

TOÁN 10	TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VEC TO VÀ ỨNG DỤNG
0H2-2	

MỤC LỤC

PHẦN A. CÂU HỎI.....	1
DẠNG 1. TÍCH VÔ HƯỚNG.....	1
DẠNG 2. XÁC ĐỊNH GÓC CỦA HAI VÉCTƠ.....	3
DẠNG 3. ỨNG DỤNG TÍCH VÔ HƯỚNG CHỨNG MINH VUÔNG GÓC.....	4
DẠNG 4. MỘT SỐ BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN ĐỘ DÀI VÉCTƠ.....	6
PHẦN B. LỜI GIẢI THAM KHẢO.....	8
DẠNG 1. TÍCH VÔ HƯỚNG.....	8
DẠNG 2. XÁC ĐỊNH GÓC CỦA HAI VÉCTƠ.....	12
DẠNG 3. ỨNG DỤNG TÍCH VÔ HƯỚNG CHỨNG MINH VUÔNG GÓC.....	14
DẠNG 4. MỘT SỐ BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN ĐỘ DÀI VÉCTƠ.....	19

PHẦN A. CÂU HỎI

DẠNG 1. TÍCH VÔ HƯỚNG

- Câu 1.** Cho hai vectơ $u = (2; -1)$, $v = (-3; 4)$. Tích $u.v$ là
A. 11. **B.** -10. **C.** 5. **D.** -2.
- Câu 2.** Trong hệ trục tọa độ Oxy , cho $a = (2; 5)$ và $b = (-3; 1)$. Khi đó, giá trị của $a.b$ bằng
A. -5. **B.** 1. **C.** 13. **D.** -1.
- Câu 3.** Cho $A(0; 3)$, $B(4; 0)$, $C(-2; -5)$. Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$.
A. 16. **B.** 9. **C.** -10. **D.** -9.
- Câu 4.** (HKI XUÂN PHƯƠNG - HN) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai vectơ $u = i + 3j$ và $v = 2j - 2i$. Tính $u.v$.
A. $u.v = -4$. **B.** $u.v = 4$. **C.** $u.v = 2$. **D.** $u.v = -2$.
- Câu 5.** Trong hệ tọa độ Oxy , cho $u = i + 3j$, $v = (2; -1)$. Tính biểu thức tọa độ của $u.v$.
A. $u.v = -1$. **B.** $u.v = 1$. **C.** $u.v = (2; -3)$. **D.** $u.v = 5\sqrt{2}$.
- Câu 6.** Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác vectơ $\vec{0}$. Khẳng định nào sau đây đúng?
A. $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$. **B.** $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$.
C. $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$. **D.** $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\vec{a}, \vec{b})$.
- Câu 7.** Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng $4a$. Tích vô hướng của hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ là
A. $8a^2$. **B.** $8a$. **C.** $8\sqrt{3}a^2$. **D.** $8\sqrt{3}a$.

Câu 8. (KSNLGV - THUẬN THÀNH 2 - BẮC NINH NĂM 2018 - 2019) Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh a . Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$.

- A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$. B. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = a$. C. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \frac{a^2}{2}$. D. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = a^2$.

Câu 9. Cho hai véc tơ a và b . Đẳng thức nào sau đây **sai**?

- A. $a \cdot b = |a| \cdot |b| \cdot \cos(a, b)$. B. $a \cdot b = \frac{1}{2}(|a|^2 + |b|^2 - |a - b|^2)$.
C. $|a|^2 \cdot |b|^2 = |a \cdot b|^2$. D. $a \cdot b = \frac{1}{2}(|a + b|^2 - |a|^2 - |b|^2)$.

Câu 10. Cho tam giác ABC có $\hat{A} = 90^\circ$, $\hat{B} = 60^\circ$ và $AB = a$. Khi đó $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB}$ bằng

- A. $-2a^2$. B. $2a^2$. C. $3a^2$. D. $-3a^2$.

Câu 11. Cho tam giác ABC đều cạnh bằng a . Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$.

- A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2}$. B. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -\frac{a^2 \sqrt{3}}{2}$. C. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{a^2}{2}$. D. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -\frac{a^2}{2}$.

Câu 12. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = a$; $AC = a\sqrt{3}$ và AM là trung tuyến. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AM}$

- A. $\frac{a^2}{2}$. B. a^2 . C. $-a^2$. D. $-\frac{a^2}{2}$.

Câu 13. Cho hình bình hành $ABCD$, với $AB = 2$, $AD = 1$, $\angle BAD = 60^\circ$. Tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ bằng

- A. -1 . B. 1 . C. $-\frac{1}{2}$. D. $\frac{1}{2}$.

Câu 14. Cho hình bình hành $ABCD$, với $AB = 2$, $AD = 1$, $\angle BAD = 60^\circ$. Tích vô hướng $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ bằng

- A. -1 . B. $\frac{1}{2}$. C. -1 . D. $-\frac{1}{2}$.

Câu 15. Cho hình bình hành $ABCD$, với $AB = 2$, $AD = 1$, $\angle BAD = 60^\circ$. Độ dài đường chéo AC bằng

- A. $\sqrt{5}$. B. $\sqrt{7}$. C. 5 . D. $\frac{7}{2}$.

Câu 16. Cho hình bình hành $ABCD$, với $AB = 2$, $AD = 1$, $\angle BAD = 60^\circ$. Độ dài đường chéo BD bằng

- A. $\sqrt{3}$. B. $\sqrt{5}$. C. 5 . D. 3 .

Câu 17. Cho các véc tơ a , b và c thỏa mãn các điều kiện $|a| = x$, $|b| = y$ và $|z| = c$ và $a + b + 3c = 0$. Tính $A = a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a$.

- A. $A = \frac{3x^2 - z^2 + y^2}{2}$. B. $A = \frac{3z^2 - x^2 - y^2}{2}$. C. $A = \frac{3y^2 - x^2 - z^2}{2}$. D. $A = \frac{3z^2 + x^2 + y^2}{2}$.

Câu 18. Cho $\triangle ABC$ đều; $AB = 6$ và M là trung điểm của BC . Tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MA}$ bằng

A. - 18. B. 27. C. 18. D. - 27.

Câu 19. Cho tam giác ABC vuông tại B , $BC = a\sqrt{3}$. Tính $\vec{AC} \cdot \vec{CB}$.
A. $3a^2$. B. $\frac{-a^2\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. D. $-3a^2$.

Câu 20. Cho hai vector a và b . Biết $|a|=2$, $|b|=\sqrt{3}$ và $(a, b)=30^\circ$. Tính $|a+b|$.
A. $\sqrt{11}$. B. $\sqrt{13}$. C. $\sqrt{12}$. D. $\sqrt{14}$.

Câu 21. Cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và D ; $AB=AD=a, CD=2a$. Khi đó tích vô hướng $\vec{AC} \cdot \vec{BD}$ bằng
A. $-a^2$. B. 0 . C. $\frac{3a^2}{2}$. D. $\frac{-a^2}{2}$.

Câu 22. (THI HK1 LỚP 11 THPT VIỆT TRÌ 2018 - 2019) Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB=a; BC=2a$. Tính tích vô hướng $\vec{BA} \cdot \vec{BC}$.
A. $\vec{BA} \cdot \vec{BC} = a^2$. B. $\vec{BA} \cdot \vec{BC} = \frac{a^2}{2}$. C. $\vec{BA} \cdot \vec{BC} = 2a^2$. D. $\vec{BA} \cdot \vec{BC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Câu 23. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB=4$. Kết quả $\vec{BA} \cdot \vec{BC}$ bằng
A. 16. B. 0. C. $4\sqrt{2}$. D. 4.

Câu 24. Cho tam giác ABC vuông tại A có $\angle B=30^\circ, AC=2$. Gọi M là trung điểm của BC . Tính giá trị của biểu thức $P = \vec{AM} \cdot \vec{BM}$.
A. $P = -2$. B. $P = 2\sqrt{3}$. C. $P = 2$. D. $P = -2\sqrt{3}$.

Câu 25. Cho hình bình hành $ABCD$ có $AB=2a, AD=3a, \angle BAD=60^\circ$. Điểm K thuộc AD thỏa mãn $\vec{AK} = -2\vec{DK}$. Tính tích vô hướng $\vec{BK} \cdot \vec{AC}$.
A. $3a^2$. B. $6a^2$. C. 0. D. a^2 .

