SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
BẮC NINH

CHUYÊN ĐỀ VẬN DỤNG, VẬN DỤNG CAO
KỲ THI TỐT NGHIỆP THPT NĂM 2023
Môn: Toán

TÊN CHUYÊN ĐỀ: CỰC TRỊ SỐ PHỨC

Người biên soạn: Lê Tài Thắng.
Đơn vị công tác: Trường THPT Yên Phong số 1.

A. CƠ SỞ LÍ THUYẾT

1. Khái niệm số phức.

***Định nghĩa 1.** Một số phức là một biểu thức dạng $a+bi$, trong đó *a, b* là các số thực và số i thoả mãn $i^2=-1$. Kí hiệu số phức đó là *z* và viết $z=a+bi$.

Trong đó: *i* được gọi là đơn vị ảo,

a được gọi là phần thực và *b* được gọi là phần ảo của số phức $z=a+bi$.

Tập hợp các số phức được kí hiệu là $\mathbb{C}$.

***Chú ý:** + Mỗi số thực *a* đều được xem như là 1 số phức với phần ảo $b=0$.

+ Số phức có $a=0$ được gọi là ***số thuần ảo hay là số ảo***.

+ Số 0 vừa là số thực vừa là số ảo.

***Định nghĩa 2.** Hai số phức $z=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$ và $z'=a'+b'i$ $(a',b'\in\mathbb{R})$ được gọi là bằng nhau nếu $a=a'$ và $b=b'$. (phần thực bằng phần thực và phần ảo bằng phần ảo). Khi đó, ta viết: $z=z'$.

2.Biểu diễn hình học số phức.

Mỗi số phức $z=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$ được biểu diễn bởi một điểm $M(a;b)$ trên mặt phẳng toạ độ *Oxy*. Ngược lại mỗi điểm $M(a;b)$ biểu diễn một số phức $z=a+bi$

Mặt phẳng toạ độ với việc biểu diễn số phức được gọi là mặt phẳng phức. ***Trục Ox gọi là trục thực, trục Oy gọi là trục ảo.***

3. Phép cộng và phép trừ số phức.

***Định nghĩa 3:** Tổng của hai số phức $z_1=a_1+b_1i$, $z_2=a_2+b_2i$ $(a_1,b_1,a_2,b_2\in\mathbb{R})$ là số phức

$z_1+z_2=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i$.

***Tính chất của phép cộng số phức.**

i, $(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$ với mọi $z_1,z_2,z_3\in\mathbb{C}$

ii, $z_1+z_2=z_2+z_1$ với mọi $z_1,z_2\in\mathbb{C}$

iii, $z+0=0+z=z$ với mọi $z\in\mathbb{C}$

iv, Với mỗi số phức $z=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$, nếu kí hiệu số phức $-a-bi$ là $-z$ thì ta có: $z+(-z)=-z+z=0$. Số $-z$ được gọi là số đối của số phức z.

***Định nghĩa 4.** Hiệu của hai số phức $z_1=a_1+b_1i$, $z_2=a_2+b_2i$ $(a_1,b_1,a_2,b_2\in\mathbb{R})$ là tổng của hai số phức z_1 và $-z_2$, tức là: $z_1 + (-z_2) = z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$.

*** Ý nghĩa hình học của phép cộng và phép trừ số phức.**

Mỗi số phức $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ được biểu diễn bởi $M(a; b)$ cũng có nghĩa là véc tơ $\overrightarrow{OM}$.

Khi đó nếu $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}$ theo thứ tự biểu diễn số phức z_1, z_2 thì:

+) $\overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2}$ biểu diễn số phức $z_1 + z_2$

+) $\overrightarrow{u_1} - \overrightarrow{u_2}$ biểu diễn số phức $z_1 - z_2$

4. Phép nhân số phức.

*** Định nghĩa 5.** Tích của hai số phức $z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i$ $(a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R})$ là số phức:

$z_1.z_2 = a_1a_2 - b_1b_2 + (a_1b_2 + a_2b_1)i$

***Nhận xét.** Với mọi số thực *k* và mọi số phức $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$, ta có:

$$kz = k(a + bi) = ka + kbi$$

Đặc biệt $0.z = z.0 = 0$ với mọi $z \in \mathbb{C}$.

*** Tính chất của phép nhân số phức.**

i, $z_1z_2 = z_2z_1$ với mọi $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

ii, $z.1 = 1.z = z$ với mọi $z \in \mathbb{C}$

iii, $(z_1z_2).z_3 = z_1.(z_2z_3)$ với mọi $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$

iv, $z_1.(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3$ với mọi $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$

5. Số phức liên hợp và mô đun của số phức.

*** Định nghĩa 6.** Số phức liên hợp của số phức $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ là $a - bi$ và được ***kí hiệu là*** $\bar{z}$**.**

Như vậy, ta có: $\bar{z} = \overline{a + bi} = a - bi$

***Nhận xét.** + Số phức liên hợp của $\bar{z}$ lại là z, tức là $\bar{\bar{z}} = z$. Do đó ta còn nói z và $\bar{z}$ là hai số phức liên hợp với nhau.

+ Hai số phức là liên hợp với nhau khi và chỉ khi các điểm biểu diễn của chúng đối xứng nhau qua trục *Ox*.

***Tính chất:**

i, Với mọi $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ta có: $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$; $\overline{z_1.z_2} = \overline{z_1}.\overline{z_2}$

ii, $\forall z \in \mathbb{C}$, $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$, số $z.\overline{z}$ luôn là một số thực và $z.\overline{z} = a^2 + b^2$

Định nghĩa 7**: Mô đun của số phức*** $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ là số thực không âm $\sqrt{a^2 + b^2}$ và được kí hiệu $|z|$. Như vậy $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\overline{z}} = \left|\overrightarrow{OM}\right|$.

*** Nhận xét:**

+ $z=0$ khi và chỉ khi $|z|=0$.

+ Nếu z là số thực thì mô đun của z là giá trị tuyệt đối của số thực đó.

+ $|z_1+z_2|=|\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}|$, $|z_1-z_2|=|\overrightarrow{MN}|$, với M,N lần lượt biểu diễn z_1,z_2

6. Phép chia cho số phức khác 0.

*** Định nghĩa 8:** Số nghịch đảo của số phức z khác 0 là $z^{-1}=\dfrac{\overline{z}}{|z|}$. Thương $\dfrac{z'}{z}$ của phép chia số phức z' cho số phức z khác 0 là tích của z' với số phức nghịch đảo của z, tức là $\dfrac{z'}{z}=z'.z^{-1}$. Như vậy, nếu $z\neq 0$ thì $\dfrac{z'}{z}=\dfrac{z'.\overline{z}}{|z|^2}$

*** Chú ý:** Có thể viết $\dfrac{z'}{z}=\dfrac{z'.\overline{z}}{|z|^2}=\dfrac{z'.\overline{z}}{z.\overline{z}}$ nên để tính $\dfrac{z'}{z}$ ta chỉ cần nhân cả tử và mẫu số với $\overline{z}$ với lưu ý rằng $z.\overline{z}=|z|^2$.

***Nhận xét:** + Với $z\neq 0$, ta có: $\dfrac{1}{z}=1.z^{-1}=z^{-1}$.

+ Thương $\dfrac{z'}{z}$ là số phức w sao cho $z.w=z'$. Do đó, có thể nói phép chia cho số phức khác 0 là phép toán ngược của phép nhân.

+ $\overline{\left(\dfrac{z'}{z}\right)}=\dfrac{\overline{z'}}{\overline{z}}$; $\quad \left|\dfrac{z'}{z}\right|=\dfrac{|z'|}{|z|}$; $\quad |z_1z_2|=|z_1|.|z_2|$; $\quad |z_1+z_2|\le |z_1|+|z_2|$

7. Bất đẳng thức tam giác :

$|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|$; dấu "=" xảy ra khi $z_1=kz_2;\quad k\ge 0$

$|z_1-z_2|\le|z_1|+|z_2|$; dấu "=" xảy ra khi $z_1=kz_2;\quad k\le 0$

$|z_1+z_2|\ge\big||z_1|-|z_2|\big|$; dấu "=" xảy ra khi $z_1=kz_2;\quad k\le 0$

8. Công thức trung tuyến: $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2\left(|z_1|^2+|z_2|^2\right)$;

9. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn điều kiện cho trước:

$|z-(a+bi)|=r$: Đường tròn tâm *I(a;b)* bán kính *r*

$|z-(a+bi)|=|z-(c+di)|$: Đường thẳng *d* là trung trực của đoạn *AB* với *A(a;b); B(c;d)*

$|z-(a+bi)|+|z-(c+di)|=2a$:

- Là đoạn thẳng *AB* nếu *AB=2a*; với *A(a;b); B(c;d)*

- Là elip (*E*) nhận *A, B* là hai tiêu điểm với độ dài trục lớn là *2a*, với *2a>AB.*

B. MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TOÁN VỀ CỰC TRỊ CỦA SỐ PHỨC

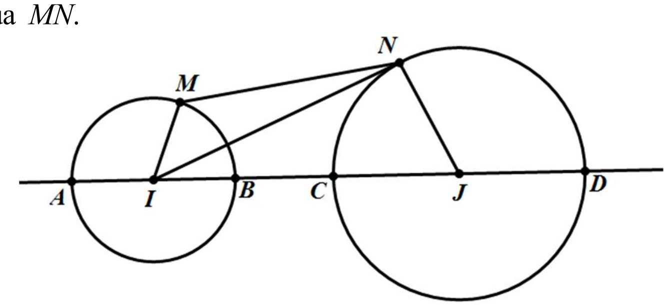
I. Sử dụng tính chất của hình học phẳng.

1. Lý thuyết

Ta nhắc lại một số kết quả của hình học phẳng được sử dụng trong quá trình giải các bài toán cực trị của biểu thức số phức.

- Cho đường thẳng Δ và điểm A không nằm trên Δ. Điểm M trên Δ có khoảng cách đến A nhỏ nhất chính là hình chiếu vuông góc của A trên Δ.
- Cho đoạn thẳng PQ và điểm A không thuộc PQ, M là điểm nằm trên đoạn thẳng PQ, khi đó $\max AM = \max\left\{AP, AQ\right\}$. Để tìm giá trị nhỏ nhất của AM ta xét các trường hợp sau:

  - Nếu hình chiếu vuông góc H của A trên đường thẳng PQ nằm trên đoạn PQ thì $\min AM = AH$.
  - Nếu hình chiếu vuông góc H của A trên đường thẳng PQ không nằm trên đoạn PQ thì $\min AM = \min\left\{AP, AQ\right\}$.
- Cho đường tròn (C) tâm I, bán kính R. A là điểm bất kì và M là điểm nằm trên đường tròn (C). Khi đó $\max AM = IA + R$ và $\min AM = \left|IA - R\right|$.
- Nếu M là điểm đi động trên Elip $(E): \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ ở đó $0 < a < b$ thì $\max OM = b$ và $\min AM = a$.
- Nếu M di động trên đường tròn (C) và N di động trên đường thẳng Δ không cắt (C) thì $\max MN = d\left(I,\Delta\right) + R, \min MN = d\left(I,\Delta\right) - R.$ và $\min AM = \left|IA - R\right|$. Trong trường hợp đường thẳng Δ cắt đường tròn $\left(C\right)$ thì $\max MN = d\left(I,\Delta\right) + R$ và $\min MN = 0.$
- Cho hai đường tròn (T_1) có tâm *I*, bán kính R_1; đường tròn (T_2) có tâm *J*, bán kính R_2. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của *MN*.

