

Chủ đề 1. ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

BÀI 1. TÍNH ĐƠN ĐIỆU VÀ CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

PHẦN A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

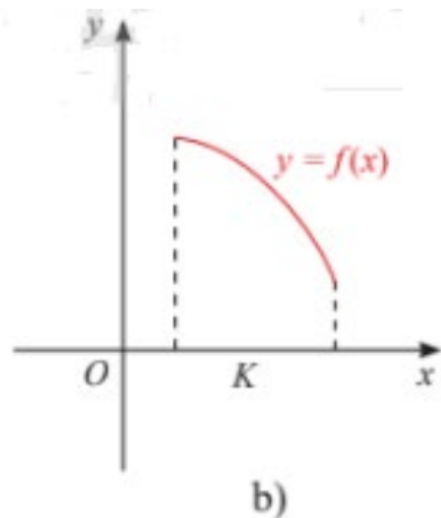
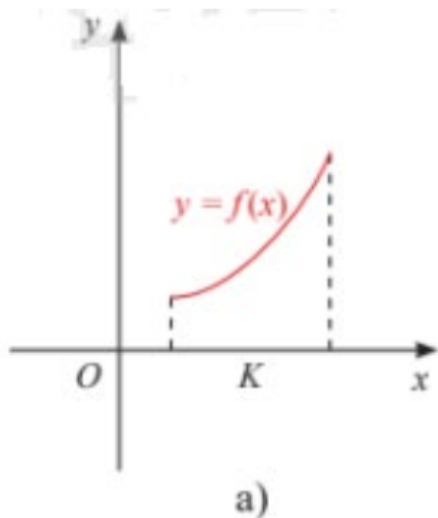
a) Khái niệm tính đơn điệu của hàm số

Giả sử K là một khoảng, một đoạn hoặc một nửa khoảng và $y = f(x)$ là hàm số xác định trên K .

- Hàm số $y = f(x)$ được gọi là đồng biến trên K nếu $\forall x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
- Hàm số $y = f(x)$ được gọi là nghịch biến trên K nếu $\forall x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

*Chú ý:

- Nếu hàm số đồng biến trên K thì đồ thị của hàm số đi lên từ trái sang phải (Hình ^a).
- Nếu hàm số nghịch biến trên K thì đồ thị của hàm số đi xuống từ trái sang phải (Hình ^b).



Hàm số $y = f(x)$ đồng biến hoặc nghịch biến trên K thì gọi chung là đơn điệu trên K .

- Khi xét tính đơn điệu của hàm số mà không chỉ rõ tập K thì ta hiểu là xét trên tập xác định của hàm số đó.

- Định lý:

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên tập $K \subset \mathbb{R}$, với K là một khoảng, nửa khoảng hoặc đoạn.

- Nếu $f'(x) > 0, \forall x \in K$ thì hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên K .
- Nếu $f'(x) < 0, \forall x \in K$ thì hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên K .

*Chú ý:

- Định lý trên vẫn đúng trong trường hợp $f'(x) = 0$ tại một số hữu hạn điểm trên K .
- Nếu $f'(x) = 0, \forall x \in K$ thì hàm số $y = f(x)$ không đổi trên K .

Nhận xét:

Để xét tính đồng biến, nghịch biến của hàm số $y = f(x)$, ta có thể thực hiện các bước sau:

- Bước 1: Tìm tập xác định của hàm số $y = f(x)$.

- Bước 2: Tính đạo hàm $f'(x)$. Tìm các đi $m_{x_i} (i=1,2,3,\dots,n)$ tại ó hàm số có đạo hàm bằng 0 hoặc không tồn tại.
- Bước 3: Sắp xếp các điểm x_i theo thứ tự tăng dần và lập bảng biến thiên để xét dấu $y' = f'(x)$.
- Bước 4: Dựa vào bảng biến thiên, nêu kết luận các khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số.

2. CỰC TRI CỦA HÀM SỐ

a) Khái niệm cực trị của hàm số

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên khoảng $(a;b)$ (có thể a là $-\infty$; b là $+\infty$) và điểm $x_0 \in (a;b)$.

