SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO **BẮC NINH**	CHUYÊN ĐỀ VẬN DỤNG, VẬN DỤNG CAO KỲ THI TỐT NGHIỆP THPT NĂM 2023 Môn: Toán

TÊN CHUYÊN ĐỀ: Tính đơn điệu của hàm số

Người biên soạn: Hoàng Duy Thắng
Đơn vị công tác: THPT Lê Văn Thịnh

I. Hệ thống kiến thức liên quan.

① ***Định lí*** *(thừa nhận): Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng K.*
Nếu $f'(x) > 0,\ \forall x \in K$ thì hàm số đồng biến trên khoảng K.
Nếu $f'(x) < 0,\ \forall x \in K$ thì hàm số nghịch biến trên khoảng K.
Nếu $f'(x) = 0,\ \forall x \in K$ thì hàm số không đổi trên khoảng K.

II. Các dạng bài/câu thường gặp

Dạng 1. Tìm khoảng đơn điệu và cực trị của hàm số hợp

- **Bước 1**. Tìm tập xác định D của hàm số.
- **Bước 2**. Tính đạo hàm $y' = f'(x)$. Tìm các điểm x_i, $(i = 1,2,3,...,n)$ mà tại đó đạo hàm bằng 0 hoặc không xác định.
- **Bước 3**. Sắp xếp các điểm x_i theo thứ tự tăng dần và lập bảng biến thiên.
- **Bước 4**. Nêu kết luận về các khoảng đồng biến và nghịch biến (cực trị) dựa vào bảng biến thiên.

Ví dụ 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-1)(x-2)(x+4)^2$. Hàm số $y = f(x+1)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-5;1)$. **B.** $(0;+\infty)$. **C.** $(-\infty;0)$. **D.** $(0;1)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2)(x+4)^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \\ x=-4 \end{array}\right.$ (trong 3 nghiệm trên thì nghiệm $x=-4$ là nghiệm kép)

$$y' = f'(x+1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1=1 \\ x+1=2 \\ x+1=-4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=-5 \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-5		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	+	0	−	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗		↗	20	↘	13	↗	$+\infty$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$.

Ví dụ 2: Cho hàm số $f(x)$, bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		−	0	+	0	−	0	+	

Hàm số $y=f(5-2x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(2;3)$. **B.** $(0;2)$. **C.** $(5;+\infty)$. **D.** $(3;5)$.

Lời giải

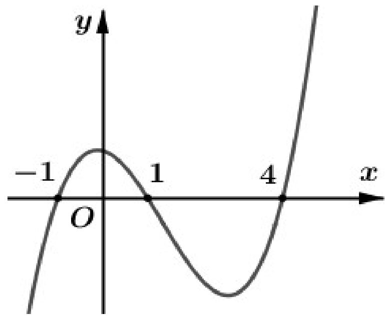
Chọn B

Ta có: $y'=-2f'(5-2x)$.

Để hàm số nghịch biến thì: $y'\le 0$.

$\Leftrightarrow -2f'\left(5-2x\right)\le 0 \Leftrightarrow f'\left(5-2x\right)\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -3\le 5-2x\le -1 \\ 5-2x\ge 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3\le x\le 4 \\ x\le 2 \end{array}\right.$.

Ví dụ 3: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục, có đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình bên.



Hàm số $y=g(x)=f\left(2-x\right)$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

A. $\left(1;3\right)$. **B.** $\left(2;+\infty\right)$. **C.** $\left(-2;1\right)$. **D.** $\left(-\infty;-2\right)$.

Lời giải

Chọn C

Từ đồ thị ta có bảng xét dấu của đạo hàm là:

x	$-\infty$		-1		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

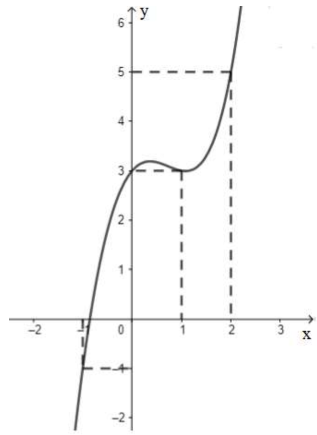
Ta có: $g'(x)=-f'\left(2-x\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2-x=-1 \\ 2-x=1 \\ 2-x=4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=1 \\ x=-2 \end{array}\right.$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-2		1		3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Vậy hàm số $y=g(x)=f\left(2-x\right)$ đồng biến trên khoảng $\left(-2;1\right)$.

Ví dụ 4: Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Đặt hàm số $g(x)=f(x)-x^2-x$. Mệnh đề nào sau đây đúng?



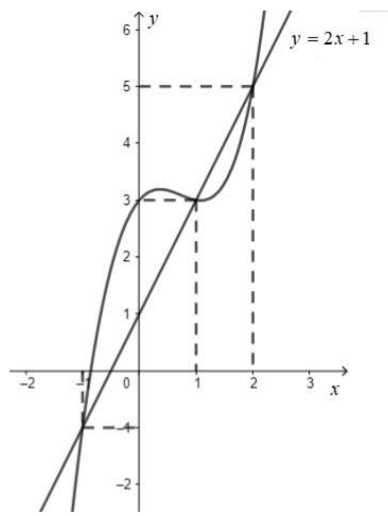
A. $g\left(-1\right) > g\left(1\right)$ **B.** $g\left(1\right) = g\left(2\right)$ **C.** $g\left(-1\right) = g\left(1\right)$ **D.** $g\left(1\right) > g\left(2\right)$

Lời giải

Chọn D

Ta có $g\left(x\right) = f\left(x\right) - x^2 - x \Rightarrow g'\left(x\right) = f'\left(x\right) - 2x - 1$.

$g'\left(x\right) = 0 \Leftrightarrow f'\left(x\right) = 2x + 1$. Nghiệm của phương trình là hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = f'\left(x\right)$ và đường thẳng $y = 2x + 1$. Ta có:

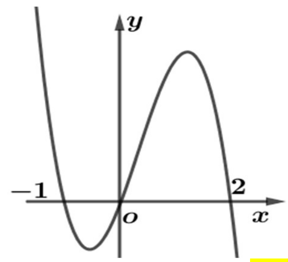


Do đó: $g'\left(x\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{array}\right.$. Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$\searrow$		$g(-1)$	$\nearrow$	$g(1)$	$\searrow$	$g(2)$	$\nearrow$	

Từ BBT suy ra $g\left(1\right) > g\left(2\right)$.

Ví dụ 5: Cho hàm số đa thức bậc bốn $f\left(x\right)$. Đồ thị hàm số $y = f'\left(3 - 2x\right)$ được cho như hình bên. Hàm số $y = f\left(x^2 + 1\right)$ nghịch biến trên khoảng nào?



A. $(-\infty;0)$. **B.** $(2;+\infty)$. **C.** $(-1;0)$. **D.** $(0;1)$.

Lời giải

Chọn C

Do $f(x)$ là hàm số đa thức bậc bốn, nên dựa vào đồ thị hàm số trên ta có:

$f'(3-2x)=a(x+1)x(x-2),(a<0)$.

Đặt $3-2x=t\Rightarrow x=\dfrac{3-t}{2}\Rightarrow f'(t)=a\left(\dfrac{3-t}{2}+1\right)\left(\dfrac{3-t}{2}\right)\left(\dfrac{3-t}{2}-2\right)=\dfrac{a}{8}(5-t)(3-t)(-1-t)$.

Suy ra $y'=2x.f'(x^2+1)=\dfrac{a}{8}2x(4-x^2)(2-x^2)(-2-x^2)$, $f'(x^2+1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm 2\\ x=\pm\sqrt{2}\\ x=0\end{array}\right.$.

Ta có bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-2		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		2		$+\infty$
$f'(x^2+1)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Từ bảng xét dấu hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;0)$.

Ví dụ 6: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như ở bảng dưới đây.

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Hỏi hàm số $g(x)=3-2f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(-\dfrac{1}{2};0\right)$. **B.** $\left(\dfrac{1}{2};2\right)$. **C.** $\left(-2;-\dfrac{1}{2}\right)$. **D.** $\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn A

$g'(x)=-2f'\left(x+\dfrac{1}{x}\right).\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)$

$g'(x)>0\Leftrightarrow -2f'\left(x+\dfrac{1}{x}\right).\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)>0\ \Leftrightarrow f'\left(\dfrac{x^2+1}{x}\right).\left(\dfrac{x^2-1}{x^2}\right)<0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2-1<0\\ f'\left(\dfrac{x^2+1}{x}\right)>0\end{cases}\\ \begin{cases}x^2-1>0\\ f'\left(\dfrac{x^2+1}{x}\right)<0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2<1\\ \dfrac{x^2+1}{x}<-2\vee 0<\dfrac{x^2+1}{x}<2\end{cases}\\ \begin{cases}x^2>1\\ -2<\dfrac{x^2+1}{x}<0\vee\dfrac{x^2+1}{x}>2\end{cases}\end{array}\right.$$

TH1: $\begin{cases} x^2 < 1 \\ \dfrac{x^2+1}{x} < -2 \vee 0 < \dfrac{x^2+1}{x} < 2 \quad (1) \end{cases}$

$(1) \Leftrightarrow \dfrac{x^2+2x+1}{x} < 0 \vee \begin{cases} \dfrac{x^2-2x+1}{x} < 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{(x+1)^2}{x} < 0 \vee \begin{cases} \dfrac{(x-1)^2}{x} < 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \neq 0 \\ x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ x < 0 \end{cases}$

Kết hợp với điều kiện $x^2 < 1$, ta được: $-1 < x < 0$.

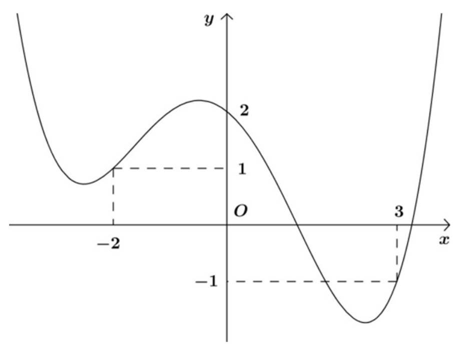
TH2: $\begin{cases} x^2 > 1 \\ -2 < \dfrac{x^2+1}{x} < 0 \vee \dfrac{x^2+1}{x} > 2 \quad (2) \end{cases}$

$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < \dfrac{x^2+2x+1}{x} \\ x < 0 \end{cases} \vee \dfrac{x^2-2x+1}{x} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}.$

Kết hợp điều kiện $x^2 > 1$, ta được: $x > 1$.

