BỘ SÁCH TOÁN CAO CẤP - VIỆN TOÁN HỌC

NGUYỄN ĐÔNG YÊN

GIÁO TRÌNH

GIẢI TÍCH ĐA TRỊ

NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC TỰ NHIÊN VÀ CÔNG NGHỆ

SÁCH ĐÃ IN TRONG BỘ NÀY:

2000:

Phương trình vi phân đạo hàm riêng (Tập 1)	*Trần Đức Vân*

2001:

Giáo trình Đại số tuyến tính	*Ngô Việt Trung*
Phương trình vi phân đạo hàm riêng (Tập 2)	*Trần Đức Vân*
Nhập môn Lý thuyết điều khiển	*Vũ Ngọc Phát*

2002:

Giải tích các hàm nhiều biến	*Đ.T. Lục, P.H. Điển,T.D. Phượng*
Lý thuyết Hệ động lực	*Nguyễn Đình Công*

2003:

Lôgic toán và Cơ sở toán học	*Phan Đình Diệu*
Giáo trình Đại số hiện đại	*Nguyễn Tự Cường*
Lý thuyết không gian Orlicz	*Hà Huy Bảng*
Đại số máy tính: Cơ sở Groebner	*Lê Tuấn Hoa*
Hàm thực và Giải tích hàm	*Hoàng Tụy*
Số học thuật toán	*H.H. Khoái, P.H. Điển*

2004:

Mã hóa thông tin: Cơ sở toán học và ứng dụng	*P.H. Điển, H.H. Khoái*
Lý thuyết Tổ hợp và Đồ thị	*Ngô Đắc Tân*
Xác suất và Thống kê	*Trần Mạnh Tuấn*

2005:

Giải tích Toán học: Hàm số một biến	*Đ.T. Lục, P.H. Điển, T.D. Phượng*
Lý thuyết Phương trình vi phân đạo hàm riêng (Toàn tập)	*Trần Đức Vân*
Công thức kiểu Hopf-Lax-Oleinik cho phương trình Hamilton-Jacobi	*Trần Đức Vân*
Đại số tuyến tính qua các ví dụ và bài tập	*Lê Tuấn Hoa*
Lý thuyết Galois	*Ngô Việt Trung*

2007:

Lý thuyết tối ưu không trơn	*N.X. Tấn, N.B. Minh*
Giáo trình Giải tích đa trị	*Nguyễn Đông Yên*

Có thể đặt mua sách trực tiếp tại Viện Toán học, 18 Hoàng Quốc Việt, Hà Nội
Điện thoại 84-4-7563474/205 (Văn phòng); 84-4-7563474/302 (Thư viện)
Fax: 84-4-7564303 E-mail: nldan@math.ac.vn (VP), cnanh@math.ac.vn (TV)

Lời giới thiệu

Trong những năm gần đây, nhu cầu sách tham khảo tiếng Việt về toán của sinh viên các trường Đại học, nghiên cứu sinh, cán bộ nghiên cứu và ứng dụng toán học tăng lên rõ rệt. Bộ sách "Toán cao cấp" của Viện Toán học ra đời nhằm góp phần đáp ứng yêu cầu đó, làm phong phú thêm nguồn sách tham khảo và giáo trình đại học vốn có.

Bộ sách Toán cao cấp sẽ bao gồm nhiều tập, đề cập đến hầu hết các lĩnh vực khác nhau của toán học cao cấp, đặc biệt là các lĩnh vực liên quan đến các hướng đang phát triển mạnh của toán học hiện đại, có tầm quan trọng trong sự phát triển lý thuyết và ứng dụng thực tiễn. Các tác giả của bộ sách này là những người có nhiều kinh nghiệm trong công tác giảng dạy đại học và sau đại học, đồng thời là những nhà toán học đang tích cực nghiên cứu. Vì thế, mục tiêu của các cuốn sách trong bộ sách này là, ngoài việc cung cấp cho người đọc những kiến thức cơ bản nhất, còn cố gắng hướng họ vào các vấn đề thời sự liên quan đến lĩnh vực mà cuốn sách đề cập đến.

Bộ sách Toán cao cấp có được là nhờ sự ủng hộ quý báu của Viện Khoa học và Công nghệ Việt Nam, đặc biệt là sự cổ vũ của Giáo sư Đặng Vũ Minh và Giáo sư Nguyễn Khoa Sơn. Trong việc xuất bản Bộ sách, chúng tôi cũng nhận được sự giúp đỡ tận tình của Nhà xuất bản Đại học quốc gia Hà Nội và của Nhà xuất bản Khoa học Tự nhiên và Công nghệ. Nhiều nhà toán học trong và ngoài Viện Toán học đã tham gia viết, thẩm định, góp ý cho bộ sách. Viện Toán học xin chân thành cám ơn các cơ quan và cá nhân kể trên.