- Nếu tồn tại số $h > 0$ sao cho $f(x) < f(x_0)$ với mọi $x \in (x_0 - h; x_0 + h) \subset (a;b)$ và $x \neq x_0$ thì ta nói hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại x_0 .
- Nếu tồn tại số $h > 0$ sao cho $f(x) > f(x_0)$ với mọi $x \in (x_0 - h; x_0 + h) \subset (a;b)$ và $x \neq x_0$ thì ta nói hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại x_0 .

*Chú ý:

- Nếu hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại (cực tiểu) tại x_0 thì x_0 được gọi là điểm cực đại (điểm cực tiểu) của hàm số; $f(x_0)$ được gọi là giá trị cực đại (giá trị cực tiểu) của hàm số, kí hiệu là $f_{CD} (f_{CT})$, còn điểm $M(x_0; f(x_0))$ được gọi là điểm cực đại (điểm cực tiểu) của đồ thị hàm số.
- Các điểm cực đại và cực tiểu được gọi chung là điểm cực trị. Giá trị cực đại và giá trị cực tiểu còn được gọi chung là giá trị cực trị (hay cực trị) của hàm số.

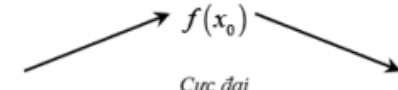
b) Cách tìm cực trị của hàm số

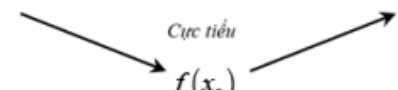
- Định lý:

Giả sử hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng $(a;b)$ chứa điểm x_0 và có đạo hàm trên các khoảng $(a; x_0)$ và $(x_0; b)$. Khi đó:

- Nếu $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (a; x_0)$ và $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (x_0; b)$ thì x_0 là một điểm cực tiểu của hàm số $f(x)$.
- Nếu $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (a; x_0)$ và $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (x_0; b)$ thì x_0 là một điểm cực đại của hàm số $f(x)$.

Minh họa bằng bảng biến thiên

x	$x_0 - h$	x_0	$x_0 + h$
$f'(x)$	+		-
$f(x)$			

x	$x_0 - h$	x_0	$x_0 + h$
$f'(x)$	-		+
$f(x)$			

*Chú ý: Từ định lý trên ta có các bước tìm cực trị của hàm số $y = f(x)$ như sau:

+Bước 1: Tìm tập xác định của hàm số.

+Bước 2: Tính $f'(x)$. Tìm các điểm tại đó $f'(x)$ bằng 0 hoặc $f'(x)$ không xác định.

+Bước 3: Lập bảng biến thiên.

+Bước 4: Từ bảng biến thiên suy ra các cực trị của hàm số.

PHẦN B. CÂU TẬP ÁP DỤNG

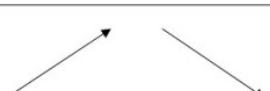
Câu 1. Một vật chuyển động theo quy luật $s(t) = -2t^3 + 24t^2 + 9t - 3$ với t (giây) là khoảng thời gian từ lúc bắt đầu chuyển động và $s(t)$ (m) là quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vật chuyển động nhanh dần hay chậm dần.

Lời giải

Vận tốc chuyển động của vật được xác định theo công thức $v(t) = s'(t) = -6t^2 + 48t + 9$.

Ta có $v'(t) = -12t + 48; v'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 4$.

Từ đó ta có bảng biến thiên:

t	0	4	10
$v'(t)$	+	0	-
$v(t)$			

Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy: Từ thời điểm bắt đầu chuyển động đến thời điểm $t = 4$ giây, vật chuyển động nhanh dần. Từ thời điểm $t = 4$ giây đến thời điểm $t = 10$ giây, vật chuyển động chậm dần.

Câu 2. Thể tích nước của một bể bơi sau t phút bơm được tính theo công thức $V(t) = \frac{1}{100} \left(30t^3 - \frac{t^4}{4} \right)$ với $0 \leq t \leq 90$. Tốc độ bơm nước ở thời đi mt được tính theo công thức $v(t) = V'(t)$. Tìm thời điểm tốc độ bơm nước là lớn nhất và tính tốc độ bơm nước lớn nhất đó.