Câu 26. Cho tam giác ABC có $AB=5, AC=8, BC=7$ thì $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ bằng:
A. -20. B. 40. C. 10. D. 20.

Câu 27. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB=8, AD=5$. Tính $\vec{AB} \cdot \vec{BD}$.
A. $\vec{AB} \cdot \vec{BD} = 62$. B. $\vec{AB} \cdot \vec{BD} = -64$. C. $\vec{AB} \cdot \vec{BD} = -62$. D. $\vec{AB} \cdot \vec{BD} = 64$.
DẠNG 2. XÁC ĐỊNH GÓC CỦA HAI VÉCTƠ

Câu 28. Cho hai vector a và b khác 0 . Xác định góc α giữa hai vector a và b biết $a \cdot b = -|a| \cdot |b|$.
A. $\alpha = 90^\circ$. B. $\alpha = 0^\circ$. C. $\alpha = 45^\circ$. D. $\alpha = 180^\circ$.

Câu 29. Tam giác ABC có $A(1;2), B(0;4), C(3;1)$. Góc $\angle BAC$ của tam giác ABC gần với giá trị nào dưới đây?
A. 90° . B. $36^\circ 52'$. C. $143^\circ 7'$. D. $53^\circ 7'$.

Câu 30. Cho hai vectơ a, b khác vectơ-không thỏa mãn $a \cdot b = -|a| \cdot |b|$. Khi đó góc giữa hai vectơ a, b bằng:
A. $(a; b) = 45^\circ$ **B.** $(a; b) = 0^\circ$ **C.** $(a; b) = 180^\circ$ **D.** $(a; b) = 90^\circ$

Câu 31. (CHUYÊN THÁI BÌNH LẦN 1_2018-2019) Cho hai vectơ a, b thỏa mãn:
 $|a| = 4; |b| = 3; |a - b| = 4$. Gọi α là góc giữa hai vectơ a, b . Chọn phát biểu **đúng**.
A. $\alpha = 60^\circ$ **B.** $\alpha = 30^\circ$ **C.** $\cos \alpha = \frac{1}{3}$ **D.** $\cos \alpha = \frac{3}{8}$

Câu 32. Cho hai vectơ $a = (4; 3)$ và $b = (1; 7)$. Số đo góc α giữa hai vectơ a và b bằng
A. 45° **B.** 90° **C.** 60° **D.** 30°

Câu 33. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho $a = (2; 5)$, $b = (3; -7)$. Tính góc α giữa hai vectơ a và b .
A. $\alpha = 60^\circ$ **B.** $\alpha = 120^\circ$ **C.** $\alpha = 45^\circ$ **D.** $\alpha = 135^\circ$

Câu 34. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $a = (2; 1)$ và $b = (3; -6)$. Góc giữa hai vectơ a và b bằng
A. 0° **B.** 90° **C.** 180° **D.** 60°

Câu 35. Cho hai vectơ $a; b$ khác vectơ 0 thỏa mãn $a \cdot b = \frac{1}{2}|a| \cdot |b|$. Khi đó góc giữa hai vectơ $a; b$ là
A. 60° **B.** 120° **C.** 150° **D.** 30°

Câu 36. Cho vectơ $a(1; -2)$. Với giá trị nào của y thì vectơ $b = (3; y)$ tạo với vectơ a một góc 45°
A. $y = -9$ **B.** $\begin{cases} y = -1 \\ y = 9 \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} y = 1 \\ y = -9 \end{cases}$ **D.** $y = -1$

Câu 37. Cho hai vectơ a, b sao cho $|a| = \sqrt{2}$, $|b| = 2$ và hai vectơ $x = a + b$, $y = 2a - b$ vuông góc với nhau. Tính góc giữa hai vectơ a và b .
A. 120° **B.** 60° **C.** 90° **D.** 30°

DẠNG 3. ỨNG DỤNG TÍCH VÔ HƯỚNG CHỨNG MINH VUÔNG GÓC

Câu 38. Tìm x để hai vectơ $a = (x; 2)$ và $b = (2; -3)$ có giá vuông góc với nhau.
A. 3. **B.** 0. **C.** -3. **D.** 2.

Câu 39. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai vectơ $u = (3; 4)$ và $v = (-8; 6)$. Khẳng định nào đúng?
A. $u = -v$ **B.** u vuông góc với v .
C. $|u| = |v|$ **D.** u và v cùng phương.

Câu 40. Trong mặt phẳng Oxy , cho hai điểm $A(1; 2), B(-3; 1)$. Tìm tọa độ điểm C trên trục Oy sao cho tam giác ABC vuông tại A .
A. $C(6; 0)$ **B.** $C(0; 6)$ **C.** $C(-6; 0)$ **D.** $C(0; -6)$

- Câu 41.** Cho tam giác ABC có $A(-1;2), B(0;3), C(5;-2)$. Tìm tọa độ chân đường cao hạ từ đỉnh A của tam giác ABC .
- A. $(0;3)$. B. $(0;-3)$. C. $(3;0)$. D. $(-3;0)$.
- Câu 42.** Cho tam giác ABC có $A(-1;0), B(4;0), C(0;m), m \neq 0$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC . Xác định m để tam giác GAB vuông tại G .
- A. $m = -\sqrt{6}$. B. $m = \pm 3\sqrt{6}$. C. $m = 3\sqrt{6}$. D. $m = \pm\sqrt{6}$.
- Câu 43.** Cho tam giác ABC có $A(1;-1), B(3;-3), C(6;0)$. Diện tích $DABC$ là
- A. 6. B. $6\sqrt{2}$. C. 12. D. 9.
- Câu 44.** Trong mặt phẳng Oxy , cho hai điểm $B(-1;3)$ và $C(3;1)$. Tìm tọa độ điểm A sao cho tam giác ABC vuông cân tại A .
- A. $A(0;0)$ hoặc $A(2;-4)$. B. $A(0;0)$ hoặc $A(2;4)$.
C. $A(0;0)$ hoặc $A(-2;-4)$. D. $A(0;0)$ hoặc $A(-2;4)$.
- Câu 45.** Tìm bán kính đường tròn đi qua ba điểm $A(0;4), B(3;4), C(3;0)$.
- A. $\frac{5}{2}$. B. $\frac{\sqrt{10}}{2}$. C. 5. D. 3.
- Câu 46.** Trong mặt phẳng tọa độ (Oxy) cho tam giác ABC có $A(1;0), B(-1;1), C(5;-1)$. Tọa độ trực tâm H của tam giác ABC là
- A. $H(-1;-9)$. B. $H(-8;-27)$. C. $H(-2;5)$. D. $H(3;14)$.
- Câu 47.** Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy ; cho tam giác ABC có $A(-1;1), B(1;3)$ và trọng tâm là $G\left(-2;\frac{2}{3}\right)$. Tìm tọa độ điểm M trên tia Oy sao cho tam giác MBC vuông tại M .
- A. $M(0;-3)$. B. $M(0;3)$. C. $M(0;4)$. D. $M(0;-4)$.
- Câu 48.** Trên hệ trục tọa độ xOy , cho tam giác ABC có $A(4;3), B(2;7), C(-3;-8)$. Tọa độ chân đường cao kẻ từ đỉnh A xuống cạnh BC là
- A. $(1;-4)$. B. $(-1;4)$. C. $(1;4)$. D. $(4;1)$.
- Câu 49.** Cho tam giác ABC đều cạnh a . Lấy M, N, P lần lượt nằm trên ba cạnh BC, CA, AB sao cho $BM = 2MC, AC = 3AN, AP = x, x > 0$. Tìm x để AM vuông góc với NP .
- A. $x = \frac{5a}{12}$. B. $x = \frac{a}{2}$. C. $x = \frac{4a}{5}$. D. $x = \frac{7a}{12}$.
- Câu 50.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC . Biết $A(3;-1), B(-1;2)$ và $I(1;-1)$ là trọng tâm tam giác ABC . Trực tâm H của tam giác ABC có tọa độ $(a;b)$. Tính $a+3b$.
- A. $a+3b = \frac{2}{3}$. B. $a+3b = -\frac{4}{3}$. C. $a+3b = 1$. D. $a+3b = -2$.