Do nhiều nguyên nhân khác nhau, Bộ sách Toán cao cấp chắc chắn còn rất nhiều thiếu sót. Chúng tôi mong nhận được ý kiến đóng góp của độc giả để bộ sách được hoàn thiện hơn.

Chủ tịch Hội đồng biên tập

GS-TSKH Hà Huy Khoái

BỘ SÁCH TOÁN CAO CẤP - VIỆN TOÁN HỌC

GIÁO TRÌNH

GIẢI TÍCH ĐA TRỊ

Nguyễn Đông Yên

Viện Toán học, Viện KH&CN Việt Nam

NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC TỰ NHIÊN VÀ CÔNG NGHỆ

MỤC LỤC

Lời nói đầu

Giải tích đa trị là một hướng nghiên cứu tương đối mới trong Toán học, mặc dù từ những năm 30 của thế kỷ XX các nhà toán học đã thấy cần phải nghiên cứu ánh xạ đa trị, tức là ánh xạ nhận giá trị là các tập hợp con của một tập hợp nào đó. Sự ra đời của tạp chí quốc tế *"Set-Valued Analysis"* vào năm 1993 là một mốc lớn trong quá trình phát triển của hướng nghiên cứu này. Vai trò của giải tích đa trị trong Toán học và các ứng dụng toán học đã được công nhận rộng rãi.

Giải tích đa trị có nhiều ứng dụng trong lý thuyết phương trình vi phân, phương trình đạo hàm riêng, bất đẳng thức biến phân và phương trình suy rộng, lý thuyết tối ưu, lý thuyết điều khiển, tối ưu đa mục tiêu, khoa học quản lý, và toán kinh tế. Hiện nay hầu như tất cả các kết quả nghiên cứu về tính ổn định và độ nhạy nghiệm của các bài toán tối ưu phụ thuộc tham số và của các bài toán bất đẳng thức biến phân phụ thuộc tham số đều được viết bằng ngôn ngữ giải tích đa trị.

Những người Việt Nam đầu tiên đi sâu nghiên cứu giải tích đa trị là Giáo sư Hoàng Tụy (với những công trình về điểm bất động của ánh xạ đa trị, tính ổn định của hệ bất đẳng thức suy rộng, ánh xạ đa trị lồi, ánh xạ tới hạn), Giáo sư Phạm Hữu Sách (với những công trình về ánh xạ đa trị lồi, đạo hàm của ánh xạ đa trị và ứng dụng trong lý thuyết tối ưu và điều khiển) và cố Giáo sư Phan Văn Chương (với những công trình về ánh xạ đa trị đo được, lý thuyết bao hàm thức vi phân). Sau đây là danh sách không đầy đủ những người Việt Nam đã hoặc đang có công trình nghiên cứu về giải tích đa trị và các ứng dụng: Th.S. Phạm Ngọc Anh, Th.S. Lâm Quốc Anh, Th.S. Trương Quang Bảo, Th.S. Nguyễn Huy Chiêu, TS. Lê Văn Chóng, GS. TSKH. Phan Văn Chương, TS. Trịnh Công Diệu, TS. Phạm Cảnh Dương, PGS. TSKH. Phạm Huy Điển, TS. Nguyễn Hữu Điển, PGS. TS. Trương Xuân Đức Hà, Th.S. Nguyễn Xuân Hải, TS. Trần Ninh Hoa, PGS. TS. Lê Văn Hốt, TS. Nguyễn Đình Huy, TS. Nguyễn Quang Huy, GS. TSKH. Phan Quốc Khánh, TS. Bùi Trọng Kiên, GS. TSKH. Đinh Thế Lục, TS. Lê Minh Lưu, TS. Nguyễn Bá Minh, GS. TSKH. Lê Dũng Mưu, TS. Nguyễn Mậu Nam, TS. Huỳnh Văn Ngãi, GS. TSKH. Van Hien Nguyen, PGS. TS. Trần Huệ Nương, GS. TSKH. Vũ Ngọc Phát, GS. TSKH. Hoàng Xuân Phú, PGS. TS. Huỳnh Thế Phùng, TS. Tạ Duy Phượng, GS. TSKH. Phạm Hữu Sách, GS. TSKH. Nguyễn Khoa Sơn, TS. Nguyễn Năng Tâm, PGS. TSKH. Đỗ Hồng Tân, PGS. TSKH. Nguyễn Xuân Tấn, GS. TSKH. Nguyễn Hồng Thái, TS. Hoàng Dương Tuấn, TS. Lê Anh Tuấn, Th.S. Nguyễn Đình Tuấn, GS. Hoàng Tụy, PGS. TSKH. Nguyễn Đông Yên.