Vậy các khoảng đồng biến là: $(-1;0)$, $(1;+\infty)$.

Ví dụ 7: Cho hàm số $f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $g(x) = f(x+1) + \dfrac{x^3}{3} - 3x$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $(-1;2)$. **B.** $(-2;0)$. **C.** $(0;4)$. **D.** $(1;5)$.

Lời giải

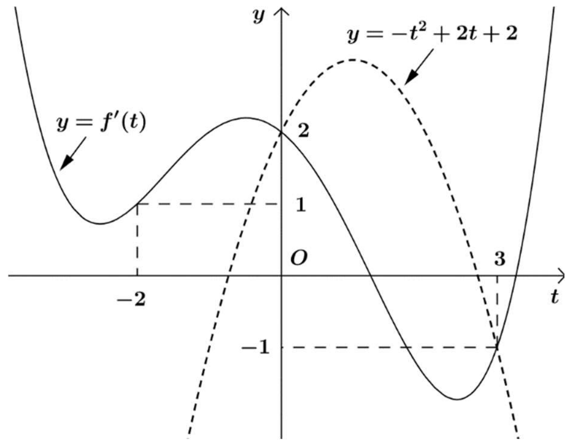
Chọn A

Ta có $g'(x) = f'(x+1) + x^2 - 3 = f'(x+1) + (x+1)^2 - 2(x+1) - 2$.

Khi đó $g'(x) \le 0 \Leftrightarrow f'(x+1) \le -(x+1)^2 + 2(x+1) + 2 \quad (1)$

Đặt $t = x+1$. BPT (1) trở thành $f'(t) \le -t^2 + 2t + 2 \qquad (2)$

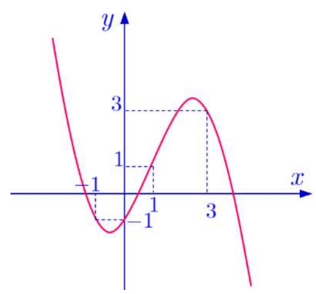
Xét tương giao của ĐTHS $y = f'(t)$ và $y = -t^2 + 2t + 2$



ta có nghiệm của BPT là $0 \le t \le 3 \Leftrightarrow 0 \le x+1 \le 3 \Leftrightarrow -1 \le x \le 2$.

Suy ra hàm số $g(x)=f(x+1)+\dfrac{x^3}{3}-3x$ nghịch biến trên $(-1;2)$.

Ví dụ 8: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Hàm số $g(x)=2f(|x-1|)-x^2+2x+2020$ đồng biến trên khoảng nào

A. $(-2;0)$. **B.** $(-3;1)$. **C.** $(1;3)$. **D.** $(0;1)$.

Lời giải

Chọn D

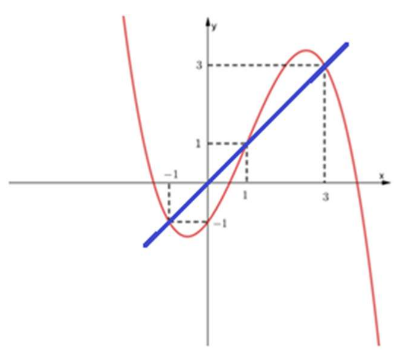
Ta có: $g(x)=2f(|x-1|)-x^2+2x+2020 \Leftrightarrow g(x)=2f(|x-1|)-(x-1)^2+2021$

Xét hàm số $k(x-1)=2f(x-1)-(x-1)^2+2021$.

Đặt $t=x-1$

Xét hàm số: $h(t)=2f(t)-t^2+2021 \Rightarrow h'(t)=2f'(t)-2t$.

Kẻ đường $y=x$ như hình vẽ.



Khi đó: $h'(t)>0 \Leftrightarrow f'(t)-t>0 \Leftrightarrow f'(t)>t \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t<-1 \\ 1<t<3 \end{array}\right.$.

Do đó: $k'(x-1)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1<-1 \\ 1<x-1<3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<0 \\ 2<x<4 \end{array}\right.$.

Ta có bảng biến thiên của hàm số $k(x-1)=2f(x-1)-(x-1)^2+2021$.

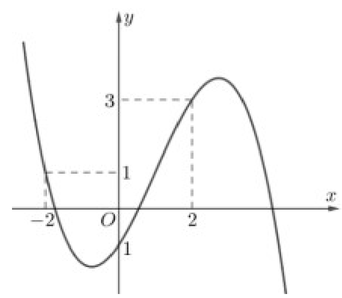
x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
$k'(x-1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$k(x-1)$		↗		↘		↗		↘	

Khi đó, ta có bảng biến thiên của $g(x)=2f(|x-1|)-(x-1)^2+2021$ bằng cách lấy đối xứng qua đường thẳng $x=1$ như sau:

x	$-\infty$		-2		0		1		2		4		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$		↗		↘		↗		↘		↗		↘	

Vậy hàm số đồng biến trên $(0;1)$.

Ví dụ 9: Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm đa thức bậc 4. Đồ thị hàm số $f'(x+2)$ được cho trong hình vẽ bên

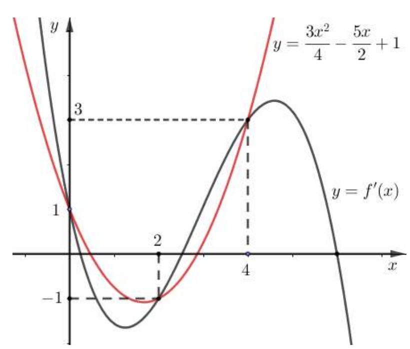


Hàm số $g(x)=4f(x^2)-x^6+5x^4-4x^2+1$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(-4;-3)$. **B.** $(2;+\infty)$. **C.** $(-\sqrt{2};\sqrt{2})$. **D.** $(-2;-1)$.

Lời giải

Chọn A



Ta có ĐTHS $y=f'(x)$ như sau.

Ta có $g'(x)=8x.f'(x^2)-6x^5+20x^3-8x=8x\left[f'(x^2)-\left(\frac{3}{4}x^4-\frac{5}{2}x^2+1\right)\right]$

Ta có $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ f'(x^2)=\frac{3}{4}x^4-\frac{5}{2}x^2+1 \ (*) \end{array}\right.$

Từ đồ thị suy ra $(*) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=0 \\ x^2=2 \\ x^2=4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\sqrt{2} \\ x=\pm 2 \end{array}\right.$.

Bảng xét dấu $g'(x)$.

x	$-\infty$		-2		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Từ bảng xét dấu của $g'(x)$ suy ra hàm số đồng biến trên $(-\infty;-2)$ nên hàm số cũng đồng biến trên $(-4;-3)$.

Ví dụ 10: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $a \in (-10;+\infty)$ để hàm số $y=\left|x^3+(a+2)x+9-a^2\right|$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$?

A. 12. **B.** 11. **C.** 6. **D.** 5.

Lời giải

Chọn B

Xét $f(x)=x^3+(a+2)x+9-a^2$

$f'(x)=3x^2+a+2$

Để $y=\left|f(x)\right|$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$

TH1: $\begin{cases} f'(x)\ge 0, \forall x\in(0;1) \\ f(0)\ge 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2+a+2\ge 0, \forall x\in(0;1) \\ 9-a^2\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\ge \underset{(0;1)}{Max}\left(-3x^2-2\right) \\ 9-a^2\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\ge -2 \\ -3\le a\le 3 \end{cases} \Rightarrow a\in[-2;3]$

$a=\{-2;-1;0;1;2;3;\} \to 6$ giá trị

TH2: $\begin{cases} f'(x)\le 0, \forall x\in(0;1) \\ f(0)\le 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2+a+2\le 0, \forall x\in(0;1) \\ 9-a^2\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\le \underset{(0;1)}{Min}\left(-3x^2-2\right) \\ 9-a^2\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\le -5 \\ \left[\begin{array}{l} a\ge 3 \\ a\le -3 \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow a\le -5$

Kết hợp với điều kiện bài toán $a=\{-9;-8;-7;-6;-5\}$ →có 5 giá trị

Vậy có 11 giá trị thoả mãn.

Ví dụ 11: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)=x^2(2x-1)^2(x+1), \forall x\in\mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 2 **B.** 3 **C.** 0 **D.** 1

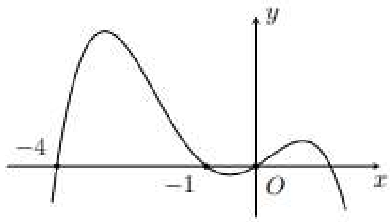
Lời giải

Chọn B

Ta có $f'(x)=x^2(2x-1)^2(x+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\ (kep) \\ x=\dfrac{1}{2}\ (kep) \\ x=-1 \end{array}\right.$

Vì phương trình $f'(x)=0$ có 1 nghiệm bội lẻ nên hàm số đã cho có 1 cực trị.

Ví dụ 12: hàm số $y=f(x)$ liên tục trên R và có đồ thị có 3 điểm cực trị như hình dưới đây. Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f\left(x^3-3x+2\right)$ là



A. 5. **B.** 9. **C.** 11. **D.** 7.

Lời giải

Chọn D

Ta có $g'(x)=(3x^2-3)f'(x^3-3x+2)$, $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm 1 \\ x^3-3x+2=m_1 \quad (1) \\ x^3-3x+2=m_2 \quad (2) \\ x^3-3x+2=m_3 \quad (3) \end{array}\right.$, với

$m_1 \in (-4;-1); m_2 \in (-1;0); m_3 \in (0;1)$

Xét hàm số $y=x^3-3x+2$, có $y'=3x^2-3$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

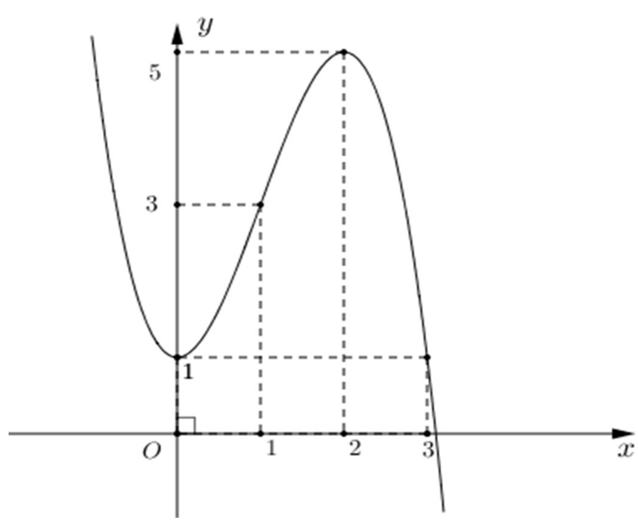
Với $m_1 \in (-4;-1) \Rightarrow (1)$ có 1 nghiệm

Với $m_2 \in (-1;0) \Rightarrow (2)$ có 1 nghiệm

Với $m_3 \in (0;1) \Rightarrow (3)$ có 3 nghiệm phân biệt

Vậy $g'(x)=0$ có 7 nghiệm bội lẻ, nên có 7 điểm cực trị.