Câu 51. Cho hình thang vuông $ABCD$ có đường cao $AB=2a$, các cạnh đáy $AD=a$ và $BC=3a$. Gọi M là điểm trên đoạn AC sao cho $\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AC}$. Tìm k để $BM \perp CD$

A. $\frac{4}{9}$. B. $\frac{3}{7}$. C. $\frac{1}{3}$. D. $\frac{2}{5}$.

Câu 52. (THPT Phan Bội Châu - KTHK 1-17-18) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(-3;0)$, $B(3;0)$ và $C(2;6)$. Gọi $H(a;b)$ là tọa độ trực tâm tam giác đã cho. Tính $a+6b$.

A. $a+6b=5$. B. $a+6b=6$. C. $a+6b=7$. D. $a+6b=8$.

Câu 53. Cho hai điểm B, C phân biệt. Tập hợp những điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CM}^2$ là:

A. Đường tròn đường kính BC . B. Đường tròn $(B; BC)$.
C. Đường tròn $(C; CB)$. D. Một đường khác.

Câu 54. Cho ba điểm A, B, C phân biệt. Tập hợp những điểm M mà $\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$ là:

A. Đường tròn đường kính AB .
B. Đường thẳng đi qua A và vuông góc với BC .
C. Đường thẳng đi qua B và vuông góc với AC .
D. Đường thẳng đi qua C và vuông góc với AB .

Câu 55. Cho tam giác ABC , điểm J thỏa mãn $\overrightarrow{AK}=3\overrightarrow{KJ}$, I là trung điểm của cạnh AB , điểm K thỏa mãn $\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + 2\overrightarrow{KC} = \vec{0}$.

Một điểm M thay đổi nhưng luôn thỏa mãn $(3\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{AK}) \cdot (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}) = 0$.
Tập hợp điểm M là đường nào trong các đường sau.

A. Đường tròn đường kính IJ . B. Đường tròn đường kính IK .
C. Đường tròn đường kính JK . D. Đường trung trực đoạn JK .

DẠNG 4. MỘT SỐ BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN ĐỘ DÀI VECTƠ

Câu 56. Trong mặt phẳng tọa độ (Oxy) , cho $\overrightarrow{AB} = (6; 2)$. Tính $|\overrightarrow{AB}|$?

A. $|\overrightarrow{AB}| = 2\sqrt{10}$. B. $|\overrightarrow{AB}| = 20$. C. $AB = 4\sqrt{10}$. D. $|\overrightarrow{AB}| = 2\sqrt{10}$.

Câu 57. Cho hai điểm $A(1;0)$ và $B(-3;3)$. Tính độ dài đoạn thẳng AB .

A. $AB = \sqrt{13}$. B. $AB = 3\sqrt{2}$. C. $AB = 4$. D. $AB = 5$.

Câu 58. Cho tam giác OAB vuông cân tại O , cạnh $OA=4$. Tính $|\overrightarrow{2OA} - \overrightarrow{OB}|$.

A. $|\overrightarrow{2OA} - \overrightarrow{OB}| = 4$. B. $|\overrightarrow{2OA} - \overrightarrow{OB}| = 2$.
C. $|\overrightarrow{2OA} - \overrightarrow{OB}| = 12$. D. $|\overrightarrow{2OA} - \overrightarrow{OB}| = 4\sqrt{5}$.

Câu 59. Cho hình thang vuông $ABCD$ vuông tại A, D ; $AB \parallel CD$; $AB=2a$; $AD=DC=a$. O là trung điểm của AD . Độ dài vectơ tổng $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ bằng

A. $\frac{a}{2}$. B. $\frac{3a}{2}$. C. a . D. $3a$.

- Câu 60.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hai điểm $A(1;2)$, $B(-1;1)$. Điểm M thuộc trục Oy thỏa mãn tam giác MAB cân tại M . Khi đó độ dài đoạn OM bằng
- A. $\frac{5}{2}$. B. $\frac{3}{2}$. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{7}{2}$.
- Câu 61.** Cho ABC đều cạnh $2a$ với M là trung điểm BC . Khẳng định nào đúng?
- A. $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}$. B. $|\overrightarrow{AM}| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. C. $\overrightarrow{AM} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. D. $|\overrightarrow{AM}| = a\sqrt{3}$.
- Câu 62.** Cho hình thang $ABCD$ có hai đáy $AB=2a$; $CD=6a$ thì $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}| = ?$
- A. $-4a$. B. $8a$. C. $2a$. D. $4a$.
- Câu 63.** Cho tam giác vuông cân ABC với $AB=AC=a$. Khi đó $|\overrightarrow{2AB} + \overrightarrow{AC}|$ bằng
- A. $a\sqrt{3}$. B. $a\sqrt{5}$. C. $5a$. D. $2a$.
- Câu 64.** Trong hệ tọa độ Oxy , cho bốn điểm $A(2;1)$, $B(2;-1)$, $C(-2;-3)$, $D(-2;-1)$. Xét ba mệnh đề:
 (I) $ABCD$ là hình thoi.
 (II) $ABCD$ là hình bình hành.
 (III) AC cắt BD tại $M(0;-1)$.
 Chọn khẳng định đúng
- A. Chỉ (I) đúng. B. Chỉ (II) đúng.
 C. Chỉ (II) và (III) đúng. D. Cả ba đều đúng.
- Câu 65.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho ΔABC có $A(-1;4)$, $B(2;5)$, $C(-2;7)$. Hỏi tọa độ điểm I tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC là cặp số nào?
- A. $(-2;6)$. B. $(0;6)$. C. $(0;12)$. D. $(2;6)$.
- Câu 66.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho các điểm $A(1;-17)$, $B(-11;-25)$. Tìm tọa độ điểm C thuộc tia BA sao cho $BC = \sqrt{13}$.
- A. $C(-14;-27)$. B. $C(-8;-23)$.
 C. $C(-14;-27)$ và $C(-8;-23)$. D. $C(14;27)$ và $C(8;23)$.
- Câu 67.** (THPT NÔNG CÔNG - THANH HÓA LẦN 1 2018-2019) Cho tam giác ABC vuông tại A , $BC = a\sqrt{3}$, M là trung điểm của BC và có $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{a^2}{2}$. Tính cạnh AB, AC .
- A. $AB = a, AC = a\sqrt{2}$. B. $AB = a, AC = a$.
 C. $AB = a\sqrt{2}, AC = a$. D. $AB = a\sqrt{2}, AC = a\sqrt{2}$.

- Câu 68.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho điểm $M(3;1)$. Giả sử $A(a;0)$ và $B(0;b)$ (với a, b là các số thực không âm) là hai điểm sao cho tam giác MAB vuông tại M và có diện tích nhỏ nhất. Tính giá trị của biểu thức $T = a^2 + b^2$.
- A. $T = 10$. B. $T = 9$. C. $T = 5$. D. $T = 17$.

PHẦN B. LỜI GIẢI THAM KHẢO
DẠNG 1. TÍCH VÔ HƯỚNG

- Câu 1. Chọn B**

$$\begin{cases} \vec{u} = (2; -1) \\ \vec{v} = (-3; 4) \end{cases} \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \cdot (-3) + (-1) \cdot 4 = -10$$

Với

- Câu 2. Chọn D**

$$\text{Ta có } \vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot (-3) + 5 \cdot 1 = -1$$

- Câu 3. Chọn D**

$$\text{Ta có } \vec{AB} = (4; -3), \vec{BC} = (-6; -5)$$

$$\text{Vậy } \vec{AB} \cdot \vec{BC} = 4 \cdot (-6) + (-3) \cdot (-5) = -9$$

- Câu 4. Chọn B**

$$\text{Theo giả thiết ta có } \vec{u} = (1; 3) \text{ và } \vec{v} = (-2; 2)$$

$$\text{Khi đó } \vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \cdot (-2) + 3 \cdot 2 = 4$$

- Câu 5. Chọn A**

$$\text{Ta có } \vec{u} = i + 3j \Rightarrow \vec{u} = (1; 3)$$

$$\text{Vậy } \vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) = -1$$

- Câu 6. Chọn B**

Theo định nghĩa tích vô hướng của hai vectơ.