Giáo trình này được soạn trên cơ sở các bài giảng của tác giả về giải tích đa trị cho học viên cao học và nghiên cứu sinh ở Viện Toán học, cho lớp sinh viên chọn của trường Đại học Sư phạm Thành phố Hồ Chí Minh, và cho lớp cao học ở Khoa Toán ứng dụng thuộc Đại học Quốc gia Tôn Trung Sơn (The National Sun Yat-Sen University), Cao Hùng, Đài Loan. Mục đích chính của chúng tôi là giới thiệu với các bạn sinh viên, học viên cao học và nghiên cứu sinh một số kết quả cơ bản của giải tích đa trị. Ngoài ra, chúng tôi cũng cố gắng trình bày một vài vấn đề đang được quan tâm trong lý thuyết này.

Tập sách gồm 5 chương: Tính liên tục của ánh xạ đa trị, Đạo hàm của ánh xạ đa trị, Tích phân của ánh xạ đa trị, Đối đạo hàm của ánh xạ đa trị, và Hệ bất đẳng thức suy rộng. Ba chương đầu tương ứng với 3 phần chính của giải tích đa trị. Chương 4 giới thiệu một vài nét về lý thuyết vi phân do B. S. Mordukhovich đề xuất - một lý thuyết hiện đang thu hút được sự quan tâm đặc biệt của nhiều nhóm nghiên cứu trên thế giới. Chương 5 được dành để nghiên cứu tính ổn định nghiệm của hệ bất đẳng thức suy rộng cho bởi hàm véctơ liên tục, và các ứng dụng. Công cụ chính ở đây là khái niệm Jacobian xấp xỉ theo nghĩa V. Jeyakumar và Đinh Thế Lục. Jacobian suy rộng theo nghĩa F. H. Clarke cho hàm véctơ Lipschitz địa phương là một trường hợp riêng của khái niệm này. (Chúng ta lưu ý là các khái niệm đối đạo hàm, Jacobian xấp xỉ, và Jacobian suy rộng Clarke nằm ngoài khuôn khổ của lý thuyết vi phân trình bày trong Chương 2.) Trong mỗi mục thường có một số ví dụ minh họa và bài tập giúp bạn đọc củng cố kiến thức. Ở cuối sách có hai phụ lục giới thiệu các đề thi hết môn giải tích đa trị ở hai lớp học. Các đề thi này giúp học viên củng cố kiến thức trong phạm vi hai chương đầu của giáo trình. Các định nghĩa, bổ đề, mệnh đề, định lý, nhận xét, ví dụ và bài tập được đánh số bằng ba chỉ số. Ví dụ như Định lý 1.2.3 là định lý thứ 3 ở mục thứ 2 trong Chương 1. Các công thức được đánh số bằng hai chỉ số. Ví dụ như (2.5) là công thức thứ 5 ở mục thứ 2 (trong một chương nào đó).

Để hiểu sâu hơn lý thuyết ánh xạ đa trị và các ứng dụng, bạn đọc có thể tự mình nghiên cứu thêm các cuốn sách chuyên khảo của Aubin và Ekeland (1984), Aubin và Frankowska (1990) - một trong những tài liệu tham khảo chính của chúng tôi khi soạn các bài giảng về giải tích đa trị, Rockafellar và Wets (1998), Borwein và Zhu (2005), Mordukhovich (2006a,b). Hy vọng rằng tập sách nhỏ này có thể giúp bạn đọc có cảm hứng bắt đầu việc tự học gian nan nhưng thú vị đó. Bạn đọc quan tâm đến ứng dụng của giải tích đa trị trong tối ưu véctơ có thể tham khảo các cuốn sách chuyên khảo của GS. TSKH. Đinh Thế Lục (1989), của PGS. TSKH. Nguyễn Xuân Tấn và TS. Nguyễn Bá Minh (2006).

Xin chân thành cám ơn GS. TSKH. Phạm Hữu Sách và PGS. TSKH. Phạm Huy Điển, những người thầy tận tụy đã truyền cho chúng tôi niềm say mê nghiên cứu giải tích đa trị, giải tích không trơn, lý thuyết tối ưu và ứng dụng. Xin chân thành cám ơn GS. TSKH. Trần Đức Vân và GS. TSKH. Lê Tuấn Hoa đã luôn động viên, khích lệ chúng tôi vượt qua sự trì trệ trong quá trình viết lách kéo

dài. Cảm ơn hai Giáo sư phản biện đã đọc kỹ bản thảo, góp nhiều ý kiến bổ ích, và giới thiệu cho cuốn sách được xuất bản.

