SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO **BẮC GIANG** **ĐỀ THI CHÍNH THỨC**	**KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI VĂN HÓA CẤP TỈNH** **NĂM HỌC 2012-2013** **MÔN: TOÁN LỚP 8** **Ngày thi: 30/3/2013**

Câu 1. (4,5 điểm)

1) Phân tích biểu thức sau thành nhân tử: $P = 2a^3 + 7a^2b + 7ab^2 + 2b^3$
2) Cho $x^2 + x = 1$. Tính giá trị biểu thức $Q = x^6 + 2x^5 + 2x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1$

Câu 2. (4,5 điểm)

1) Cho biểu thức $R = \left(\frac{x-1}{x^2-2x} + \frac{x+1}{x^2+2x} - \frac{4}{x^3-4x}\right) : \frac{4026}{x}$. Tìm x để biểu thức xác định, khi đó hãy rút gọn biểu thức
2) Giải phương trình sau: $|x-2|(x-1)(x+1)(x+2) = 4$

Câu 3. (4,0 điểm)

1) Cho n là số tự nhiên lẻ. Chứng minh $n^3 - n$ chia hết cho 24
2) Tìm số tự nhiên n để $n^2 + 4n + 2013$ là một số chính phương.

Câu 4. (6,0 điểm)

1) Cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và D. Biết $CD = 2AB = 2AD$ và $BC = a\sqrt{2}$
   a) Tính diện tích hình thang $ABCD$ theo a
   b) Gọi I là trung điểm của BC, H là chân đường vuông góc kẻ từ D xuống AC. Chứng minh $\widehat{HDI} = 45^0$

2) Cho tam giác ABC có $BC = a, CA = b, AB = c$. Độ dài các đường phân giác trong của tam giác kẻ từ các đỉnh A, B, C lần lượt là l_a, l_b, l_c. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{l_a} + \frac{1}{l_b} + \frac{1}{l_c} > \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

Câu 5. (1,0 điểm)

Cho hai số không âm a và b thỏa mãn: $a^2 + b^2 = a + b$. Tính giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$S = \frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1}$$

ĐÁP ÁN

Câu 1.

1)

Ta có: $P = 2\left(a^3 + b^3\right) + 7ab(a+b)$

$= 2(a+b)\left(a^2 - ab + b^2\right) + 7ab(a+b)$

$= (a+b)\left(2a^2 + 2b^2 + 5ab\right)$

$= (a+b)\left(2a^2 + 4ab + 2b^2 + ab\right)$

$= (a+b)\left[2a(a+2b) + b(a+2b)\right]$

$= (a+b)(2a+b)(a+2b)$

Kết luận $P = (a+b)(2a+b)(a+2b)$

2)

Ta có:

$Q = x^2.\left(x^4 + 2x^3 + x^2\right) + \left(x^4 + 2x^3 + x^2\right) + x^2 + x + x + 1$

$= x^2\left(x^2 + x\right)^2 + \left(x^2 + x\right)^2 + x + 2$

$= x^2 + x + 3 = 4$

Vậy $Q = 4$

Câu 2.

1)

Ta có: $R = \left[\dfrac{x-1}{x(x-2)} + \dfrac{x+1}{x(x+2)} - \dfrac{4}{x\left(x^2-4\right)}\right].\dfrac{x}{4026}$

ĐK: $x\left(x^2-4\right) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq \pm 2 \end{cases}$

Khi đó:

$R = \dfrac{1}{4026}.\left(\dfrac{x-1}{x-2} + \dfrac{x+1}{x+2} - \dfrac{4}{x^2-4}\right)$

$$=\frac{1}{4026}.\frac{(x-1)(x+2)+(x+1)(x-2)-4}{x^2-4}$$

$$=\frac{1}{4026}.\frac{2(x^2-4)}{x^2-4}=\frac{1}{2013}$$

Vậy R xác định khi $\begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq \pm 2 \end{cases}$ và $R=\frac{1}{2013}$

2) +Nếu $x \geq 2,$ phương trình đã cho trở thành :

$$(x-2)(x-1)(x+1)(x+2)=4$$

$$\Leftrightarrow (x^2-1)(x^2-4)=4$$

$$\Leftrightarrow x^4-5x^2=0 \Leftrightarrow x^2.(x^2-5)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0(ktm) \\ x=\sqrt{5}(tm) \\ x=-\sqrt{5}(ktm) \end{array}\right.$$

+)Nếu $x<2,$ phương trình đã cho trở thành:

$$(2-x)(x-1)(x+1)(x+2)=4$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x-1)(x+1)(x+2)=-4$$

$$\Leftrightarrow (x^2-1)(x^2-4)=-4$$

$$\Leftrightarrow x^4-5x^2+8=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{7}{4}=0$$ vô nghiệm

Phương trình có một nghiệm $x=\sqrt{5}$

Câu 3.