- Câu 7. Chọn A**

$$\text{Ta có } \vec{AB} \cdot \vec{AC} = |\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}| \cos(\vec{AB}, \vec{AC}) = 4a \cdot 4a \cdot \cos 60^\circ = 4a \cdot 4a \cdot \frac{1}{2} = 8a^2$$

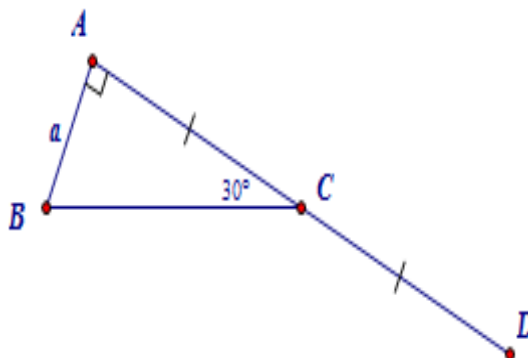
- Câu 8. Chọn A**

Vì $ABCD$ là hình vuông nên $AB \perp CD$ do đó $\vec{AB} \cdot \vec{AD} = 0$.

- Câu 9. Chọn C**

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}|^2 = [|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})]^2 = |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 \cdot \cos^2(\vec{a}, \vec{b}) \text{ nên C sai.}$$

- Câu 10. Chọn D**



Gọi D là điểm đối xứng với A qua C .

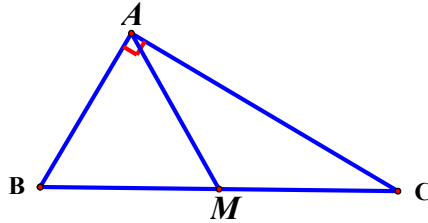
$$\text{Khi đó: } \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CB} \cdot \cos 150^\circ = a\sqrt{3} \cdot 2a \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -3a^2$$

Câu 11. Chọn D

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{BC}| \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = a \cdot a \cdot \cos 120^\circ = -\frac{a^2}{2}$$

Ta có

Câu 12. Chọn D



Ta có tam giác ABC vuông tại A và có AM là trung tuyến nên $AM = \frac{BC}{2}$.

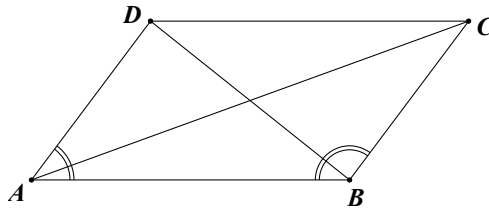
$$AM = \frac{BC}{2} = \frac{\sqrt{AB^2 + AC^2}}{2} = \frac{\sqrt{a^2 + 3a^2}}{2} = a$$

Tam giác AMB có $AB = BM = AM = a$ nên là tam giác đều. Suy ra góc $\widehat{MAB} = 60^\circ$.

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = -|\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AM}| \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) = -a \cdot a \cdot \cos 60^\circ = -\frac{a^2}{2}$$

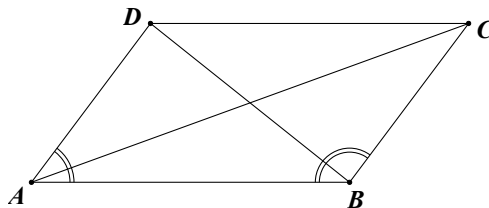
Ta có

Câu 13. Chọn B



$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AD}| \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = AB \cdot AD \cdot \cos \widehat{BAD} = 2 \cdot 1 \cdot \cos 60^\circ = 1$$

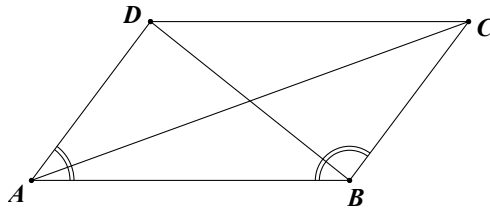
Câu 14. Chọn C



Theo giả thiết: $\widehat{BAD} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{ABC} = 120^\circ$.

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{BA}| |\overrightarrow{BC}| \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = AB \cdot BC \cdot \cos \widehat{ABC} = 2 \cdot 1 \cdot \cos 120^\circ = -1$$

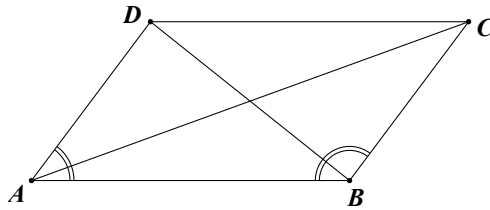
Câu 15. Chọn B



Ta có:

$$\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD} \Rightarrow AC^2 = AB^2 + AD^2 + 2\vec{AB} \cdot \vec{AD} \Leftrightarrow AC^2 = 2^2 + 1^2 + 2.1 \Rightarrow AC = \sqrt{7}$$

Câu 16. Chọn A



$$\vec{BD} = \vec{BA} + \vec{BC} \Rightarrow BD^2 = BA^2 + BC^2 + 2\vec{BA} \cdot \vec{BC} \Leftrightarrow BD^2 = 2^2 + 1^2 + 2.(-1) \\ \Rightarrow BD = \sqrt{3}$$

Câu 17. Chọn B

$$a + b + 3c = 0 \Rightarrow a + b + c = -2c$$

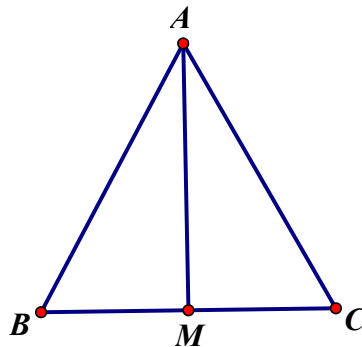
$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2A = 4c^2$$

$$\Rightarrow (a + b + c)^2 = (-2c)^2$$

Sử dụng tính chất bình phương vô hướng bằng bình phương độ dài ta có:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2A = 4z^2 \Rightarrow A = \frac{3z^2 - x^2 - y^2}{2}. \text{ Vậy chọn đáp án } \mathbf{B}.$$

Câu 18. Chọn D

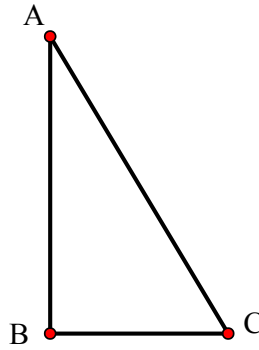


$$(\vec{AB}, \vec{AM}) = \angle BAM = 30^\circ$$

Ta có

$$\vec{AB} \cdot \vec{MA} = -\vec{AB} \cdot \vec{AM} = -|\vec{AB}| \cdot |\vec{AM}| \cdot \cos(\vec{AB}, \vec{AM}) = -6 \cdot \frac{6\sqrt{3}}{2} \cdot \cos 30^\circ = -27$$

Câu 19. Chọn D



Ta có $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = |\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{CB}| \cdot \cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = -AC \cdot CB \cdot \cos \angle ACB = -AC \cdot CB \cdot \frac{CB}{AC} = -CB^2 = -3a^2$

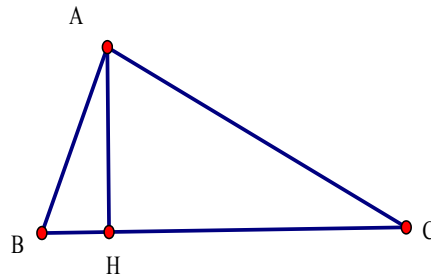
Câu 20. Chọn B

Ta có:
$$\left(\overrightarrow{a+b} \right)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = a^2 + b^2 + 2|a| \cdot |b| \cdot \cos(a, b)$$

$$\Rightarrow \left(\overrightarrow{a+b} \right)^2 = 4 + 3 + 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \cos 30^\circ = 13 \Rightarrow |a+b| = \sqrt{13}$$

Câu 21. Chọn A

Ta có: $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}) \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{AB}) \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) = AD^2 - 2AB^2 - \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = AD^2 - 2AB^2 = -a^2$.



Câu 22.

