SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH BÌNH DƯƠNG

KỲ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN DỰ THI
TOÁN TUỔI THƠ TOÀN QUỐC
Năm học : 2013-2014
MÔN: TOÁN

Câu 1. (2,5 điểm)

Cho $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$ với $a,b,c \neq 0$ và $M=\frac{b^2c^2}{a}+\frac{c^2a^2}{b}+\frac{a^2b^2}{c}$

Chứng minh rằng: $M=3abc$

Câu 2. (2,5 điểm)

a) Chứng minh rằng $(x+2)^3>1+x+x^2+x^3$ với mọi giá trị x

b) Giải phương trình tìm nghiệm nguyên: $1+x+x^2+x^3=y^3$

Câu 3. (2,5 điểm)

Cho biểu thức $A=\frac{3x+3}{x^3+x^2+x+1}$

a) Tìm giá trị của x để A nhận giá trị nguyên

b) Tìm giá trị lớn nhất của A.

Câu 4. (2,5 điểm)

Cho tam giác ABC. Từ điểm M thuộc cạnh AC kẻ các đường thẳng song song với các cạnh AB và BC cắt BC tại E và AB tại F. Hãy xác định vị trí của M trên AC sao cho hình bình hành $BEMF$ có diện tích lớn nhất

ĐÁP ÁN

Câu 1.

Đặt $\frac{1}{a}=x;\frac{1}{b}=y;\frac{1}{c}=z$ thì $x+y+z=0$

Ta có: $M=\frac{b^2c^2}{a}+\frac{c^2a^2}{b}+\frac{a^2b^2}{c}=a^2b^2c^2.\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\right)=a^2b^2c^2.(x^3+y^3+z^3)$

Từ : $x+y+z=0\Rightarrow x+y=-z\Rightarrow x^3+y^3+3xy(x+y)=(-z)^3$

$\Rightarrow x^3+y^3-3xyz=-z^3$

$\Rightarrow x^3+y^3+z^3=3xyz$

Vậy $M=a^2b^2c^2.3xyz=a^2b^2c^2.3.\frac{1}{a}.\frac{1}{b}.\frac{1}{c}=3abc$

Câu 2.

a) Ta có: $(x+2)^3-(1+x+x^2+x^3)=5x^2+11x+7=5\left(x+\frac{11}{10}\right)^2+\frac{19}{20}>0$

suy ra $(x+2)^3>1+x+x^2+x^3$

b) Ta nhận thấy $1+x+x^2=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$ với mọi x

Nên $x^3<1+x+x^2+x^3=y^3$

Theo câu a): $(x+2)^3>1+x+x^2+x^3$

Suy ra : $x^3<y^3<(x+2)^3$

$\Rightarrow y^3=(x+1)^3\Leftrightarrow 1+x+x^2+x^3=(x+1)^3\Leftrightarrow x(x+1)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-1\\x=0\end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l}x=-1\Rightarrow y=0\\x=0\Rightarrow y=1\end{array}\right.$

Vậy phương trình có các nghiệm nguyên $(-1;0);(0;1)$

Câu 3.

Ta có: $\frac{3x+3}{x^3+x^2+x+1}=\frac{3(x+1)}{(x^2+1)(x+1)}=\frac{3}{x^2+1}$

Muốn A nhận giá trị nguyên thì x^2+1 phải là ước của 3. Mà Ư(3)=$\{\pm1;\pm3\}$

- Nếu $x^2+1=1 \Rightarrow x=0$ thì $A=3$
- Nếu $x^2+1=\left[\begin{array}{l}-1\\-3\end{array}\right.$ thì không có giá trị x thỏa mãn
- Nếu $x^2+1=3 \Rightarrow x^2=2 \Rightarrow x=\pm\sqrt{2}$ thì $A=1$

Vậy tập hợp các giá trị của x để A nhận giá trị nguyên là $\left\{-\sqrt{2};0;\sqrt{2}\right\}$

