|  |
| --- |
| PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO QUẬN BA ĐÌNHĐỀ CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9- VÒNG 2NĂM HỌC 2020-2021. MÔN: TOÁN***Thời gian làm bài 150 phút*****Đề số 20** |

1. (3 *điểm*)

a) Cho các số thực dương thỏa mãn 

Chứng minh rằng: .

 b) Cho số tự nhiên thỏa mãn:  và  đều là số chính phương.

Chứng minh rằng: chia hết cho 40.

1. (6 *điểm*)

a) Giải phương trình: 

b) Tìm tất cả các cặp số nguyên dương thỏa mãn phương trình:



c) Trên mặt phẳng tọa độ cho các đường thẳng . Tìm giá trị của a sao cho các đường thẳng và cắt nhau tại một điểm. Biết rằng: 

1. (4 *điểm*)

Cho  là các số thực dương

a) Biết . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: .

b) Biết . Chứng minh rằng: .

1. (4 *điểm*) Cho tam giác đều  có độ dài bằng 1. Gọi là điểm bất kì trên cạnh (không trùng với và ). Gọi lần lượt là bán kính đường tròn nội tiếp các tam giác và .

a) Đặt  (điều kiện ). Tính theo .

b) Xác định vị trí điểm trên cạnh để tích  lớn nhất. Tính giá trị lớn nhất đó.

1. (3 *điểm*)

a) Không dùng bảng số hoặc máy tính, chứng minh rằng: .

b) Cho hai điểm không thuộc đường thẳng và nằm cùng phía với đường thẳng .

Xác định điểm  thuộc đường thẳng sao cho .

c) Cho điểm phân biệt trên một mặt phẳng, sao cho cứ ba điểm bất kì trong các điểm đó là

các đỉnh của một tam giác vuông. Tìm giá trị lớn nhất có thể của .

🙢**HẾT**🙠

|  |
| --- |
| **HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ HSG TOÁN 9 QUẬN BA ĐÌNH****Năm học: 2020-2021**1. (3 *điểm*)

a) Cho các số thực dương thỏa mãn Chứng minh rằng: . b) Cho số tự nhiên thỏa mãn:  và  đều là số chính phương.Chứng minh rằng: chia hết cho 40.**Lời giải**a) Từ giả thiết Đặt  Thay vào giả thiết, ta có:   Do đó . Nên Tương tự Suy ra đpcm.b) Đặt  Thì  là STN lẻ, nên có: Nên là STN lẻ, đặt Mà  (1)Có số chính phương chia cho 5 dư 0,1 hoặc 4Mà  chia cho 5 dư 2.. Từ đó  chia cho 5 dư 1 nên chia hết cho 5 (2)Từ (1) và (2) kết hợp với .1. (6 *điểm*)

a) Giải phương trình: b) Tìm tất cả các cặp số nguyên dương thỏa mãn phương trình:c) Trên mặt phẳng tọa độ cho các đường thẳng . Tìm giá trị của a sao cho các đường thẳng và cắt nhau tại một điểm. Biết rằng: **Lời giải** a) Điều kiện:  Đặt , ta có:  Suy ra ta có phương trình (do ) Với  ta được . Giải phương trình được . Vậy phương trình có nghiệm . b) Viết lại phương trình đã cho về dạng  Với  Phân chia các trường hợp, giải được  Với  Phân chia các trường hợp, giải được  Kết luận nghiệm: PT có 8 nghiệm nguyên như trên. c) Giao điểm của và  có tọa độ là  Từ đó thay  và vào PT  ta được  1. (4 *điểm*)

Cho  là các số thực dương a) Biết . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: .b) Biết . Chứng minh rằng: .**Lời giải**a) Ta có: Theo BĐT Cô si cho 2 số dương:Mặt khác từ giả thiết Ta có: Cộng ba BĐT cùng chiều, ta được:Dấu “=” xảy ra khi .Vậy khi .b) Do Nên Theo BĐT Bunhiacopxki, ta có:  Từ đó 1. (4 *điểm*)

Cho tam giác đều  có độ dài bằng 1. Gọi là điểm bất kì trên cạnh (không trùng với và ). Gọi lần lượt là bán kính đường tròn nội tiếp các tam giác và .a) Đặt  (điều kiện ). Tính theo .b) Xác định vị trí điểm trên cạnh để tích  lớn nhất. Tính giá trị lớn nhất đó.**Lời giải**a) Gọi  là trung điểm của đều Ta có: Xét có: Lại có:  Tương tự: b) Xét  có: Tương tự: Dễ thấy Dấu “=” xảy ra 1. (3 *điểm*)

a) Không dùng bảng số hoặc máy tính, chứng minh rằng: .b) Cho hai điểm không thuộc đường thẳng và nằm cùng phía với đường thẳng .Xác định điểm  thuộc đường thẳng sao cho .c) Cho điểm phân biệt trên một mặt phẳng, sao cho cứ ba điểm bất kì trong các điểm đó làcác đỉnh của một tam giác vuông. Tìm giá trị lớn nhất có thể của .**Lời giải** a) Xét có  Vẽ trung tuyến và đường cao , ta có và . Suy ra  Vì  vuông tại có , nên   Trong tam giác vuông có .    đpcm . b)   - Dựng điểm  đối xứng với  qua .  - Dựng đường tròn tâm tiếp xúc với  tại ; - Dựng tiếp tuyến với đường tròn , cắt tại sao cho nằm trong góc . Khi đó . c)   Xét các đoạn thẳng nối 2 điểm bất kỳ trong n điểm đã cho; chọn đoạn thẳng có độ dài lớn nhất trong các đoạn thẳng đó là  thì các điểm còn lại đều tạo với AB tam giác vuông có cạnh huyền là . Suy ra các điểm đó thuộc đường tròn tâm đường kính . Gọi  là điểm thứ ba trong các điểm đó. Theo đề bài ta có tam giác vuông tại , tức là điểm thuộc đường tròn . Gọi là điểm thứ tư trong các điểm đó. Tam giác vuông tại , tức là điểm  thuộc đường tròn . Xét tam giác là tam giác vuông nội tiếp đường tròn đường kính . Suy ra là đường kính của đường tròn. Giả sử tồn tại điểm thứ năm trong các điểm đó. Tam giác vuông tại , tức là điểm  thuộc đường tròn . Khi đó tam giác nội tiếp đường tròn và không có góc nào là góc vuông (vì các cạnh của tam giác không là đường kính của đường tròn ): mâu thuẫn với điều giả sử. Do đó điều giả sử sai. Vậy giá trị lớn nhất có thể của n là 4.🙢**HẾT**🙠 |