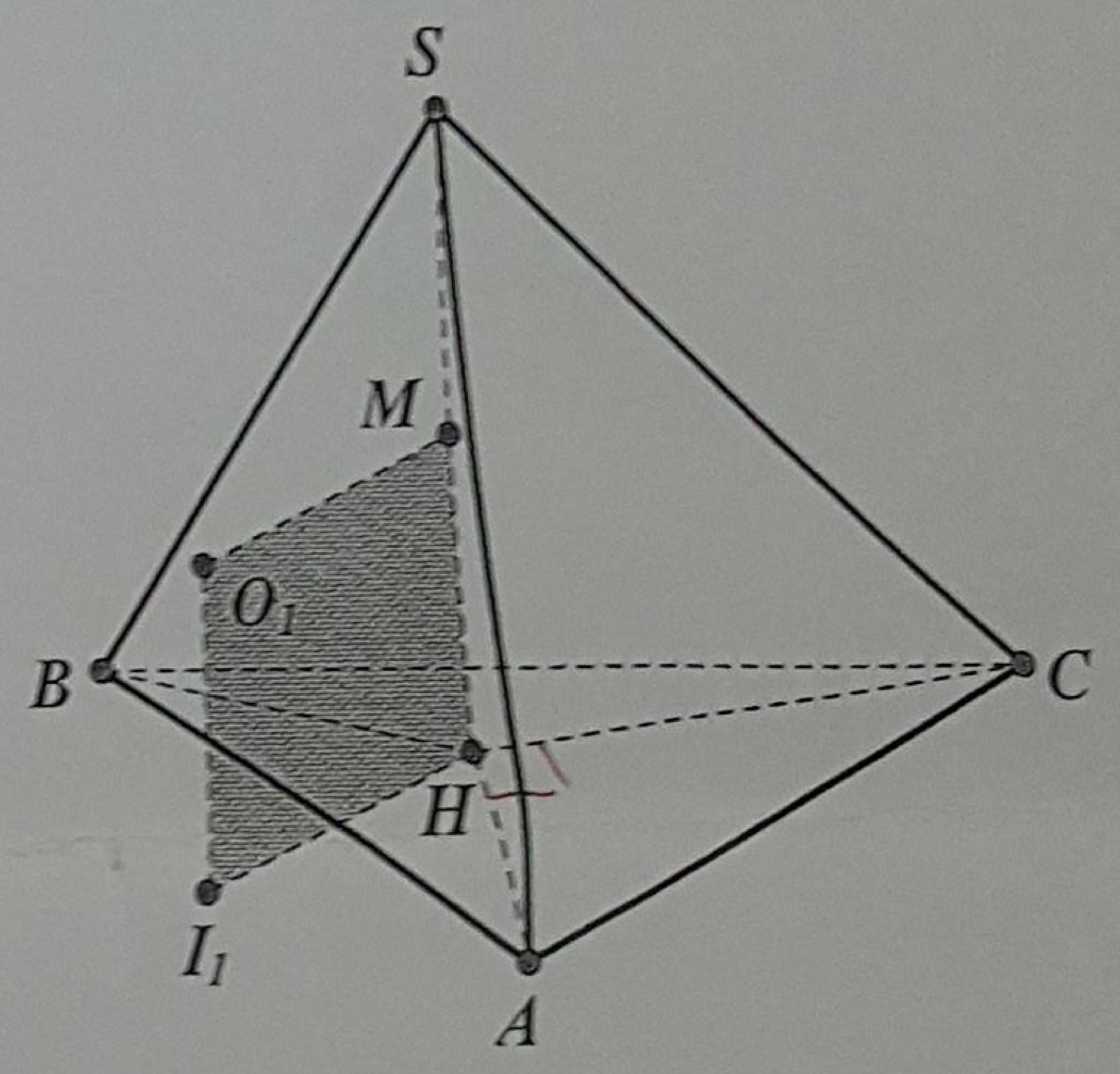
$\Rightarrow f(b) = 2b \wedge f(a) = 2a \Rightarrow \begin{cases} 13 - b^2 = 4b \\ 13 - a^2 = 4a \end{cases} \Rightarrow a = b = -2 - \sqrt{17}$ (loại)

Sau khi thử lại, ta nhận được 2 cặp: $\begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \end{cases}, \begin{cases} a = -2 - \sqrt{17} \\ b = \dfrac{13}{4} \end{cases}$

Bài 4. Cho hình chóp $S.ABC$ có mặt đáy là tam giác đều cạnh a và hình chiếu của S lên mặt phẳng(ABC) là điểm H nằm trong tam giác ABC sao cho $\widehat{AHB} = 150°$, $\widehat{BHC} = 120°$, $\widehat{CHA} = 90°$. Biết tổng diện tích mặt cầu ngoại tiếp các khối chóp $S.HAB, S.HBC, S.HCA$ là $\dfrac{31}{3}\pi a^2$. Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABC$.



Gọi (O_1, R_1) là mặt cầu ngoại tiếp của $S.HAB$ và I_1 là hình chiếu của O_1 lên (ABC) thì dễ thấy I_1 cách đều A, B, H nên nó là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABH.

Theo định lý sin thì $I_1H = R_{HAB} = \dfrac{AB}{2\sin 150°} = a$.

Gọi M là trung điểm SH và đặt $SH = 2x$.

Vì $O_1H = O_1S$ nên tam giác O_1SH cân tại O_1 và $O_1M \perp SH$. Từ đây ta có HMO_1I_1 là hình chữ nhật.

Do đó, theo định lý Pytagores thì

$$R_1 = O_1H = \sqrt{O_1M^2 + MH^2} = \sqrt{a^2 + x^2}.$$

Suy ra diện tích mặt cầu (O_1) là: $4\pi\left(a^2 + x^2\right)$.

Tương tự, ta tính được diện tích mặt cầu (O_2) là: $4\pi\left(\dfrac{a^2}{3} + x^2\right)$ và (O_3) là $4\pi\left(\dfrac{a^2}{4} + x^2\right)$.

Tổng diện tích các mặt cầu là $4\pi\left(\dfrac{19a^2}{12} + 3x^2\right) = \pi\left(\dfrac{19a^2}{3} + 12x^2\right)$.

Suy ra $\pi\left(\dfrac{19a^2}{3} + 12x^2\right) = \dfrac{31\pi a^2}{3}$ hay $x = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$, dẫn đến $SH = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Diện tích tam giác ABC là $S_{ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Vậy thể tích khối chóp $S.ABC$ là $V = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{2a\sqrt{3}}{3} \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^3}{6}$.