Xin được bày tỏ lòng biết ơn các bậc đàn anh cùng các bạn đồng nghiệp ở Hội Toán học Việt Nam nói chung, và ở Viện Toán học nói riêng, đã chia sẻ với chúng tôi những nỗi vui buồn của người làm toán.

Cảm ơn các bạn sinh viên, học viên cao học và nghiên cứu sinh đã nhiệt tình tham dự các bài giảng được lấy làm cơ sở để soạn giáo trình này. Cảm ơn Th.S. Nguyễn Huy Chiêu đã thông báo cho chúng tôi một số kết quả nghiên cứu để giới thiệu trong hai mục ở Chương 3 và Chương 4.

Tập sách này được dành để tưởng nhớ Kỹ sư kinh tế Nguyễn Thị Minh Tâm (1963–2001), biên tập viên Tạp chí Con số và Sự kiện, người em gái thân yêu của tác giả.

Mặc dù chúng tôi đã cố gắng, việc biên soạn chắc chắn không tránh khỏi thiếu sót. Chúng tôi mong nhận được ý kiến phê bình, góp ý của quý bạn đọc gửi về hộp thư email *ndyen@math.ac.vn*, hoặc gửi về địa chỉ *Viện Toán học, Viện Khoa học và Công nghệ Việt Nam, 18 Hoàng Quốc Việt, Hà Nội*.

Chân thành cám ơn TS. Tạ Duy Phượng, TS. Nguyễn Quang Huy, TS. Nguyễn Mậu Nam và Th.S. Nguyễn Huy Chiêu đã dành thời gian đọc bản thảo của tập sách này và góp nhiều ý kiến bổ ích. Đặc biệt, xin cám ơn TS. Nguyễn Quang Huy đã vẽ lại toàn bộ các hình vẽ bằng chương trình đồ họa trên máy tính.

Ngày 25 tháng 4 năm 2007 Tác giả

Các ký hiệu và chữ viết tắt

TNTA	Thuật ngữ tiếng Anh
$F : X \rightrightarrows Y$	ánh xạ đa trị từ X vào Y
$\mathrm{dom}\, F$	miền hữu hiệu của F
$\mathrm{rge}\, F$	miền ảnh của F
$\mathrm{gph}\, F$	đồ thị của F
$\ker F$	tập các không điểm của F
$F^{-1} : Y \rightrightarrows X$	ánh xạ ngược của F
$[x, y]$	đoạn thẳng $\{(1-t)x + ty \,:\, 0 \leqslant t \leqslant 1\}$ nối hai điểm x, y trong không gian véctơ X
$I\!N$	tập số nguyên dương
$\mathbb{Q}$	tập số hữu tỉ
$I\!R$	tập số thực
$\mathbb{C}$	tập số phức
$\emptyset$	tập rỗng
$\overline{I\!R} = I\!R \cup \{-\infty, +\infty\}$	tập số thực suy rộng
$[0, 1]$	tập số thực $\{t \in I\!R \,:\, 0 \leqslant t \leqslant 1\}$
$(0, 1)$	tập số thực $\{t \in I\!R \,:\, 0 < t < 1\}$
$I\!R^n$	không gian Euclide n chiều
$I\!R^n_+$	tập hợp véctơ với tọa độ không âm trong $I\!R^n$
$x^\top$	véctơ hàng là chuyển vị của véctơ cột x
$\|x\|$	chuẩn của véctơ x
$\langle x, y\rangle$	tích vô hướng của các véctơ x và y
$A^\top$	ma trận chuyển vị của ma trận A
$\|A\|$	chuẩn của ma trận A
$I\!R^{m\times n}$	tập hợp các ma trận thực cấp $m \times n$
$\det A$	định thức của ma trận vuông A
$B(x, \delta)$	hình cầu mở có tâm x, bán kính δ
$\bar{B}(x, \delta)$	hình cầu đóng có tâm x, bán kính δ
B_X	hình cầu đơn vị mở trong không gian X
$\bar{B}_X$	hình cầu đơn vị đóng trong X
S_X	mặt cầu đơn vị trong X
X^*	không gian đối ngẫu của không gian Banach X
$\bar{B}_{X^*}$	hình cầu đơn vị đóng trong X^*
$\mathrm{int}\, \Omega$	phần trong của Ω
$\overline{\Omega}$	bao đóng của Ω
$\partial\Omega$	biên của Ω
$\mathrm{co}\, \Omega$	bao lồi của Ω
$\overline{\mathrm{co}}\, \Omega$	bao lồi đóng (=bao đóng của bao lồi) của Ω