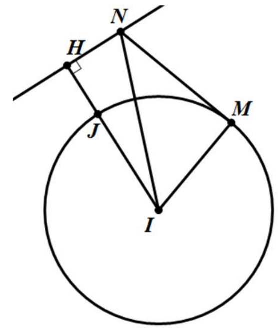


Ta có $MN \le IM + IN \le IM + IJ + JN = R_1 + R_2 + IJ = AD$

$$MN \ge \left|IM - IN\right| \ge \left|IJ - IM - JN\right| = \left|IJ - R_1 - R_2\right| = BC$$

- Cho hai đường tròn (T) có tâm *I*, bán kính *R*; đường thẳng Δ không có điểm chung với (T). Tìm giá trị nhỏ nhất *MN*.

Ta có $MN \ge IN - IM \ge IH - R$



2. Ví dụ minh họa

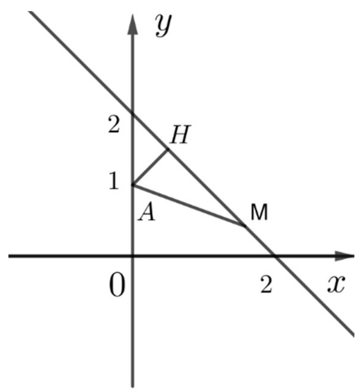
Câu 1. Xét các số phức $z,\ w$ thỏa mãn $\left|z+2-2i\right|=\left|z-4i\right|$ và $w=iz+1$. Giá trị nhỏ nhất của $\left|w\right|$ bằng

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$. **C.** 2. **D.** $2\sqrt{2}$.

Lời giải.

Đặt $z=x+yi\left(x,y\in\mathbb{R}\right)$ và $M\left(x;y\right)$ là điểm biểu diễn số phức z.

Từ $\left|z+2-2i\right|=\left|z-4i\right|\Rightarrow\left(x+2\right)^2+\left(y-2\right)^2=x^2+\left(y-4\right)^2\Leftrightarrow x+y=2\Rightarrow$ tập hợp điểm M là đường thẳng $\Delta: x+y=2$.



Ta có $P=\left|w\right|=\left|iz+1\right|=\left|i\left(z-i\right)\right|=\left|z-i\right|=MA$ với $A\left(0;1\right)$.

Dựa vào hình vẽ ta thấy $P_{\min}=AM_{\min}=d\left(A,\Delta\right)=\dfrac{\left|0+1-2\right|}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 2. Cho các số phức z thỏa mãn $|z-1-2i|+|z-4-3i|=\sqrt{10}$. Tính giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất

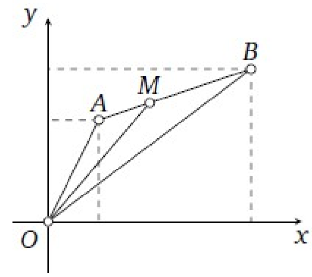
của $\left|z\right|$

A. 5 và $\dfrac{\sqrt{10}}{2}$ B. 5 và $\sqrt{5}$ C. $\sqrt{5}$ và $\dfrac{\sqrt{10}}{2}$ D. 5 và $2\sqrt{5}$

Lời giải

Đặt $A(1;2)$, $B(4;3)$ và gọi M là điểm biểu diễn số phức z trên mặt phẳng. Theo giả thiết ta có

$$MA+MB=|z-1-2i|+|z-4-3i|=\sqrt{10}=AB$$



Mà $MA+MB\ge AB$ nên M nằm trên đoạn thẳng AB.

Lại có

$$\cos\widehat{OAB}=\frac{OA^2+AB^2-OB^2}{2OA\cdot OB}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

nên $\widehat{OAB}$ là góc tù. Suy ra $OA\le OM\le OB$.

Vậy $\min|z|=OA=\sqrt{5}$ và $\max|z|=OB=5$

Nhận xét: Nếu không để ý đến góc $\widehat{OAB}$ là góc tù, ta có thể phạm phải sai lầm $\min OM=d\left(O,AB\right)=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$.

Tuy nhiên dấu bằng không đạt được do hình chiếu của O trên AB nằm ngoài đoạn AB

Câu 3. Xét các số phức z thỏa mãn $\left|z-1+2i\right|=2\sqrt{5}$ và số phức w thỏa $\left(5+10i\right)\overline{w}=\left(3-4i\right)z-25i$. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\left|w\right|$ bằng

A. 4. **B.** $2\sqrt{10}$. **C.** $4\sqrt{5}$. **D.** 6.

Lời giải

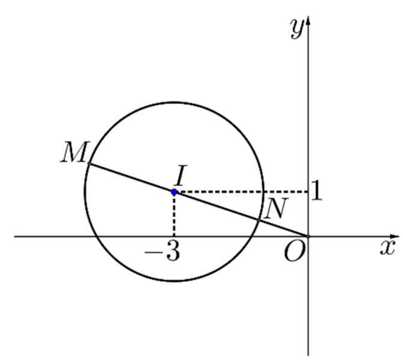
Gọi $w=x+yi$ với x, $y\in\mathbb{R}$.

Ta có $\left(5+10i\right)\overline{w}=\left(3-4i\right)z-25i\Leftrightarrow z=\left(-1+2i\right)\overline{w}-4+3i$.

Lại có $\left|z-1+2i\right|=2\sqrt{5}\Leftrightarrow\left|\left(-1+2i\right)\overline{w}-4+3i-1+2i\right|=2\sqrt{5}$

$\Leftrightarrow\left|\left(-1+2i\right)\overline{w}-5+5i\right|=2\sqrt{5}$ $\Leftrightarrow\left|\overline{w}+3+i\right|=2$

$\Leftrightarrow\left|x-yi+3+i\right|=2\Leftrightarrow\left(x+3\right)^2+\left(y-1\right)^2=4$.



Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức w là đường tròn tâm $I\left(-3;1\right)$, bán kính $R=2$.

$\max P=OM=R+OI=2+\sqrt{10}$ và $\min P=ON=OI-R=\sqrt{10}-2$.

Vậy $\max P+\min P=2\sqrt{10}$.

Câu 4. Cho số phức $z_1;z_2$ thỏa $\left|z_1-1-2i\right|=1$ và $\left|z_2+2+3i\right|=\left|z_2-1-i\right|$. Giá trị nhỏ nhất của $\left|z_1-z_2\right|$ bằng

A. $\frac{27}{10}$. **B.** $\frac{29}{10}$. **C.** $\frac{33}{10}$. **D.** $\frac{23}{10}$.

Lời giải

Gọi $z_1=x+yi$ với $x,y\in\mathbb{R}$ khi đó $\left|z_1-1-2i\right|=1\Leftrightarrow(x-1)^2+(y-2)^2=1$.

Suy ra tập hợp biểu diễn số phức z_1 là đường tròn (C) có phương trình $(x-1)^2+(y-2)^2=1$

.

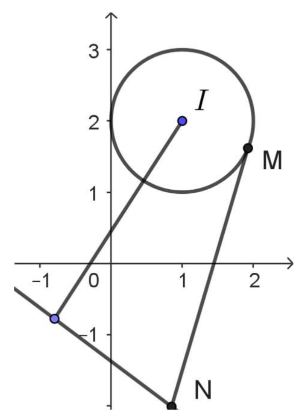
Gọi $z_2=a+bi$ với $a,b\in\mathbb{R}$ khi đó

$\left|z_2+2+3i\right|=\left|z_2-1-i\right|\Leftrightarrow(a+2)^2+(b+3)^2=(a-1)^2+(b-1)^2\Rightarrow 6a+8b+11=0$.

Suy ra tập hợp biểu diễn số phức z_2 là đường thẳng Δ có phương trình $\Delta:6x+8y+11=0$

.

Gọi M là điểm biểu diễn số phức z_1 và N là điểm biểu diễn số phức z_2 trong mặt phẳng phức. Từ đó ta có $\left|z_1-z_2\right|=NM$.



Ta thấy $d(I,\Delta)>R$ (Với I và R lần lượt là tâm và bán kính đường tròn (C))

Nên $NM_{\min}=d(I,\Delta)-R=\frac{33}{10}-1=\frac{23}{10}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $\left|z_1-z_2\right|$ bằng $\frac{23}{10}$.

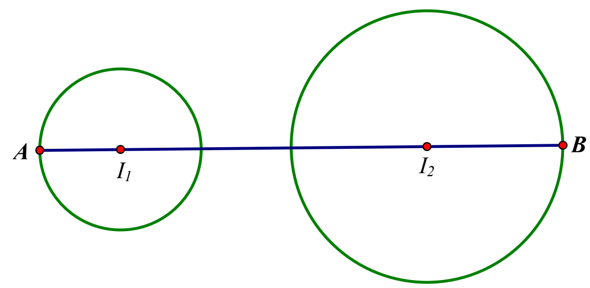
Câu 5. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $\left|z_1-3i+5\right|=2$ và $\left|iz_2-1+2i\right|=4$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T=\left|2iz_1+3z_2\right|$.

A. $\sqrt{313}+16$. **B.** $\sqrt{313}$. **C.** $\sqrt{313}+8$. **D.**
$\sqrt{313}+2\sqrt{5}$.

Lời giải

Ta có $\left|z_1-3i+5\right|=2\Leftrightarrow\left|2iz_1+6+10i\right|=4$ (1);
$\left|iz_2-1+2i\right|=4\Leftrightarrow\left|(-3z_2)-6-3i\right|=12$ (2).

Gọi A là điểm biểu diễn số phức $2iz_1$, B là điểm biểu diễn số phức $-3z_2$. Từ (1) và (2) suy ra điểm A nằm trên đường tròn tâm $I_1(-6;-10)$ và bán kính $R_1 = 4$; điểm B nằm trên đường tròn tâm $I_2(6;3)$ và bán kính $R_2 = 12$.



Ta có $T = |2iz_1 + 3z_2| = AB \le I_1I_2 + R_1 + R_2 = \sqrt{12^2 + 13^2} + 4 + 12 = \sqrt{313} + 16$.