Ví dụ 13: Cho hàm đa thức bậc ba $y=f(x)$ như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=f(f(x)+m)$ có đúng 6 điểm cực trị?

A. 4. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Giả sử $y=f\left(x\right)=ax^3+bx^2+cx+d$.

Vì đồ thị của hàm số $y=f\left(x\right)$ đi qua các điểm có toạ độ là $\left(0;1\right),\left(1;3\right),\left(2;5\right),\left(3;1\right)$

$$\Rightarrow\begin{cases}d=1\\a+b+c+d=3\\8a+4b+2c+d=5\\27a+9b+3c+d=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1\\b=3\\c=0\\d=1\end{cases}\Rightarrow f\left(x\right)=-x^3+3x^2+1$$

$$\Rightarrow f'\left(x\right)=-3x^2+6x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right..$$

Xét hàm số $y=f\left(f\left(x\right)+m\right)\Rightarrow y'=f'\left(x\right).f'\left(f\left(x\right)+m\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f'\left(x\right)=0\\f'\left(f\left(x\right)+m\right)=0\end{array}\right.$

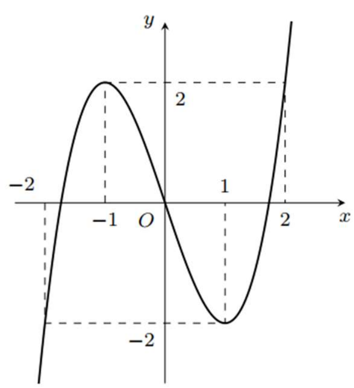
$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\\f\left(x\right)+m=0\\f\left(x\right)+m=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\\f\left(x\right)=-m\\f\left(x\right)=-m+2\end{array}\right..$$

Hàm số $y=f\left(f\left(x\right)+m\right)$ có đúng 6 điểm cực trị $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}-m\le1\\-m+2>1\end{cases}\\\begin{cases}-m+2\ge5\\-m<5\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-1\le m<1\\-5<m\le-3\end{array}\right..$

Mà $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\left\{-4;-3;-1;0\right\}$.

Vậy có 4 giá trị m nguyên thoả mãn yêu cầu bài toán.

Ví dụ 14: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $y=\sqrt{4-f^2\left(x\right)}$ có bao nhiêu điểm cực trị?



A. 4. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện $4-f^2\left(x\right)\ge0\Leftrightarrow-2\le f\left(x\right)\le2\Leftrightarrow-2\le x\le2$.

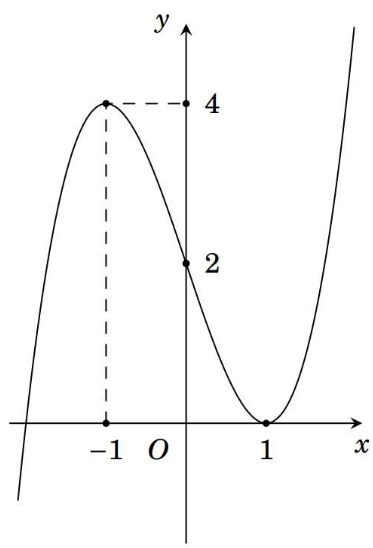
Ta có $y'=\dfrac{-1}{\sqrt{4-f^2(x)}}.f(x).f'(x)$; $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=0\\ f'(x)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=a\in(-2;-1)\\ x=0\\ x=b\in(1;2)\\ x=-1\\ x=1.\end{array}\right.$

Lập bảng biến thiên

x	-2		a		-1		0		1		b		2
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

Dựa vào bảng biến thiên, ta có hàm số đã cho có 5 điểm cực trị.

Ví dụ 15: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số $y=f(x)-2x$ là



A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y'=f'(x)-2$.

Số điểm cực trị của hàm số $y=f(x)-2x$ là số nghiệm đơn (hoặc bội lẻ) của phương trình $y'=0\Leftrightarrow f'(x)-2=0\Leftrightarrow f'(x)=2$.

Số nghiệm của phương trình $y=f(x)-2x$ là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f'(x)$ và đường thẳng $y=2$. Dựa vào đồ thị hàm số $y=f'(x)$, phương trình $f'(x)=2$ có 3 nghiệm đơn hay hàm số có 3 điểm cực trị.

Ví dụ 16: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đạo hàm $f'(x)=(x+1)(2x^2-3x-9),\forall x\in\mathbb{R}$. Hàm số $g(x)=f(x)+x^3-3x^2-9x+6$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Ta có $g(x)=f(x)+x^3-3x^2-9x+6$

$\Rightarrow g'(x)=f'(x)+3x^2-6x^2-9=(x+1)(2x^2-3x-9)+(x+1)(3x-9)=(x+1)(2x^2-18)$

Ta có $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=\pm 3 \end{array}\right.$.

Do $g'(x)=0$ có 3 nghiệm bội lẻ nên $g(x)$ có 3 điểm cực trị.

Dạng 2. Một số bài tập có tham số m

Ví dụ 1: Cho hàm số $y=-x^3-mx^2+(4m+9)x+5$, với m là tham số. Số giá trị nguyên của m để hàm số đã cho nghịch biến trên $(-\infty;+\infty)$ là

A. 5. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow y'=-3x^2-2mx+4m+9\le 0, \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-3<0\,(ld) \\ \Delta'=m^2+3(4m+9)\le 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow m^2+12m+27\le 0 \Leftrightarrow -9\le m\le -3$.

Mà $m\in\mathbb{Z} \Rightarrow m\in\{-9;-8;-7;-6;....;-3\}$

Vậy có 7 số nguyên thỏa mãn.

Ví dụ 2: Hàm số $y=\dfrac{x+m}{x+1}$ đồng biến trên từng khoảng xác định khi và chỉ khi tham số m thỏa mãn

A. $m<1$. **B.** $m\le 1$. **C.** $m\ge 1$. **D.** $m>1$.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định $D=\mathbb{R}\backslash\{-1\}$.

$y=\dfrac{x+m}{x+1} \Rightarrow y'=\dfrac{1-m}{(x+1)^2}$.

Hàm số đã cho đồng biến trên từng khoảng xác định $\Leftrightarrow y'>0, \forall x\ne -1 \Rightarrow 1-m>0 \Leftrightarrow m<1$.

Ví dụ 3: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=\dfrac{mx+4}{x+m}$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$.

A. $m\in(-2;2)$. **B.** $m\in(-2;-1)$. **C.** $m\in(-2;2]$. **D.** $m\in(-2;-1]$.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định $D=\mathbb{R}\backslash\{-m\}$.

* $y'=\dfrac{m^2-4}{(x+m)^2}$.

* ycbt $\Leftrightarrow y'<0,\ \forall x\in(-\infty;1) \Leftrightarrow \begin{cases} -m\notin(-\infty;1) \\ m^2-4<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\le -1 \\ -2<m<2 \end{cases} \Leftrightarrow -2<m\le -1$.

Ví dụ 4: Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số

$y = \frac{m}{3}x^3 - 2mx^2 + (3m+5)x + 2023$ đồng biến trên $(-\infty;+\infty)$?

A. 2. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

TXĐ: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = mx^2 - 4mx + (3m+5)$.

Xét hai trường hợp sau

Khi $m = 0$ thì $y' = 5 > 0 \Rightarrow$ hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Khi $m \neq 0$.

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì $y' \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Nghĩa là

$$mx^2 - 4mx + (3m+5) \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ 4m^2 - m(3m+5) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m \leq 5.$$

Vậy có 6 giá trị thỏa mãn đề bài.

Ví dụ 5: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10;10]$ sao cho hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + (m-1)x - 1$ nghịch biến trên $(0;+\infty)$?

A. 8. **B.** 7. **C.** 10. **D.** 12.

Lời giải

Chọn A

$y = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + (m-1)x - 1 \Rightarrow y' = -x^2 + 4x + m - 1$.

Hàm số nghịch biến trên $(0;+\infty) \Leftrightarrow y' \leq 0, \forall x \in (0;+\infty) \Leftrightarrow -x^2 + 4x + m - 1 \leq 0, \forall x \in (0;+\infty)$.

$\Leftrightarrow m \leq x^2 - 4x + 1, \forall x \in (0;+\infty)$.

Xét hàm số $g(x) = x^2 - 4x + 1$

Bảng biến thiên của hàm số $g(x) = x^2 - 4x + 1$ trên $(0;+\infty)$.

x	0		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Từ BBT suy ra $m \leq -3$ thì hàm số nghịch biến trên $(0;+\infty)$.

Do m nguyên và thuộc đoạn $[-10;10]$ nên có 8 giá trị nguyên của tham số m.

Ví dụ 6: Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm $f'(x)$ như hình vẽ bên dưới. Số giá trị nguyên của tham số m để hàm số $f(x^2 - 2x + m)$ đồng biến trên khoảng $(1;3)$ là

x	$-\infty$		-3		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

A. 5. **B.** 8. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D

Từ bảng xét dấu $f'(x)$, ta có $f'(x)\ge 0 \Leftrightarrow -3\le x\le 4$.

Xét hàm số $g(x)=f(x^2-2x+m)$. Ta có $g'(x)=(2x-2).f'(x^2-2x+m)$.

Do $(2x-2)>0,\forall x\in(1;3)$, nên để hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;3)$

$\Leftrightarrow g'(x)=(2x-2).f'(x^2-2x+m)\ge 0,\forall x\in(1;3)\Leftrightarrow f'(x^2-2x+m)\ge 0,\forall x\in(1;3)$

$\Leftrightarrow -3\le x^2-2x+m\le 4,\forall x\in(1;3)\Leftrightarrow -m-3\le x^2-2x\le -m+4,\forall x\in(1;3)$. (1)

Xét hàm số $h(x)=x^2-2x$ trên $(1;3)$. Ta có $h'(x)=2x-2>0,\forall x\in(1;3)$ nên hàm số $h(x)$ đồng biến trên $(1;3)$.