$d(x,\Omega)$	khoảng cách từ điểm x đến tập Ω
$\mathrm{cone}\, M$	hình nón sinh bởi tập hợp M
$\mathrm{ri}\, D$	phần trong tương đối của tập lồi D
$\mathrm{aff}\, D$	bao aphin của D
$\mathrm{extr}\, D$	tập các điểm cực biên của D
0^+D	nón lùi xa của D
$T_\Omega(x)$	nón tiếp tuyến Bouligand của Ω tại $x \in \overline{\Omega}$, hoặc nón tiếp tuyến của tập lồi Ω tại $x \in \Omega$
$T^b_\Omega(x)$	nón tiếp tuyến trung gian (nón kề) của Ω tại $x \in \overline{\Omega}$
$C_\Omega(x)$	nón tiếp tuyến Clarke của Ω tại $x \in \overline{\Omega}$
$\hat{N}_\Omega(x)$	nón pháp tuyến Bouligand của Ω tại $x \in \overline{\Omega}$
$N_\Omega(x)$	nón pháp tuyến qua giới hạn (nón pháp tuyến Mordukhovich) của Ω tại $x \in \overline{\Omega}$, hoặc nón pháp tuyến của tập lồi Ω tại $x \in \Omega$
$N^{\mathrm{Cl}}_\Omega(x)$	nón pháp tuyến Clarke của Ω tại $x \in \overline{\Omega}$
$\mathrm{dom}\, f$	miền hữu hiệu của hàm số thực f
$f'(x)$	đạo hàm Fréchet của f tại x
$f'(x;v)$	đạo hàm theo hướng của f tại x theo hướng v
$f^0(x;v)$	đạo hàm Clarke của f tại x theo hướng v
$f^\uparrow(x;v)$	đạo hàm Clarke-Rockafellar của f tại x theo hướng v
$\partial^{\mathrm{Cl}} f(x)$	dưới vi phân Clarke của f tại x
$\partial^\uparrow f(x)$	dưới vi phân Clarke-Rockafellar của f tại x
$\partial^{\mathrm{JL}} f(\bar{x})$	dưới vi phân J-L (Jeyakumar-Luc) của f tại x
$\partial f(x)$	dưới vi phân Mordukhovich của f tại x, hoặc dưới vi phân của hàm lồi f tại x
$\partial^\infty f(x)$	dưới vi phân suy biến của f tại x
$\widehat{\partial} f(x)$	dưới vi phân Fréchet của f tại x
$DF_z(\cdot)$	đạo hàm contingent của F tại z
$D^bF_z(\cdot)$	đạo hàm kề của F tại z
$CF_z(\cdot)$	đạo hàm Clarke của F tại z
$D^*F(\bar{x},\bar{y})$	đối đạo hàm Mordukhovich của F tại $(\bar{x},\bar{y})$
$\widehat{D}^*F(\bar{x},\bar{y})$	đối đạo hàm Fréchet của F tại $(\bar{x},\bar{y})$
$D^*_C F(\bar{x},\bar{y})$	đối đạo hàm Clarke của F tại $(\bar{x},\bar{y})$
$J^{\mathrm{Cl}} f(\bar{x})$	Jacobian Clarke của hàm véctơ f tại $\bar{x}$,
$Jf(\bar{x})$	Jacobian xấp xỉ của hàm véctơ f tại $\bar{x}$
$x_k \xrightarrow{w} x$	dãy véctơ x_k hội tụ đến véctơ x theo tôpô yếu (được ký hiệu bởi w)
$x^*_k \xrightarrow{w^*} x^*$	dãy véctơ x^*_k hội tụ đến véctơ x^* theo tôpô yếu* (được ký hiệu bởi w^*)
$C^1(X,Y)$	tập hợp các hàm $f : X \to Y$ khả vi Fréchet liên tục ở trên X

Chương 1

Tính liên tục của ánh xạ đa trị

Với đời một thoáng say mê
Còn hơn đi chán về chê suông đời
(Trần Huyền Trân, "Uống rượu với Tản Đà", 1938)

Chương này giới thiệu các khái niệm cơ bản và một số định lý chính về tính liên tục của ánh xạ đa trị.

1.1 Ánh xạ đa trị

Cho X, Y là hai tập hợp bất kỳ. Cho $F : X \rightrightarrows Y$ là ánh xạ từ X vào tập hợp gồm toàn bộ các tập con của Y (được ký hiệu là 2^Y). Ta nói F là *ánh xạ đa trị*[1] từ X vào Y. Như vậy, với mỗi $x \in X$, $F(x)$ là một tập hợp con của Y. Không loại trừ khả năng là với một số phần tử $x \in X$ nào đó ta có $F(x)$ là tập rỗng.

Ta sẽ thường sử dụng ký hiệu $F : X \rightrightarrows Y$ để chỉ sự kiện X là ánh xạ đa trị từ X vào Y.