Lời giải

Ta có $v(t) = V'(t) = \frac{1}{100}(90t^2 - t^3)$

$$v'(t) = \frac{1}{100}(180t - 3t^2).$$

$$v'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 60 \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

t	0	60	90	
$v'(t)$	0	+	0	-
$v(t)$	0	1080		0

Từ bảng biến thiên ta thấy: Tốc độ bơm nước lớn nhất bằng 1080, tại thời điểm $t = 60$ phút.

Câu 3. Một cửa hàng trung bình bán được 100 cái tivi mỗi tháng với giá 14 triệu đồng một cái. Chủ cửa hàng nhận thấy rằng, nếu giảm giá bán mỗi cái 500 ngàn đồng thì số lượng tivi bán ra sẽ tăng thêm 10 cái mỗi tháng. Hỏi cửa hàng nên bán với giá bao nhiêu để doanh thu cửa hàng là lớn nhất?

Lời giải

Giả sử cần giảm giá bán mỗi cái tivi là x triệu đồng ($x < 14$).

Do giảm giá bán mỗi cái 500 ngàn đồng thì số lượng tivi bán ra sẽ tăng thêm 10 cái mỗi tháng nên

$$\frac{10x}{0,5} = 20x$$

số lượng tivi bán ra tăng lên bây giờ là:

$$(100 + 20x) \cdot (14 - x) = -20x^2 + 180x + 1400$$

Khi đó, doanh thu một tháng của cửa hàng là:

Xét hàm số $f(x) = -20x^2 + 180x + 1400$ ($x < 14$)

Ta có $f'(x) = -40x + 180; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 4,5$

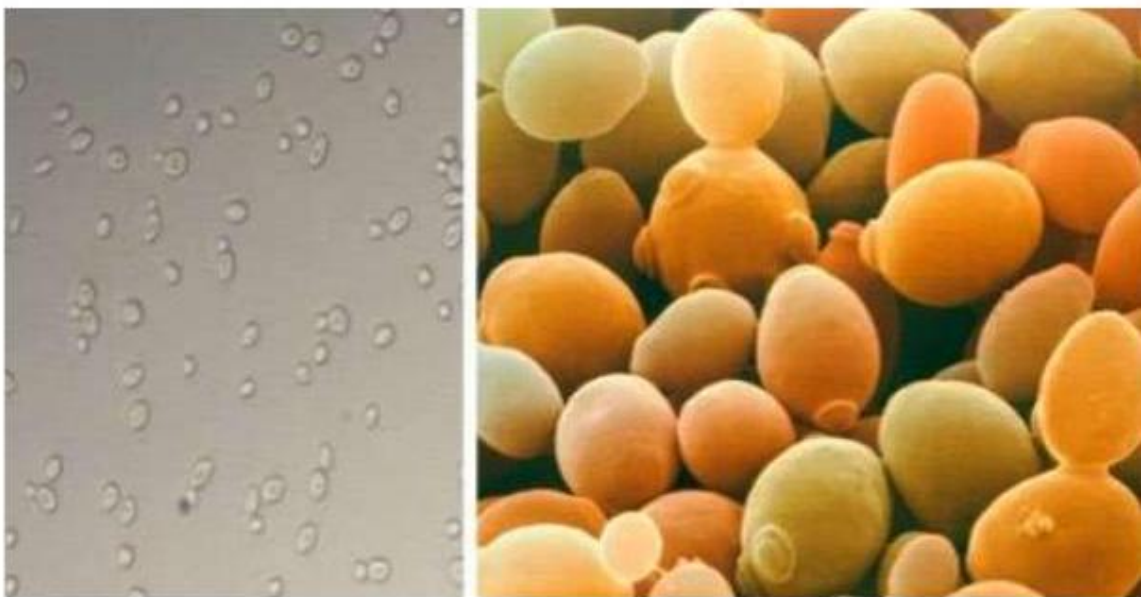
Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	4,5	14
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	1805	0

Từ bảng biến thiên ta thấy: Để doanh thu của hàng đạt cao nhất thì giá bán mỗi cái tivi là $14 - 4,5 = 9,5$ triệu đồng

Câu 4. Giả sử số lượng quần thể nấm men tại môi trường nuôi cấy trong phòng thí nghiệm được mô hình hóa

bằng hàm số $P(t) = \frac{25}{0,25 + e^{-0,75t}}$, trong đó thời gian t được tính bằng giờ. Tốc độ sinh trưởng của quần thể nấm men ở thời điểm t được tính theo công thức $P'(t)$



. Nêu nhận xét về sự tăng giảm của số lượng quần thể nấm men được nuôi cấy. Số lượng quần thể nấm men có thể tăng lên vô cùng được không?