Suy ra $(1)\Leftrightarrow \begin{cases}-m-3\le h(1)\\ -m+4\ge h(3)\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}-m-3\le -1\\ -m+4\ge 3\end{cases}\Leftrightarrow -2\le m\le 1$.

Do $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{-2;-1;0;1\}$.

Ví dụ 7: Cho hàm số $y=f(x)=x^3-mx^2-x+1$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=f(|x|+1)$ bằng 5.

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

Chọn D

Ta có:

$y=g(x)=f(|x|+1)=(|x|+1)^3-m(|x|+1)^2-(|x|+1)+1=|x|^3+(3-m)|x|^2+(2-2m)|x|+1-m$

Xét hàm số: $h(x)=x^3+(3-m)x^2+(2-2m)x+1-m$. Để số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=f(|x|+1)$ bằng 5 thì hàm số $h(x)=x^3+(3-m)x^2+(2-2m)x+1-m$ có hai điểm cực trị dương, hay phương trình $h'(x)=3x^2+2(3-m)x+2-2m=0$ có hai nghiệm dương phân biệt.

Suy ra: $\begin{cases}\Delta'=(3-m)^2-3(2-2m)=m^2+3>0\\ \dfrac{-2(3-m)}{3}>0\\ \dfrac{2-2m}{3}>0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}m>3\\ m<1\end{cases}$ (vô lí).

Vậy không có giá trị nào của m thỏa mãn.

Ví dụ 8: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $f'(x)=x^3-4x$. Tìm tất cả các giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-22;22]$ để hàm số $g(x)=f(x^2-2x-m)$ có 7 cực trị.

A. 21. **B.** 22. **C.** 23. **D.** 24.

Lời giải

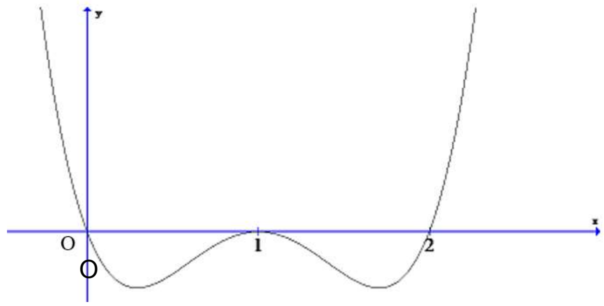
Ta có $f'(x)=0\Leftrightarrow x(x^2-4)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\ x=\pm 2\end{array}\right.$.

Xét $g'(x)=(2x-2).f'(x^2-2x-m)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x^2-2x-m=0 \\ x^2-2x-m=-2 \\ x^2-2x-m=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x^2-2x=m\ (1) \\ x^2-2x=m-2\ (2) \\ x^2-2x=m+2\ (3) \end{array}\right.$

Để hàm số $g(x)$ có 7 cực trị thì mỗi phương trình $(1),(2),(3)$ có 2 nghiệm phân biệt khác 1

$\Leftrightarrow m-2>-1 \Leftrightarrow m>1$, lại có $m\in\mathbb{Z}$ và $m\in[-22;22] \Rightarrow m\in\{2;3;4;...;22\}$

Ví dụ 9: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $y=f'(x)$ liên tục, xác định với mọi $x\in\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x)=f(x^2-8x+m)$ có 5 điểm cực trị?

A. 15. **B.** 16. **C.** 17. **D.** 18.

Lời giải

Chọn A

Ta có $g'(x)=2(x-4)f'(x^2-8x+m)$

$g'(x)=0 \Leftrightarrow 2(x-4)f'(x^2-8x+m)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x^2-8x+m=1\ (\text{nghiệm bội } 2) \\ x^2-8x+m=0\quad (1) \\ x^2-8x+m=2\quad (2) \end{array}\right.$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow g'(x)=0$ có 5 nghiệm bội lẻ $\Leftrightarrow$ mỗi phương trình (1), (2) đều có hai nghiệm phân biệt khác $4 \Leftrightarrow \begin{cases} 16-m>0 \\ 16-m+2>0 \\ m\neq 16 \\ m\neq 18 \end{cases} \Leftrightarrow m<16$.

Vậy có 15 giá trị m nguyên dương thỏa mãn điều kiện.

Ví dụ 10: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2-x, \forall x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=f(x^4+3x^2+2+m)$ có đúng 3 cực trị?

A. 2. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm $g(x)=f(x^4+3x^2+2+m)$.

Có $g'(x)=(4x^3+6x).f'(x^4+3x^2+2+m)$.

Cho

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}4x^3+6x=0\\ f'\left(x^4+3x^2+2+m\right)=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\ x^4+3x^2+2+m=0\\ x^4+3x^2+2+m=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\ x^4+3x^2+2=-m\\ x^4+3x^2+2=-m+1\end{array}\right.$$

Bảng biến thiên của hàm $h(x)=x^4+3x^2+2$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

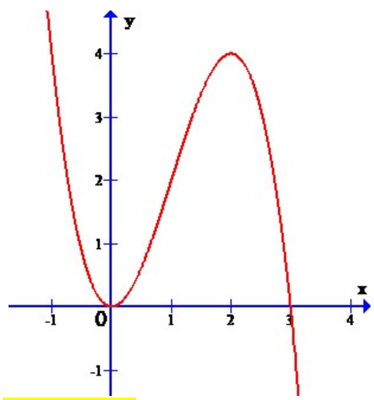
Để hàm số có đúng 3 cực trị thì $\begin{cases}-m+1>2\\ -m\le 2\end{cases} \Leftrightarrow -2\le m<-1$.

Vậy có 1 giá trị nguyên của m thỏa yêu cầu bài toán.

III. Những lỗi học sinh thường mắc (nếu có).

IV. Hệ thống câu hỏi ôn tập:

Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết đường cong trong hình vẽ bên dưới là đồ thị của hàm số $y=f'(x)$. Khi đó, hàm số $y=f\left(x^2-1\right)$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?



A. $(-1;1)$. **B.** $(-2;0)$. **C.** $(-4;-2)$. **D.** $(0;2)$.

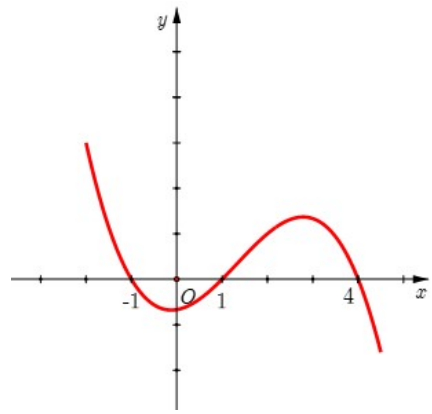
Lời giải

Chọn B

Ta có: $y'=2x.f'\left(x^2-1\right)\le 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\le 0\\ f'\left(x^2-1\right)\ge 0\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge 0\\ f'\left(x^2-1\right)\le 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\le 0\\ x^2-1\le 3\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge 0\\ x^2-1\ge 3\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\le 0\\ -2\le x\le 2\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge 0\\ \left[\begin{array}{l}x\le -2\\ x\ge 2\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-2\le x\le 0\\ x\ge 2\end{array}\right.$$

Câu 2. Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Hàm số $y = f\left(x^2\right)$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(0;2)$. **B.** $\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$. **C.** $(-2;0)$. **D.** $\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\left(f\left(x^2\right)\right)' = 2x.f'\left(x^2\right)$.

Khi đó, $\left(f\left(x^2\right)\right)' = 0 \Leftrightarrow 2x.f'\left(x^2\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = 1 \\ x^2 = 4 \end{array}\right.$.

Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y		↗		↘		↗		↘		↗		↘	

Dựa vào bảng xét dấu suy ra hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;10) \supset \left(0;\dfrac{1}{2}\right)$.

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, dấu của đạo hàm được cho bởi bảng sau

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y = f(2x-2)$ nghịch biến trong khoảng nào?

A. $(-\infty;-1)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(-1;1)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y' = (2x-2)'.f'(2x-2) = 2f'(2x-2)$

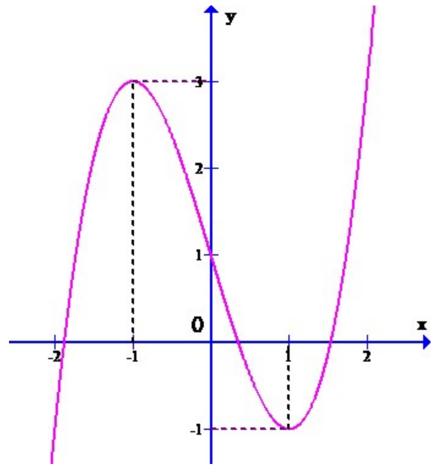
Khi $y' = 0 \Leftrightarrow f'(2x-2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-2 = 0 \\ 2x-2 = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2 \end{array}\right.$

Bảng xét dấu $y = f(2x-2)$

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$2f'(2x-2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;2)$.

Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ



Hàm số $y=f\left(1-x-x^3\right)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)$. **B.** $(-1;2)$. **C.** $(0;5)$. **D.** $(1;+\infty)$.

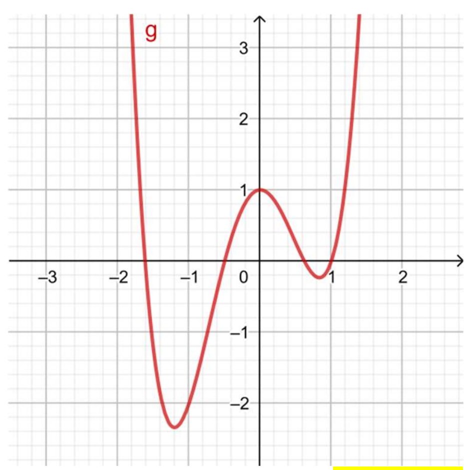
Lời giải

Chọn D

Hàm số nghịch biến khi $y'=\left(-1-3x^2\right)f'\left(1-x-x^3\right)\le 0$

$\Leftrightarrow f'\left(1-x-x^3\right)\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}1-x-x^3\ge 1\\ 1-x-x^3\le -1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x^3+x\le 0\\ x^3+x-2\ge 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\le 0\\ x\ge 1\end{array}\right.$

Câu 5. Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$, có đạo hàm $f'(x)$ như hình vẽ bên dưới. Hàm số $y=f(x)+\frac{x^2}{2}-x$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây ?