Nếu với mỗi $x \in X$ tập $F(x)$ chỉ gồm đúng một phần tử của Y, thì ta nói F là *ánh xạ đơn trị* từ X vào Y. Khi đó, thay cho ký hiệu $F : X \rightrightarrows Y$ người ta sử dụng ký hiệu quen thuộc $F : X \to Y$.

Ví dụ 1.1.1. Xét phương trình đa thức

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0, \tag{1.1}$$

[1] TNTA (Thuật ngữ tiếng Anh): multifunction, set-valued map, set-valued mapping, point-to-set mapping, correspondence, set-valued operator.

ở đó $n \in I\!N$ là số nguyên dương và $a_i \in I\!R$ $(i = 1, \ldots, n)$ là các hệ số thực. Quy tắc cho tương ứng mỗi véctơ $a = (a_1, \ldots, a_n) \in I\!R^n$ với tập nghiệm, ký hiệu bởi $F(a)$, của (1.1) cho ta một ánh xạ đa trị

$$F : I\!R^n \rightrightarrows \mathbb{C} \tag{1.2}$$

từ không gian Euclide $I\!R^n$ vào tập số phức $\mathbb{C}$. Theo Định lý cơ bản của đại số, $F(a) \neq \emptyset$ với mọi $a \in I\!R^n$ và

$$|F(a)| \leqslant n \quad \forall a \in I\!R^n,$$

ở đó $|M|$ ký hiệu lực lượng của tập hợp M. Nếu ta đồng nhất mỗi số phức $x = u + iv \in \mathbb{C}$ với cặp số thực $(u, v) \in I\!R^2$ thì, thay cho (1.2), ta có ánh xạ

$$F : I\!R^n \rightrightarrows I\!R^2.$$

Định nghĩa 1.1.1. *Đồ thị* $\mathrm{gph}\, F$, *miền hữu hiệu* $\mathrm{dom}\, F$ và *miền ảnh* $\mathrm{rge}\, F$ của ánh xạ đa trị $F : X \rightrightarrows Y$ tương ứng được xác định bằng các công thức

$$\mathrm{gph}\, F = \{(x, y) \in X \times Y \,:\, y \in F(x)\},$$

$$\mathrm{dom}\, F = \{x \in X \,:\, F(x) \neq \emptyset\},$$

và

$$\mathrm{rge}\, F = \{y \in Y \,:\, \exists x \in X \text{ sao cho } y \in F(x)\}.$$

(Các ký hiệu đó có nguồn gốc từ ba chữ tiếng Anh là “graph”, “domain” và “range”.)

Với F là ánh xạ đa trị trong Ví dụ 1.1.1, ta có

$$\mathrm{gph}\, F = \{(a, x) \in I\!R^n \times \mathbb{C} \,:\, x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0\},$$

$$\mathrm{dom}\, F = I\!R^n, \quad \mathrm{rge}\, F = \mathbb{C}.$$

Ánh xạ ngược $F^{-1} : Y \rightrightarrows X$ của ánh xạ đa trị $F : X \rightrightarrows Y$ được xác định bởi công thức

$$F^{-1}(y) = \{x \in X \,:\, y \in F(x)\} \quad (y \in Y).$$

Nếu $M \subset X$ là một tập con cho trước thì *hạn chế của F trên M* là ánh xạ đa trị $F_{|M} : M \rightrightarrows Y$ được cho bởi

$$F_{|M}(x) = F(x) \quad \forall x \in M.$$

Bài tập 1.1.1. Chứng minh rằng $\mathrm{gph}\, F^{-1} = \Phi(\mathrm{gph}\, F)$, ở đó $\Phi : X \times Y \to Y \times X$ là song ánh xác định bởi công thức $\Phi(x, y) = (y, x)$.

Định nghĩa 1.1.2. Cho $F : X \rightrightarrows Y$ là ánh xạ đa trị, X và Y là các không gian tôpô.
1. Nếu $\operatorname{gph} F$ là tập đóng trong không gian tôpô tích $X \times Y$, thì F được gọi là *ánh xạ đóng* (hoặc *ánh xạ có đồ thị đóng*).
2. Nếu X và Y là các không gian tuyến tính tôpô và nếu $\operatorname{gph} F$ là tập lồi trong không gian tích $X \times Y$, thì F được gọi là *ánh xạ đa trị lồi*[2].
3. Nếu $F(x)$ là tập đóng với mọi $x \in X$, thì F được gọi là *ánh xạ có giá trị đóng*.
4. Nếu Y là không gian tuyến tính tôpô và nếu $F(x)$ là tập lồi với mọi $x \in X$, thì F được gọi là *ánh xạ có giá trị lồi*.

