ là

R_i-mođun tự do cấp một với cơ sở là t_i^d. Trên $U_i \cap U_j$, hai cơ sở t_i^d và t_j^d sai khác nhau một hàm khả nghịch $t_i^d/t_j^d \in R_{ij}^\times$.

Mệnh đề 23 *Cấu trúc lược đồ trên tập* $\mathrm{Proj}(S)$ *và các phân thớ đương thẳng* $\mathcal{O}(d)$ *trên* $\mathrm{Proj}(S)$ *không phụ thuộc vào hệ sinh* $s_0, \ldots, s_n$ *của* S_1 *ta chọn.*

Cho hai hệ sinh $\{s_i \mid i \in \mathcal{I}\}$ và $\{s_j \mid j \in \mathcal{J}\}$ khác nhau của A-mođun S_1 ta có thể lấy hệ sinh hợp của hai hệ sinh này $\{s_i \mid i \in \mathcal{I} \cup \mathcal{J}\}$. Vì cấu trúc lược đồ trên $\mathrm{Proj}(S)$ duy nhất đối với một hệ sinh đã cho, thế nên cấu trúc lưược đồ đối với hệ sinh $\{s_i \mid i \in \mathcal{I} \cup \mathcal{J}\}$ trùng với cấu trúc lược đồ xây dựng với mỗi hệ sinh $\{s_i \mid i \in \mathcal{I}\}$ và $\{s_j \mid j \in \mathcal{J}\}$. Vì vậy hai cấu trúc lưược đồ này cũng phải trùng với nhau. Ta lập luân tương tự với các bó $\mathcal{O}(d)$. □

Ta có thể nhìn lại xây dựng trình bày ở trên từ một quan điểm khác. Việc chọn hệ sinh $s_0, \ldots, s_n$ cho ta một đồng cấu vành phân bậc

$$A[t_0, \ldots, t_n] \to S$$

gửi biến t_i lên phân tử thuần nhất bậc một s_i. Việc (s_i) là một hệ sinh của A-mođun S_1 và S_1 sinh ra S như A-đại số kéo theo đồng cấu trên là toàn ánh. Gọi I là hạch của nó, I là một iđêan phân bậc của $A[t_0, \ldots, t_n]$. Ta có thể dễ dàng kiểm tra là $\mathrm{Proj}(S)$ có song ánh chuẩn tắc với tập con đóng $V_+(I)$ của $\mathbb{P}_A^n$ chứa iđêan I. Xây dựng trên có thể xem như là xây dựng cho tập con đóng $V_+(I)$ của không gian xạ ảnh một cấu trúc lược đồ.

Cần chú ý là ta không còn có $\Gamma(\mathrm{Proj}(S), \mathcal{O}(n)) = S_n$ mà chỉ có khẳng định yếu hơn sau đây.

Mệnh đề 24 *Vưới các giả thiết như trên về vành phân bậc* S*, ta có một đồng cấu chuẩn tác giũa hai* A*-đại số phân bậc*

$$S \to \bigoplus_{d \in \mathbb{N}} \Gamma(\mathrm{Proj}(S), \mathcal{O}(d)).$$

Nó cảm sinh ra đẳng cấu A*-mođun* $S_d \to \Gamma(\mathrm{Proj}(S), \mathcal{O}(d))$ *với mọi số tự nhiên* d *đủ lớn.*

Chọn $s_0, \ldots, s_n$ là một hệ sinh của A-mođun S_1. Như đã nhận xét, ta có một nhúng đóng

$$f : \mathrm{Proj}(S) \to \mathbb{P}_A^n.$$

Ta có $\Gamma(\mathrm{Proj}(S), \mathcal{O}(d)) = \Gamma(\mathbb{P}_A^n, f_*\mathcal{O}(d))$. Ta biết hàm tử ảnh xuôi xủa một nhúng đóng biến một bó nhất quán thành một bó nhất quán cho nên mệnh đề là một trường hợp riêng của định lý 15[1]. □

[1] Kiểm tra lại đánh số

Mệnh đề 25 *Cho S là một vành phân bậc thỏa mãn các giả thiết như ở trên. Cho A' là một A-đại số bất kỳ, và xét vành phân bậc $S \otimes A = \bigoplus_{d\in\mathbb{N}} S_d \otimes_A A'$. Khi đó ta có*

$$\mathrm{Proj}(S \otimes_A A') = \mathrm{Proj}(S) \times_{\mathrm{Spec}(A)} \mathrm{Spec}(A').$$

Chọn $s_0, \ldots, s_n$ là một hệ sinh của A-mođun S_1. Trên $\mathrm{Proj}(S)$ ta có phủ aphin bởi các tập mở mở aphin $U(s_i) = \mathrm{Spec}(R_i)$ với R_i là thành phần bậc không của $S[s_i^{-1}]_0$. Trên $\mathrm{Proj}(S')$ với $S' = S \otimes_A A'$, ta cũng có tập mở tương ứng $U'(s_i) = \mathrm{Spec}(R_i')$ với R_i' là thành phần bậc không của $S'[s_i^{-1}]$. Vì $S'[s_i^{-1}] = S[s_i^{-1}] \otimes_A A'$ ta có đẳng thức tương tự giữa các thành phần bậc không $R_i' = R_i \otimes_A A'$. Vậi nên ta có đẳng cấu

$$U_i' = U_i \otimes_{\mathrm{Spec}(A)} \mathrm{Spec}(A').$$

Các đẳng cấu này tương thích với nhau trên giao $U_i \cap U_j$ nên ta suy ra khẳng định. □

Ta sẽ xét hai trương hợp riêng của cách xây dựng $\mathrm{Proj}(S)$. Trương hợp đầu tương đối tầm thường, nó tương ứng với trương hợp khi $\mathrm{Proj}(S) \to \mathrm{Spec}(A)$ là đẳng cấu. Trương hợp hai thú vị hơn, cho phép ta nổ $\mathrm{Spec}(A)$ vưói tâm điểm là một iđêan.