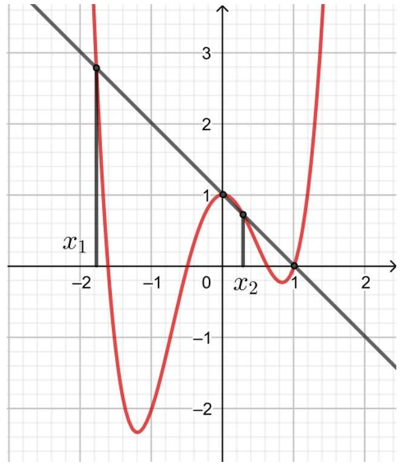


A. $(0;1)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(-1;0)$. **D.** $(-2;-1)$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $h(x)=f(x)+\frac{x^2}{2}-x$. Ta có $h'(x)=f'(x)+x-1$



$h'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=-x+1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=x_1 \\ x=0 \\ x=x_2 \\ x=1 \end{array}\right.$ (hình vẽ)

Trên khoảng $(-1;0)$ đồ thị $f'(x)$ nằm phía dưới đường thẳng $y=-x+1$ nên $h'(x)<0$ hay hàm số $h(x)$ nghịch biến.

Câu 6. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như bảng sau.

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Hỏi hàm số $y=f\left(x+\frac{1}{x}\right)$ nghịch biến trên khoảng nào?

A. $\left(-\frac{1}{2};0\right)$. **B.** $\left(0;\frac{1}{2}\right)$. **C.** $\left(-2;-\frac{1}{2}\right)$. **D.** $\left(\frac{1}{2};2\right)$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $f'(x)=a(x+2)x(x-2)$ (với $a<0$) $\Rightarrow f'\left(x+\frac{1}{x}\right)=a\left(x+\frac{1}{x}+2\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x+\frac{1}{x}-2\right)$

$\Leftrightarrow f'\left(x+\frac{1}{x}\right)=\frac{a(x+1)^2(x^2+1)(x-1)^2}{x^3}$.

Ta có $y=f\left(x+\frac{1}{x}\right) \Rightarrow y'=\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)f'\left(x+\frac{1}{x}\right)=\frac{a(x^2-1)(x+1)^2(x^2+1)(x-1)^2}{x^5}$.

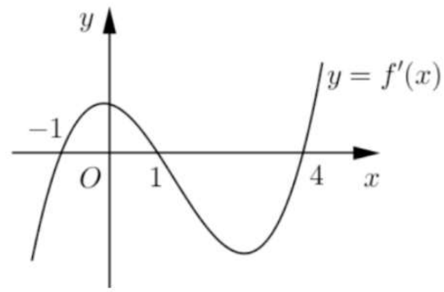
$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \end{array}\right.$.

Ta có bảng xét dấu đạo hàm

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

Dựa vào bảng xét dấu suy ra hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;0)\supset\left(-\frac{1}{2};0\right)$.

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ



Hàm số $y = f(|3-x|)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(4;7)$. **B.** $(-\infty;-1)$. **C.** $(2;3)$. **D.** $(-1;2)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y = f(|3-x|) = \begin{cases} f(3-x), x \le 3 \\ f(x-3), x > 3 \end{cases} \Rightarrow y' = \begin{cases} -f'(3-x), x < 3 \\ f'(x-3), x > 3 \end{cases}$

Xét: $f'(3-x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3-x=-1 \\ 3-x=1 \\ 3-x=4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4\,(l) \\ x=2\,(n) \\ x=-1\,(n) \end{array}\right.$

Xét: $f'(x-3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-3=-1 \\ x-3=1 \\ x-3=4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2\,(l) \\ x=4\,(n) \\ x=7\,(n) \end{array}\right.$

y' không xác định tại $x = 3$.

BBT:

x	$-\infty$		-1		2		3		4		7		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	0	$+$	
y		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;2)$.

Câu 8: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m+2)x - 3$ đồng biến trên $(-\infty;+\infty)$

A. Vô số. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D

$y' = x^2 - 2mx + m + 2$

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \ge 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x^2 - 2mx + m + 2 \ge 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \Delta' \le 0 \Leftrightarrow m^2 - m - 2 \le 0 \Leftrightarrow -1 \le m \le 2 \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m \in \{-1;0;1;2\}$

Vậy có 4 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn bài toán.

Câu 9: Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=\dfrac{mx+1}{x+m}$ nghịch biến trên từng khoảng xác định là

A. $(-\infty;-1)$. **B.** $(-1;1)$. **C.** $(1;+\infty)$. **D.** $(-\infty;1)$.

Lời giải

Chọn B

TXĐ: $D=R\setminus\{-m\}$

$y'=\dfrac{m^2-1}{(x+m)^2}$.

Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định $\Leftrightarrow m^2-1<0\Leftrightarrow -1<m<1$

Câu 10: Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y=\dfrac{2x+4}{m-x}$ đồng biến trên $(1;+\infty)$

A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Để hàm số đồng biến trên $(1;+\infty)$ thì $y'>0$ với $\forall x\in(1;+\infty)$.

Ta có $\begin{cases}2m-4(-1)>0\\ m-x\neq 0, x\in(1;+\infty)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>-2\\ x\neq m, x\in(1;+\infty)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>-2\\ m\le 1\end{cases}\Leftrightarrow -2<m\le 1$.

Vậy có 3 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 11: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=(4-m^2)x^3+(m-2)x^2+x+m-1$ đồng biến trên $(-\infty;+\infty)$?

A. 5. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y'=3(4-m^2)x^2+2(m-2)x+1$.

* Với $m=-2$ không thỏa mãn.

* Với $m=2$ thỏa mãn.

* Với $m\neq\pm 2$. Ta có $\Delta'=(m-2)^2-3(4-m^2)=4m^2-4m-8$

Để thỏa mãn yêu cầu bài toán $\begin{cases}\Delta'\le 0\\ 4-m^2>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-m-2\le 0\\ -2<m<2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1\le m\le 2\\ -2<m<2\end{cases}\Leftrightarrow -1\le m<2$.

Do $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m=-1, m=0, m=1$ và $m=2$.

Câu 12: Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10;10]$ để hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3-2x^2+mx-3$ đồng biến trên khoảng $(2;6)$?

A. 6. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 7.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y'=x^2-4x+m$.

Hàm số đồng biến trên $(2;6)\Leftrightarrow y'\ge 0\quad\forall x\in(2;6)\Leftrightarrow m\ge -x^2+4x\quad\forall x\in(2;6)$.

Xét $g(x)=-x^2+4x\quad\forall x\in(2;6)$.

Ta thấy hàm số $g(x)=-x^2+4x$ nghịch biến trên khoảng $(2;6)$.

Do đó $m \ge g(x) \quad \forall x \in (2;6) \Leftrightarrow m \ge \underset{x\in[2;6]}{Max}\, g(x) \Leftrightarrow m \ge g(2) \Leftrightarrow m \ge 4$.

Vậy $m \in \{4;\ 5;\ 6;\ 7;\ 8;\ 9;\ 10\}$. Vậy có 7 giá trị của m.

Câu 13: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-10;10]$ để hàm số $y = x^3 + mx^2 - x + 3$ nghịch biến trên $(2;4)$?

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn C

Ta có TXĐ $D = \mathbb{R}$.

Hàm số nghịch biến trên $(2;4)$ khi và chỉ khi $y' = 3x^2 + 2mx - 1 \le 0, \forall x \in (2;4)$

$\Leftrightarrow m \le \dfrac{1-3x^2}{2x}, \forall x \in (2;4)\ (1)$.

Xét hàm số $g(x) = \dfrac{1-3x^2}{2x}$ trên $(2;4)$.

Ta có $g'(x) = -\dfrac{3x^2+1}{2x^2} < 0, \forall x \in (2;4)$.

Do hàm số $g(x) = \dfrac{1-3x^2}{2x}$ liên tục tại $x = 2$ và $x = 4$ nên

$(1) \Leftrightarrow m \le \min\limits_{(2;4)} g(x) \Leftrightarrow m \le g(4) \Leftrightarrow m \le -\dfrac{47}{8}$.

Vì m nguyên thuộc $[-10;10]$ nên $m \in \{-10;-9;-8;-7;-6\}$.

Câu 14: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = -m^2x^5 - mx^3 - (m^2 - m - 20)x^2 + 2021$ nghịch biến trên $(-\infty;+\infty)$.

A. 7. **B.** 2. **C.** 5. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

TXĐ: $D = \mathbb{R}$

$y' = -5m^2x^4 - 3mx^2 - 2(m^2 - m - 20)x$

Ycbt $\Leftrightarrow y' \le 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow x\left[-5m^2x^3 - 3mx - 2(m^2 - m - 20)\right] \le 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Đặt $g(x) = -5m^2x^3 - 3mx - 2(m^2 - m - 20)$

Ycbt $\Rightarrow g(0) = 0 \Leftrightarrow -2(m^2 - m - 20) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 5 \\ m = -4 \end{array}\right.$

Thử lại: $m = 5 \Rightarrow y' = -125x^4 - 15x^2 \le 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ nhận $m = 5$.

$m = -4 \Rightarrow y' = -80x^4 + 12x^2 \le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \le \dfrac{-\sqrt{15}}{10} \\ x = 0 \\ x \ge \dfrac{\sqrt{15}}{10} \end{array}\right. \Rightarrow$ loại $m = 4$.

Vậy, $m = 5$ thoả mãn yêu cầu bài toán.

Câu 15: Cho hàm số $y=x^3-(m+1)x^2-(2m^2-3m+2)x+2m(2m-1)$. Biết $[a;b]$ là tập tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số đã cho đồng biến trên $[2;+\infty)$. Tổng $a+b$ bằng

A. $-\frac{1}{2}$. **B.** $-\frac{3}{2}$. **C.** 0. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\forall x\in\mathbb{R}, y'=3x^2-2(m+1)x-2m^2+3m-2$

$y'=0$ luôn có 2 nghiệm phân biệt $\dfrac{m+1\pm\sqrt{7m^2-7m+7}}{3}$ với mọi m

Yêu cầu bài toán $[2;+\infty)\subset\left[\dfrac{m+1+\sqrt{7m^2-7m+7}}{3}\right)$, nên $\dfrac{m+1+\sqrt{7m^2-7m+7}}{3}\le 2$

$\Leftrightarrow\sqrt{7m^2-7m+7}\le 5-m\Leftrightarrow -2\le m\le\dfrac{3}{2}$.

Vậy $a+b=-\dfrac{1}{2}$

Câu 16: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=\dfrac{\tan x-2}{\tan x-m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)$.