Vậy $\max T = \sqrt{313} + 16$.

Câu 6. Xét các số phức z đồng thời thỏa mãn $|z - 4 + 3i| - |\overline{z} + 4 + 3i| = 10$ và $|z - 3 - 4i|$ nhỏ nhất. Môđun của số phức z bằng

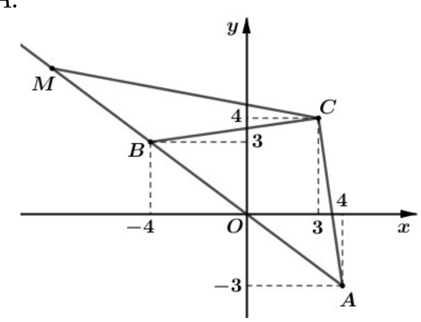
A. 5. **B.** $5\sqrt{2}$. **C.** $6\sqrt{2}$. **D.** 10.

Lời giải

Gọi $M(x;y)$, $A(4;-3)$, $B(-4;3)$ lần lượt là điểm biểu diễn các số phức z, $4 - 3i$, $-4 + 3i$ trong mặt phẳng tọa độ.

Từ $|z - 4 + 3i| - |\overline{z} + 4 + 3i| = 10 \Leftrightarrow |z - 4 + 3i| - |z + 4 - 3i| = 10 \Leftrightarrow MA - MB = 10 = AB$

$\Rightarrow M$ nằm trên tia đối của tia BA.



Ta có $|z - 3 - 4i| = MC$ với $C(3;4)$.

Ta thấy $MC_{\min} = CB = 5\sqrt{2}$. Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow M \equiv B \longrightarrow |z| = 5$.

Câu 7. Xét hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|(z_1 - 2 - i)(2 + 2\sqrt{3}i)| = |(z_1 - \overline{z}_1)(\sqrt{3} - i)|$ và $|z_2 + i| = |z_2 + 1 + 2i|$. Giá trị nhỏ nhất của $|z_1 - z_2|$ bằng

A. $\sqrt{7}$. **B.** $2\sqrt{6}$. **C.** $\frac{34}{5}$. **D.** $2\sqrt{2}$.

Lời giải

Đặt $z_1 = a + bi$,

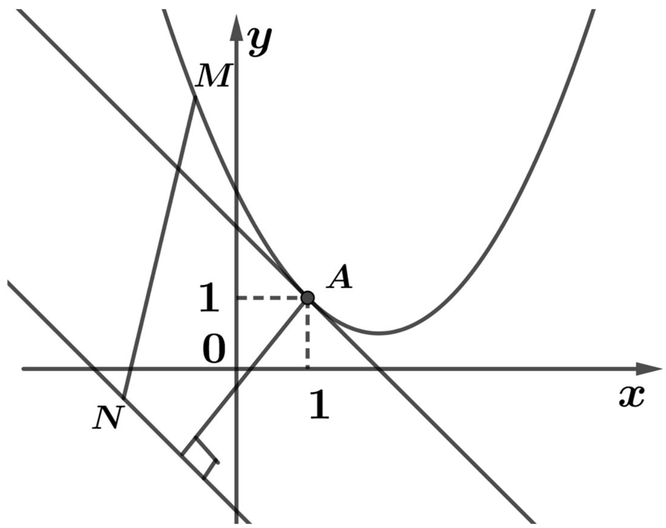
Ta có: $\left|\left(z_1-2-i\right)\left(2+2\sqrt{3}i\right)\right|=\left|\left(z_1-\overline{z_1}\right)\left(\sqrt{3}-i\right)\right| \Leftrightarrow 2\left|\left(z_1-2-i\right)\right|=\left|\left(z_1-\overline{z_1}\right)\right|$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{\left(a-2\right)^2+\left(b-1\right)^2}=2\left|b\right| \Leftrightarrow a^2-4a+4+b^2-2b+1=b^2 \Leftrightarrow b=\dfrac{a^2-4a+5}{2}$

Đặt điểm biểu diễn số phức z_1 là M, vậy quỹ tích của M là parabol $y=\dfrac{x^2-4x+5}{2}$

Đặt điểm biểu diễn số phức z_2 là N. Ta dễ thấy quỹ tích của N là đường thẳng $d: y=-x-2$. Đường thẳng $d': y=-x+2$ tiếp xúc với parabol tại $A\left(1;1\right)$

Minh họa trên hệ trục Oxy.



Ta thấy $\left|z_1-z_2\right|_{\min} \Leftrightarrow MN_{\min}=d\left(A;d\right)=2\sqrt{2}$.

Câu 8. Cho số phức z thay đổi nhưng luôn thoả mãn $\left|z+\sqrt{5}\right|+\left|z-\sqrt{5}\right|=6$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\left|\left(1+i\right)z-4+4i\right|$ bằng

A. 2. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** 5. **D.** $5\sqrt{2}$.

Lời giải

Gọi M là điểm biểu diễn cho số phức z, và $A\left(-\sqrt{5};0\right)$, $B\left(\sqrt{5};0\right)$.

Khi đó, tập hợp tất cả các điểm M thoả mãn là: $MA+MB=6$ là đường Elip có các tiêu điểm là A, B và trục lớn bằng 6.

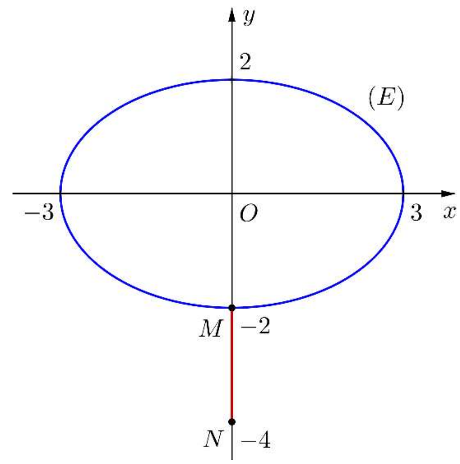
Ta có: $2c=AB=2\sqrt{5} \Rightarrow c=\sqrt{5}$ và $2a=6 \Rightarrow a=3$. Mặt khác: $b^2=a^2-c^2=4$.

Do đó: $\left(E\right): \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$.

Ta có: $P = \left|(1+i)z - 4 + 4i\right| = |1+i|.|z+4i| = \sqrt{2}\left|z - (-4i)\right|$. Gọi $N(0;-4)$.

Suy ra: $P = \sqrt{2}MN$. Khi đó,
$P\min \Leftrightarrow MN\min = ON - b = 2$, xảy ra khi và chỉ khi $M(0;-2)$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $2\sqrt{2}$.

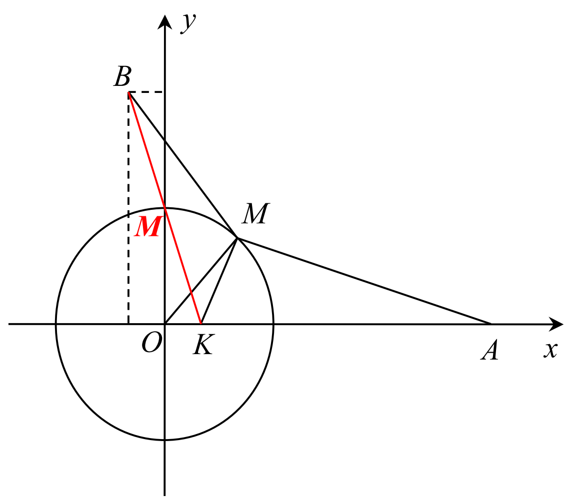


Câu 9. Cho số phức z thỏa mãn $|z| = 3$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = |z-9| + 3|z+1-6i|$ bằng

A. $3\sqrt{10}$. **B.** $6\sqrt{10}$. **C.** $3\sqrt{10}+4$. **D.** $6\sqrt{10}+3$.

Lời giải

Gọi M là điểm biểu diễn của số phức z trên mặt phẳng Oxy $\Rightarrow M$ thuộc đường tròn tâm O, bán kính $R = 3$.



Gọi $A(9;0)$, $B(-1;6)$ $\Rightarrow T = MA + 3MB$. Lấy $K(1;0) \Rightarrow OM = 3OK$.

Xét ΔAOM và ΔMOK có: $\begin{cases} \widehat{AOM}\ chung \\ \dfrac{OM}{OK} = \dfrac{OA}{OM} = 3 \end{cases}$ suy ra hai tam giác ta xét đồng dạng với nhau.

Suy ra $AM = 3MK$. Khi đó: $T = MA + 3MB = 3MK + 3MB = 3\left(MK + MB\right) \geq 3BK = 6\sqrt{10}.$

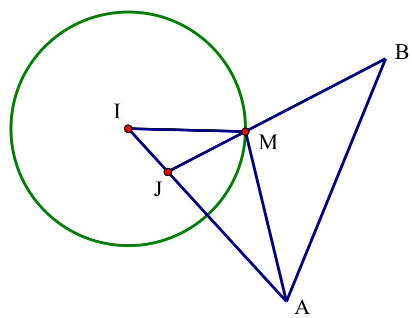
Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow M$ thuộc đoạn thẳng $BK \Leftrightarrow M\left(0;3\right)$ hay $z = 3i$.

Vậy $\text{Min}\,T = 6\sqrt{10}$ khi $z = 3i$.

Ta có thể tổng quát bài toán như sau:

Cho đường tròn $\left(S\right)$ tâm I bán kính R và hai điểm A, B cho trước nằm ngoài $\left(S\right)$ sao cho AB không có điểm chung với $\left(S\right)$. Điểm A thỏa mãn $IA = kR$ với k là số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của $MA + kMB$ với M trên $\left(S\right)$.

Cách làm bài này là gọi J trên đoạn IA sao cho $IA.IJ = R^2$. Từ hai tam giác IJM và IMA đồng dạng ta có được $MA = kMJ$, mục tiêu là cân bằng hệ số của $MA,\ MB$ và quay về quy tắc ba điểm.
Bài toán được áp dụng tương tự cho mặt cầu trong hình học không gian.



Câu 10. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $\left|z_1 + 1 - 2i\right| = \left|z_1 - 5 + 2i\right|$ và $\left|z_2 + 3 - 2i\right| = 2$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \left|z_1 + 3 + i\right| + \left|z_1 - z_2\right|$ bằng

A. $5\sqrt{5} - 2$. **B.** $\sqrt{10} + 2$. **C.** $3\sqrt{10} - 2$. **D.** $\sqrt{85} - 2$.

Lời giải

Gọi M, N lần lượt là điểm biểu diễn số phức z_1 và z_2.

