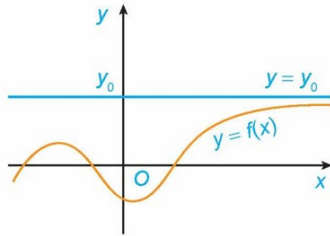


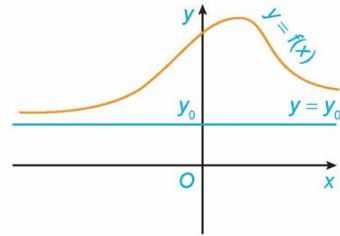
PHẦN A. LÝ THUYẾT VÀ VÍ DỤ SÁCH GIÁO KHOA

1. ĐƯỜNG TIỆM CẬN NGANG

Đường thẳng $y = y_0$ gọi là đường tiệm cận ngang (gọi tắt là tiệm cận ngang) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = y_0$ hoặc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = y_0$.



Đường thẳng $y = y_0$ là tiệm cận ngang của đồ thị (khi $x \rightarrow +\infty$).



Đường thẳng $y = y_0$ là tiệm cận ngang của đồ thị (khi $x \rightarrow -\infty$).

Ví dụ 1. Tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{3x - 2}{x + 1}$.

Giải

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x - 2}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 - \frac{2}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = 3$$

Ta có: . Tương tự, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$.

Vậy đồ thị hàm số $f(x)$ có tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 3$.

Ví dụ 2. Tìm các tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}$.

Giải

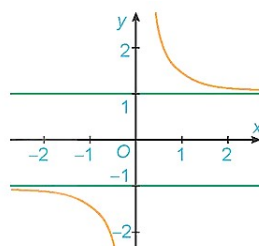
Ta có:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^2 + 1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = 1;$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\sqrt{\frac{x^2 + 1}{x^2}} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \right) = -1$$

Vậy đồ thị hàm số $f(x)$ có hai tiệm cận ngang là $y = 1$ và $y = -1$.

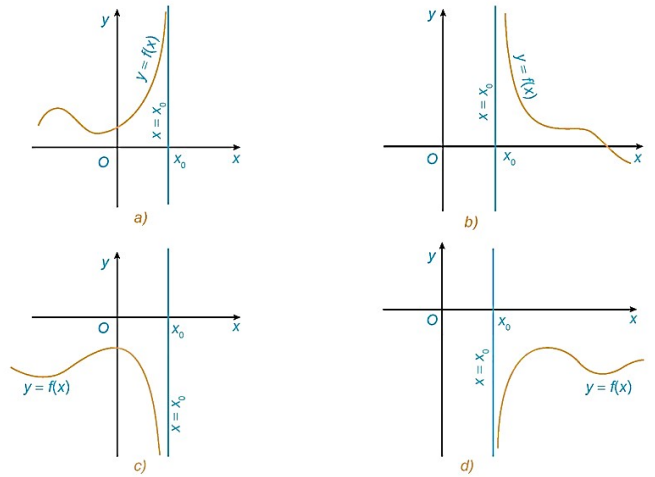
Nhận xét. Đồ thị hàm số $f(x)$ như Hình.



2. ĐƯỜNG TIỆM CẬN ĐỨNG

Đường thẳng $x = x_0$ gọi là đường tiệm cận đứng (gọi tắt là tiệm cận đứng) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty; \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty; \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty; \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty.$$



a) và c). Đường thẳng $x = x_0$ là tiệm cận đứng của đồ thị (khi $x \rightarrow x_0^+$).

b) và d). Đường thẳng $x = x_0$ là tiệm cận đứng của đồ thị (khi $x \rightarrow x_0^-$).

Ví dụ 3. Tìm tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{3-x}{x+2}$.

Giải

Ta có: $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{3-x}{x+2} = +\infty$. Tương tự, $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty$. Vậy đồ thị hàm số $f(x)$ có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -2$.

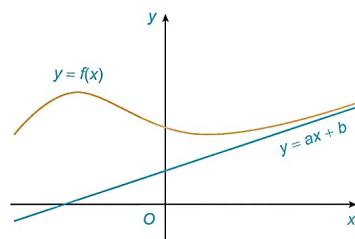
Ví dụ 4. Tìm tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{x^2+2}{x}$.

Giải

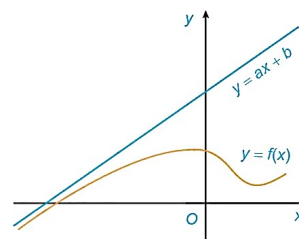
Ta có: $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2+2}{x} = +\infty$. Tương tự, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$. Vậy đồ thị hàm số $f(x)$ có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 0$.

3. ĐƯỜNG TIỆM CẬN XIÊN

Đường thẳng $y = ax + b (a \neq 0)$ gọi là đường tiệm cận xiên (gọi tắt là tiệm cận xiên) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ hoặc $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$



Đường thẳng $y = ax + b$ là tiệm cận xiên của đồ thị (khi $x \rightarrow +\infty$).



Đường thẳng $y = ax + b$ là tiệm cận xiên của đồ thị (khi $x \rightarrow -\infty$).

Ví dụ 5. Cho hàm số $y = f(x) = x + \frac{1}{x+2}$. Tìm tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $f(x)$.

Giải

Ta có: $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+2} = 0$. Tương tự $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] = 0$.

Vậy đồ thị hàm số $f(x)$ có tiệm cận xiên là đường thẳng $y = x$.

Chú ý. Ta biết rằng nếu đường thẳng $y = ax + b (a \neq 0)$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f(x)$ thì $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ hoặc $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$.

Do đó $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] \cdot \frac{1}{x} = 0$ hoặc $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] \cdot \frac{1}{x} = 0$.

Từ đây suy ra $a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ hoặc $a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$.

Khi đó, ta có $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax]$ hoặc $b = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - ax]$.

Ngược lại, với a và b xác định như trên, đường thẳng $y = ax + b (a \neq 0)$ là một tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f(x)$. Đặc biệt, nếu $a = 0$ thì đồ thị hàm số có tiệm cận ngang.

Ví dụ 6. Tìm tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{x^2 - x + 2}{x + 1}$.

Giải

Ta có:

$$a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x + 2}{x^2 + x} = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x + 2}{x + 1} = -2.$$

(Tương tự, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1, \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] = -2$.)

Vậy đồ thị hàm số $f(x)$ có tiệm cận xiên là đường thẳng $y = x - 2$.

Nhận xét. Trong thực hành, để tìm tiệm cận xiên của hàm phân thức trong Ví dụ 6, ta viết:

$$y = f(x) = \frac{x^2 - x + 2}{x + 1} = x - 2 + \frac{4}{x + 1}.$$

Ta có: $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - 2)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x + 1} = 0$;

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x - 2)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{x + 1} = 0.$$

Do đó, đồ thị hàm số $f(x)$ có tiệm cận xiên là đường thẳng $y = x - 2$.