A. $m\le 0$ hoặc $1\le m<2$ **B.** $m\le 0$ **C.** $1\le m<2$ **D.** $m\ge 2$

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=\tan x$, vì $x\in\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)\Rightarrow t\in(0;1)$

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{t-2}{t-m}\ \forall t\in(0;1)$. Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{m\}$

Ta có $f'(t)=\dfrac{2-m}{(t-m)^2}$.

Ta thấy hàm số $t(x)=\tan x$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)$. Nên để hàm số $y=\dfrac{\tan x-2}{\tan x-m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)$ khi và chỉ khi: $f'(t)>0\ \forall t\in(0;1)$

$$\Leftrightarrow\frac{2-m}{(t-m)^2}>0\ \forall t\in(0;1)\Leftrightarrow\begin{cases}2-m>0\\ m\notin(0;1)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<2\\ \left[\begin{array}{l}m\le 0\\ m\ge 1\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow m\in(-\infty;0]\cup[1;2)$$

Câu 17: Tìm m để hàm số $y=\dfrac{\cos x-2}{\cos x-m}$ nghịch biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$

A. $\left[\begin{array}{l}m\ge 2\\ m\le -2\end{array}\right.$ **B.** $m>2$ **C.** $\left[\begin{array}{l}m\le 0\\ 1\le m<2\end{array}\right.$ **D.** $-1<m<1$

Lời giải

Chọn C

Ta có: $y'=\dfrac{2-m}{(\cos x-m)^2}.(-\sin x), \sin x>0, \forall x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Do đó: Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ khi và chỉ khi

$$y'<0,\forall x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow\begin{cases}2-m>0\\ \cos x-m\neq 0\,\forall x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<2\\ m\notin(0;1)\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\le 0\\ 1\le m<2\end{array}\right..$$

Câu 18: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x^5}{5}-x^2+(m-1)x-4029$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y=|f(x-1)+2022|$ nghịch biến trên $(-\infty;2)$?

A. 2005. **B.** 2006. **C.** 2007. **D.** 2008.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t=x-1$. Đặt $g(t)=f(t)+2022$ $,t\in(-\infty;1)$.

$y(t)=|f(t)+2022|$ nghịch biến trên $(-\infty;1)$ thì điều kiện là

$$\begin{cases}f(t)+2022<0\\ f'(t)>0\end{cases},\forall t\in(-\infty;1)\Leftrightarrow\begin{cases}f(1)+2022<0\,(1)\\ t^4-2t+m-1>0\,(2)\end{cases},\forall t\in(-\infty;1)$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{5}-1+(m-1)1-2007<0\,(1)\\ t^4-2t+m-1>0\,(2)\end{cases},\forall t\in(-\infty;1)\Leftrightarrow\begin{cases}m<\dfrac{10056}{5}\,(1)\\ t^4-2t+m-1>0\,(2)\end{cases},\forall t\in(-\infty;1)$$

$t^4-2t+m-1>0\Leftrightarrow m>-t^4+2t+1\,,t\in(-\infty;1)$.

Đặt $h(t)=-t^4+2t+1\Rightarrow h'(t)=-4t^3+2\Rightarrow h'(t)=0\Rightarrow t=\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}}$.

Bảng biến thiên:

t	$-\infty$		$\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$		1
g'(t)		+	0	–	
g(t)	$-\infty$	↗	$1+\dfrac{3}{\sqrt[3]{2}}\approx 2.19$	↘	0

Điều kiện $m>1+\dfrac{3}{\sqrt[3]{2}}\approx 2.19$.(3).

Từ (1) và (3) thì số giá trị nguyên của m là $2008-3+1=2006$.

Câu 19. Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m để hàm số $y=x^3+mx-\dfrac{1}{5x^2}$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$

A. 2. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y'=3x^2+m+\dfrac{2}{5x^3}$, $\forall x\in(0;+\infty)$

Để hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty) \Leftrightarrow y' = 3x^2 + m + \dfrac{2}{5x^3} \geq 0, \forall x \in (0;+\infty)$. Dấu bằng xảy ra tại hữu hạn điểm

$\Leftrightarrow m \geq -3x^2 - \dfrac{2}{5x^3} = g(x),\ \forall x \in (0;+\infty)$

$m \geq \max\limits_{(0;+\infty)} g(x)$. Ta có: $g'(x) = -6x + \dfrac{6}{5x^4} = \dfrac{-30x^5 + 6}{5x^4}$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{\sqrt[5]{5}}$

Ta có bảng biến thiên

x	0		$\dfrac{1}{\sqrt[5]{5}}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-\sqrt[5]{5^3}$	$\searrow$	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $m \geq -\sqrt[5]{5^3}$. Vì m nguyên âm nên $m \in \{-1;-2\}$. Vậy có 2 giá trị của m thỏa mãn.

Câu 20. Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-2		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn $-10 < m < 10$ và hàm số $y = f\left(x^2 + 2x + m\right)$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$?

A. 6. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 5.

Lời giải

Để hàm số $y = f\left(x^2 + 2x + m\right)$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$ thì

$y' = (2x+2).f'(x^2 + 2x + m) \geq 0, \forall x \in (0;1)$

Do $2x + 2 > 0, \forall x \in (0;1)$ nên ta có:

$(2x+2).f'(x^2 + 2x + m) \geq 0, \forall x \in (0;1)$

$\Leftrightarrow f'(x^2 + 2x + m) \geq 0, \forall x \in (0;1)$

Đặt $u = x^2 + 2x + m$, do $x \in (0;1) \Rightarrow u \in (m; m+3)$.

$\Rightarrow f'(x^2 + 2x + m) \geq 0, \forall x \in (0;1)$

$\Rightarrow f'(u) \geq 0, \forall u \in (m; m+3)$

Từ bảng xét dấu đạo hàm của hàm số $f(x)$ ta có hai trường hợp:

+ Trường hợp 1: $(m; m+3) \subset (0;3) \Leftrightarrow m = 0$

+ Trường hợp 2: $(m; m+3) \subset (-\infty; -2) \Leftrightarrow m + 3 \leq -2 \Leftrightarrow m \leq -5$

Kết hợp điều kiện m nguyên và $-10 < m < 10$ ta thấy $m \in \{-9;-8;-7;-6;-5;0\}$ thỏa mãn bài toán.

Vậy có 6 giá trị nguyên m thỏa mãn bài toán.

Câu 21: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-1)^2\left(x^2 + mx + 9\right)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên dương m để hàm số $g(x) = f(3-x)$ đồng biến trên khoảng $(3;+\infty)$?

A. 6. **B.** 7. **C.** 5. **D.** 8.

Lời giải

Chọn A

Ta có $g'(x) = -f'(3-x) = (x-3)(x-2)^2\left((3-x)^2 + m(3-x)+9\right)$.

$g(x)$ đồng biến trên $(3;+\infty) \Leftrightarrow g'(x) \geq 0, \forall x \in (3;+\infty)$

$\Leftrightarrow (3-x)^2 + m(3-x) + 9 \geq 0, \forall x \in (3;+\infty)$

$\Leftrightarrow t^2 + mt + 9 \geq 0, \forall t \in (-\infty;0)$ (với $t = 3-x$; $x \in (3;+\infty)$ ta có $t \in (-\infty;0)$).

$\Leftrightarrow m \leq -t - \dfrac{9}{t}, \forall t \in (-\infty;0)$.

Ta có trên $(-\infty;0)$ ta có $-t$ và $-\dfrac{9}{t}$ đều là các số dương nên có $-t - \dfrac{9}{t} \geq 6$.

Vậy $m \leq -t - \dfrac{9}{t}, \forall t \in (-\infty;0) \Leftrightarrow m \leq 6$.

Câu 22: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in (-8;8)$ sao cho hàm số $y = \left|-2x^3 + 3mx - 2\right|$ đồng biến trên $(1;+\infty)$.

A. 10. **B.** 9. **C.** 8. **D.** 11.

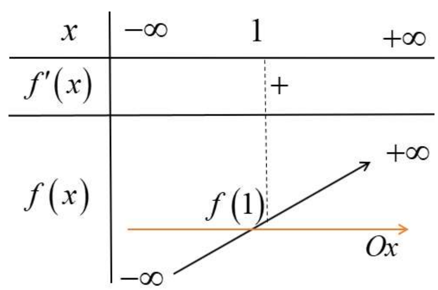
Lời giải

Chọn B

Hàm số $y = \left|-2x^3 + 3mx - 2\right|$ đồng biến trên $(1;+\infty)$ khi và chỉ khi hàm số $y = \left|2x^3 - 3mx + 2\right|$ đồng biến trên $(1;+\infty)$..

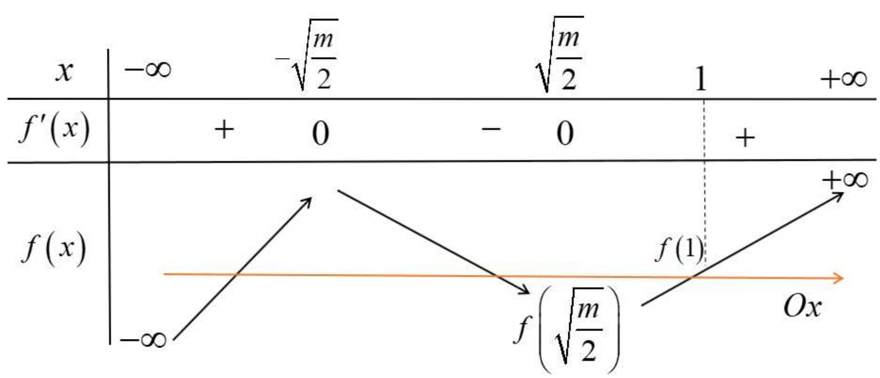
Xét hàm số $f(x) = 2x^3 - 3mx + 2 \Rightarrow f'(x) = 6x^2 - 3m$.

TH 1: Nếu $m \leq 0$ thì $f'(x) = 6x^2 - 3m \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$



Hàm số $y = \left|2x^3 - 3mx + 2\right|$ đồng biến trên $(1;+\infty) \Leftrightarrow f(1) = 4 - 3m \geq 0$ đúng với $\forall m \leq 0$.

TH 2: Nếu $m > 0$ thì $f'(x) = 6x^2 - 3m = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\dfrac{m}{2}}$



Hàm số $y = \left|x^3 - 3mx + 2\right|$ đồng biến trên $(1;+\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} f(1) = 4 - 3m \geq 0 \\ \sqrt{\dfrac{m}{2}} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq \dfrac{4}{3}$.

Do $m \in \mathbb{Z}, m \in (-8;8)$ nên $m \in \{-7,-6,...,1\}$. Vậy có 9 giá trị của m thỏa mãn .