> **Bài tập 1.1.2.** Cho $F : X \rightrightarrows Y$ là ánh xạ đa trị, X và Y là các không gian tuyến tính tôpô. Chứng minh rằng:
>
> (a) Nếu F là ánh xạ đóng, thì F là ánh xạ có giá trị đóng.
>
> (b) Nếu F là ánh xạ đa trị lồi, thì F là ánh xạ có giá trị lồi.
>
> (c) F là ánh xạ đa trị lồi khi và chỉ khi
>
> $$(1-t)F(x) + tF(x') \subset F((1-t)x + tx') \quad \forall x, x' \in X, \ \forall t \in (0,1).$$

Chúng ta nhắc lại rằng tập $M \subset I\!\!R^k$ được gọi là *tập lồi đa diện*[3] nếu M có thể biểu diễn dưới dạng giao của của một số hữu hạn các nửa không gian đóng của $I\!\!R^k$. Các tính chất của tập lồi đa diện được trình bày chi tiết trong cuốn chuyên khảo của Rockafellar (1970). Ta có định lý biểu diễn sau đây: *"Tập $M \subset I\!\!R^k$ là tập lồi đa diện khi và chỉ khi tồn tại các điểm $a^1, a^2, \ldots, a^p \in M$ và các phương $v^1, v^2, \ldots, v^q \in I\!\!R^k$ sao cho*

$$M = \Big\{ \textstyle\sum_{i=1}^p t_i a^i + \sum_{j=1}^q \lambda_j v^j \ : \quad t_1 \geqslant 0, \ldots, t_p \geqslant 0, \ \sum_{i=1}^p t_i = 1, \\ \lambda_1 \geqslant 0, \ldots, \lambda_q \geqslant 0 \Big\}."$$

(Xem Rockafellar (1970), Định lý 19.1.) Họ các điểm và các phương

$$\{a^1, \ldots, a^p; v^1, \ldots, v^q\}$$

được gọi là *các phần tử sinh*[4] của M.

Lưu ý rằng họ các phần tử sinh của một tập lồi đa diện nói chung không là duy nhất.

---

[2]Các khái niệm và kết quả liên quan đến tập lồi, hàm lồi, dưới vi phân của hàm lồi có trong Rockafellar (1970) - trường hợp không gian hữu hạn chiều, Ioffe và Tihomirov (1979) - trường hợp không gian vô hạn chiều.

[3]TNTA: polyhedral convex set.

[4]TNTA: generators.

Bài tập 1.1.3. Tìm các phần tử sinh của các tập lồi đa diện sau:

$$M = \{x = (x_1, x_2) \,:\, x_1 \geqslant 0, \;\; x_2 \geqslant 0, \;\; x_1 + x_2 \geqslant 1\}$$

và

$$M = \{x = (x_1, \dots, x_n) \,:\, x_i \geqslant -1 \;\, \forall i = 1, \dots, n\}.$$

Bài tập 1.1.4. Cho $A \in I\!R^{m \times n}$ là ma trận thực cấp $m \times n$, $C \in I\!R^{s \times n}$ là ma trận thực cấp $s \times n$. Đặt

$$(1.3) \quad F(b, d) = \{x \in I\!R^n \,:\, Ax \geqslant b, \; Cx = d\} \quad \forall (b, d) \in I\!R^m \times I\!R^s,$$

ở đó bất đẳng thức $y \geqslant z$ giữa hai véctơ $y = (y_1, \dots, y_m)$ và $z = (z_1, \dots, z_m)$ thuộc $I\!R^m$ có nghĩa là $x_i \geqslant z_i$ với mọi $i = 1, 2, \dots, m$.[5] Chứng minh rằng ánh xạ đa trị $F : I\!R^n \times R^s \rightrightarrows I\!R^n$ cho bởi (1.3) có các tính chất sau:

1. gph F là một nón lồi đa diện trong không gian tích $I\!R^m \times I\!R^s \times I\!R^n$ (do đó F là một ánh xạ đa trị lồi).

2. dom F là tập lồi đa diện.

3. rge $F = I\!R^n$.

4. Với mỗi $(b, d) \in I\!R^m \times I\!R^s$, $F(b, d)$ là tập lồi đa diện trong $I\!R^n$ (có thể là tập rỗng).

Hãy lấy một ví dụ đơn giản để chứng tỏ rằng nói chung thì dom $F \neq I\!R^m \times I\!R^s$.

Nhận xét rằng tập $F(b, d)$ trong Bài tập 1.1.3 là tập nghiệm của hệ phương trình và bất phương trình tuyến tính

$$(1.4) \qquad Ax \geqslant b, \quad Cx = d.$$

Liên quan đến ánh xạ đa trị F cho bởi (1.3), ta có định lý sau đây.