Gọi $z_1 = x + yi\ (x, y \in \mathbb{R})$, từ $\left|z_1 + 1 - 2i\right| = \left|z_1 - 5 + 2i\right|$

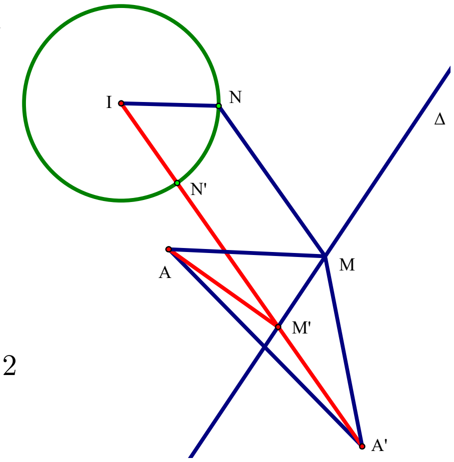
$\Leftrightarrow \left(x+1\right)^2 + \left(y-2\right)^2 = \left(x-5\right)^2 + \left(y+2\right)^2$

$\Leftrightarrow 3x - 2y - 6 = 0$

$\Rightarrow$ Tập hợp điểm M là đường thẳng có phương trình $\left(\Delta\right): 3x - 2y - 6 = 0$.

Từ $\left|z_2+3-2i\right|=2 \Rightarrow$ Tập hợp điểm N là đường tròn tâm $I\left(-3;2\right)$, bán kính $R=2$.

Ta có $P=\left|z_1+3+i\right|+\left|z_1-z_2\right|=MA+MN$, với $A=\left(-3;-1\right)$.



Dễ dàng chứng minh được điểm A và đường tròn $\left(I;R\right)$ nằm về cùng một phía so với đường thẳng Δ.

Gọi A' là điểm đối xứng của A qua Δ $\Rightarrow A'\left(3;-5\right)$.

Ta có $P=MA+MN\geq MA'+MI-R\geq A'I-R=\sqrt{85}-2$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi 4 điểm A',M,N,I thẳng hàng.

Vậy $\min P=\sqrt{85}-2$.

3. Bài tập có hướng dẫn

Câu 1. Xét các số phức z,w,u thỏa mãn $\left|z\right|=1,\ \left|w\right|=2,\ \left|u\right|=3$ và $\left|z+w-u\right|=\left|u+z-w\right|$. Giá trị lớn nhất của $\left|z-u\right|$ bằng

A. $\sqrt{10}$. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** $\sqrt{14}$. **D.** 4.

Gọi M, N, P lần lượt là biểu diễn của các số phức z, w, u. Khi đó:

$OM=1$, $ON=2$, $OP=3$ và $\left|\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{NP}\right|=\left|\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{NP}\right|$.

Ta có $\left|\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{NP}\right|=\left|\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{NP}\right|\Leftrightarrow OM^2+2\overrightarrow{OM}\,\overrightarrow{NP}+NP^2=OM^2-2\overrightarrow{OM}\,\overrightarrow{NP}+NP^2$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OM}\,\overrightarrow{NP}=0\Leftrightarrow \overrightarrow{OM}\left(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{ON}\right)=0\Leftrightarrow \overrightarrow{OM}\,\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OM}\,\overrightarrow{ON}$$

$$\Leftrightarrow OM^2+OP^2-MP^2=OM^2+ON^2-MN^2\Leftrightarrow MP^2=MN^2+5\leq\left(OM+ON\right)^2+5\leq 14$$
.

$\Rightarrow \left|z-u\right|=MP\leq\sqrt{14}$.

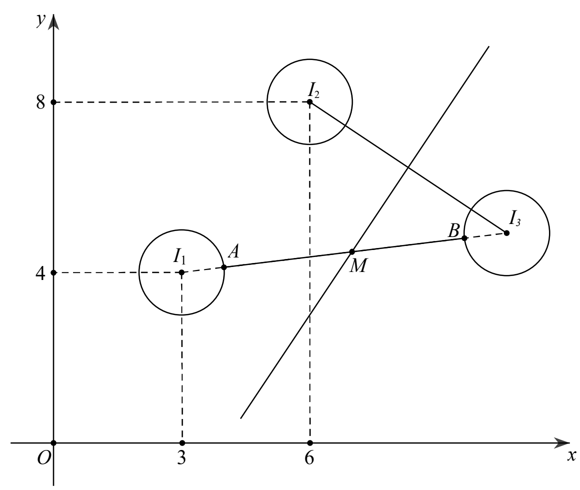
Đẳng thức xảy ra khi O, M, N thẳng hàng và O nằm giữa M, N.

Câu 2. Biết rằng hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $\left|z_1-3-4\mathrm{i}\right|=1$ và $\left|z_2-3-4\mathrm{i}\right|=\dfrac{1}{2}$. Số phức z có phần thực là a và phần ảo là b thỏa mãn $3a-2b=12$. Giá trị nhỏ nhất của $P=\left|z-z_1\right|+\left|z-2z_2\right|+2$ là

A. $P_{\min}=\dfrac{\sqrt{9945}}{11}$. **B.** $P_{\min}=5-2\sqrt{3}$. **C.** $P_{\min}=5+2\sqrt{5}$. **D.** $P_{\min}=\dfrac{\sqrt{9945}}{13}$.

Lời giải

Gọi M_1, M_2, M lần lượt là điểm biểu diễn cho số phức z_1, $2z_2$, z trên hệ trục tọa độ Oxy. Khi đó, điểm M_1 thuộc đường tròn $\left(C_1\right)$ tâm $I_1\left(3;4\right)$, bán kính $R=1$; điểm M_2 thuộc đường $\left(C_2\right)$ tròn tâm $I_2\left(6;8\right)$, bán kính $R=1$; điểm M thuộc đường thẳng $d:3x-2y-12=0$. Bài toán trở thành tìm giá trị nhỏ nhất của $P=MM_1+MM_2+2$.



Gọi $\left(C_3\right)$ có tâm $I_3\left(\dfrac{138}{13};\dfrac{64}{13}\right)$, $R=1$ là đường tròn đối xứng với $\left(C_2\right)$ qua d. Khi đó $\min\left(MM_1+MM_2+2\right)=\min\left(MM_1+MM_3+2\right)$ với $M_3\in\left(C_3\right)$.

Gọi A, B lần lượt là giao điểm của đoạn thẳng I_1I_3 với $\left(C_1\right)$, $\left(C_3\right)$. Khi đó với mọi điểm $M_1\in\left(C_1\right)$, $M_3\in\left(C_3\right)$, $M\in d$ ta có $MM_1+MM_3+2\geq AB+2$, dấu "=" xảy ra khi $M_1\equiv A, M_3\equiv B$. Do đó $P_{\min}=AB+2=I_1I_3-2+2=I_1I_3=\dfrac{\sqrt{9945}}{13}$.

Câu 3. Xét các số phức z và w thỏa mãn $\left|z+2+2i\right|=1$ và $\left|w+2-i\right|=\left|w-3i\right|$.

Khi $\left|z-w\right|+\left|w-3+3i\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $\left|z+2w\right|$

A. $2\sqrt{5}$. **B.** 7. **C.** $2\sqrt{3}$. **D.** $\sqrt{61}$.

Lời giải

Ta có: $\left|z+2+2i\right|=1$ nên tập hợp điểm M biểu diễn số phức z là đường tròn $\left(C\right)$ tâm $I\left(-2;-2\right)$, bán kính $R=1$.

Gọi $w=x+yi;\left(x;y\in\mathbb{R}\right)$

$\left|w+2-i\right|=\left|w-3i\right|$.

$\Leftrightarrow \left(x+2\right)^2+\left(y-1\right)^2=x^2+\left(y-3\right)^2$

$\Leftrightarrow x+y-1=0.\qquad \left(\Delta\right)$

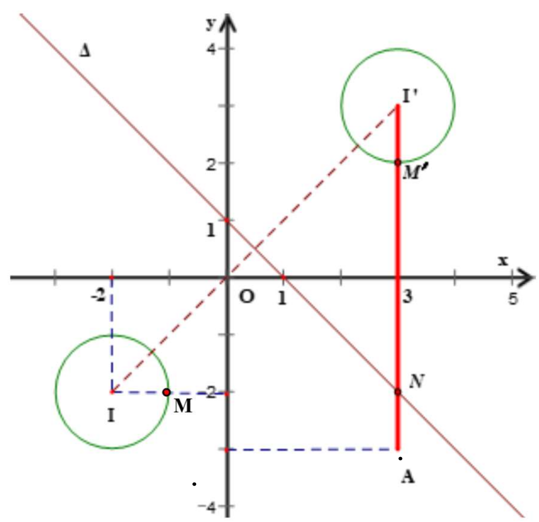
Tập hợp điểm N biểu diễn số phức w là đường thẳng $\left(\Delta\right)$.

$\left|z-w\right|=MN$

$\left|w-3+3i\right|=NA$, với $A\left(3;-3\right)$.

$T=\left|z-w\right|+\left|w-3+3i\right|=MN+NA$.

Tham khảo hình vẽ bên dưới



Dễ thấy đường tròn $\left(C\right)$ và điểm A thuộc cùng một nửa mặt phẳng bờ Δ.

Dựng đường tròn $\left(C'\right)$ có tâm $I'\left(3;3\right)$, bán kính $R=1$ đối xứng với $\left(C\right)$ qua Δ.

Gọi M' là ảnh của M qua phép đối xứng trục Δ.

Khi đó, với mọi điểm $N\in\Delta$, ta có: $NM=NM'$.

Nên $T=MN+NA=M'N+NA$.

$T_{\min}\Leftrightarrow I',M',N,A$ thẳng hàng.

Dựa vào hình vẽ trên, suy ra

$M'\left(3;2\right)\Rightarrow M\left(-1;-2\right)\Leftrightarrow z=-1-2i$;

$N\left(3;-2\right)\Rightarrow w=3-2i$.

Vậy $\left|z+2w\right|=\left|-1-2i+2\left(3-2i\right)\right|=\sqrt{61}$.

Câu 4. Tìm số phức z thỏa mãn $\left|z-1-i\right|=5$ và biểu thức $T=\left|z-7-9i\right|+2\left|z-8i\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $z=5-2i$.

B. $z=1+6i$.

C. $z=1+6i$ và $z=5-2i$.

D. $z=4+5i$.

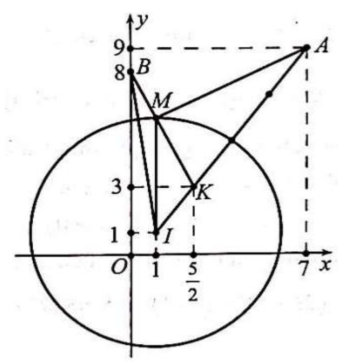
Lời giải

Gọi $M\left(x;y\right)$ là điểm biểu diễn số phức $z=x+yi\ (x;y\in\mathbb{R})$ trên mặt phẳng Oxy.