Chọn A

Vẽ $AH \perp BC, H \in BC$

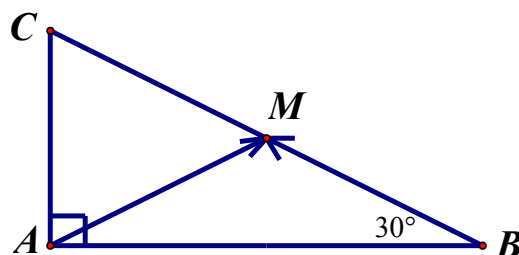
Có $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{BC} = BH \cdot BC = BA^2 = a^2$ (theo tính chất tích vô hướng và phép chiếu).

Câu 23. Chọn A

Vì $(\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}) = \angle ABC$ nên $\cos(\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}) = \cos \angle ABC = \frac{AB}{BC} = \frac{4}{BC}$.
 Do đó $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cdot \cos(\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}) = AB \cdot BC \cdot \frac{4}{BC} = 4 \cdot 4 = 16$

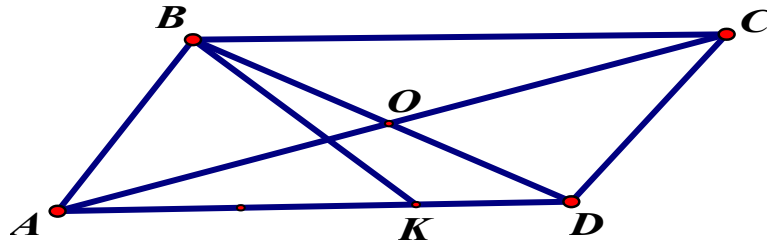
Câu 24. .

Chọn A



Ta có: $P = \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}) \cdot \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{BM}^2$
 $BC = \frac{AC}{\sin 30^\circ} = 4; AB = AC \cdot \cot 30^\circ = 2\sqrt{3}; BM = 2$
 $\Rightarrow \overrightarrow{BM}^2 = 4; \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BM} = 2\sqrt{3} \cdot 2 \cdot \cos 150^\circ = -6 \Rightarrow P = -2 \Rightarrow \text{Chọn A}$

Câu 25. Chọn D

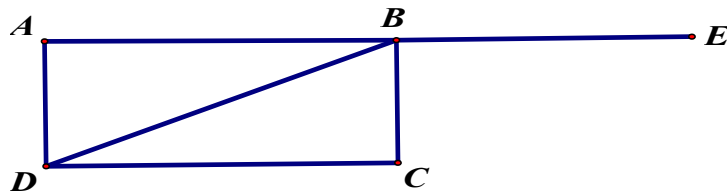


Ta có $\overrightarrow{BK} = -\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$
 $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = (-\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}) \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = -\overrightarrow{AB}^2 + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}^2 - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$
 Khi đó
 $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = -4a^2 + \frac{2}{3} \cdot 9a^2 - \frac{1}{3} \cdot 2a \cdot 3a \cdot \cos 60^\circ = a^2$

Câu 26. Chọn D

$\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{8^2 + 5^2 - 7^2}{2 \cdot 5 \cdot 8} = \frac{1}{2}$
 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 5 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} = 20$

Câu 27. Chọn B



Giả sử E là điểm đối xứng với A qua B ta có $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BE}$
 Xét $\triangle ABD$ có $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{89}$
 $\cos \angle ABD = \frac{AB}{BD} = \frac{8}{\sqrt{89}}$ suy ra $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BD}) = \cos \angle DBE = -\cos \angle ABD = -\frac{8}{\sqrt{89}}$
 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{BD}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BD}) = 8 \cdot \sqrt{89} \cdot \left(-\frac{8}{\sqrt{89}}\right) = -64$

Ta có

DẠNG 2. XÁC ĐỊNH GÓC CỦA HAI VÉCTƠ

Câu 28. Chọn D

Ta có: $a \cdot b = |a| \cdot |b| \cdot \cos \alpha$. Mà $a \cdot b = -|a| \cdot |b|$ nên $\cos \alpha = -1$. Suy ra, $\alpha = 180^\circ$.

Câu 29. Chọn C

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-1; 2); \overrightarrow{AC} = (2; -1)$
 $\cos \angle BAC = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{-2 - 2}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{-4}{5} \Rightarrow \angle BAC = 143^\circ 7'$

Câu 30. Chọn C

$$\begin{cases} \vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \\ \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b}) \Rightarrow \cos(\vec{a}, \vec{b}) = -1 \Leftrightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 180^\circ \end{cases}$$

Ta có:

Câu 31. Chọn D

Ta có

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = 4 \Rightarrow (\vec{a} - \vec{b})^2 = 16 \Rightarrow a^2 - 2ab + b^2 = 16$$

$$\Rightarrow 4^2 - 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cos \alpha + 3^2 = 16 \Rightarrow \cos \alpha = \frac{3}{8}$$

Câu 32. Chọn A

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{4 \cdot 1 + 3 \cdot 7}{\sqrt{4^2 + 3^2} \cdot \sqrt{1^2 + 7^2}} = \frac{25}{25\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \alpha = 45^\circ$$

Ta có

Câu 33. Chọn D

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{2 \cdot 3 + 5 \cdot (-7)}{\sqrt{4 + 25} \cdot \sqrt{9 + 49}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \alpha = 135^\circ$$

Ta có

Câu 34. Chọn B

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{2 \cdot 3 + 1 \cdot (-6)}{\sqrt{2^2 + 1^2} \cdot \sqrt{3^2 + (-6)^2}} = 0 \Rightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$$

Câu 35. Chọn A

$$|\vec{a}| = |\vec{a}|$$

Ta có

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{2} |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \Rightarrow \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{2} \Rightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ$$

Vậy

Câu 36. Chọn D

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{3 - 2y}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{9 + y^2}}$$

Ta có:

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{3 - 2y}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{9 + y^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (1)$$

Góc giữa hai véc tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng 45° suy ra

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{90 + 10y^2} = 6 - 4y \Leftrightarrow \begin{cases} 6 - 4y \geq 0 \\ 90 + 10y^2 = (6 - 4y)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y \leq \frac{3}{2} \\ y^2 - 8y - 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = -1$$

Câu 37. Chọn CVì hai véc tơ $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b}$, $\vec{y} = 2\vec{a} - \vec{b}$ vuông góc với nhau nên

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (2\vec{a} - \vec{b}) = 0 \Leftrightarrow 2a^2 - b^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow 2|\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 + |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot (\sqrt{2})^2 - 2^2 + \sqrt{2} \cdot 2 \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 0 \Leftrightarrow \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 0 \Leftrightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$$

DẠNG 3. ỨNG DỤNG TÍCH VÔ HƯỚNG CHỨNG MINH VUÔNG GÓC

Câu 38. Chọn A

Vector $a = (x; 2)$ và $b = (2; -3)$ có giá vuông góc với nhau $\Leftrightarrow a.b = 0 \Leftrightarrow 2x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 3$
Vậy $x = 3$.

Câu 39. Chọn B

Ta có: $u.v = 3.(-8) + 4.6 = 0$. Do đó, $u \perp v$.

Câu 40. Chọn B

$C \in Oy \Leftrightarrow C(0; y)$

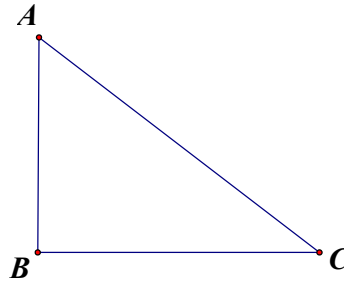
$\vec{AB} = (-4; -1)$, $\vec{AC} = (-1; y-2)$

Ba điểm A, B, C tạo thành một tam giác vuông tại A

Vậy $C(0; 6)$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{AB} \neq \vec{0} \\ \vec{AC} \neq \vec{0} \\ \vec{AB} \perp \vec{AC} \end{cases} \Leftrightarrow \vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0 \Leftrightarrow y = 6.$$

Câu 41. Chọn A



a có $\vec{AB} = (1; 1)$; $\vec{AC} = (6; -4)$; $\vec{BC} = (5; -5)$.

T

Nhận thấy rằng $\vec{AB} \cdot \vec{BC} = 1.5 + 1.(-5) = 0$ nên tam giác ABC vuông tại B .