Mệnh đề 26 *Cho $S = \bigoplus_{d\in\mathbb{N}} S_i$ có dạng $S_0 = A$ là một vành giao hoán, S_1 là một A-mođun tự do địa phương cấp 1, và $S_d = L^{\otimes d}$ với mọi $d \geq 1$. Khi đó cấu xạ cấu trúc $\mathrm{Proj}(S) \to \mathrm{Spec}(A)$ là một đẳng cấu.*

Đê chứng minh một cấu xạ la đẳng cấu, ta chỉ cần xét các tập mở aphin. Vì vậy ta có thể giả sủ L là một A-mođun tự do cấp 1 sinh bởi một phần tử t nào đó. Khi đó các $L^{\otimes d}$ cũng là các A-mođun tự do sinh bởi một phần tử mà ta ký hiệu là t^d. Rõ ràng là một iđêan nguyen tố không chứa S_+ thì không chứa phần tử t. Do vậy tập mở $U(t)$ của $\mathrm{Proj}(S)$ là toàn bộ $\mathrm{Proj}(S)$. Khi đó ta biết $\mathrm{Proj}(S) = \mathrm{Spec}(A)$ vì A là thành phần bậc không của $S[t^{-1}]$. □

Bây giờ ta xét một ví dụ khác của Proj của vành phân bậc cho bởi một iđêan I của một vành giao hoán Noether A. Với mọi $d \in \mathbb{N}$ ta có iđêan I^d của A. Tổng trực tiếp

$$S_I = A \oplus \bigoplus_{d\geq 1} I^d$$

có một cấu trúc vành phân bậc hiển nhiên. Ta gọi $\mathrm{Proj}(S_I)$ là **nổ** của $\mathrm{Spec}(A)$ với trung tâm là tập đóng $V(I)$.

Mệnh đề 27 *Cấu xạ* $\mathrm{Proj}(S_I) \to \mathrm{Spec}(A)$ *cho bởi một iđêan* I *của* A *cho như trên là một đẳng cấu trên tập mở* $U(I)$ *các iđêan nguyên tố* $\mathfrak{p}$ *của* A *không chứa* I.

Cho $f \in I$, ta có $U(f) \subset U(I)$ và $U(f)$ có thể phủ bởi các tập mở chính như vậy. Hạn chế của $\mathrm{Proj}(S_I)$ vào tập mở chính $U(f)$ là Proj của vành phân bậc $A[f^{-1}] \oplus \bigoplus_{d\geq 1} I^d \otimes_A A[f^{-1}]$. Vì $f \in I$, cho nên $I \otimes_1 A[f^{-1}]$ là một $A[f^{-1}]$-mođun tự do cấp một với một phần tử sinh là $f \otimes 1$.

Ví dụ khá đặc thù là ví dụ nổ điểm không của mặt phẳng aphin. Ta lấy $A = k[x, y]$, và $I = \langle x, y\rangle$ là iđean cực đại sinh bởi x va y. Gọi $X = \mathrm{Proj}(S_I)$ với

$$S_I = A \oplus I \oplus I^2 \oplus \cdots .$$

Khi đó ánh xạ $\mathrm{Proj}(S_I) \to \mathrm{Spec}(A)$ là một đẳng cấu trên tập mở $\mathbb{A}^2 - \{0\}$ với 0 là điểm ưứng với iđêan cực đại I. Thớ $\mathrm{Spec}(S_I) \to \mathrm{Spec}(A)$ tại điểm này là

$$\mathrm{Proj}\left(k \oplus \bigoplus_{d\geq 1} I^d/I^{d+1}\right)$$

Ta biết trong tường hợp này $I^d/I^{d+1} = \mathrm{Sym}^d(I/I^2)$ và $\dim_k(I/I^2) = 2$ cho nên thớ này đẳng cấu với một đường thẳng xạ ảnh.

Ta có thể mô tả bản đồ aphin của nổ này như sau. Để phân biệt với $x, y \in A = S_I^0$, ta ký hiệu x_1, y_1 các phân tử $x, y \in I$ xét như phần tử bậc một của S_I. Ta có thể phủ X bằng hai tập mở aphin

$$X = U(x_1) \cap U(y_1)$$

với $U(x_1)$ là tập các iđêan nguyên tố phân bậc của S_I không chứa x_1 và $U(y_1)$ là tập các iđêan nguyên tố phân bậc không chứa y_1. Nghịch đảo x_1 ta được $S_I[x_1^{-1}] = R_1[x_1^{\pm 1}]$ với thành phân bậc không là $R_1 = k[x, u_1]$ với $u_1 = y_1/x_1$. R_1 chứa $A = k[x, y]$, biến y có thể biểu diễn như sau $y = xu_1$. Ta có $U(x_1) = \mathrm{Spec}(R_1)$. Tương tự nghịch đảo y_1, ta được $S_I[y_1^{-1}] = R_[y_1^{\pm 1}]$ với $R_2 = k[y, u_2]$ với $u_2 = x_1/y_1$. R_2 chứa $A = k[x, y]$ư với $x = u_2 y$. Ta dán hai không gian aphin theo tập mở $u_1 \neq 0$ trong $\mathrm{Spec}(R_1)$ và $u_2 \neq 0$ trong $U(y_1)$. Khi đó ta có đẳng cấu

$$R_1[u_1^{-1}] = k[x, u_1^{\pm 1}] \simeq R_2[u_2^{\pm 1}] = k[y, u_2^{\pm 1}]$$

ư với $u_2 = u_1^{-1}$, $y = xu_1$ và $x = yu_2$.