Câu 23: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m sao cho hàm số $y = \left|-x^4 + mx^3 + 2m^2x^2 + m - 1\right|$ đồng biến trên $(1;+\infty)$. Tổng tất cả các phần tử của S là

A. -1. **B.** 0 . **C.** -2 **D.** 2 .

Lời giải

Chọn A

Đặt $g(x) = -x^4 + mx^3 + 2m^2x^2 + m - 1$ và $g'(x) = -4x^3 + 3mx^2 + 4m^2x = -x\left(4x^2 - 3mx - 4m^2\right)$

Hàm số $y = f(x) = \left|-x^4 + mx^3 + 2m^2x^2 + m - 1\right|$ đồng biến trên $(1;+\infty)$ khi và chỉ khi

$\begin{cases} g(1) \ge 0 \\ g'(x) \ge 0, \forall x \in (1;+\infty) \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} g(1) \le 0 \\ g'(x) \le 0, \forall x \in (1;+\infty) \end{cases}$

TH 1: $\begin{cases} g(1) \ge 0 \\ g'(x) \ge 0, \forall x \in (1;+\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + m - 1 \ge 0 \\ 4x^2 - 3mx - 4m^2 \le 0, \forall x \in (1;+\infty) \end{cases}$

Hệ vô nghiệm vì $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(4x^2 - 3mx - 4m^2\right) = +\infty$.

TH 2: $\begin{cases} g(1) \le 0 \\ g'(x) \le 0, \forall x \in (1;+\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + m - 1 \le 0 \\ 4x^2 - 3mx - 4m^2 \ge 0, \forall x \in (1;+\infty) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \le m \le \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ 4x^2 - 3mx - 4m^2 \ge 0, \forall x \in (1;+\infty) \end{cases}$

Ta có $4x^2 - 3mx - 4m^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{3+\sqrt{73}}{8}m \\ x = \dfrac{3-\sqrt{73}}{8}m \end{array}\right.$

+ Với $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \le m \le 0$ thì $4x^2 - 3mx - 4m^2 \ge 0, \forall x \in (1;+\infty) \Leftrightarrow \dfrac{3-\sqrt{73}}{8}m \le 1 \Leftrightarrow m \ge \dfrac{8}{3-\sqrt{73}}$

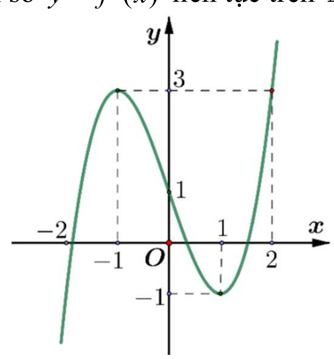
$\Rightarrow \dfrac{8}{3-\sqrt{73}} \le m \le 0, m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-1;0\}$

+ Với $0 < m \le \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ thì $4x^2 - 3mx - 4m^2 \ge 0, \forall x \in (1;+\infty) \Leftrightarrow \dfrac{3+\sqrt{73}}{8}m \le 1 \Leftrightarrow m \le \dfrac{8}{3+\sqrt{73}}$

$\Rightarrow 0 < m \le \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}, m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \varnothing$.

Kết luận: $S = \{-1;0\}$ nên tổng phần tử của S là -1

Câu 24: Cho hàm số $y = f(x)$, hàm số $y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hình vẽ dưới đây.



Số giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[0;2019]$ để hàm số $y=f(1-x)+(m-1)x+2019$ nghịch biến trên $(-1;3)$ là.

A. 0. **B.** 2016. **C.** 2018. **D.** 1.

Lời giải.

Chọn D

Đặt $h(x)=f(1-x)+(m-1)x+2019$

Ta có $h'(x)=-f'(1-x)+(m-1)$

Hàm số nghịch biến trên $(-1;3)$ khi và chỉ khi $h'(x)\le 0$,$\forall x\in(-1;3)$.

$\Leftrightarrow -f'(1-x)+m-1\le 0,\ \ \forall x\in(-1;3)$

$\Leftrightarrow f'(1-x)\ge m-1,\ \ \forall x\in(-1;3)$.

Đặt $1-x=t$.

Suy ra $f'(t)\ge m-1,\ \ \forall t\in(-2;2)$ $\Leftrightarrow \min f'(t)\ge m-1,\ \ \forall t\in(-2;2)$.

Dựa vào đồ thị $\Rightarrow -1\ge m-1\Leftrightarrow m\le 0$.

Vậy có 1 giá trị nguyên $m\in[0;2019]$ là $m=0$.

Câu 25: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=4-x^2$. Tổng các giá trị nguyên của tham số $m\in[-2021;2023]$ để hàm số $g(x)=f(x^2+x)+m\left(2\ln x-\dfrac{1}{x}\right)$ nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$ bằng

A. -2043231. **B.** 2041210. **C.** -1 **D.** -2041210.

Lời giải

Chọn A

Ta có $g'(x)=(2x+1)f'(x^2+x)+m\left(\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)=(2x+1)\left(f'(x^2+x)+\dfrac{m}{x^2}\right)$.

Để hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(1:+\infty)$ thì $(2x+1)\left(f'(x^2+x)+\dfrac{m}{x^2}\right)\le 0$ với $\forall x>1$.

$\Leftrightarrow\ f'(x^2+x)+\dfrac{m}{x^2}\le 0\ \ \forall x\in(1:+\infty)\ \Leftrightarrow\ 4-(x^2+x)^2+\dfrac{m}{x^2}\le 0,\forall x\in(1;+\infty)$

$\Leftrightarrow\ (2x)^2-(x^3+x^2)^2+m\le 0$ với $\forall x\in(1;+\infty)\Leftrightarrow\ (x^3+x^2-2x)(x^3+x^2+2x)\ge m$ với $x>1$.

Xét hàm số $h(x)=(x^3+x^2-2x)(x^3+x^2+2x)$ với $x\in(1;+\infty)$.

Ta có: $h'(x)=(3x^2+2x+2)(x^3+x^2-2x)+(x^3+x^2+2x)(3x^2+2x-2)>0,\forall x>1$.

Ta có bảng biến thiên của hàm số $h(x)$

x	$-\infty$	1		$+\infty$
$h'(x)$			$+$	
$h(x)$		0	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra $m\le 0$, kết hợp với m nguyên thuộc đoạn $[-2021;2023]$ ta được $m\in\{0;-1;-2;...;-2021\}$ và tổng các giá trị của m bằng -2043231.

Câu 26: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và bảng biến thiên như hình sau:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Số điểm cực tiểu của hàm số $g(x)=f\left(x^2+x\right)$ là

A. 2 **B.** 3 **C.** 1 **D.** 0

Lời giải

Chọn A

Ta có $g(x)=f\left(x^2+x\right)\Rightarrow g'(x)=(2x+1)f'\left(x^2+x\right)$.

Cho $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x+1=0\\ f'\left(x^2+x\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{1}{2}\\ x^2+x=-1\\ x^2+x=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{1}{2}\\ x=1\\ x=-2\end{array}\right.$.

Ta có bảng biến thiên sau

x	$-\infty$		-2		$-\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Dựa vào bảng biến thiên, ta suy ra đồ thị hàm số $g(x)$ có hai điểm cực tiểu.

Câu 27: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Bảng biến thiên của hàm số $g(x)=f'(x)$ như sau

x	-∞		-4		0		4		+∞
$g'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	
$g(x)$	+∞	$\searrow$	-3	$\nearrow$	2	$\searrow$	-3	$\nearrow$	+∞

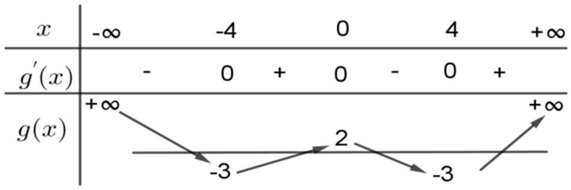
Số điểm cực trị của hàm số $y=f\left(x^2+4x\right)$ là

A. 6. **B.** 9. **C.** 5. **D.** 7.

Lời giải

Chọn D

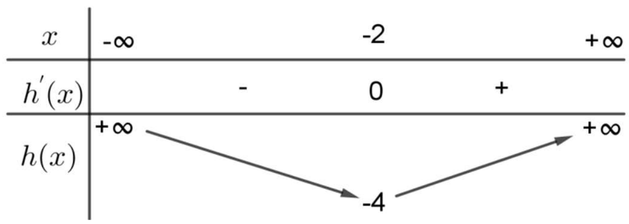
Ta có: $\left[f\left(x^2+4x\right)\right]'=(2x+4).f'\left(x^2+4x\right)$; $\left[f\left(x^2+4x\right)\right]'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\ f'\left(x^2+4x\right)=0\end{array}\right.$.



Từ bảng biến thiên ta có: $f'\left(x^2+4x\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+4x=a_1\in(-\infty;-4) \\ x^2+4x=a_2\in(-4;0) \\ x^2+4x=a_3\in(0;4) \\ x^2+4x=a_4\in(4;+\infty) \end{array}\right.$ (1).

Xét $h(x)=x^2+4x$, $h'(x)=2x+4=0 \Leftrightarrow x=-2$.

Ta có bảng biến thiên:

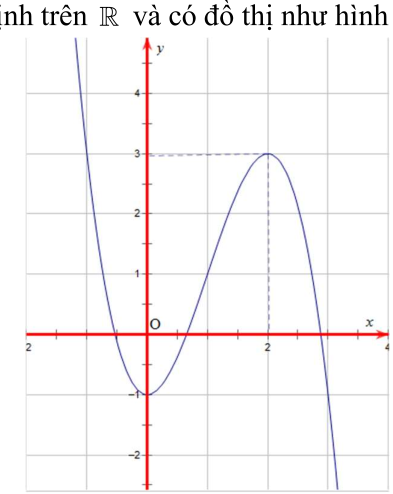


Kết hợp bảng biến thiên của $h(x)$ và hệ (1) ta thấy:

- Phương trình $x^2+4x=a_1\in(-\infty;-4)$ vô nghiệm.
- Phương trình $x^2+4x=a_2\in(-4;0)$ có 2 nghiệm khác -2.
- Phương trình $x^2+4x=a_3\in(0;4)$ có 2 nghiệm khác -2.
- Phương trình $x^2+4x=a_4\in(4;+\infty)$ có 2 nghiệm khác -2.

Vậy hàm số $y=f\left(x^2+4x\right)$ có tất cả 7 điểm cực trị.

