|  |  |
| --- | --- |
| **SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO****THANH HÓA** | **ĐỀ CHÍNH THỨC KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH****NĂM HỌC 2021 - 2022****MÔN THI: TOÁN - THCS****Ngày thi: 26/12/2021****Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian giao đề** |

 *(Đề thi có 01 trang)*

**Bài 1:** (4,0 điểm)

1. Rút gọn biểu thức:

với 

2. Cho  là các số thực dương thoả mãn điều kiện .

Tính giá trị biểu thức .

**Bài 2:** (4,0 điểm).

1. Giải phương trình: .

2. Giải hệ phương trình: .

**Bài 3:** (4,0 điểm).

1. Tìm tất cả các cặp số nguyên dương  thỏa mãn phương trình:



2. Cho ba số tự nhiên  thỏa mãn  là số nguyên tố và .

Chứng minh  là số chính phương.

**Bài 4:** (6,0 điểm).

Cho nửa đường tròn  đường kính  và  là điểm thay đổi trên nửa đường tròn đó ( khác  và ). Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ  chứa nửa đường tròn vẽ các tia tiếp tuyến  và . Tiếp tuyến tại  của nửa đường tròn cắt các tia  theo thứ tự tại . Gọi  là giao điểm của  và  cắt  tại .

1. Chứng minh  song song với  và  là trung điểm của đoạn thẳng .

2. Đường tròn nội tiếp tam giác  tiếp xúc với cạnh  tại . Chứng minh rằng .

3. Qua  vẽ đường thẳng song song với  cắt tia  tại . Gọi  là giao điểm của  và . Xác định vị trí của điểm  trên nửa đường tròn  sao cho tam giác  có diện tích lớn nhất. Tính diện tích lớn nhất đó theo .

**Bài 5:** (2,0 điểm).

Cho  là các số thực dương. Chứng minh rằng



**---HẾT---**

**Bài 1:**

a) Rút gọn biểu thức

 với 

b) Cho  là các số thực dương thỏa mãn . Tính giá trị của biểu thức 

**Lời giải.**

a) Ta có 



b) Ta có 

Tương tự ta cũng có 

Do đó 

**Bài 2:**  a) Giải phương trình 

 b) Giải hệ phương trình 

**Lời giải.**

a) ĐKXĐ: 

Đặt 

Ta có 





Xét  (loại);  (thỏa mãn)

Xét . Do 

Vậy phương trình có nghiệm 

b) ĐKXĐ: . Cộng theo vế các phương trình của hệ ta có



Xét  thay vào phương trình  được



Với . Với  (TMĐK)

Xét  thay vào phương trình  được  vô nghiệm

Vậy hệ phương trình có tập nghiệm 

**Bài 3:**

a) Tìm tất cả các cặp số nguyên dương  thỏa mãn



b) Cho ba số tự nhiên  thỏa mãn  là số nguyên tố và . Chứng minh rằng  là số chính phương.

**Lời giải.**

a) Đặt . Vì  nên 

Ta có 



Vì  là số nguyên nên 

Với . Với  hoặc  thì  không là số nguyên. Thử lại ta có  thỏa mãn bài toán

b) Ta có 

Giả sử , vì  là số nguyên tố nên 

Xét . Suy ra tồn tại  sao cho  , thay vào  ta có  là số chính phương, mà  và  là hai số tự nhiên liên tiếp nên  Khi đó  là số chính phương. Xét . Suy ra tồn tại  sao cho  là số nguyên tố, mà  kết hợp với  ta có   là số chính phương

**Bài 4:**

Cho nửa đường tròn , đường kính  và  là điểm thay đồi trên nửa đường tròn đó khác . Trên cùng một nựa mặt phẳng bờ  chứa nửa đường tròn vẽ các tiếp tuyến  và . Tiếp tuyến tại  của nửa đường tròn cắt các tia  theo thứ tự tại . Gọi  là giao điểm của  và  cắt  tại .

a) Chứng minh rằng  song song với  và  là trung điểm của .

b) Đường tròn nội tiếp tam giác  tiếp xúc với cạnh  tại .

Chứng minh rằng 

c) Qua  vẽ đường thẳng song song với  cắt tia  tại . Gọi  là giao điểm của  và . Xác định vị trí của điểm  trên nửa đường tròn  sao cho tam giác có diện tích lớn nhất. Tính diện tích lớn nhất đó theo.

**Lời giải.**

a) Áp dụng định lí Thales ta có  hay 

Mặt khác 

 hay  là trung điểm của 

b) Đường tròn  nội tiếp  tiếp xúc với  lần lượt tại  Ta có 





Tương tự ta cũng có   

c) Kẻ  tại . Dễ dàng chứng minh được  là hình chữ nhật. Đặt  Ta có  Áp dụng BĐT Cauchy ta có .

Suy ra . Diện tích  lớn nhất khi  lớn nhất (vì  cố định), hay .

Dấu "=" xảy ra khi . Điểm  nằm trên nửa đường tròn  sao cho . Khi đó 

**Bài 5:** Cho  là các số thực dương. Chứng minh rằng 

**Lời giải.**

Ta có  .

Áp dụng BĐT Svacxơ ta có



Áp dụng BĐT phụ  ta có 

Suy ra  .

Tương tự ta cũng có

 .

Từ  và  suy ra . Dấu  xảy ra khi 