Mệnh đề 28 *Cho I là một iđêan của $X = \mathrm{Spec}(A)$ và $\tilde{X} = \mathrm{Proj}(S_I)$ là mổ của X theo tâm I, $\pi : \tilde{X} \to X$. Khi đó ảnh ngược cuả I lên $\tilde{X}$ là một phân thớ đường thẳng*

$$\pi^* I = \mathcal{O}_{S_I}(1).$$

Cho $f : Y \to X$ là một cấu xạ sao cho $f^* I$ là một phân thớ đường thẳng, khi đó f phân tích một cách duy nhất qua $\tilde{X}$.

Theo định nghĩa $\mathcal{O}(1)$ là bó nhất quán ưng với môđun phân bậc $I \oplus I^2 \oplus \cdots$ với I ở bậc không. Vì thế, nó cũng đồng cấu với $\pi^* I$ với I là bó nhất quán ưng với iđêan I. Từ đó ta suy ra $\pi^* I$ là phân thớ đương thẳng.

Ta gác lại chứng minh tích chất phổ dụng của nổ đến mục sau. □

11.3 Chỉ tiêu nhúng xạ ảnh

Cho $f : X \to \mathbb{P}_k^n$ là một k-cấu xạ tương ứng với một cặp $(\mathcal{L}, (s_i)_{i=0}^n)$ như trong đinh lý. Ta muốn tìm hiểu xem với điều kiện nào thì f là một nhúng. Ta nhắc lại một cấu xạ $f : X \to Y$ là một nhúng nếu như f là đơn ánh trên không gian tôpô và sao cho với mọi điểm x trong không gian tôpô X, $y = f(x)$, đồng cấu địa phương của vành địa phương $\mathcal{O}_{Y,y} \to \mathcal{O}_{X,x}$ là một toàn ánh.

Để làm đơn giản chứng minh, ta sẽ giả thiết là k là một trường đóng đại số.

Định lý 29 *Cho k là một trương đóng đại số. Cho X là một k-lược đồ dạng hữu hạn và $(\mathcal{L}, (s_i)_{i=0}^n)$ tạo thành bởi mọt phân thớ đường thẳng $\mathcal{L}$ và $n+1$ lớp cắt $s_0, \ldots, s_n \in \Gamma(X, \mathcal{L})$. Gọi $f : X \to \mathbb{P}_k^n$ là ánh xạ vào không gan xạ ảnh tương ứng với $(\mathcal{L}, (s_i)_{i=0}^n)$. Khi đó f là một nhúng khi và chỉ khi hai điều kiện sau thỏa mãn*

1. *Cho $x, y \in X(k)$ là hai điểm khác nhau, tồn tại s trong không gian vectơ V sinh bởi các $s_0, \ldots, s_n$ trong $\Gamma(X, \mathcal{L})$ sao cho $s(x) = 0$ và $s(y) \neq 0$ (nói cách khác là f tách các điểm).*

2. *Cho $x \in X(k)$, $\mathfrak{m}_x$ là iđêan cực đại của $\mathcal{O}_{X,x}$, khi đó ánh xạ hạn chế*

$$V \to \mathcal{L}_x / \mathfrak{m}_x^2 \mathcal{L}_x$$

là toàn ánh (nói cách khác là f tách các vectơ tiếp tuyến).

Nếu dùng ngôn ngữ hàm tử ta có thể phát biểu lại hai điều kiện trên một các súc tích hơn như sau :

1. $X(k) \to \mathbb{P}^n(k)$ là đơn ánh,
2. $X(k[\epsilon]/\epsilon^2) \to \mathbb{P}^n(k[\epsilon]/\epsilon^2)$ là đơn ánh.

Trên không gian tôpô f là đơn ánh. Cho $x \in X(k)$, $y \in \mathbb{P}^n(k) = Y(k)$ với $f(x) = y$. Ta cần chứng minh $\mathcal{O}_{Y,y} \to \mathcal{O}_{X,x}$ là toàn ánh.

Bổ đề 30 *Cho k là một trường đóng đại số. Cho $\phi : A \to B$ là một đồng cấu địa phương của hai vành địa phương, địa phương hóa của k-đại số dạng hữu hạn. Gọi $\mathfrak{m}_A, \mathfrak{m}_B$ là iđêan cực đại của A và B. Giả sử là ánh xạ k-tuyến tính cảm sinh*

$$\mathfrak{m}_A/\mathfrak{m}_A^2 \to \mathfrak{m}_B/\mathfrak{m}_B^2$$

là toàn ánh. Khi đó $A \to B$ là toàn ánh.

Ta có dăy khớp phải bó vi phân tương đối

$$\Omega_{A/k} \otimes_A B \to \Omega_{B/k} \to \Omega_{B/A} \to 0$$

với các thành phần đều là các B-mođun dạng hữu hạn do giả thiết A, B là địa phương hóa của k-đại số dạng hữu hạn. Tenxơ với $\otimes_B k$, ta vẫn có dãy khớp phải

$$\Omega_{A/k} \otimes_A k \to \Omega_{B/k} \otimes_B k \to \Omega_{B/A} \otimes_B k$$

với $\Omega_{A/k} \otimes_A k = \mathfrak{m}_A/\mathfrak{m}_A^2$ và $\Omega_{B/k} \otimes_B k = \mathfrak{m}_B/\mathfrak{m}_B^2$. Giả thiết $\mathfrak{m}_A/\mathfrak{m}_A^2 \to \mathfrak{m}_B/\mathfrak{m}_B^2$ là toàn ánh dẫn tới $\Omega_{B/A} \otimes_B k = 0$. Vì $\Omega_{B/A}$ là B-mođun hữu hạn sinh, dùng bổ đề Nakayama ta suy ra $\Omega_{B/A} = 0$.