Ta có: $\left|z-1-i\right|=5\Leftrightarrow\left|(x-1)+(y-1)i\right|=5\Leftrightarrow\left(x-1\right)^2+\left(y-1\right)^2=25$

$\Rightarrow$ Tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z là đường tròn (C) tâm I (1;1), bán kính R = 5

Ta có:



$T=\left|z-7-9i\right|+2\left|z-8i\right|=\sqrt{\left(x-7\right)^2+\left(y-9\right)^2}+2\sqrt{x^2+\left(y-8\right)^2}=MA+2MB$

Với điểm $A\left(7;9\right)$ và $B\left(0;8\right)$. Ta thấy $IA=10=2R=2IM$

Gọi K là điểm trên tia IA sao cho $IK=\frac{1}{4}IA\Rightarrow K=\left(\frac{5}{2};3\right)$

Do đó: $\frac{IM}{IA}=\frac{IK}{IM}=\frac{1}{2}$, góc $\widehat{MIK}$ chung

$\Rightarrow\Delta IKM\backsim\Delta IMA\ \left(c.g.c\right)$

$\Rightarrow\frac{MK}{MA}=\frac{IK}{IM}=\frac{1}{2}\Rightarrow MA=2MK$

Lại có: $T=\left|z-7-9i\right|+2\left|z-8i\right|=MA+2MB$

$=2(MK+MB)\geq 2.BK=5\sqrt{5}$

$\Rightarrow T_{\min} = 5\sqrt{5} \Leftrightarrow M = BK \cap (C)$ với M nằm giữa B và K hay $0 < x_M < \dfrac{5}{2}$

Phương trình đường thẳng BK đi qua B có một vecto chỉ phương $\overrightarrow{BK} = \left(\dfrac{5}{2}; -5\right)$ là:

$$\frac{x}{\frac{5}{2}} = \frac{y-8}{-5} \Leftrightarrow 2x + y - 8 = 0$$

Tọa độ điểm M là nghiệm của hệ: $\begin{cases} 2x + y - 8 = 0 \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1 \\ y = 6 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 5 \\ y = -2 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow M = (1;6)$

Vậy $z = 1 + 6i$ là số phức cần tìm.

Câu 5. Cho 2 số phức z_1, z_2 thỏa mãn $\left|z_1 - \overline{z_1} + 2i\right| = \left|3z_1 + \overline{z_1} + 4 - 2i\right|$ và $\left|\overline{z_2} - 4 - i\right| = 2$. Gọi A, B là các điểm biểu diễn các số phức z_1, z_2 trong mặt phẳng tọa độ. Độ dài đoạn AB ngắn nhất bằng:

A. $2\sqrt{5} - 2$. **B.** $2\sqrt{2} - 2$. **C.** $2\sqrt{3} - 2$. **D.** $2\sqrt{6} - 2$.

Lời giải

Đặt $z_1 = a + bi \ (a, b \in \mathbb{R})$, ta có:

$$\left|z_1 - \overline{z_1} + 2i\right| = \left|3z_1 + \overline{z_1} + 4 - 2i\right| \Leftrightarrow \left|a + bi - a + bi + 2i\right| = \left|3a + 3bi + a - bi + 4 - 2i\right|$$

$$\Leftrightarrow \left|(2b+2)i\right| = \left|4a + 4 + (2b-2)i\right| \Leftrightarrow (2b+2)^2 = (4a+4)^2 + (2b-2)^2$$

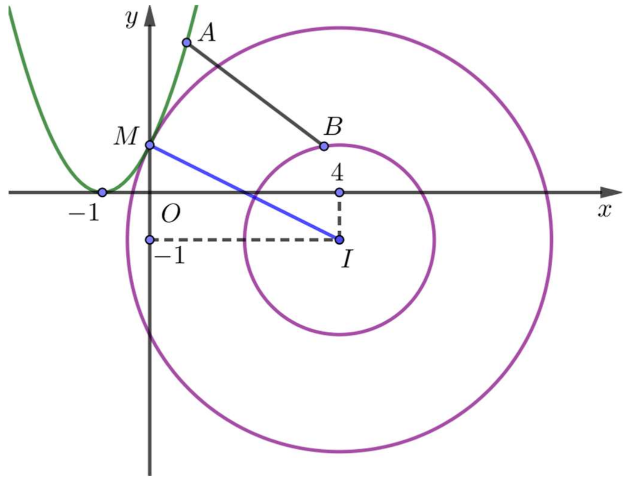
$$\Leftrightarrow b = a^2 + 2a + 1$$

$\Rightarrow$ Điểm A luôn thuộc parabol $(P): y = x^2 + 2x + 1$

Đặt $z_2 = c + di \ (c, d \in \mathbb{R})$, ta có:

$$\left|\overline{z_2} - 4 - i\right| = 2 \Leftrightarrow \left|c - di - 4 - i\right| = 2 \Leftrightarrow (c-4)^2 + (d+1)^2 = 4$$

$\Rightarrow$ Điểm B luôn thuộc đường tròn $(C): (x-4)^2 + (y+1)^2 = 4$ với tâm $I(4;-1)$ và bán kính $r = 2$



Gọi (C') là đường tròn tâm $I(4;-1)$, bán kính R tiếp xúc với parabol $(P): y = x^2 + 2x + 1$ tại M.

Ta có: $(C'): (x-4)^2 + (y+1)^2 = R^2$

Phương trình hoành độ giao điểm của (C') và (P) là: $(x-4)^2 + (x^2+2x+1+1)^2 = R^2$

$\Leftrightarrow (x-4)^2 + (x^2+2x+2)^2 = R^2$

Đặt $f(x) = (x-4)^2 + (x^2+2x+2)^2$

$f'(x) = 2(x-4) + 2(2x+2)(x^2+2x+2) = 4x^3 + 12x^2 + 18x$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	20	$\nearrow$	$+\infty$

Vì (C') và (P) tiếp xúc nhau nên $R^2 = 20 \Rightarrow R = 2\sqrt{5} \Rightarrow IM = 2\sqrt{5}$.

Ta có: $AB \geq IA - IB$ (Quy tắc 3 điểm)

Mà $IA \geq IM$ nên $AB \geq IM - IB \Rightarrow AB \geq 2\sqrt{5} - 2$.

Câu 6. Giả sử $z_1; z_2$ là hai trong số các số phức z thoả mãn $(z-6)(8-i.\overline{z})$ là một số thực. Biết rằng

$|z_1 - z_2| = 6$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $|z_1 + 3z_2|$ bằng

A. $5-\sqrt{21}$. **B.** $20-4\sqrt{21}$. **C.** $-5+\sqrt{73}$. **D.** $20-2\sqrt{73}$.

Lời giải

Gọi A, B là các điểm biểu diễn cho $z_2; z_1$

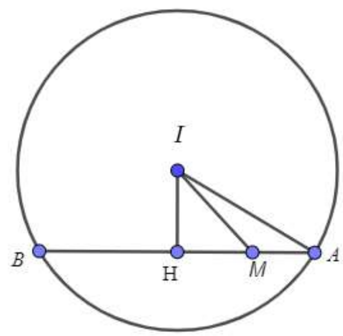
Đặt $z = a+bi \Rightarrow (z-6)(8-i.\overline{z}) = [(a-6)+bi].[(8-b)-ai]$

Do $(z-6)(8-i.\overline{z})$ là một số thực nên $-a.(a-6)+b(8-b)=0 \Leftrightarrow a^2+b^2-6a-8b=0$

Suy ra A, B thuộc đường tròn tâm $I(3;4)$, bán kính $R=5$

Gọi M điểm thoả mãn $3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$.

Gọi H là trung điểm của AB



Ta có $IH=\sqrt{IA^2-AH^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$; $IM=\sqrt{IH^2+MH^2}=\sqrt{4^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{73}}{2}$.

Khi đó M thuộc đường tròm tâm I, bán kính $R'=\frac{\sqrt{73}}{2}$.

Xét biểu thức $|z_1+3z_2| = |3\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}| = |4\overrightarrow{OM}+3\overrightarrow{MA}+\overleftarrow{MB}| = 4OM$.

Ta có $|z_1+3z_2|_{\min} \Leftrightarrow OM_{\min} = |OI-R'| = 5-\frac{\sqrt{73}}{2}$.

Vậy $|z_1+3z_2|_{\min} = 4\left(5-\frac{\sqrt{73}}{2}\right) = 20-2\sqrt{73}$.

II. Sử dụng bất đẳng thức và các tính chất môđun.

1. Lý thuyết

Mỗi số phức $z = a + bi$ được biểu diễn bởi điểm $M\left(a, b\right)$ trên mặt phẳng tọa độ. Do vậy ta có thể coi véc-tơ $\overrightarrow{OM} = \left(a, b\right)$ biểu diễn cho số phức z. Như vậy chúng ta có thể sử dụng các bất đẳng thức véc-tơ (tương ứng là các bất đẳng thức về môđun của các số phức) trong việc tìm cực trị của biểu thức số phức.

$\left|z_1 + z_2\right| \le \left|z_1\right| + \left|z_2\right|$; dấu "=" xảy ra khi $z_1 = kz_2$; $\quad k \ge 0$

$\left|z_1 - z_2\right| \le \left|z_1\right| + \left|z_2\right|$; dấu "=" xảy ra khi $z_1 = kz_2$; $\quad k \le 0$

$\left|z_1 + z_2\right| \ge \left\|z_1\right| - \left|z_2\right\|$; dấu "=" xảy ra khi $z_1 = kz_2$; $\quad k \le 0$

Công thức trung tuyến: $\left|z_1 + z_2\right|^2 + \left|z_1 - z_2\right|^2 = 2\left(\left|z_1\right|^2 + \left|z_2\right|^2\right)$;

Với $m, n \in \mathbb{R}$ và $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ta có: $\left|mz_1 \pm nz_2\right|^2 = m^2\left|z_1\right|^2 + n^2\left|z_2\right|^2 \pm mn\left(z_1.\overline{z}_2 + \overline{z}_1.z_2\right)$.

Ngoài ra chúng ta cũng sử dụng bất đẳng thức cơ bản, hàm số… để tìm cực trị của biểu thức số phức.

2. Ví dụ minh họa

Câu 1. Cho số phức z thỏa mãn $\left|z - 4 - 3i\right| = 6$, Tổng giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của $\left|z\right|$ là

A. 6. **B.** 3. **C.** 12. **D.** 4.

Lời giải

Cách 1:

Ta có $6 = \left|z - 4 - 3i\right| \le \left|z\right| + \left|-4 - 3i\right| = \left|z\right| + 5 \Rightarrow \left|z\right| \ge 1$

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} z = k(-4 - 3i), k > 0 \\ \left|z\right| = 1 \end{cases} \Rightarrow z = -\dfrac{4}{5} - \dfrac{3}{5}i$.