Câu 28: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Hàm số $g(x)=f\left(x^3+x\right)$ đạt cực tiểu tại x_0. Giá trị x_0 thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(0;2)$. **B.** $(3;+\infty)$. **C.** $(1;3)$. **D.** $(-1;1)$.

Lời giải

Chọn D

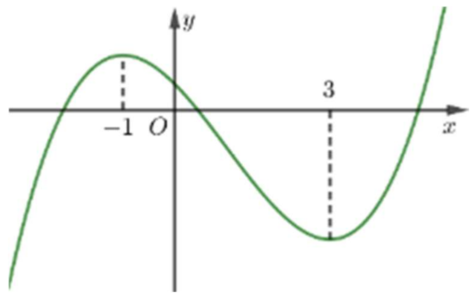
Ta có $g'(x)=\left(3x^2+1\right)f'\left(x^3+x\right)$.

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x^3+x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^3+x=0 \\ x^3+x=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \end{array}\right.$$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	↘			↗		↘	

Hàm số đạt cực tiểu tại $x_0=0$

Câu 29: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau:



Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=f(x^2-4x+m)$ có 3 điểm cực trị. Số phần tử của S là

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 5.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $y'=(2x-4)f'(x^2-4x+m)$.

$$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ f'(x^2-4x+m)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x^2-4x+m=-1 \\ x^2-4x+m=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x^2-4x=-m-1 \quad (*) \\ x^2-4x=-m+3 \end{array}\right.$$

Hàm số $y=f(x^2-4x+m)$ có 3 điểm cực trị khi và chỉ khi phương trình $(*)$ có đúng 3 nghiệm bội lẻ.

Xét hàm số: $g(x)=x^2-4x$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$ ↘	$-m+3$	-4	$-m-1$	↗ $+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy: Phương trình $(*)$ có đúng ba nghiệm bội lẻ

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -m+3>-4 \\ -m-1\le -4 \end{cases} \Leftrightarrow 3\le m<7$$

$$\Rightarrow S=\{3;4;5;6\}$$

Câu 30: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Bảng biến thiên của hàm số $g\left(x\right)=f'\left(x\right)$ như sau

x	$-\infty$		-4		0		4		$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	
$g(x)$	$+\infty$	↘	-3	↗	2	↘	-3	↗	$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $y=f\left(x^2+4x\right)$ là

A. 6. **B.** 9. **C.** 5. **D.** 7.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\left[f\left(x^2+4x\right)\right]'=\left(2x+4\right).f'\left(x^2+4x\right)$; $\left[f\left(x^2+4x\right)\right]'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\f'\left(x^2+4x\right)=0\end{array}\right.$.

x	$-\infty$		-4		0		4		$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	
$g(x)$	$+\infty$	↘	-3	↗	2	↘	-3	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có: $f'\left(x^2+4x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2+4x=a_1\in\left(-\infty;-4\right)\\x^2+4x=a_2\in\left(-4;0\right)\\x^2+4x=a_3\in\left(0;4\right)\\x^2+4x=a_4\in\left(4;+\infty\right)\end{array}\right.\ \left(1\right)$.

Xét $h(x)=x^2+4x$, $h'(x)=2x+4=0\Leftrightarrow x=-2$.
Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$h'(x)$		-	0	+	
$h(x)$	$+\infty$	↘	-4	↗	$+\infty$

Kết hợp bảng biến thiên của $h(x)$ và hệ $\left(1\right)$ ta thấy:

- Phương trình $x^2+4x=a_1\in\left(-\infty;-4\right)$ vô nghiệm.
- Phương trình $x^2+4x=a_2\in\left(-4;0\right)$ có 2 nghiệm khác -2.
- Phương trình $x^2+4x=a_3\in\left(0;4\right)$ có 2 nghiệm khác -2.
- Phương trình $x^2+4x=a_4\in\left(4;+\infty\right)$ có 2 nghiệm khác -2.

Vậy hàm số $y=f\left(x^2+4x\right)$ có tất cả 7 điểm cực trị.

Câu 31: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'\left(x\right)=2x^2+x$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Hàm số $y=f\left(x^2-2x\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $f'(x)=0 \Leftrightarrow 2x^2+x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$.

Đặt $g(x)=f(x^2-2x) \Rightarrow g'(x)=(2x-2)f'(x^2-2x)$.

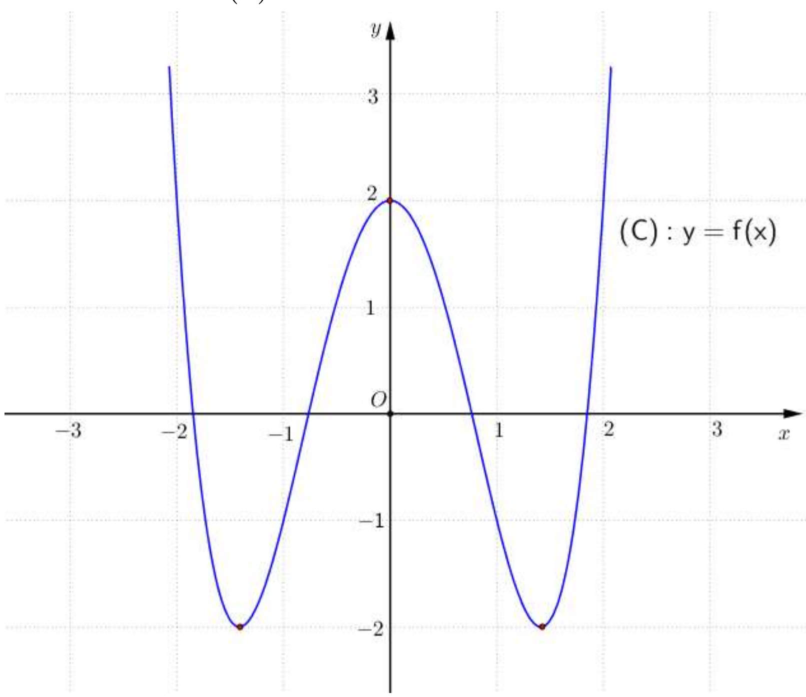
$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ f'(x^2-2x)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x^2-2x=0 \\ x^2-2x=-\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=0;\ x=2 \\ x=\dfrac{2-\sqrt{2}}{2};\ x=\dfrac{2+\sqrt{2}}{2} \end{array}\right..$$

Bảng xét dấu $g'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		0		$\frac{2-\sqrt{2}}{2}$		1		$\frac{2+\sqrt{2}}{2}$		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Vậy hàm số $y=f(x^2-2x)$ có 5 điểm cực trị.

Câu 32: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình sau:



Hỏi đồ thị hàm số $y=[f(x)]^2$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 6. **B.** 7. **C.** 8. **D.** 9.

Lời giải

Chọn B

$y=[f(x)]^2 \Rightarrow y'=2f(x).f'(x)$; $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} f(x)=0 & (1) \\ f'(x)=0 & (2) \end{array}\right.$.

Đồ thị hàm số $y=f(x)$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt và $f(x)$ đổi dấu khi x đi qua các nghiệm này, suy ra phương trình (1) có 4 nghiệm bội lẻ.

Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có 3 điểm cực trị, suy ra phương trình (2) có 3 nghiệm bội lẻ.

Nhận thấy các nghiệm bội lẻ của phương trình (1) và (2) không trùng nhau.

Suy ra đồ thị hàm số $y=\left[f(x)\right]^2$ có 7 điểm cực trị.

Câu 33: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu $f'(x)$ như sau

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Hỏi hàm số $g(x)=f\left(x^2-2x+4\right)$ có bao nhiêu điểm cực tiểu.

A. 5. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

Ta có $g'(x)=(2x-2)f'\left(x^2-2x+4\right)$.

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x-2=0\\ f'\left(x^2-2x+4\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x^2-2x+4=1\\ x^2-2x+4=3\end{array}\right..$$

$x^2-2x+4=1\Leftrightarrow x^2-2x+3=0$ (vô nghiệm).

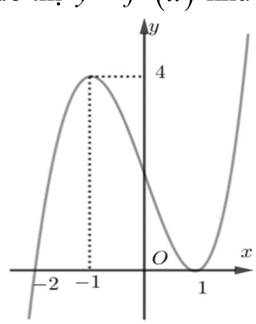
$x^2-2x+4=3\Leftrightarrow x^2-2x+1=0\Leftrightarrow x=1$ (nghiệm kép).

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy hàm số $g(x)=f\left(x^2-2x+4\right)$ có 1 điểm cực tiểu.

Câu 34: Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị $y=f'(x)$ như hình vẽ bên dưới



Hàm số $g(x)=f\left(x^2-3\right)$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

A. 3. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

+) Xét hàm số $g(x)=f\left(x^2-3\right)\Rightarrow g'(x)=2x.f'\left(x^2-3\right)$

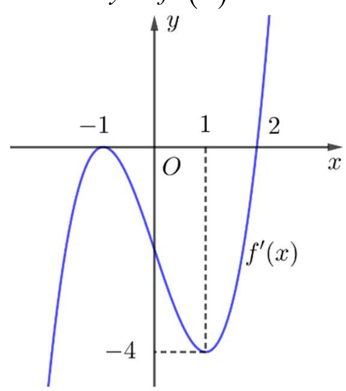
+) $g'(x)=0 \Leftrightarrow 2x.f'(x^2-3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ f'(x^2-3)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2-3=-2 \\ x^2-3=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm 1 \\ x=\pm 2 \end{array}\right.$

+) Ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x)$

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$	

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy hàm số $g(x)$ có 2 điểm cực tiểu.

Câu 35: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ.



Số giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x)=f\left(2x^2-4|x|+m-3\right)$ có 7 điểm cực trị.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Đặt $h(x)=f\left(2x^2-4x+m-3\right)$.

Suy ra $h'(x)=(4x-4).f'\left(2x^2-4x+m-3\right)$

Để $g(x)$ có 7 điểm cực trị thì $h(x)$ phải có 3 điểm cực trị dương.

Ta có: $h'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x-4=0 \\ 2x^2-4x+m-3=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ 2x^2-4x+m-5=0\,(*) \end{array}\right.$.

$h(x)$ có 3 điểm cực trị dương $\Rightarrow (*)$ có 2 nghiệm dương phân biệt, khác 1.

$\Rightarrow \begin{cases} 4-2(m-5)>0 \\ \dfrac{m-5}{2}>0 \\ 2-4+m-5\neq 0 \end{cases} \Rightarrow 5<m<7.$

Vì m nguyên nên $m=6$. Vậy có 1 giá trị nguyên của tham số m thoả mãn.