Lời giải

$$P'(t) = \frac{18,75 \cdot e^{-0,75t}}{(0,25 + e^{-0,75t})^2} > 0, \forall t > 0$$

Ta có

. Suy ra số lượng quần thể nấm men được nuôi cấy luôn tăng.

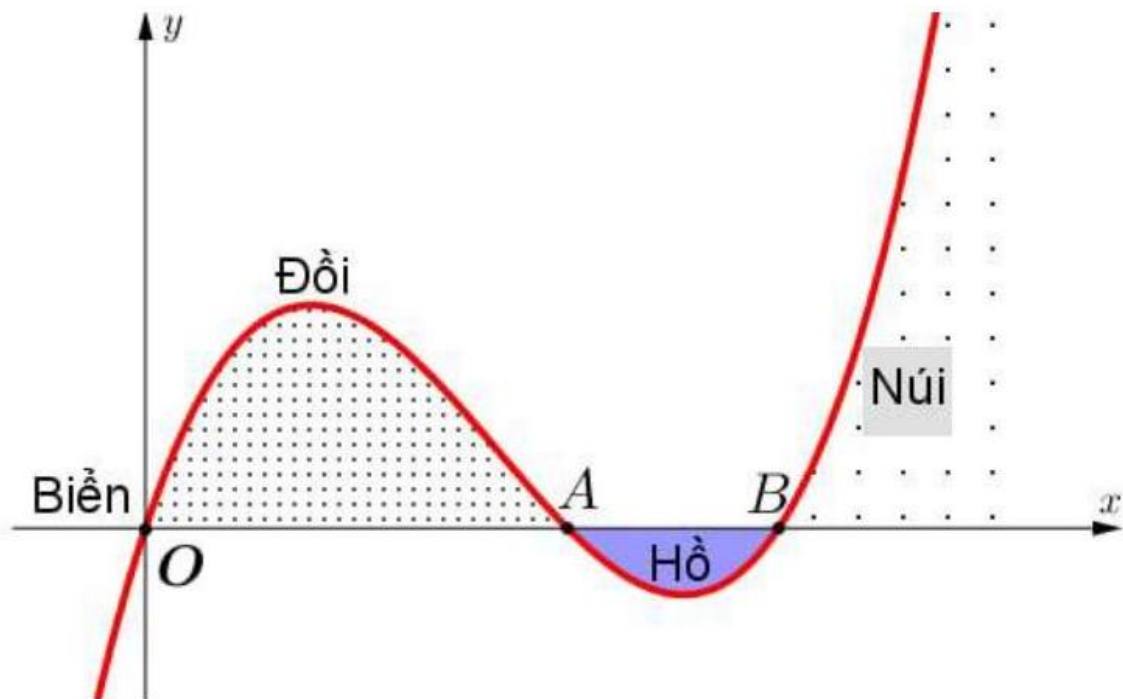
$$\lim_{t \rightarrow +\infty} P(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{25}{0,25 + e^{-0,75t}} = 100$$

Ta lại có

. Do đó, số lượng quần thể nấm men tăng nhưng không vượt quá 100, nên không thể tăng lên vô cùng được.

Câu 5. Lát cắt ngang của một vùng đất ven biển được mô hình hoá thành một hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ (đơn vị độ dài trên các trục là km).

Biết khoảng cách hai bên chân đê $OA = 2 \text{ km}$, độ rộng của hồ $AB = 1 \text{ km}$ và ngọn đồi cao 528 m. Tìm độ sâu của hồ (tính bằng mét) tại điểm sâu nhất? (làm tròn đến hàng đơn vị).



Lời giải

Theo đề Câu ta có: $OA = 2 \text{ km}, OB = 3 \text{ km}$ và $528 \text{ m} = 0,528 \text{ km}$.