Vậy chân đường cao hạ từ đỉnh A của tam giác ABC trùng với đỉnh $B(0; 3)$.

Câu 13. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hai vector $u = (1; 2)$ và $v = (4m; 2m - 2)$. Tìm m để vector u vuông góc với v .

A. $m = \frac{1}{2}$. B. $m = -\frac{1}{2}$. C. $m = 1$. D. $m = -1$. **Chọn A**

$$u \perp v \Leftrightarrow u.v = 0 \Leftrightarrow 4m + 2.(2m - 2) = 0 \Leftrightarrow 8m - 4 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}.$$

Hai vector

Câu 42. Chọn B

Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC , suy ra $G\left(1; \frac{m}{3}\right)$.

Ta có $\vec{GA} = \left(-2; -\frac{m}{3}\right); \vec{GB} = \left(3; -\frac{m}{3}\right)$

Để tam giác GAB vuông tại G thì $\vec{GA} \cdot \vec{GB} = 0 \Leftrightarrow -6 + \frac{m^2}{9} = 0 \Leftrightarrow m = \pm 3\sqrt{6}$

Câu 43. Chọn A

Ta có $\vec{AB} = (2; -2), \vec{BC} = (3; 3)$

Ta thấy $\vec{AB} \cdot \vec{BC} = 0$ nên tam giác ABC vuông tại B .

$S_{ABC} = \frac{1}{2} |\vec{AB}| \cdot |\vec{BC}| = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2} = 6$

Vậy

Câu 44. Chọn B

Tìm tọa độ điểm A sao cho tam giác ABC vuông cân tại A .

Gọi $A(x; y)$. Tam giác ABC vuông cân tại $A \Leftrightarrow \begin{cases} AB = AC \\ AB \perp AC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AB^2 = AC^2 \\ \vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (-1-x)^2 + (3-y)^2 = (3-x)^2 + (1-y)^2 \\ (-1-x)(3-x) + (3-y)(1-y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = y \\ x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = y \\ x^2 - 2x = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = y \\ x = 0 \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, y = 0 \\ x = 2, y = 4 \end{cases}$$

Vậy $A(0; 0)$ hoặc $A(2; 4)$

Câu 45. Chọn A

Tính được $AB = 3, BC = 4$ và $AC = 5$. Suy ra $AB^2 + BC^2 = AC^2$ nên tam giác ABC vuông tại B .

Vậy bán kính đường tròn ngoại tiếp $R = \frac{1}{2} AC = \frac{5}{2}$

Câu 46. Chọn B

Gọi $H(x; y)$ là trực tâm của tam giác $ABC \Leftrightarrow \begin{cases} AH \perp BC \\ BH \perp AC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{AH} \cdot \vec{BC} = 0 \\ \vec{BH} \cdot \vec{AC} = 0 \end{cases} \quad (1)$

Ta có:

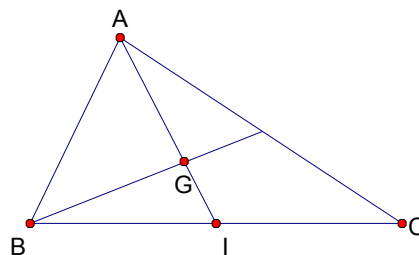
$\vec{AH} = (x-1; y), \vec{BC} = (6; -2), \vec{BH} = (x+1; y-1), \vec{AC} = (4; -1)$

(1) $\Leftrightarrow \begin{cases} 6(x-1) - 2y = 0 \\ 4(x+1) - 1(y-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x - 2y = 6 \\ 4x - y = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -8 \\ y = -27 \end{cases}$

Suy ra:

Vậy $H(-8; -27)$

Câu 47. Chọn A



Ta có G là trọng tâm ΔABC

$$\Rightarrow \begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_C = 3x_G - x_A - x_B \\ y_C = 3y_G - y_A - y_B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_C = 3(-2) - (-1) - 1 = -6 \\ y_C = 3 \cdot \frac{2}{3} - 1 - 3 = -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow C(-6; -2)$$

Ta có $M \in Oy \Rightarrow M(0; m)$

Gọi I là trung điểm của đoạn BC ta có:

$$\begin{cases} x_I = \frac{x_B + x_C}{2} \\ y_I = \frac{y_B + y_C}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_I = -\frac{5}{2} \\ y_I = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow I\left(-\frac{5}{2}; \frac{1}{2}\right)$$

Ta có

$$\overrightarrow{BM} = (-1; m-3), \overrightarrow{CM} = (6; m+2), \overrightarrow{CB} = (7; 5), \overrightarrow{IM} = \left(\frac{5}{2}; m - \frac{1}{2}\right)$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{CM} = 0 \\ \overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{CB} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-3)(m+2) - 6 = 0 \\ 5\left(m - \frac{1}{2}\right) + 7 \cdot \frac{5}{2} = 0 \end{cases}$$

ΔMBC vuông cân tại M khi:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m - 12 = 0 \\ m = -3 \end{cases} \Leftrightarrow m = -3 \Rightarrow M(0; -3)$$

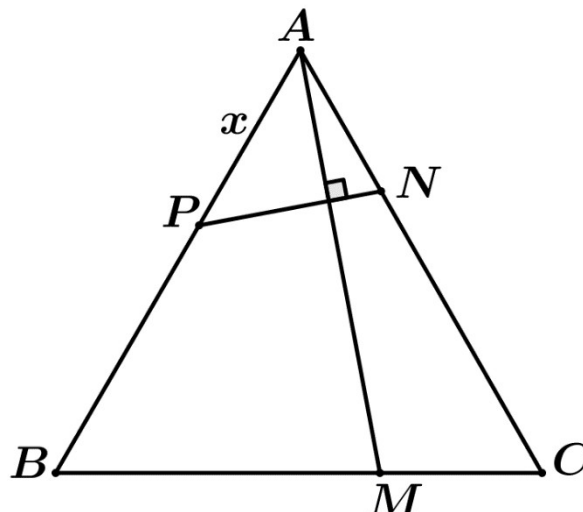
Câu 48. Chọn C

Gọi $D(x; y)$ là chân đường cao kẻ từ A xuống cạnh BC ta có $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ và D, B, C thẳng hàng

Mà $\overrightarrow{AD} = (x-4; y-3), \overrightarrow{BC} = (-5; -15), \overrightarrow{BD} = (x-2; y-7)$ nên ta có hệ

$$\begin{cases} x-4+3(y-3)=0 \\ 3(x-2)-y+7=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=4 \end{cases}$$

Câu 49. Chọn A



Đặt $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = b \\ \overrightarrow{AC} = c \end{cases}$, ta có $|b| = |c| = a$ và $\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c} = a \cdot a \cdot \cos 60^\circ = \frac{a^2}{2}$

Ta có $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = b + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} = b + \frac{2}{3}(c - b) = \frac{1}{3}(b + 2c)$

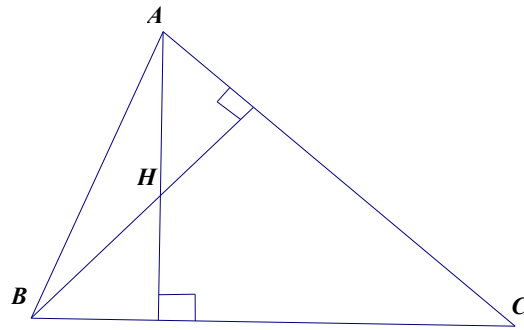
$\overrightarrow{PN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{x}{a}\overrightarrow{AB} = -\frac{x}{a}b + \frac{1}{3}c = \frac{1}{3a}(-3xb + ac)$

Theo yêu cầu bài toán ta có $\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{PN} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{PN} = 0 \Leftrightarrow (b + 2c) \cdot (-3xb + ac) = 0$

$$\Leftrightarrow -3xb^2 + a(b \cdot c) - 6x(b \cdot c) + 2ac^2 = 0 \Leftrightarrow -3xa^2 + \frac{a^3}{2} - 3xa^2 + 2a^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5a}{12}$$

Câu 50. Chọn A



Giả sử $C(x_C; y_C)$ và $H(x_H; y_H)$. Có I là trọng tâm tam giác ABC nên ta có

$$\begin{cases} \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = x_I \\ \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = y_I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_C = 1 \\ y_C = -4 \end{cases} \Rightarrow C(1; -4)$$