Gọi I ư là iđêan của đòng cấu đương chéo $B \otimes_A B \to B$. Theo định nghĩa $I/I^2 = \Omega_{B/A}$. Lại dung Nakayama lần nữa, ta suy ra $I = 0$ từ kết luận $\Omega_{B/A} = 0$. Tức là $B \otimes_A B = B$. Từ đó ta suy ra $A \to B$ là toàn ánh vì nếu tồn tại $x \in B$ không nằm trong ảnh của A thì $x \otimes_A 1 \neq 1 \otimes_A x$.[2] □

Nếu ta biết B là A-mođun dạng hữu hạn thì ta có thể áp dụng thẳng Nakayama vào A-mođun $\mathfrak{m}_B$. Đó là cách chứng minh của [Hartshorne], bổ đề 7.4, phần II. Ta biết B là A-mođun dạng hữu hạn nếu giả thiết trước X là một k-lược đò xạ ảnh. Về phương diện logic, để kiểm tra một tích chất địa phương là tính nhúng mà phải thêm một giả thiết toàn cục là xạ ảnh thì không thể là tối ưu. Nhưng trong thực tế, ta thương chỉ quan tâm đến nhúng các đa tạp xẹa ảnh vào một không gian xạ ảnh, và khi đó nhúng luôn là nhúng đóng vì ảnh của nó là tập đóng.

[2] Tại sao nhỉ ?

11.4 Phân thớ đường thẳng giàu và rất giàu

Bây giờ ta lại cho k là một vành giao hoán bất kỳ.

Định nghĩa 31 *Cho X là một k-lược đồ. Một phân thớ đường thẳng $\mathcal{L}$ trên X gọi là* **rất giàu** *nếu tồn tại một một nhúng $f : X \to \mathbb{P}^n_k$ sao cho $\mathcal{L} = f^*\mathcal{O}(1)$.*

Mệnh đề 32 *Cho X là một k-lược đồ và $\mathcal{L}$ là một phân thớ đường thẳng rất giàu ở trên X. Khi đó với mọi bó $\mathcal{O}$-mođun nhất quán $\mathcal{M}$ trên X, với mọi số tự nhiên d đủ lớn, bó $\mathcal{M} \otimes \mathcal{L}^{\otimes d}$ được sinh bởi các lớp cắt toàn cục của nó.*

Cho $f : X \to \mathbb{P}^n_k$ là nhúng của X vào không gian xạ ảnh sao cho $\mathcal{L} = f^*\mathcal{O}(1)$. Giả sử X là lược đò xạ ảnh. Đây là trương hợp riêng nhưng là trương hợp lý thú nhất, vì chẳng hạn trong trương hợp aphin thì mọi bó $\mathcal{O}$-mođun nhất quán đều được sinh bởi các lớp cắt toàn cục của nó. Nếu X là xạ ảnh, thì ảnh của $f : X \to \mathbb{P}^n_k$ ắt là một tập đóng của $\mathbb{P}^n$ cho nên nhúng ắt là nhúng đóng, và vì thế ảnh xuôi $f_*\mathcal{M}$ là một bó nhất quán. Rõ ràng, $\mathcal{M} \otimes f^*\mathcal{O}(n)$ được sinh bởi các lớp cắt toàn cục khi và chỉ khi $f_*\mathcal{M} \otimes \mathcal{O}(n)$ được sinh bởi các lớp cắt toàn cục. Ta có thể khẳng định về trường hợp riêng $X = \mathbb{P}^n_k$ và trong trương hợp này thì mệnh đề đã được chứng minh rồi. [3]

Trong trương hợp tổng quát, ký hiệu $\bar{X}$ là bao đóng của X ở trong $\mathbb{P}^n_k$. Ta cần chứng minh là bó $\mathcal{M}$ có thể thác triển thành một bó nhất quán ở trên $\bar{X}$. Ta có thể tóm tắt động tác này như sau. Ta qui về trường hợp aphin bằng cách dán. Trong trường hợp aphin, ta qui về bài toán sau đây. Cho A

là một vành giao hoán, để cho đơn giản ta giả sử A là miền nguyên. Gọi ư$A[f^{-1}]$ là địa phương hóa của A theo hệ nhân sinh bởi một phần tử $f \in A$. Cho M' là một $A[f^{-1}]$-mođun dạng hữu hạn, ta cần chứng linh là tồn tại một A-mođun dạn hữu hạn M sao cho $M' = M \otimes_A A[f^{-1}]$. Việc chọn M tương đối tùy tiện. Ta chọn một hệ sinh $v_1, \ldots, v_n$ của $A[f^{-1}]$-mođun M' sau đó ta có thể lấy M là A-mođun con của M' sinh bởi $v_1, \ldots, v_n$. Trương hợp tổng quát lập luận phức tạp hơn, bạn đọc tìm đọ bài tập II.5.15 của [Hartshorne]. □

Một phân thớ đương thẳng thỏa mãn kết luận của mệnh đề trên chưa chắc đã là rất giàu, dù là nó gần được như thế. t Người ta gọi nó là giàu.

[3] Xem 10.4

Định nghĩa 33 *Cho X là một k-lược đồ. Một phân thớ đương thẳng $\mathcal{L}$ trên X gọi là* **giàu** *nếu như với mọi bó $\mathcal{O}$-mođun nhất quán trên X, với mọi số tự nhiên d đủ lớn $\mathcal{M} \otimes \mathcal{L}^{\otimes d}$ sinh bởi các lướp cắt toàn cục của nó.*

Mệnh đề 34 *Cho $\mathcal{L}$ là một phân thớ đường thẳng giàu trên một k-lược đồ X. Khi đó với mọi số tự nhiên d đủ lớn, $\mathcal{L}^{\otimes d}$ là rât giàu.*

Chứng minh trực tiếp mệnh đề này tương đối rắc rối. Khi có thêm công cụ đối đồng điều, chứng minh sử dụng chỉ tiêu nhúng xạ ảnh, trở nên rất đơn giản. Vì vậy ta tạm gác lại sau[4]. Bạn đọc có thể xem [Hartshorne] định lý II 7.6 có chưng minh trực tiếp, không dùng ngôn ngữ đối đòng điều, nhưng về thực chất ý tưởng thì không khác.