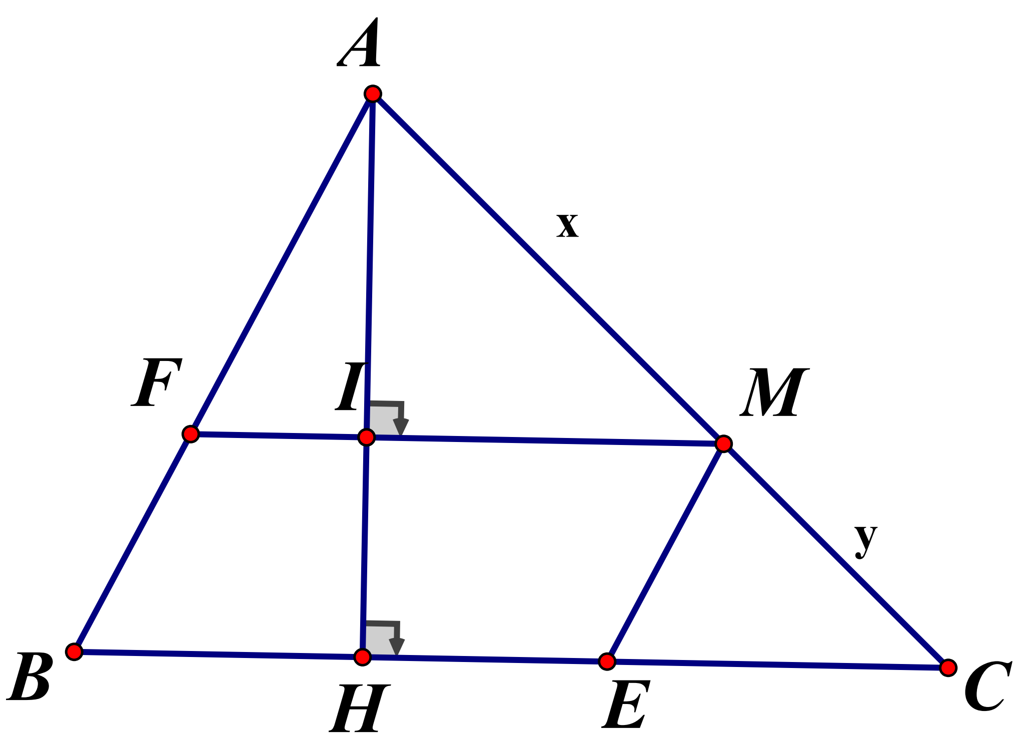
b)

$A=\dfrac{3}{x^2+1}$ nhận giá trị lớn nhất khi x^2+1 nhận giá trị nhỏ nhất

Mà $x^2+1\geq 1 \Rightarrow x^2+1=1_{\min}$. Khi đó $A=3$.

Vậy $A_{\max}=3 \Leftrightarrow x=0$

Câu 4.



Ta có tứ giác $BEMF$ là hình bình hành . Kẻ $AH \perp BC, AH$ cắt MF tại I $AI \perp MF$. Gọi S' là diện tích hình bình hành $BEMF$ và S là diện tích tam giác ABC

$S'=IH.MF$ và $S=\dfrac{1}{2}BC.AH$

Ta có: $\frac{S'}{S} = \frac{IH.MF}{\frac{1}{2}BC.AH} = 2\frac{MF}{BC}.\frac{IH}{AH}(1)$

Đặt $AM = x, MC = y$

Vì $MF//BC$ nên ta có: $\frac{MF}{BC} = \frac{AM}{AC} = \frac{x}{x+y}; \frac{IH}{AH} = \frac{MC}{AC} = \frac{y}{x+y}$

Thay vào (1) ta có: $\frac{S'}{S} = 2.\frac{x}{x+y}.\frac{y}{x+y} = \frac{2xy}{(x+y)^2}$

Vì x, y là hai số không âm nên ta có: $x + y \geq 2\sqrt{xy} \Rightarrow (x+y)^2 \geq 4xy$

$\Rightarrow \frac{S'}{S} = \frac{2xy}{(x+y)^2} \leq \frac{2xy}{4xy} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{S'}{S} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow S' \leq \frac{1}{2}S$

Dấu " =" xảy ra khi $x = y,$ tức là khi M là trung điểm cạnh AC thì diện tích hình bình hành $BEMF$ đạt giá trị lớn nhất là $\frac{1}{2}S$ không đổi