Ta có $\overrightarrow{AH} = (x_H - 3; y_H + 1); \overrightarrow{BC} = (2; -6)$

$\overrightarrow{BH} = (x_H + 1; y_H - 2); \overrightarrow{AC} = (-2; -3)$

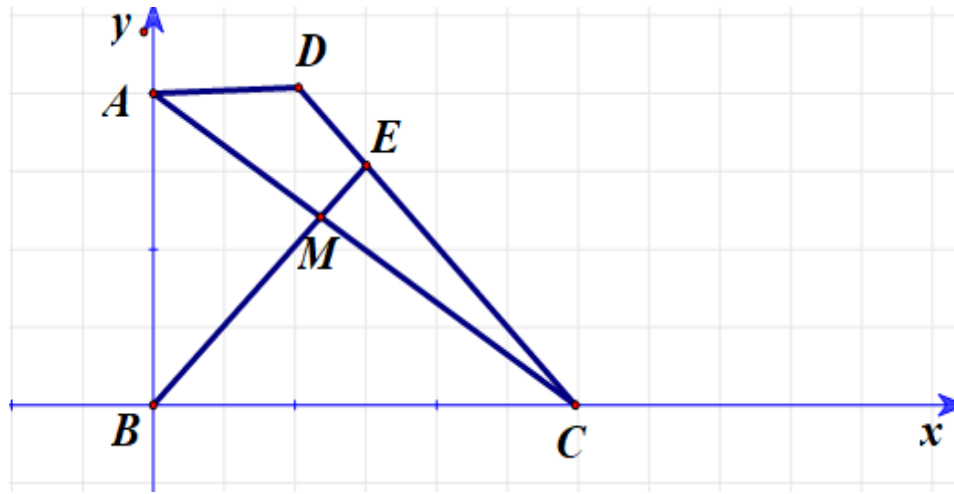
H là trực tâm tam giác ABC nên

$$\begin{cases} \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x_H - 3) - 6(y_H + 1) = 0 \\ -2(x_H + 1) - 3(y_H - 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_H = \frac{10}{3} \\ y_H = -\frac{8}{9} \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = \frac{10}{3}; b = -\frac{8}{9} \Rightarrow S = \frac{2}{3}$$

Câu 51. Chọn D

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ sao cho gốc tọa độ trùng với điểm B, điểm A thuộc trục Oy và điểm C thuộc trục Ox .



Theo bài ra ta có $B(0;0), A(0;2), C(3;0), D(1;2)$

Khi đó $\vec{AC} = (3; -2)$. Phương trình tham số của đường thẳng AC là $\begin{cases} x = 3t \\ y = 2 - 2t \end{cases}$
Gọi $M \in AC \Rightarrow M(3t; 2 - 2t)$. Ta có $\vec{BM} = (3t; 2 - 2t)$ và $\vec{DC} = (2; -2)$.

Để $BM \perp DC$ thì $\vec{BM} \cdot \vec{DC} = 0 \Leftrightarrow 6t - 4 + 4t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{2}{5} \Rightarrow M\left(\frac{6}{5}; \frac{6}{5}\right)$.

Khi đó $\vec{AM} = \left(\frac{6}{5}; -\frac{4}{5}\right) \Rightarrow AM = \frac{\sqrt{52}}{5}$ và $\vec{AC} = (3; -2) \Rightarrow AC = \sqrt{13}$.

Vì $\vec{AM} = k\vec{AC}$ và $\vec{AM}, \vec{AC}$ cùng chiều $\Rightarrow k = \frac{AM}{AC} = \frac{\sqrt{52}}{5\sqrt{13}} = \frac{2}{5}$.

Câu 52. Chọn C

Ta có $\vec{AH} = (a+3; b)$, $\vec{BC} = (-1; 6)$, $\vec{BH} = (a-3; b)$, $\vec{AC} = (5; 6)$.

Vì H là trực tâm $\triangle ABC$ nên $\begin{cases} AH \perp BC \\ BH \perp AC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{AH} \cdot \vec{BC} = 0 \\ \vec{BH} \cdot \vec{AC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a + 6b = 3 \\ 5a + 6b = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = \frac{5}{6} \end{cases}$
 $\Rightarrow a + 6b = 7$.

Câu 53. Chọn A

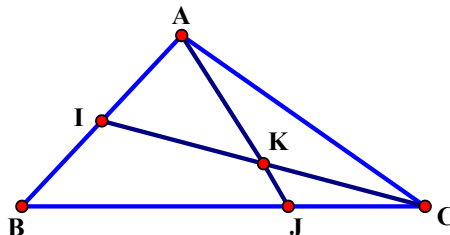
$\vec{CM} \cdot \vec{CB} = \vec{CM}^2 \Leftrightarrow \vec{CM} \cdot \vec{CB} - \vec{CM}^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{CM} \cdot \vec{MB} = 0$.

Tập hợp điểm M là đường tròn đường kính BC .

Câu 54. Chọn B

$\vec{CM} \cdot \vec{CB} = \vec{CA} \cdot \vec{CB} \Leftrightarrow \vec{CM} \cdot \vec{CB} - \vec{CA} \cdot \vec{CB} = 0 \Leftrightarrow (\vec{CM} - \vec{CA}) \cdot \vec{CB} = 0 \Leftrightarrow \vec{AM} \cdot \vec{CB} = 0$

Tập hợp điểm M là đường thẳng đi qua A và vuông góc với BC .



Câu 55.

Chọn C

Ta có: $\vec{MA} + \vec{MB} + 2\vec{MC} = 4\vec{MK} + \vec{KA} + \vec{KB} + 2\vec{KC} = 4\vec{MK}$

Lấy điểm J thỏa mãn $\vec{AK} = 3\vec{KJ}$. Ta có $\vec{AK} = \frac{1}{2}(\vec{AI} + \vec{AC}) = \frac{\vec{AB}}{4} + \frac{\vec{AC}}{2}$, mà $\vec{AK} = 3\vec{KJ}$ nên
 $\vec{AJ} = \vec{AK} + \vec{KJ} = \vec{AK} + \frac{1}{3}\vec{AK} = \frac{4}{3}\vec{AK} = \frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{AC}$

Lại có $\vec{BJ} = \vec{AJ} - \vec{AB} = \frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{AC} - \vec{AB} = -\frac{2}{3}\vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{AC} = \frac{2}{3}\vec{BC}$

Suy ra J là điểm cố định nằm trên đoạn thẳng BC xác định bởi hệ thức $\vec{BJ} = \frac{2}{3}\vec{BC}$.

Ta có $3\vec{MK} + \vec{AK} = 3\vec{MK} + 3\vec{KJ} = 3\vec{MJ}$

Như vậy $(3\vec{MK} + \vec{AK}) \cdot (\vec{MA} + \vec{MB} + 2\vec{MC}) = 0 \Leftrightarrow (3\vec{MJ}) \cdot (4\vec{MK}) = 0 \Leftrightarrow \vec{MJ} \cdot \vec{MK} = 0$

Từ đó suy ra điểm M thuộc đường tròn đường kính JK .

Vì J, K là các điểm cố định nên điểm M luôn thuộc một đường tròn đường kính JK là đường tròn cố định (đpcm).