[4]Đừng quên nhé

Chương 12

Hệ tuyến tính và ước

12.1 Hệ tuyến tính

Cho X là một lược đồ trên một trường đóng k và $\mathcal{L}$ là một phân thớ đường thẳng trên X. Với mỗi phân tử $l \in \Gamma(X, \mathcal{L})$, ta có xét tập $V(l)$ tất cả các điểm $x \in X$ sao cho $l(x) = 0$ tức là ảnh của l trong thớ dư $\mathcal{L}_{\kappa(x)}$, là bằng không.

Tập này là một tập con đóng của X. Trên nó ta còn cón một cấu trúc lược đò cho như sau. Chọn một phủ mở aphin $X = \bigcup_{i \in \mathcal{I}} U_i$ sao cho trên mỗi tập mở aphin $U_i = \mathrm{Spec}(A_i)$, phân thó đương thẳng $\mathcal{L}$ cho bởi một A_i-mođun tự do cấp một L_i. Chọn một phần tử sinh $l_i \in L_i$. Khi đó tồn tại duy nhất một phần tử của A_i ký hiệu là $(l : l_i)$ sao cho hạn ché của l vào U_i bằng $(l : l_i).l_i$. Khi đó tập đóng $V(l) \cap U_i$ là $\mathrm{Spec}(A_i/(l : l_i))$ và có một cấu trúc lược đồ aphin. Vì hai phần tử sinh khác nhau $l_i, l'_i \in L_i$ sai khác nhau một hàm khả nghịch $a_i \in A_i^{\times}$ cho nên hai vành thương $A_i/(l : l_i)$ và $A_i/(l : l'_i)$ là đồng nhất với nhau. Vì lý do này mà các lưược đồ aphin $\mathrm{Spec}(A/(l : l_i))$ với $i \in \mathcal{I}$ dán lại với nhau cho ta một cấu trúc lược đồ trên $V(l)$ và $V(l)$ là một lược đồ con đóng của X.

Lấy L là một k-không gian vectơ con hữu hạn chiều của $\Gamma(X, \mathcal{L})$. Với mọi $l \in L$ và $l \neq 0$, ta có một tập con $V(l) \subset X$. Hiển nhiên là tập $V(l)$ không thay đổi khi ta nhân l với một hằng số khác không. Khi l là phần tử biến thiên trong không gian xạ ảnh các đường thẳng trong không gian vectơ L, hệ các tập con $V(l)$ thay đồi một cách đại số. Hệ xác định như vậy gọi là **hệ tuyến tính**. Ta cần làm chính xác khái niệm tập con $V(l)$ "thay đổi một cách đại số".

Trước hết ta ký hiệu

$$\mathbb{P}_{L^*} = \mathrm{Proj}(\mathrm{Sym}(L^*))$$

là không gian xạ ảnh ứng với không gian vectơ L^*. Mỗi điểm của $\mathbb{P}_{L^*}$ trên k là một đương thẳng trong L hoặc là một siêu mặt trong không gian vectơ đối ngẫu L^*. Trên $\mathbb{P}_{L^*}$ ta có bó $\mathcal{O}_{L^*}(1)$ với

$$\Gamma(\mathbb{P}_{L^*}, \mathcal{O}_{L^*}(1)) = L^*.$$

Trên tích $X \times_k \mathbb{P}_{L^*}$ ta xét phân thớ đường thẳng cho bởi tích tenxơ ngoài

$$\mathcal{L} \boxtimes_k \mathcal{O}_{L^*}(1) = \mathrm{p}r_X^* \mathcal{L} \otimes \mathrm{p}r_{\mathbb{P}_{L^*}} \mathcal{O}_{L^*}(1).$$

Ta biết

$$\Gamma(X \times \mathbb{P}_{L^*}, \mathcal{L} \boxtimes_k \mathcal{O}_{L^*}(1)) = \Gamma(X, \mathcal{L}) \otimes_k L^*$$

và nó chưứa

$$L \otimes_k L^* = \mathrm{Hom}_k(L, L)$$

như k-không gian vectơ con. Vì vậy ta có một phân tử chuẩn tắc

$$1_L \in \mathrm{Hom}_k(L, L) \subset \Gamma(X \times \mathbb{P}_{L^*}, \mathcal{L} \boxtimes_k \mathcal{O}_{L^*}(1)).$$

Ta ký hiệu V_L là tập con đóng các không điểm của lớp cắt này, như ở trên ta biết trên V_L có một cấu lược dồ chuẩn tắc và là lược đồ con đóng của $X \times \mathbb{P}_{L^*}$.

Ta có phép chiếu $V_L \to \mathbb{P}_{L^*}$ với thớ có thể xem như lược đồ con của X. Ta có thể dễ dang kiểm tra khẳng định sau.

Mệnh đề 35 *Với mọi $l \in L$ khác không, gọi $p_l \in \mathbb{P}_{L^*}(k)$ là siêu mặt của L^* hạch của ánh xạ tuyến tính $l : L^* \to k$. Khi đó V_l là thớ của cấu xạ $V_L \to \mathbb{P}_{L^*}$ ở trên điểm p_l.*

Định nghĩa 36 *Cho L là một k-không gian vectơ con hữu hạn chiều của $\Gamma(X, \mathcal{L})$.* **Hệ tuyến tính** *trên X ứng với L là lược đò con $V_L \subset X \times \mathbb{P}_{L^*}$ xây dựng như trên.*

Nếu X là một đa tạp xạ ảnh, $L = \Gamma(X, \mathcal{L})$ là một k-không gian vectơ hữu hạn chiều thì hệ tuyến tính V_L ứng với nó gọi là **hệ tuyến tính đầy đủ**.