Đồ thị hàm số $y = f(x)$ đi qua các điểm $O(0;0), A(2;0), C(3;0)$ suy ra
 $y = f(x) = ax(x-2)(x-3) = a(x^3 - 5x^2 + 6x)$ với $a > 0$.

$$y' = a(3x^2 - 10x + 6), y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5 + \sqrt{7}}{3} \\ x = \frac{5 - \sqrt{7}}{3} \end{cases}$$

Ta có:

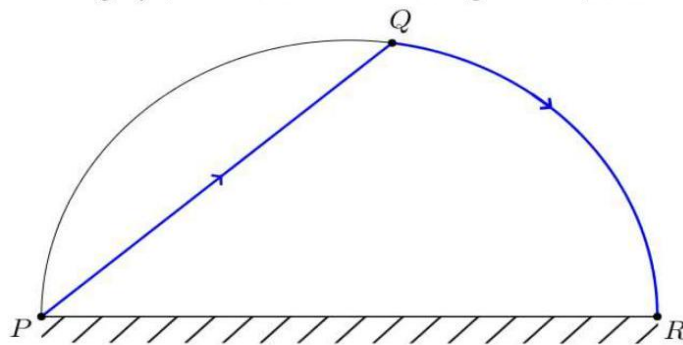
Từ độ cao của đồi ta có tại vị trí điểm cực đại $x_{CD} = \frac{5 - \sqrt{7}}{3}; y_{CD} = 0,528$ suy ra

$$a = \frac{0,528}{\left(\frac{5 - \sqrt{7}}{3}\right)^3 - 5 \cdot \left(\frac{5 - \sqrt{7}}{3}\right)^2 + 6 \cdot \left(\frac{5 - \sqrt{7}}{3}\right)} \approx 0,25$$

Điểm sâu nhất của hồ ứng với vị trí của điểm cực tiểu $x_{CT} = \frac{5 + \sqrt{7}}{3}, y_{CT} \approx 0,1578$

Vậy độ sâu của hồ tại điểm sâu nhất xấp xỉ $0,1578 \text{ km}$ hay xấp xỉ 158 m .

Câu 6. Cho một bờ hồ hình bán nguyệt có bán kính bằng 2 km , đường kính PR như hình vẽ sau:



Từ điểm P anh Tài chèo một chiếc thuyền với vận tốc 3 km/h đến điểm Q trên bờ hồ, rồi chạy bộ dọc theo thành hồ đến vị trí R với vận tốc 6 km/h . Thời gian chậm nhất mà anh Tài di chuyển từ P đến R là bao nhiêu? (thời gian tính bằng phút).

Lời giải

$$\angle QPR = \varphi (\text{rad}), \varphi \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$$

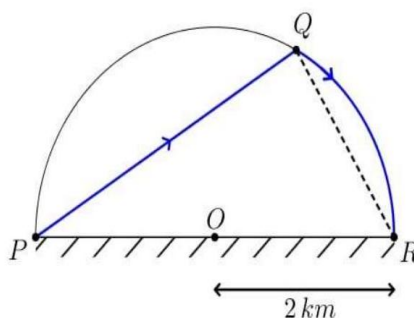
Đặt

$$\text{Ta có } \triangle PQR \text{ vuông tại } Q \Rightarrow PQ = PR \cdot \cos \varphi = 4 \cos \varphi$$

$$\text{Mà } \angle QOR = 2\angle QPR = 2\varphi$$

$$\text{Độ dài cung tròn } QR = 2 \cdot 2\varphi = 4\varphi$$

$$\text{Thời gian anh Tài chèo từ } P \text{ đến } Q \text{ là: } \frac{4 \cos \varphi}{3} \text{ (giờ).}$$



$$\text{Thời gian anh Tài chèo từ } Q \text{ đến } R \text{ là: } \frac{4\varphi}{6} = \frac{2\varphi}{3} \text{ (giờ).}$$

$$\text{Tổng thời gian anh Tài di chuyển từ } P \text{ đến } R \text{ là: } t = \frac{4 \cos \varphi}{3} + \frac{2\varphi}{3} \left(0 < \varphi < \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\text{Xét hàm số } t(\varphi) = \frac{4 \cos \varphi}{3} + \frac{2\varphi}{3} \text{ với } \varphi \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$$

$$t'(\varphi) = \frac{1}{3}(-4 \sin \varphi + 2), \varphi \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$$

$$t'(\varphi) = 0, \varphi \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \sin \varphi = \frac{1}{2}, \varphi \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{6}$$

Bảng biến thiên:

φ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	
$t'(\varphi)$		+	0	-
$t(\varphi)$			$t\left(\frac{\pi}{6}\right)$	
	$\frac{4}{3}$			$\frac{\pi}{3}$

Vậy thời gian chậm nhất mà anh Tài di chuyển từ P đến R là $t\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{\pi}{9} \approx 1,5$ (giờ) hay 90 phút.