Ta lại có $6 = \left|z - 4 - 3i\right| \ge \left|z\right| - \left|4 + 3i\right| = \left|z\right| - 5 \Rightarrow \left|z\right| \le 11$

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} z = k(4 + 3i), k > 0 \\ \left|z\right| = 11 \end{cases} \Rightarrow z = \dfrac{44}{5} + \dfrac{33}{5}i$.

Cách 2:

Đặt $z = x + yi$.

Ta có $\left|x + yi - 4 - 3i\right| = \left|\left(x - 4\right) + \left(y - 3\right)i\right| = \sqrt{\left(x - 4\right)^2 + \left(y - 3\right)^2} = 6$

$\Leftrightarrow (x-4)^2 + (y-3)^2 = 36 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2(4x+3y) - 11 = 0 \ (*)$

Do $(4x+3y)^2 \le 25(x^2+y^2) \Rightarrow -5\sqrt{x^2+y^2} \le 4x+3y \le 5\sqrt{x^2+y^2}$

Từ $(*)$ ta có $\begin{cases} x^2+y^2-10\sqrt{x^2+y^2}-11 \le 0 \\ x^2+y^2+10\sqrt{x^2+y^2}-11 \ge 0 \end{cases}$

$\Rightarrow 1 \le \sqrt{x^2+y^2} \le 11 \Rightarrow 1 \le |z| \le 11$

Vậy $\min|z| = 1,\ Max|z| = 11$

Cách 3:

Do $|z-4-3i| = 6$ nên điểm biểu diễn z là M thuộc đường tròn tâm $I(4;3)$ và bán kính $R = 6$.

Ta có $OM = |z|$ nên $1 = R - OI \le OM \le OI + R = 11$.

Câu 2. Cho số phức z thỏa mãn $|z^2-2z+5| = |(z-1+2i)(z+3i-1)|$. Tính $\min|w|$, với $w = z-2+2i$.

A. $\min|w| = \frac{3}{2}$. **B.** $\min|w| = 2$. **C.** $\min|w| = 1$. **D.** $\min|w| = \frac{1}{2}$.

Lời giải

Ta có $|z^2-2z+5| = |(z-1+2i)(z+3i-1)| \Leftrightarrow |(z-1+2i)(z-1-2i)| = |(z-1+2i)(z+3i-1)|$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z-1+2i=0 \\ |(z-1-2i)| = |(z+3i-1)| \end{array}\right.$.

Trường hợp 1: $z-1+2i=0 \Rightarrow w=-1 \Rightarrow |w|=1 \ (1)$.

Trường hợp 2: $|z-1-2i| = |z+3i-1|$

Gọi $z = a+bi$ (với $a,b \in \mathbb{R}$) khi đó ta được

$|a-1+(b-2)i| = |(a-1)+(b+3)i| \Leftrightarrow (b-2)^2 = (b+3)^2 \Leftrightarrow b = -\frac{1}{2}$.

Suy ra $w = z-2+2i = a-2+\frac{3}{2}i \Rightarrow |w| = \sqrt{(a-2)^2+\frac{9}{4}} \ge \frac{3}{2} \ (2)$.

Từ (1), (2) suy ra $\min|w| = 1$.

Câu 3. Cho số phức z thỏa mãn $|z| = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |1+z| + 3|1-z|$.

A. $2\sqrt{10}$. **B.** $\sqrt{10}$. **C.** $6\sqrt{5}$. **D.** $3\sqrt{15}$.

Lời giải

Cách 1:

Gọi $z = x + yi;\ \left(x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R}\right)$. Ta có: $\left|z\right| = 1 \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 1 \Rightarrow y^2 = 1 - x^2 \Rightarrow x \in \left[-1;1\right]$.

Ta có: $P = \left|1 + z\right| + 3\left|1 - z\right| = \sqrt{\left(1 + x\right)^2 + y^2} + 3\sqrt{\left(1 - x\right)^2 + y^2} = \sqrt{2\left(1 + x\right)} + 3\sqrt{2\left(1 - x\right)}$.

Xét hàm số $f\left(x\right) = \sqrt{2\left(1 + x\right)} + 3\sqrt{2\left(1 - x\right)};\ x \in \left[-1;1\right]$.

Hàm số liên tục trên $\left[-1;1\right]$ và với $x \in \left(-1;1\right)$ ta có:

$$f'\left(x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\left(1 + x\right)}} - \frac{3}{\sqrt{2\left(1 - x\right)}} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{4}{5} \in \left(-1;1\right).$$

Ta có: $f\left(1\right) = 2;\ f\left(-1\right) = 6;\ f\left(-\frac{4}{5}\right) = 2\sqrt{10} \Rightarrow P_{\max} = 2\sqrt{10}$.

Ta có thể dùng Bunhiakopxki với $P = \sqrt{2\left(1 + x\right)} + 3\sqrt{2\left(1 - x\right)}$

Cách 2: Ta áp dụng công thức đường trung tuyến

$$P^2 = \left(\left|1 + z\right| + 3\left|1 - z\right|\right)^2 \le \left(1^2 + 3^2\right)\left(\left|1 + z\right|^2 + \left|1 - z\right|^2\right) = 20\left(1 + \left|z\right|^2\right) = 40.$$

Suy ra $P_{\max} = 2\sqrt{10}$.

Câu 4. Cho số phức z thỏa mãn $\left|z - 1\right| = \sqrt{3}$. Biết giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \left|z + i\right| + \left|z - 2 - i\right|$ bằng $a\sqrt{b}$ với a, b là các số nguyên dương. Tính $a + b$.

A. 7. **B.** 9. **C.** 12. **D.** 15.

Lời giải

Cách 1: Ta có

$$\left|z + i\right|^2 + \left|z - 2 - i\right|^2 = \left|z - 1 + \left(1 + i\right)\right|^2 + \left|z - 1 - \left(1 + i\right)\right|^2 = 2\left(\left|z - 1\right|^2 + \left|1 + i\right|^2\right) = 10$$

Do đó $P^2 = \left(\left|z + i\right| + \left|z - 2 - i\right|\right)^2 \le 2\left(\left|z - 1 + \left(1 + i\right)\right|^2 + \left|z - 1 - \left(1 + i\right)\right|^2\right) = 20$

Hay $P \le 2\sqrt{5}$.

Cách 2: Đặt $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$, ta có

$$\left|z-1\right| = \sqrt{2} \Leftrightarrow \left|x-1+yi\right| = \sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{\left(x-1\right)^2 + y^2} = \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \left(x-1\right)^2 + y^2 = 3 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 2x + 2 \ (*).$$

Lại có: $P = \left|z+i\right| + \left|z-2-i\right| = \left|x + \left(y+1\right)i\right| + \left|x - 2 + \left(y-1\right)i\right|$

$$= \sqrt{x^2 + y^2 + 2y + 1} + \sqrt{x^2 + y^2 - 4x - 2y + 5}$$

Kết hợp với $(*)$ ta được

$$P = \sqrt{2x + 2y + 2} + \sqrt{6 - 2x - 2y} = \sqrt{2\left(x+y\right) + 3} + \sqrt{7 - 2\left(x+y\right)}$$

Ta có $P = \sqrt{2\left(x+y\right)+3} + \sqrt{7 - 2\left(x+y\right)} \le \sqrt{2\left[2\left(x+y\right) + 3 + 7 - 2\left(x+y\right)\right]} = 2\sqrt{5}$

Câu 5. Gọi z_1, z_2 là các số phức thoả mãn điều kiện $\left|z_1 + 3z_2\right| = 3$ và $\left|3z_1 - z_2\right| = 1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \left|z_1\right| + \left|z_2\right|$ bằng

A. $\sqrt{5}$. **B.** $\frac{4}{9}$. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** 1.

Lời giải

Ta có:

$$9 = \left|z_1 + 3z_2\right|^2 = \left(z_1 + 3z_2\right)\left(\overline{z_1} + 3\overline{z_2}\right) = \left|z_1\right|^2 + 9\left|z_2\right|^2 + 3\left(z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2\right) \ \left(1\right)$$

$$1 = \left|3z_1 - z_2\right|^2 = \left(3z_1 - z_2\right)\left(3\overline{z_1} - \overline{z_2}\right) = 9\left|z_1\right|^2 + \left|z_2\right|^2 - 3\left(z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2\right) \ \left(2\right)$$

Cộng vế $\left(1\right)$ và $\left(2\right)$ ta có: $10 = 10\left(\left|z_1\right|^2 + \left|z_2\right|^2\right) \Leftrightarrow \left|z_1\right|^2 + \left|z_2\right|^2 = 1$.

Ta có: $P^2 = \left(\left|z_1\right| + \left|z_2\right|\right)^2 \le \left(1^2 + 1^2\right)\left(\left|z_1\right|^2 + \left|z_2\right|^2\right) = 2 \Rightarrow P \le \sqrt{2}$.

Dấu "$=$" xảy ra $\Leftrightarrow \left|z_1\right| = \left|z_2\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $\max P = \sqrt{2}$.

Câu 6. Cho số phức z thỏa mãn $z.\overline{z} = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \left|z^3 + 3z + \overline{z}\right| - \left|z + \overline{z}\right|$.

A. $\frac{15}{4}$. **B.** 3. **C.** $\frac{13}{4}$. **D.** $\frac{3}{4}$.

Lời giải

Gọi $z = a + bi$, với $a, b \in \mathbb{R}$.

Ta có: $z + \overline{z} = 2a$; $z.\overline{z} = 1 \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow |z| = 1$.

Khi đó $P = \left|z^3 + 3z + \overline{z}\right| - \left|z + \overline{z}\right| = \left|z\left(z^2 + 3 + \dfrac{\overline{z}}{z}\right)\right| - \left|z + \overline{z}\right|$.

$$P = |z|.\left|z^2 + 3 + \frac{\overline{z}^2}{|z|^2}\right| - \left|z + \overline{z}\right| = \left|z^2 + 2z\overline{z} + \overline{z}^2 + 1\right| - \left|z + \overline{z}\right|.$$

$$P = \left|\left(z + \overline{z}\right)^2 + 1\right| - \left|z + \overline{z}\right| = \left|4a^2 + 1\right| - 2|a| = 4a^2 + 1 - 2|a| = \left(2|a| - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}.$$

Vậy $P_{\min} = \dfrac{3}{4}$.