12.2 Định lý Bertini

Trường hợp quan trọng nhất của hệ tuyến tính là các hệ tuyến tính giàu trên không gian xạ ảnh.

Định lý 37 *Cho X là một đa tạp xạ ảnh trươn trên một trường đóng đại số k. Cho $\mathcal{L}$ là một phân thớ đương thẳng rất giàu trên X và cho một nhúng xạ ảnh $f : X \to \mathbb{P}^n_k$ với $\mathcal{L} = f^*\mathcal{O}(1)$. Khi đó tồn tại một siêu phẳng H của $\mathbb{P}^n_k$ sao cho $H \cap X$ là một lược đồ trơn và tập các siêu phẳng như vậy tạo thành một phần mở trù mật của hệ tuyến tính đầy đủ của $\mathcal{L}$. Kết luân trên vẫn còn đúng nếu tâ giả thiết X chỉ có kỳ dị ở một tập con hưũu hạn các điểm cô lập.*

Nếu X liên thông và $\dim(X) \geq 2$, thì với mọi siêu phẳng H trong một tập mở trù mật, $H \cap X$ là liên thông.

12.3 Ước Weil và ước Cartier

Cho X là một lược đồ. Một điểm $x \in X$ gọi là có **độ cao một** nếu như tồn tại một lân cận aphin $x \in \mathrm{Spec}(A)$ trong X, và ở trong $\mathrm{Spec}(A)$, x tương ứng với một iđêan nguyên tố độ cao một. Với mọi điểm $x \in X$ có độ cao một, vành địa phương $\mathcal{O}_{X,x}$, thớ của bó cấu trúc tại điểm x là vành địa phương có chiều Krull bằng một. Lược đò X gọi là **chính qui ở độ cao một** nếu với mọi điểm x ở đọ cao một, các vành $\mathcal{O}_{X,x}$ đều là vành chính qui và khi đó ta biết, chúng ắt là các vành định giá rời rạc.

Định nghĩa 38 *Cho X là một lược đồ nguyên Noether chính qui ở độ cao một. Một* **ước Weil** *trên X là một tổng hình thức có dạng*

$$D = \sum_x d_x x$$

với x chạy trên tập các điểm đọ cao một của X và $d_x = 0$ với hầu hết các điểm x. D gọi là ước thật sự nếu như $d_x \geq 0$ với mọi $x \in X$.

Cho X là một lược đồ nguyên chính qui ở độ cao một. Ta biết với mọi điểm $x \in X$ độ cao một, vành địa phương $\mathcal{O}_{X,x}$ là một vành định giá rời rạc. Gọi K là trường các hàm hữu tỉ trên X. Với mọi hàm hữu tỉ $f \in K$, ta định nghĩa số nguyên

$$\mathrm{ord}_x(f)$$

là định giá của f, xét như một phần tử của trường các thương của $\mathcal{O}_{X,x}$. Với mọi $f_1, f_2 \in K^\times$, ta có

$$\mathrm{ord}_x(f_1 f_2) = \mathrm{ord}_x(f_1) + \mathrm{ord}_x(f_2)$$

Mệnh đề 39 *Cho X là một lược đồ nguyên Noether chính qui ở đọ cao một. Với mọi hàm hữu tỉ khác không $f \in K^\times$ trên X, ta có $\mathrm{ord}_x(f) = 0$ với hầu hết các điểm x ở độ cao một.*

Theo giả thiết X Noether, ta có thể phủ X bằng một phủ hữu hạn các tập mở aphin $U_i = \mathrm{Spec}(A_i)$ với A_i là vành Noether. Vì thế ta có thể giả sử $X = \mathrm{Spec}(A)$ là một lược đồ aphin, phổ của một vành Noether. Viết $f = f_1/f_2$ với $f_1, f_2 \in A$, ta chỉ cần chứng minh mệnh đề cho f_1 và f_2 nên ta có thể giả sử $f \in A$.

Cho $f \in A$, xét tập $V_1(f)$ các điểm $x \in X$ độ cao một sao cho $\mathrm{ord}_x(f) > 0$. Để thuận mắt, ta ký hiệu $\mathfrak{p}_x$ là iđêan nguyên tố ứng với mỗi điểm x như vậy, ta có $x \in V_1(f)$ khi và chỉ khi $f \in \mathfrak{p}_x$. Giả sử tập $V_1(f)$ là tập vô hạn, ta sẽ xây dựng được một dãy tăng không dừng các iđêan của A và như thế sẽ mâu thuẫn với giả thiết A là vành Noether. Xây dựng như sau : □

Với mỗi hàm hữu tỉ $f \in K^\times$, ta có một ước Weil

$$\sum_x \mathrm{ord}_x(f)$$

với x chạy trên tập các điểm độ cao một. Các ước Weil nhận được như vậy gọi là các **ước chính**.

Định nghĩa 40 *Cho X là một lược đồ nguyên. Ước Cartier của X là một lớp cắt toàn cục của bó $K^\times/\mathcal{O}^\times$ trên X :*

$$s \in \Gamma(X, K^\times/\mathcal{O}^\times).$$

Theo xây dựng của bó thương $K^\times/\mathcal{O}^\times$, cho một lớp cát toàn cục $s \in \Gamma(X, K^\times/\mathcal{O}^\times)$ là cho

- một phủ mở aphin $X = \bigcup_{i\in\mathcal{I}} U_i$ của X, $U_i = \mathrm{Spec}(A_i)$, $U_i \cap U_j = \mathrm{Spec}(A_{ij})$,
- với mọi $i \in \mathcal{I}$, một phần tử $s_i \in K^\times$

- với mọi cặp $i, j \in \mathcal{I}$, $s_i s_j^{-1} \in A_{ij}^\times$

với quan hệ tươnưg đương là : sau khi lấy phủ mịn nhất để qui về trương hợp cùng một phủ mở $(U_i, s_i) \sim (U_i, s_i')$ khi và chỉ khi $s_i^{-1} s_i' \in A_i^\times$.