Câu 7. Xí nghiệp A sản xuất độc quyền một loại sản phẩm. Biết rằng hàm tổng chi phí sản xuất là $TC = x^3 - 77x^2 + 1000x + 40000$ và hàm doanh thu là $TR = -2x^2 + 1312x$, với x là số sản phẩm. Lợi nhuận của xí nghiệp A được xác định bằng hàm số $f(x) = TR - TC$, cực đại lợi nhuận của xí nghiệp A khi đó đạt bao nhiêu sản phẩm?

Lời giải

Xét hàm số: $f(x) = TR - TC = -2x^2 + 1312x - (x^3 - 77x^2 + 1000x + 40000)$

$$f(x) = -x^3 + 75x^2 + 312x - 40000$$

TXĐ: $D = (0; +\infty)$

$$f'(x) = -3x^2 + 150x + 312 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 52 (N) \\ x = -2 (L) \end{cases}$$

Ta có

Bảng biến thiên:

x	0	52	$+\infty$	
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$	-4000	74416	$-\infty$	

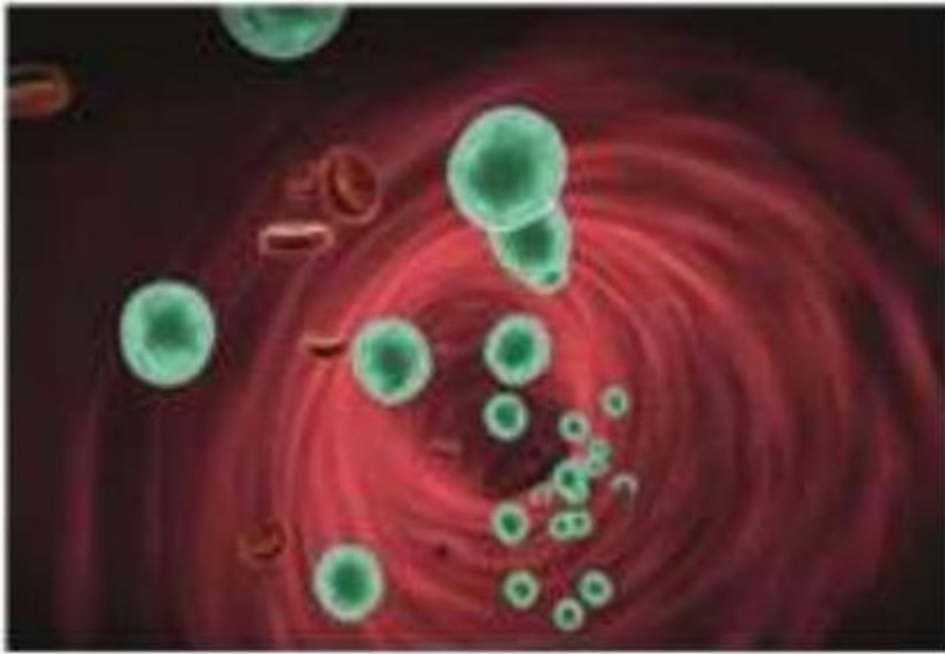
Hàm số đạt giá trị cực đại $y_{CD} = 74416$ tại $x = 52$.

Vậy lợi nhuận của công ty đạt cực đại khi số sản phẩm $x = 52$.

Câu 8. Khi loại thuốc A đư c tiêm vào bệnh nhân, nồng đ mg/L của thuốc trong máu sau x phút (kể từ khi

bắt đầu tiêm) được xác định bởi công thức: $c(x) = \frac{30x}{x^2 + 2}$.