Câu 7. Xét các số phức $z = a + bi\left(a, b \in \mathbb{R}\right)$ thoả mãn $\left|z - 4 - 3i\right| = 2\sqrt{5}$. Tính giá trị của $a^2 + b^2$ khi biểu

thức $P = \left|z + 4 - 7i\right| + 2\left|\overline{z} - 2 + 9i\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất

A. 25. **B.** 85. **C.** 65. **D.** 53.

Lời giải

Ta có $\left|z - 4 - 3i\right| = 2\sqrt{5} \Leftrightarrow \left(a - 4\right)^2 + \left(b - 3\right)^2 = 20$.

$$P = \sqrt{\left(a + 4\right)^2 + \left(b - 7\right)^2} + 2\sqrt{\left(a - 2\right)^2 + \left(9 - b\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(a + 4\right)^2 + \left(b - 7\right)^2 + 3\left[\left(a - 4\right)^2 + \left(b - 3\right)^2 - 20\right]} + 2\sqrt{\left(a - 2\right)^2 + \left(9 - b\right)^2}$$

$$= 2\left(\sqrt{\left(a - 2\right)^2 + \left(b - 4\right)^2} + \sqrt{\left(2 - a\right)^2 + \left(9 - b\right)^2}\right)$$

$$P \geq 2\sqrt{\left(a - 2 + 2 - a\right)^2 + \left(b - 4 + 9 - b\right)^2} = 10$$

$$P_{\min} = 10 \text{ khi } \begin{cases} a - 2 = 0 \\ \left(a - 4\right)^2 + \left(b - 3\right)^2 = 20 \\ \dfrac{b - 4}{9 - b} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 7 \end{cases}. \text{ Vậy } a^2 + b^2 = 53.$$

Câu 8. Xét hai số phức z_1, z_2 thoả mãn $\left|z_1 + 2z_2\right| = 2$ và $\left|2z_1 - 3z_2 - 7i\right| = 4$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\left|z_1-2i\right|+\left|z_2+i\right|$ là

A. $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** $4\sqrt{3}$. **D.** $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Đặt $w_1=z_1-2i;\ w_2=z_2+i.$ Suy ra $z_1=w_1+2i;\ z_2=w_2-i.$

Khi đó

$$\left|z_1+2z_2\right|=2\Leftrightarrow\left|w_1+2i+2\left(w_2-i\right)\right|=2\Leftrightarrow\left|w_1+2w_2\right|=2\Leftrightarrow\left|w_1+2w_2\right|^2=4$$

$$\Leftrightarrow\left(w_1+2w_2\right).\overline{\left(w_1+2w_2\right)}=4\Leftrightarrow\left(w_1+2w_2\right).\left(\overline{w_1}+2\overline{w_2}\right)=4$$

$$\Leftrightarrow\left|w_1\right|^2+4\left|w_2\right|^2+2w_1\overline{w_2}+2\overline{w_1}w_2=4\Leftrightarrow3\left|w_1\right|^2+12\left|w_2\right|^2+6w_1\overline{w_2}+6\overline{w_1}w_2=12\quad(1).$$

Tương tự

$$\left|2z_1-3z_2-7i\right|=4\Leftrightarrow\left|2\left(w_1+2i\right)-3\left(w_2-i\right)-7i\right|=4$$

$$\Leftrightarrow\left|2w_1-3w_2\right|=4\Leftrightarrow\left|2w_1-3w_2\right|^2=16$$

$$\Leftrightarrow4\left|w_1\right|^2+9\left|w_2\right|^2-6w_1\overline{w_2}-6\overline{w_1}w_2=16\quad(2).$$

Từ (1) và (2) suy ra $\left|w_1\right|^2+3\left|w_2\right|^2=4$.

Do đó

$$P=\left|w_1\right|+\left|w_2\right|=1.\left|w_1\right|+\sqrt{3}.\left|w_2\right|.\frac{1}{\sqrt{3}}\le\sqrt{\left(\left|w_1\right|^2+3\left|w_2\right|^2\right)\left(1^2+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\right)}=\sqrt{4.\frac{4}{3}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$ khi $\left|w_1\right|=\sqrt{3};\ \left|w_2\right|=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Câu 9. Xét các số phức z thỏa mãn $\left|z^2-3-4i\right|=2\left|z\right|$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ

nhất của $\left|z\right|$. Giá trị của M^2+m^2 bằng

A. 28. **B.** $18+4\sqrt{6}$. **C.** 14. **D.** $11+4\sqrt{6}$.

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức tam giác ta có:

$2\left|z\right| = \left|z^2 - 3 - 4i\right| \geq \left|\left|z^2\right| - \left|3 + 4i\right|\right| = \left|\left|z\right|^2 - 5\right|$ (vì $\left|z^2\right| = \left|z\right|^2$). Dấu "=" xảy ra khi $z^2 = k\left(-3 - 4i\right)$.

Suy ra $4\left|z\right|^2 \geq \left(\left|z\right| - 5\right)^2 \Leftrightarrow \left|z\right|^4 - 14\left|z\right|^2 + 25 \leq 0 \Leftrightarrow 7 - 2\sqrt{6} \leq \left|z\right|^2 \leq 7 + 2\sqrt{6}$.

$\Rightarrow \sqrt{6} - 1 \leq \left|z\right| \leq \sqrt{6} + 1$

Do đó, ta có $M = 1 + \sqrt{6}$ và $m = \sqrt{6} - 1$.

Vậy $M^2 + m^2 = 14$.

Câu 10. Xét các số phức z, w, u thỏa mãn $\left|z\right| = 1, \left|w\right| = 2, \left|u\right| = 3$ và $\left|z + w - u\right| = \left|u + z - w\right|$. Giá trị lớn nhất của $\left|z - u\right|$ bằng

A. $\sqrt{10}$. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** $\sqrt{14}$. **D.** 4.

Lời giải

Bổ đề:

Xét hai số phức z_1 và z_2, ta có:

$\left|z_1 + z_2\right|^2 = \left(z_1 + z_2\right)\left(\overline{z_1} + \overline{z_2}\right) = \left|z_1\right|^2 + \left|z_2\right|^2 + z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2$

$\left|z_1 - z_2\right|^2 = \left(z_1 - z_2\right)\left(\overline{z_1} - \overline{z_2}\right) = \left|z_1\right|^2 + \left|z_2\right|^2 - z_1\overline{z_2} - \overline{z_1}z_2$

$\left|z_1 + z_2\right| = \left|z_1 - z_2\right| \Leftrightarrow z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 = 0$

Áp dụng bổ đề trên:

$\left|z + w - u\right| = \left|u + z - w\right| \Leftrightarrow \left|z + \left(w - u\right)\right| = \left|z - \left(w - u\right)\right| \Leftrightarrow z\overline{\left(w - u\right)} + \overline{z}\left(w - u\right) = 0$

$\Leftrightarrow z\overline{w} + \overline{z}w - z\overline{u} - \overline{z}u = 0$

$\Leftrightarrow \left|z\right|^2 + z\overline{w} + \overline{z}w + \left|w\right|^2 + \left|z\right|^2 - z\overline{u} - \overline{z}u + \left|u\right|^2 - 2\left|z\right|^2 - \left|w\right|^2 - \left|u\right|^2 = 0$

$\Leftrightarrow \left|z + w\right|^2 + \left|z - u\right|^2 - 2\left|z\right|^2 - \left|w\right|^2 - \left|u\right|^2 = 0 \Leftrightarrow \left|z - u\right|^2 = 15 - \left|z + w\right|^2$.

Ta có $\left|z - u\right|^2 = 15 - \left|z + w\right|^2 \leq 15 - \left|\left|z\right| - \left|w\right|\right|^2 = 14 \Rightarrow \left|z - u\right| \leq \sqrt{14}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $w = -2z$.

3. Bài tập có hướng dẫn

Câu 1. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $P=\left|\frac{z+i}{z}\right|$, với z là số phức khác 0 thỏa mãn $|z|\geq 2$. Tính $2M-m$.

A. $2M-m=\frac{5}{2}$. **B.** $2M-m=10$. **C.** $2M-m=6$. **D.** $2M-m=\frac{3}{2}$.

Lời giải

$P=\left|\frac{z+i}{z}\right|=\frac{|z+i|}{|z|}\leq\frac{|z|+|i|}{|z|}=1+\frac{1}{|z|}\leq\frac{3}{2}$. Dấu bằng xảy ra khi $z=2i$. Vậy $M=\frac{3}{2}$.

$P=\left|\frac{z+i}{z}\right|=\frac{|z+i|}{|z|}\geq\frac{||z|-|i||}{|z|}=\frac{|z|-|i|}{|z|}=1-\frac{1}{|z|}\geq\frac{1}{2}$. Dấu bằng xảy ra khi $z=-2i$.

Vậy $m=\frac{1}{2}$.

Vậy $2M-m=\frac{5}{2}$.

Câu 2. Cho số phức $z=a+bi$ (a, $b\in\mathbb{R}$) thỏa mãn $|z|=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A=|z+2|+2|z-2|$.

A. $10\sqrt{2}$. **B.** 7. **C.** 10. **D.** $5\sqrt{2}$.

Lời giải

Ta có: $|z+2|^2=(a+2)^2+b^2$; $|z-2|^2=(a-2)^2+b^2$.

Suy ra: $|z+2|^2+|z-2|^2=2(a^2+b^2)+8=2|z|^2+8=10$.

Ta có: $A^2=(|z+2|+2|z-2|)^2\leq(1^2+2^2)\left(|z+2|^2+|z-2|^2\right)=50$.

Vì $A\geq 0$ nên từ đó suy ra $A\leq\sqrt{50}=5\sqrt{2}$.

Vậy giá trị lớn nhất của A là $5\sqrt{2}$.

Câu 3. Xét hai số phức z_1,z_2 thỏa mãn $|z_1|=|z_2|=1$. Giá trị lớn nhất của $P=|z_1-z_2|+|z_2-i|+|z_1-i|$ bằng

A. $\frac{3}{2}$. **B.** $3\sqrt{3}$. **C.** $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Gọi A, B, C lần lượt là điểm biểu diễn cho các số phức z_1,z_2,i.

Theo giả thiết, ta có A, B, C thuộc đường tròn tâm $O(0;0)$, bán kính $R=1$. Khi đó:

$P = AB + BC + CA = 2R\left(\sin A + \sin B + \sin C\right)$

$= 2\left(\sin A + \sin B + \sin C\right) = 2\left(\sin A + \sin B + \sin C + \sin\dfrac{\pi}{3}\right) - \sqrt{3}$

$= 2\left(2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2} + 2\sin\dfrac{C+\dfrac{\pi}{3}}{2}\cos\dfrac{C-\dfrac{\pi}{3}}{2}\right) - \sqrt{3}$

$\le 2\left(2\sin\dfrac{A+B}{2} + 2\sin\dfrac{C+\dfrac{\pi}{3}}{2}\right) - \sqrt{3}$

$= 8\sin\dfrac{A+B+C+\dfrac{\pi}{3}}{4}\cos\dfrac{A+B-C-\dfrac{\pi}{3}}{4} - \sqrt{3}$

$\le 8\sin\dfrac{\pi}{3} - \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$

Vậy giá trị lớn nhất của P là $3\sqrt{3}$.