Cho một ước Cartier $s = (U_i, s_i)$ như ở trên. Ta nói nó là **ước Cartier** thật sự nếu như với mọi i ta có $s_i^{-1} \in A_i$.

Mệnh đề 41 *Cho X là một lược dồ nguyên. Cho một ước Cartier trên X là cho một phân thớ đường thẳng $\mathcal{L}$ và một phần tử $l \in \mathcal{L}_K$ với $\mathcal{L}_K$ là thớ tổng quát của $\mathcal{L}$. Cho một ước Cartier thật sự của X là cho một cặp $(\mathcal{L}, l)$ với $\mathcal{L}$ là một phân thớ đường thẳng trên X và $l \in \Gamma(X, \mathcal{L})$ là một lớp cắt toàn cục của $\mathcal{L}$.*

Nếu cho một lớp cắt $s \in \Gamma(X, K^\times/\mathcal{O}^\times)$, ta xây dựng một phân thớ đường thẳng $\mathcal{L}$, phân thớ con của phân thớ hằng K, như sau. Trên tập mở aphin $U_i = \mathrm{Spec}(A_i)$, ta xét A_i-mođun con tự do cấp một

$$s_i A_i \subset K$$

của K. Trên $U_i \cap U_j = \mathrm{Spec}(A_{ij})$, hai môđun con này bằng nhau

$$s_i A_i \otimes_{A_i} A_{ij} = s_j A_j \otimes_{A_j} A_{ij}$$

vì $s_i s_j^{-1} \in A_{ij}^\times$. Vì vậy các A_i-mođun con tự do này dán lại với nhau thành một phân thớ đường thẳng $\mathcal{L}$, bó con của bó hằng K. Thớ tổng quát của bó này là K cho nên có một phần tử là 1.

Ngược lại, giả sử ta cho một cặp $(\mathcal{L}, l)$ bao gồm một phân thớ đương thẳng $\mathcal{L}$ trên X và một phần tử l của thớ tổng quát $\mathcal{L}_K$. Khi đó, ta có thể đồng nhất hai không gian vectơ chiều một $K \simeq \mathcal{L}_K$ bằng cách gửi phần tử 1 của K lên phần tử $l \in \mathcal{L}_K$. Vì $\mathcal{L}$ là phân thớ đường thẳng cho nên trên mỗi tập mở aphin $U_i = \mathrm{Spec}(A_i)$, A_i là miền nguyên, $\Gamma(U_i, \mathcal{L})$ là một A_i mođun tự do địa phương, mođun con của $\mathcal{L}_K = K$. Chọn phủ U_i đủ mịn, ta có thể giả sử là $\Gamma(U_i, \mathcal{L})$ là A_i-mođun tự do cấp một. Với mọi chỉ số i, ta chọn một cơ sở s_i của $\Gamma(U_i, \mathcal{L})$. Vì hạn chế vào U_{ij} cho ta cùng một A_{ij}-mođun con tự do của K, cho nên $s_i s_j^{-1} \in A_{ij}^\times$. Cuối cùng thì hai sự lưụa chọn khác nhau của s_i và s_i' cơ sở của $\Gamma(U_i, \mathcal{L})$ sai khác nhau một phần tử khả nghịch $s_i s_j^{-1} \in A_i^\times$. Vì vậy $(\mathcal{L}, l)$ xác định một lớp cắt $s \in \Gamma(X, K^\times/\mathcal{O}^\times)$.

Phần tử $1 \in K$ của thớ tổng quát là mọt lớp cắt toàn cục nếu như với mọi i ta có $1 \in \Gamma(U_i, \mathcal{L}) = s_i A_i$. Cái này hiển nhiên tương đương với $s_i^{-1} \in A_i$.

Phần VI

Đối đồng điều

Chương 13

Đối đồng điều trên tôpô Zariski

13.1 Hàm tử dẫn xuất của hàm tử Γ

Cho X là một không gian tôpô. Xét phạm trù các bó nhóm abel trên X. Ta biết phạm trù này là một phạn trù abel. Theo định nghĩa, một dãy các bó

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

là khớp khi và chỉ khi với mọi điểm $x \in X$, ta có dãy khớp các thớ

$$0 \to M'_x \to M_x \to M''_x \to 0.$$

Định lý 42 *Phạm trù các bó nhóm abel trên một không gian tôpô có đủ vật nội tại.*

Mệnh đề 43 *Hàm tử cho ứng với mỗi bó nhóm abel M trên không gian tôpô X, nhóm các lớp cắt toàn cục $\Gamma(X, M)$ là một hàm tử khớp trái. Nó có các hàm tử dẫn xuất là $M \mapsto \mathrm{H}^i(X, M)$*

Ta đã biết, mọi hàm tử khớp trái đi từ một phạm trù abel vó đủ vật nội tại, đều có các hàm tử dẫn xuất. Ta chỉ cần chứng minh tính khớp trái của hàm tử Γ.

Cho ánh xạ $M' \to M$, một lớp cắt $s' \in \Gamma(X, M')$ có ảnh $s \in \Gamma(X, M)$ bằng không. Với mọi $x \in X$, ảnh $s_x \in M_x$ bằng không nên giả thiết $M'_x \to M_x$ đơn ánh kéo theo $s'_x = 0$. Với mọi x tồn tại một lân cận U_x của x sao cho hạn chế của s' vào U_x bằng không. Theo tính dán được của bó, $s' = 0$.