DẠNG 4. MỘT SỐ BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN ĐỘ DÀI VÉCTƠ

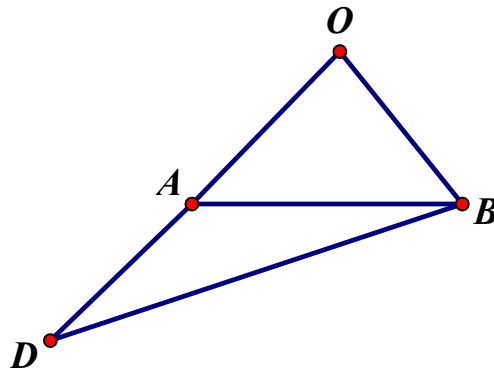
Câu 56. Chọn A

$$|\vec{AB}| = \sqrt{6^2 + 2^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

Câu 57. Chọn D

$$AB = \sqrt{(-3-1)^2 + (3-0)^2} = 5$$

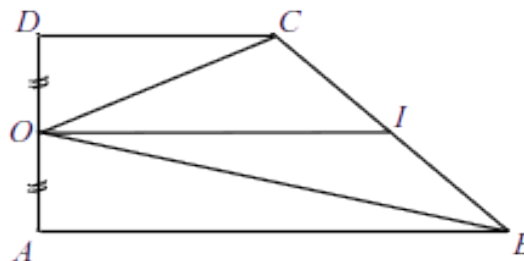
Câu 58. Chọn D



Gọi D là điểm đối xứng của O qua A .

$$|2\vec{OA} - \vec{OB}| = |\vec{OD} - \vec{OB}| = |\vec{BD}| = BD = \sqrt{OB^2 + OD^2} = \sqrt{8^2 + 4^2} = 4\sqrt{5}$$

Câu 59. Chọn D



Gọi I là trung điểm của $BC \Rightarrow \vec{OB} + \vec{OC} = 2\vec{OI} \Rightarrow |\vec{OB} + \vec{OC}| = 2OI$

Xét hình thang $ABCD$ có OI là đường trung bình $\Rightarrow OI = \frac{AB + CD}{2} = \frac{3a}{2}$.

Vậy $|\vec{OB} + \vec{OC}| = 3a$.

Câu 60. Chọn B

Điểm M thuộc trục $Oy \Rightarrow M(0; y)$.

Ta có tam giác MAB cân tại $M \Leftrightarrow MA = MB \Leftrightarrow \sqrt{1^2 + (2 - y)^2} = \sqrt{(-1)^2 + (1 - y)^2}$
 $\Leftrightarrow 4 - 4y = 1 - 2y \Leftrightarrow y = \frac{3}{2}$. Vậy $OM = \frac{3}{2}$.

Câu 61. Chọn D

Độ dài đường cao AM trong tam giác đều cạnh $2a$ là: $\frac{2a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$.

Vậy khẳng định đúng là $|\vec{AM}| = a\sqrt{3}$.

Câu 62. Chọn D

Hai vector $\vec{AB}$ và $\vec{CD}$ ngược hướng nhau nên $|\vec{AB} + \vec{CD}| = CD - AB = 4a$.

Câu 63. Chọn B

Ta có: $(|\vec{2AB} + \vec{AC}|)^2 = (\vec{2AB})^2 + 4\vec{AB} \cdot \vec{AC} + \vec{AC}^2 = 4AB^2 + AC^2$ (vì $AB \perp AC \Rightarrow \vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0$)
 $= 4a^2 + a^2 = 5a^2 \Rightarrow |\vec{2AB} + \vec{AC}| = a\sqrt{5}$.

Câu 64. Chọn C

Ta có $\vec{AB} = (0; -2)$; $\vec{DC} = (0; -2)$; $\vec{AC} = (-4; -4)$.

Suy ra $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ không cùng phương và $\vec{AB} = \vec{DC}$.

Nên $ABCD$ là hình bình hành. Vậy mệnh đề (II) đúng.

Suy ra $\vec{AC}$ cắt BD tại trung điểm mỗi đường và điểm đó có tọa độ $M = (0; -1)$, suy ra (III) đúng.

Ta có $\vec{AB} = (0; -2)$, suy ra $AB = |-2| = 2$; $\vec{AD} = (-4; -2)$, suy ra $AD = \sqrt{20}$, nên $AB \neq AD$, suy ra $ABCD$ không là hình thoi. Mệnh đề (I) sai.

Câu 65. Chọn B

Ta có:

$$\vec{AB} = (3; 1) \Rightarrow AB = \sqrt{10}$$

$$\vec{AC} = (-1; 3) \Rightarrow AC = \sqrt{10}$$

$$\vec{BC} = (-4; 2) \Rightarrow BC = \sqrt{20}$$

Nhận thấy $AB^2 + AC^2 = BC^2$ và $AB = AC$ nên $\triangle ABC$ là tam giác vuông cân tại A , suy ra tâm

I là trung điểm cạnh huyền BC . Vậy $I(0; 6)$.

Câu 66. Chọn B

Giả sử $C(x_C; y_C)$. Theo bài ra ta có C thuộc tia BA nên $\vec{BC}; \vec{BA}$ cùng hướng.

Với $\overrightarrow{BC} = (x_c + 11; y_c + 25)$, $\overrightarrow{BA} = (12; 8)$ ta có: $\overrightarrow{BC} = k\overrightarrow{BA}$ ($k > 0$) $\Leftrightarrow \frac{x_c + 11}{12} = \frac{y_c + 25}{8} = k$

$$\Leftrightarrow 8x_c - 12y_c - 212 = 0 \Leftrightarrow y_c = \frac{8x_c - 212}{12} \Leftrightarrow y_c = \frac{2x_c - 53}{3} \quad (1)$$

$$+) BC = \sqrt{13} \Leftrightarrow \sqrt{(x_c + 11)^2 + (y_c + 25)^2} = \sqrt{13} \Leftrightarrow (x_c + 11)^2 + (y_c + 25)^2 = 13 \quad (2)$$

Thế (1) vào (2) ta được:

$$(x_c + 11)^2 + \left(\frac{2x_c - 53}{3} + 25 \right)^2 = 13 \Leftrightarrow (x_c + 11)^2 + \left(\frac{2x_c + 22}{3} \right)^2 = 13 \Leftrightarrow \frac{13}{9}(x_c + 11)^2 = 13$$

$$\Leftrightarrow (x_c + 11)^2 = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} x_c = -14 \\ x_c = -8 \end{cases}$$

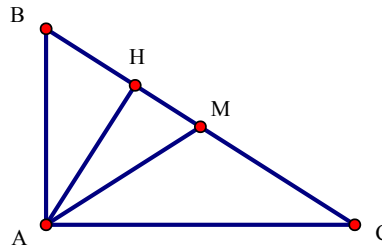
Với $x_c = -14$ thế vào (1) ta được: $y_c = \frac{2 \cdot (-14) - 53}{3} = -27$

Khi đó $k = \frac{-14 + 11}{12} = \frac{-3}{12} = \frac{-1}{4} < 0$ (loại).

Với $x_c = -8$ thế vào (1) ta được: $y_c = \frac{2 \cdot (-8) - 53}{3} = -23$

Khi đó $k = \frac{-8 + 11}{12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} > 0$ (thỏa mãn).

Vậy $C(-8; -23)$



Câu 67.

Chọn A

Vẽ $AH \perp BC, H \in BC$

Có HM là hình chiếu của AM lên BC .

Suy ra $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{HM} \cdot \overrightarrow{BC}$, mà $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{a^2}{2}$, $BC = a\sqrt{3}$.

Suy ra HM cùng chiều BC và $\overrightarrow{HM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{a^2}{2}$, $HM = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

$$= \frac{a\sqrt{3}}{2} - \frac{a\sqrt{3}}{6} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Có $BH = BM - HM$

Có $AB^2 = BH \cdot BC = a^2 \Rightarrow AB = a$ và $AC = a\sqrt{2}$.

Vậy $AB = a$ và $AC = a\sqrt{2}$.

Câu 68. Chọn A

Ta có $\overrightarrow{MA} = (a - 3; -1)$, $\overrightarrow{MB} = (-3; b - 1)$. MAB là tam giác vuông tại M khi và chỉ khi

$$MA.MB = 0 \Leftrightarrow -3(a-3) - (b-1) = 0 \Leftrightarrow b = 10 - 3a \quad (*)$$

$$\text{Với } a \geq 0, b \geq 0 \text{ suy ra } 0 \leq a \leq \frac{10}{3} \quad (**)$$

$$S_{MAB} = \frac{1}{2} MA.MB = \frac{1}{2} \sqrt{(a-3)^2 + 1} \cdot \sqrt{9 + (b-1)^2} = \frac{3}{2} (a^2 - 6a + 10) = \frac{3}{2} (a-3)^2 + \frac{3}{2} \geq \frac{3}{2}.$$

Do đó $\min S_{MAB} = \frac{3}{2}$ đạt được khi $a = 3$ (thỏa mãn điều kiện $(**)$), khi đó $b = 1$.

Vậy $T = a^2 + b^2 = 10$.