Câu 4. Cho số phức z thỏa mãn $\left|z - 1 + 2i\right| = 2$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $T = \left|3z - 3 + 5i\right| + \left|z - 1 + 5i\right|$ bằng

A. 9. **B.** $\sqrt{78}$. **C.** 10. **D.** $\dfrac{\sqrt{603}}{2}$.

Lời giải

Trước hết ta chứng minh đẳng thức mô đun sau: Cho các số thực m, n và các số phức z_1, z_2 ta có: $\left|mz_1 + nz_2\right|^2 = m^2\left|z_1\right|^2 + n^2\left|z_2\right|^2 + mn\left(z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1}\right)$

Chứng minh :

$\left|mz_1 + nz_2\right|^2 = \left(mz_1 + nz_2\right)\overline{\left(mz_1 + nz_2\right)} = \left(mz_1 + nz_2\right)\left(m\overline{z_1} + n\overline{z_2}\right)$

$= m^2\left|z_1\right|^2 + n^2\left|z_2\right|^2 + mn\left(z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1}\right)$, suy ra ĐPCM.

Nhận thấy: $\left|3z - 3 + 5i\right| = \left|3\left(z - 1 + 2i\right) - i\right|$

Đặt $z_1 = z - 1 + 2i, z_2 = i \Rightarrow \left|z_1\right| = 2; \left|z_2\right| = 1$.

$\left|3z - 3 + 5i\right|^2 = \left|3z_1 - z_2\right|^2 = 3^2\left|z_1\right|^2 + \left|z_2\right|^2 - 3\left(z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1}\right)$

$= 9.4 + 1 - 3\left(z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1}\right) = 37 - 3\left(z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1}\right)$

Lại có $\left|z-1+5i\right|=\left|\left(z-1+2i\right)+3i\right|=\left|z_1+3z_2\right|$

Suy ra $\left|z-1+5i\right|^2=\left|z_1+3z_2\right|^2=\left|z_1\right|^2+9\left|z_2\right|^2+3\left(z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_1}\right)$

$=4+9+3\left(z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_1}\right)=13+3\left(z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_1}\right)$

Ta được $\left|3z-3+5i\right|^2+\left|z-1+5i\right|^2=37+13=50$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki cho 2 bộ số $\left(1;1\right)\left(\left|3z-3+5i\right|;\left|z-1+5i\right|\right)$ ta có

$\left(\left|3z-3+5i\right|+\left|z-1+5i\right|\right)^2\le\left(1^2+1^2\right).\left(\left|3z-3+5i\right|^2+\left|z-1+5i\right|^2\right)$

$\Leftrightarrow\left(\left|3z-3+5i\right|+\left|z-1+5i\right|\right)^2\le 2.50$

$\Rightarrow\left|3z-3+5i\right|+\left|z-1+5i\right|\le 10$

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases}\left|z-1+2i\right|=2\\ \left|3z-3+5i\right|=\left|z-1+5i\right|\end{cases}$. Hệ này có 1 nghiệm $z=1$ nên $T_{max}=10$.

Câu 5. Cho $z_1;z_2$ là hai số phức thỏa mãn $\left|z-1+i\right|=2$ và $\left|z_1-z_2\right|=\sqrt{5}$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\left|z_1+z_2-6+5i\right|$ có dạng $a+\sqrt{b}$. Khi đó a^2+b có giá trị là

A. 126. **B.** 36. **C.** 28. **D.** 42.

Lời giải

Đặt $\mathrm{w}=z-1+i\Rightarrow\left|\mathrm{w}\right|=2$.

$\mathrm{w}_1=z_1-1+i;\mathrm{w}_2=z_2-1+i\Rightarrow\left|\mathrm{w}_1\right|=2;\left|\mathrm{w}_2\right|=2$.

Ta có: $\left|z_1-z_2\right|=\sqrt{5}\Leftrightarrow\left|\mathrm{w}_1-\mathrm{w}_2\right|=\sqrt{5}$.

Vì $\left|\mathrm{w}_1-\mathrm{w}_2\right|^2+\left|\mathrm{w}_1+\mathrm{w}_2\right|^2=2\left(\left|\mathrm{w}_1\right|^2+\left|\mathrm{w}_2\right|^2\right)\Rightarrow\left|\mathrm{w}_1+\mathrm{w}_2\right|=\sqrt{11}.$

$P=\left|z_1+z_2-6+5i\right|=\left|\mathrm{w}_1+1-i+\mathrm{w}_2+1-i-6+5i\right|=\left|\mathrm{w}_1+\mathrm{w}_2-4+3i\right|$.

Lại có: $P=\left|\mathrm{w}_1+\mathrm{w}_2-4+3i\right|\le\left|\mathrm{w}_1+\mathrm{w}_2\right|+\left|-4+3i\right|\Leftrightarrow P\le 5+\sqrt{11}$.

Khi đó $MaxP=5+\sqrt{11}\Rightarrow a=5;b=11$. Vậy $a^2+b=36$.

Câu 6. Cho hai số phức u,v thỏa mãn $\left|u\right|=\left|v\right|=10$ và $\left|3u-4v\right|=50$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $\left|4u+3v-8+6i\right|$.

A. 30. **B.** 40. **C.** 60. **D.** 50.

Lời giải

Ta có $\left|z\right|^2 = z.\overline{z}$. Đặt $T = \left|3u - 4v\right|$, $M = \left|4u + 3v\right|$.

Khi đó $T^2 = \left(3u - 4v\right)\left(3\overline{u} - 4\overline{v}\right) = 9\left|u\right|^2 + 16\left|v\right|^2 - 12\left(u\overline{v} + v\overline{u}\right)$.

Tương tự ta có $M^2 = \left(4u + 3v\right)\left(4\overline{u} + 3\overline{v}\right) = 16\left|u\right|^2 + 9\left|v\right|^2 + 12\left(u\overline{v} + v\overline{u}\right)$.

Do đó $M^2 + T^2 = 25\left(\left|u\right|^2 + \left|v\right|^2\right) = 5000$.

Suy ra $M^2 = 5000 - T^2 = 5000 - 50^2 = 2500$ hay $M = 50$.

Áp dụng $\left|z + z'\right| \le \left|z\right| + \left|z'\right|$ ta có

$\left|4u + 3v - 8 + 6i\right| \le \left|4u + 3v\right| + \left|-8 + 6i\right| = 50 + 10 = 60$.

Suy ra $\max\left|4u + 3v - 10i\right| = 60$.

Câu 7. Xét các số phức z và w thỏa mãn $\left|z\right| = \left|w\right| = 1$, $\left|z + w\right| = \sqrt{2}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \left|w - \dfrac{4}{z} + 2\left(1 + \dfrac{w}{z}\right)i\right|$ thuộc khoảng nào?

A. $\left(4;5\right)$. **B.** $\left(3;4\right)$. **C.** $\left(7;8\right)$. **D.** $\left(2;3\right)$.

Lời giải

Gọi A, B lần lượt là biểu diễn của z và w trên mặt phẳng phức $\Rightarrow OA = OB = 1$

Ta có $\left|z + w\right|^2 + \left|z - w\right|^2 = 2\left(\left|z\right|^2 + \left|w\right|^2\right) \Leftrightarrow 2 + \left|z - w\right|^2 = 4 \Rightarrow \left|z - w\right| = \sqrt{2} \Rightarrow AB = \sqrt{2}$

.

Nên tam giác OAB vuông cân tại O.

Đặt $z = a + bi,\ w = b - ai$

Ta có

$$P = \left|w - \frac{4}{z} + 2\left(1 + \frac{w}{z}\right)i\right| = \left|w - \frac{4\overline{z}}{z.\overline{z}} + 2\left(1 + \frac{w.\overline{z}}{z.\overline{z}}\right)i\right| = \left|w - 4\overline{z} + 2\left(1 + w.\overline{z}\right)i\right|$$

Ta có $w.\overline{z}.i = \left(a - bi\right)i\left(b - ai\right) = \left(b + ai\right)\left(b - ai\right) = 1$

nên

$$P = \left|w - 4\overline{z} + 2 + 2i\right| = \left|b - ai - 4\left(a - bi\right) + 2 + 2i\right| = \sqrt{\left(b - 4a + 2\right)^2 + \left(4b - a + 2\right)^2}$$

$$P=\sqrt{25+20\left(a-b\right)-16ab}=\sqrt{8\left(a-b\right)^2+20\left(a-b\right)+17}\geq\sqrt{\frac{9}{2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}a^2+b^2=1\\a-b=-\dfrac{5}{4}\end{cases}$.

Câu 8. Cho số phức z thỏa mãn $\left|z\right|=2$. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$T=\left|z+1\right|+\left|z^2-z+4\right|$. Tính giá trị của biểu thức M^2-m^2

A. 45. **B.** 384. **C.** 85. **D.** 115.

Lời giải

Gọi $z=x+yi\left(x,y\in\mathbb{R}\right)$

Ta có: $\left|z\right|=2\Leftrightarrow\left|z\right|^2=4\Leftrightarrow z.\overline{z}=4$

Đặt $t=\left|z+1\right|$.

Vì $\left|z\right|-1\leq\left|z+1\right|\leq\left|z\right|+1\Rightarrow t\in\left[1;3\right]$

Ta có: $t^2=\left|1+z\right|^2=\left(1+z\right).\left(\overline{1+z}\right)=\left(1+z\right)\left(1+\overline{z}\right)=1+\overline{z}+z+z.\overline{z}=5+2x$

$\Rightarrow x=\dfrac{t^2-5}{2}$

$\Rightarrow\left|z^2-z+4\right|=\left|z^2-z+z.\overline{z}\right|=\left|z\right|\left|z-1+\overline{z}\right|=2\sqrt{\left(2x-1\right)^2}=2\left|t^2-6\right|$

Xét hàm số $f\left(t\right)=t+2\left|t^2-6\right|$ với $t\in\left[1;3\right]$

Ta có: $f\left(t\right)=\begin{cases}2t^2+t-12 & \text{khi } \sqrt{6}\leq t\leq 3\\-2t^2+t+12 & \text{khi } 1\leq t<\sqrt{6}\end{cases}$

$\Rightarrow f'\left(t\right)=\begin{cases}4t+1 & \text{khi } \sqrt{6}<t\leq 3\\-4t+1 & \text{khi } 1\leq t<\sqrt{6}\end{cases}$; $f'\left(t\right)=0$ (vô nghiệm)

BBT:

x	1		$\sqrt{6}$		3
$f'(t)$		$-$	$\|\|$	$+$	
$f(t)$	11	$\searrow$	$\sqrt{6}$	$\nearrow$	9

Vậy: $M - m = 11^2 - \left(\sqrt{6}\right)^2 = 115$.