Tương tự như vậy, cho $0 \to M' \to M \to M''$ là dăy khớp trái, cho $s \in \Gamma(X, M)$ với ảnh $s'' \in \Gamma(X, M'')$ bằng không. Khi đó với mọi $x \in X$, tồn tại duy nhất $s'_x \in M'_x$ có ảnh là $s_x \in M_x$ vì dãy $0 \to M'_x \to M_x \to M''_x$ là khớp. Lớp cắt địa phương s'_x xác định trên mọt lân cận U_x của x. Cho hai điểm $x \neq x'$, trên giao $U_x \cap U_{x'}$ hai lớp cắt s'_x và $s'_{x'}$ có cùng một ảnh là hạn chế của s cho nên như ta đã thấy ở trên, chúng nhất thiết phải bằng nhau. □

Ta có thể thử lập luânh như trên để xem tại sao hàm tử Γ là không khớp phải, xem lập luận của ta bị tắc ở chỗ nào. Lấy $s'' \in \Gamma(X, M'')$. Với mọi $x \in X$, $M_x \to M''_x$ là toàn ánh, nên tồn tại $s_x \in M_x$ có ảnh là $s''_x \in M''_x$. Cái mắc thứ nhất là ta tuy s_x như vậy tồn tại, nhưng ta không biết chọn cái nào. Chọn tùy tiện một phần tử s_x, các phân tử khác sẽ đều có dạng $s_x + s'_x$ với $s'_x \in M'_x$. Lại lấy một lân cận đủ nhỏ U_x của x tren đó xác định s_x. Nhưng bây giờ cái **cản trở** cho việc dán các lớp cắt địa phương s_x lại với nhau là sai khác

$$\partial(s_x, s_{x'}) = s_x|_{U_x \cap U_{x'}} - s_{x'}|_{U_x \cap U_{x'}}.$$

Cái sai khác này có ảnh bằng không trong $\Gamma(U_x \cap U_{x'}, M'')$ nên phải là một lớp cắt của M' trên $U_x \cap U_{x'}$. Như vậy việc lựa chọn các s_x cho ta một phủ mở $X = \bigcup_i U_i$ và trên mỗi giao $U_{ij=}U_i \cap U_j$ ta có một lớp cắt

$$\partial_{ij} \in \Gamma(U_{ij}, M)$$

và các lớp cắt này thỏa mãn phương trình

$$\partial_{ij} + \partial_{jk} + \partial_{ki} = 0$$

trên U_{ijk}. Gọi $Z^1(X, M')$ là tập các lớp tương đương theo nghĩa hiển nhiên các bộ (U_{ij}, ∂_{ij}). Tồn tại $s \in \Gamma(X, M)$ có ảnh là s'' khi và chỉ khi ta có thể thay đổi s_x thành $s_x + s'_x$ sao cho ∂ư bị triệt tiêu. Muốn vậy ta phải giả được phương trình đối biên

$$\partial_{ij} = s'_i - s'_j$$

với $s'_i \in \Gamma(U_i, M')$. Phương trình này không phải lúc nào cũng có nghiệm, và cái **cản trở** cho việc phương trình này có nghiệm chính là một phần tử của nhóm $Z^1(X, M')$ chia cho nhóm $B^1(X, M)$ các bộ (U_{ij}, ∂_{ij}) sao cho phương trình đối biên giải được.

Mệnh đề 44 *Với mọi bó nhóm abel M trên X, hàm tử dẫn xuất bậc một $\mathrm{H}^1(X, M)$ là*

$$\mathrm{H}^1(X, M) = Z^1(X, M)/B^1(X, M).$$

Người ta đã mô tả được cả hàm tử dẫn xuất bậc hai $\mathrm{H}^2(X, M)$ theo cách tương tự như vậy nhưng khi đó câu chuyện trở nên phức tạp hơn nhiều, để mô tả người ta cần đến những khái niệm như 2-phạm trù ... Đây là không kể đến H^3, H^4. Trong hoàn cảnh đặc biệt các bó tựa nhất quán trên lược đồ, thì ngươòi ta có các cách tính toán đặc thù khác, hiệu quả hơn.

Cho $f : X \to Y$ là một ánh xạ liên tục giữa hai không gian tôpô. Khi đó ta có hàm tử f_* từ phạm trù các bó nhóm abel trên X vào phạm trù các bó nhóm abel trên Y. Nó cho ứng với mỗi bó M trên X bó trên Y cho bởi hàm tử

$$f_*F(U_Y) = F(U_X)$$

với mọi tập mở U_Y của Y và tập mở U_X là tạo ảnh của U_Y trong X. Hàm tử này là một bó vì để kiểm tra tính dán được của f_*F trên một phủ $\{U_{Y,i}\}$ của một tập mở U_Y, ta qui ngay về việc kiểm tra tính dán được của F trên tạo ảnh U_X của U_Y và phủ mở $\{U_{X,i}\}$ cho bởi tạo ảnh $U_{X,i}$ của $U_{Y,i}$. Hàm tử f_* là hamg tử Γ trong trương hợp riêng Y là một điểm.

Mệnh đề 45 *Hàm tử f_* là hàm tử khớp trái. Nó có các hàm tử dẫn xuất ký hiệu là $\mathrm{R}^i f_*$.*

13.2 Đối đồng điều của bó tựa nhất quán

Cho X là một lược đồ và M là một bó $\mathcal{O}$-mođun tựa nhất quán trên X ta định nghĩa

$$\mathrm{H}^i(X, M)$$

như trong phấn trước chỉ coi X như mọt không gian tôpô và M như một bó nhóm abel trên X. Tuy vậy, việc tính toán cụ thể các nhóm đối đồng điều $\mathrm{H}^i(X, M)$ với M là bó tựa nhất quán thì có những đặc thù riêng.

Mệnh đề 46 *Cho $X = \mathrm{Spec}(A)$ là một lược dồ aphin. Khi đó với mọi bó tựa nhất quán Mư trên $\mathrm{Spec}(A)$ ta có $\mathrm{H}^i(X, M) = 0$ với mọi $i \geq 1$.*

Mục lục