(Nguồn: James Stewart, J. (2015). Calculus. Cengage Learning)



Để đưa ra những lời khuyên và cách xử lý phù hợp cho bệnh nhân, ta cần tìm khoảng thời gian mà nồng độ của thuốc trong máu đang tăng. Em hãy cho biết hàm nồng độ thuốc trong máu $C(x)$ đạt giá trị cực đại là bao nhiêu trong khoảng thời gian 6 phút sau khi tiêm (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)?

Lời giải

Xét hàm số $y = C(x) = \frac{30x}{x^2 + 2}$ trên khoảng $x \in (0; 6)$.

$$y' = \frac{-30x^2 + 60}{(x^2 + 2)^2}$$

Ta có:

$$y' = 0 \Leftrightarrow \frac{-30x^2 + 60}{(x^2 + 2)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2} \\ x = -\sqrt{2} \end{cases} \text{ do } x \in (0; 6) \Rightarrow x = \sqrt{2}$$

Bảng biến thiên:

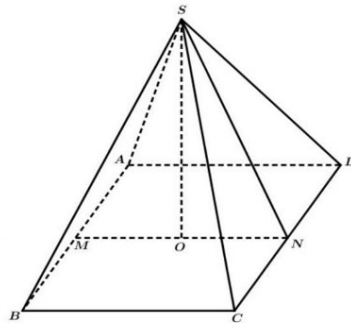
x	0	$\sqrt{2}$	6
y'		+	-
y	0	$\frac{15\sqrt{2}}{2}$	$\frac{90}{19}$

Từ bảng biến thiên suy ra:

Nồng độ thuốc trong máu $C(x)$ đạt giá trị cực đại là $\frac{15\sqrt{2}}{2} \text{ (mg/L)} \approx 10,6 \text{ (mg/L)}$ trong khoảng thời gian 6 phút sau khi tiêm.

Câu 9. Một tấm bạt hình vuông cạnh 20 m như hình vẽ dưới đây. Người ta dự tính cắt phần tô đậm của tấm bạt rồi gập và may lại (các đường may không đáng kể), nhằm mục đích phủ lên tháp đèn trang trí (tháp dạng hình chóp tứ giác đều) để tránh hư hại tháp khi trời mưa.

Biết khối chóp hình thành sau khi gập và may lại cần thể tích lớn nhất thì mới phủ kín tháp đèn. Hỏi phần diện tích tấm bạt bị cắt là bao nhiêu để đảm bảo yêu cầu trên.



Lời giải

Gọi cạnh đáy hình vuông của tháp là x (m).

Độ dài đường chéo tấm bạt bằng $20\sqrt{2}$ (m).

Gọi hình chóp tứ giác đều là $S \cdot ABCD$, Gọi M, N lần lượt là trung điểm AB, CD .

Khi đó $MN = x$ (m), $SN = \frac{20\sqrt{2} - x}{2}$ (m) với $0 < x < 10\sqrt{2}$.

Gọi O là tâm của hình vuông, ta có

$$SO = \sqrt{SN^2 - ON^2} = \sqrt{\left(\frac{20\sqrt{2} - x}{2}\right)^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{800 - 40\sqrt{2}x}.$$

$$V = \frac{1}{3} S_{ABCD} SO = \frac{1}{6} x^2 \sqrt{800 - 40\sqrt{2}x}$$

Thể tích khối chóp

$$V' = \frac{20x(80 - 5\sqrt{2}x)}{6\sqrt{800 - 40\sqrt{2}x}} \Rightarrow V' = 0 \Leftrightarrow x = 8\sqrt{2} \quad \text{với } 0 < x < 10\sqrt{2}.$$

Ta có

Xét bảng biến thiên:

x	0	$8\sqrt{2}$	$10\sqrt{2}$	
$V'(x)$		+	0	-
$V(x)$				

Vậy khi $x = 8\sqrt{2}$ thì thể tích khối chóp lớn nhất $V = \frac{256\sqrt{10}}{3} \text{ (m}^3\text{)}$.

Diện tích phần bị cắt của tấm bạt:

$$S = S_{hv} - S_{ABCD} - 4 \cdot S_{\triangle SAB} = 20^2 - (8\sqrt{2})^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{20\sqrt{2} - 8\sqrt{2}}{2} \cdot 8\sqrt{2} = 80 \text{ (m}^2\text{)}$$