1) Ta có: $n^3-n=n(n-1)(n+1)$

Vì $n-1;n;n+1$ là ba số tự nhiên liên tiếp nên có một trong ba số đó chia hết cho 3.

Do đó $(n^3-n)\vdots 8 \quad (2)$

Vì 3 và 8 là hai số nguyên tố cùng nhau nên kết hợp với $(1);(2)$ suy ra

$(n^3-n)\vdots 24 \quad (dpcm)$

2) Giả sử $n^2+4n+2013=m^2\,(m\in\mathbb{N})$

Suy ra $(n+2)^2+2009=m^2 \Leftrightarrow m^2-(n+2)^2=2009$

$\Leftrightarrow (m+n+2)(m-n-2)=2009$

Mặt khác $2009=2009.1=287.7=49.41$ và $m+n+2>m-n-2$ nên có các trường hợp sau:

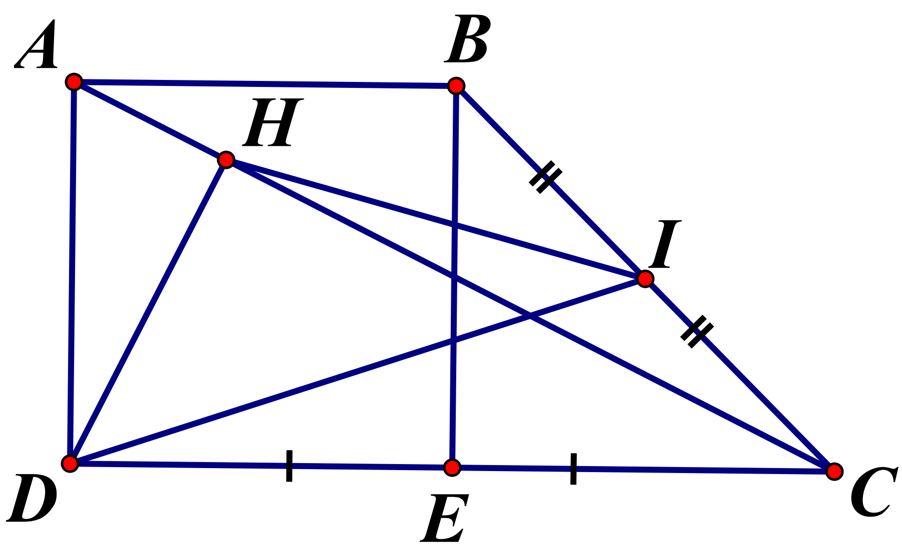
$TH1:\begin{cases} m+n+2=2009 \\ m-n-2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=1005 \\ n=1002 \end{cases}$

$TH2:\begin{cases} m+n+2=287 \\ m-n-2=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=147 \\ n=138 \end{cases}$

$TH3:\begin{cases} m+n+2=49 \\ m-n-2=41 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=45 \\ n=2 \end{cases}$

Vậy các số cần tìm là $1002;138;2$

Câu 4.



1)

a) Gọi E là trung điểm của CD, chỉ ra $ABED$ là hình vuông và BEC là tam giác vuông cân

Từ đó suy ra $AB=AD=a, BC=2a$

Diện tích của hình thang $ABCD$ là $S=\dfrac{(AB+CD).AD}{2}=\dfrac{(a+2a).a}{2}=\dfrac{3a^2}{2}$

b) $\widehat{ADH} = \widehat{ACD}(1)$ (hai góc nhọn có cặp cạnh tương ứng vuông góc)

Xét hai tam giác ADC và IBD vuông tại D và B có:

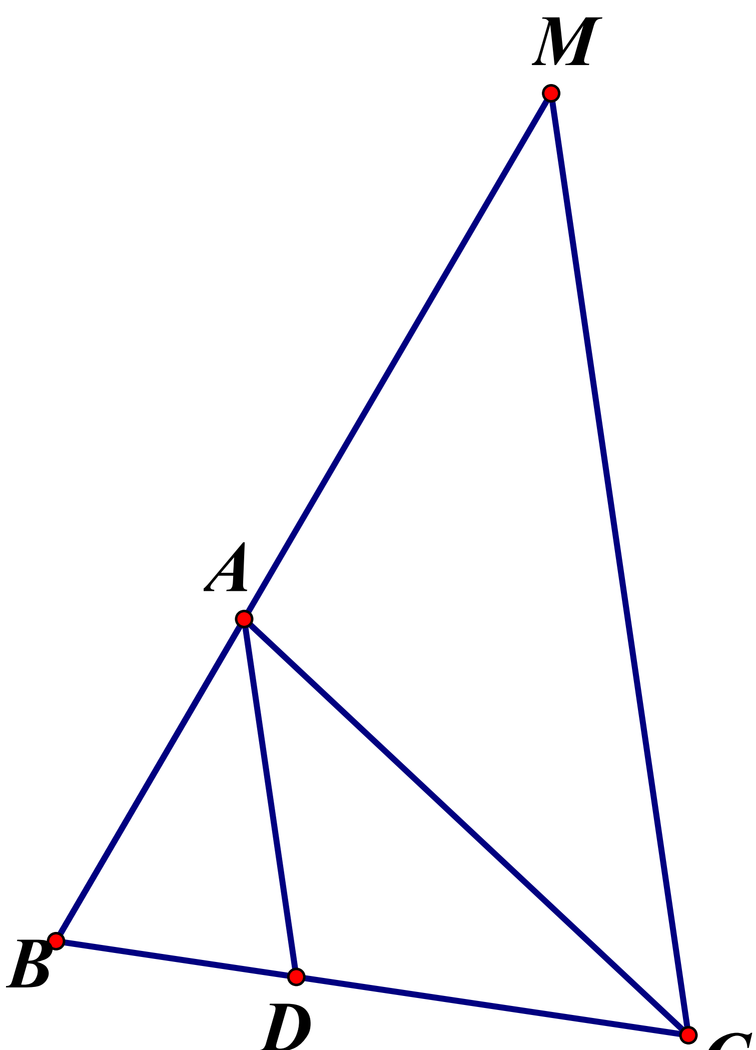
$\dfrac{AD}{DC} = \dfrac{IB}{BC} = \dfrac{1}{2},$ do đó hai tam giác ADC và IBD đồng dạng

Suy ra $\widehat{ACD} = \widehat{BDI}$ (2)

Từ $(1),(2) \Rightarrow \widehat{ADH} = \widehat{BDI}$

Mà $\widehat{ADH} + \widehat{BDH} = 45^0 \Rightarrow \widehat{BDI} + \widehat{BDH} = 45^0$ hay $\widehat{HDI} = 45^0$

2)



Gọi AD là đường phân giác trong góc A, qua C kẻ đường thẳng song song với AD cắt đường thẳng AB tại M

Ta có: $\widehat{BAD} = \widehat{AMC}$ (hai góc ở vị trí đồng vị)

$\widehat{DAC} = \widehat{ACM}$ (hai góc ở vị trí so le trong)

Mà $\widehat{BAD} = \widehat{DAC}$ nên $\widehat{AMC} = \widehat{ACM}$ hay ΔACM cân tại A, suy ra $AM = AC = b$

Do $AD//CM$ nên $\dfrac{AD}{CM} = \dfrac{BA}{BM} = \dfrac{c}{b+c}$

Mà $CM < AM + AC = 2b \Rightarrow \dfrac{c}{b+c} > \dfrac{AD}{2b} \Rightarrow \dfrac{1}{l_a} > \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}\right) \quad (1)$

Tương tự ta có: $\dfrac{1}{l_b} > \left(\dfrac{1}{c} + \dfrac{1}{a}\right) (2); \dfrac{1}{l_c} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}\right) \ (3)$

Cộng $(1);(2);(3)$ vế theo vế ta có điều phải chứng minh

Câu 5.

Ta có: $a^2 + 1 \ge 2a; b^2 + 1 \ge 2b \Rightarrow a^2 + b^2 + 2 \ge 2a + 2b \Rightarrow a + b \le 2$

Chứng minh được với hai số dương x, y thì $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} \ge \dfrac{4}{x+y}$

Do đó: $S = 2 - \left(\dfrac{1}{a+1} + \dfrac{1}{b+1}\right) \le 2 - \dfrac{4}{a+1+b+1} \le 1$

Vậy $GTLN$ của S là 1, dạt được khi $a = b = 1$