Định lý 1.1.1 (Walkup-Wets, 1969; xem Walkup và Wets (1969), Mangasarian và Shiau (1987), Lee, Tam và Yen (2005)). *Với mỗi cặp ma trận* $(A, C) \in I\!R^{m \times n} \times I\!R^{s \times n}$ *tồn tại một hằng số* $\ell > 0$ *sao cho*

$$(1.5) \qquad F(b', d') \subset F(b, d) + \ell \|(b', d') - (b, d)\| \bar{B}_{I\!R^n}$$

với mọi (b, d) *và* (b', d') *thuộc tập lồi đa diện*

$$\text{dom}\, F = \{(b, d) \,:\, F(b, d) \neq \emptyset\},$$

[5] Trong công thức (1.3) cũng như trong các phép tính ma trận sẽ gặp về sau, véctơ thuộc các không gian Euclide hữu hạn chiều được biểu diễn như những cột số thực. Tuy thế, để cho đơn giản, trên các dòng văn bản thông thường chúng ta sẽ biểu diễn các véctơ cột đó như những véctơ hàng.

ở đó

$$\begin{aligned}\|(b',d')-(b,d)\| &= (\|b'-b\|^2+\|d'-d\|^2)^{1/2}\\ &= \left(\sum_{i=1}^m (b_i'-b_i)^2+\sum_{j=1}^s (d_j'-d_j)^2\right)^{1/2}\end{aligned}$$

với mọi $b=(b_1,\dots,b_m)$, $d=(d_1,\dots,d_s)$, *và*

$$\bar{B}_{I\!R^n}=\left\{x=(x_1,\dots,x_n)\in I\!R^n\ :\ \|x\|=\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2}\leqslant 1\right\}$$

là hình cầu đơn vị đóng trong $I\!R^n$.

Tính chất (1.5) cho thấy rằng F là ánh xạ đa trị Lipschitz trên $\mathrm{dom}\,F$ với hằng số $\ell>0$. Hằng số này phụ thuộc vào cặp ma trận (A,C) đã cho. Các tính chất liên tục Lipschitz của ánh xạ đa trị sẽ được khảo sát chi tiết hơn ở trong Mục 5.

Nếu X, Y là hai không gian tuyến tính tôpô, $F: X \rightrightarrows Y$ là ánh xạ đa trị, thì ta dùng các ký hiệu $\bar{F}$ và $\mathrm{co}\,F$ để chỉ các ánh xạ đa trị được cho bởi các công thức

$$\bar{F}(x)=\overline{F(x)}\quad \forall x\in X$$

và

$$(\mathrm{co}\,F)(x)=\mathrm{co}\,(F(x))\quad \forall x\in X,$$

ở đó $\overline{M}$ là bao đóng tôpô của M và $\mathrm{co}\,M$ là bao lồi của M. (Tức là $\mathrm{co}\,M$ là tập lồi nhỏ nhất chứa M.)

Hiển nhiên $\bar{F}$ là ánh xạ đa trị có giá trị đóng và $\mathrm{co}\,F$ là ánh xạ đa trị có giá trị lồi. Tuy thế, $\bar{F}$ có thể không phải là ánh xạ đa trị đóng và $\mathrm{co}\,F$ có thể không là ánh xạ đa trị lồi!

Ví dụ 1.1.2. Cho

$$F(x)=\{\sin x,\cos x\}\quad (\forall x\in I\!R).$$

Ta có

$$(\mathrm{co}\,F)(x)=\mathrm{co}\,\{\sin x,\cos x\}$$

là ánh xạ đa trị không lồi từ $I\!R$ vào $I\!R$ với đồ thị là tập có gạch sọc trong Hình 1.

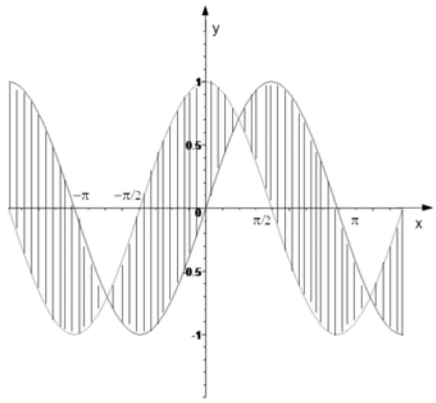
Ví dụ 1.1.3. Cho

$$F(x)=\begin{cases}(0,1) & \text{nếu } x\neq 0\\ \{0\} & \text{nếu } x=0.\end{cases}$$

Rõ ràng

$$\bar{F}(x) = \begin{cases} [0,1] & \text{nếu } x \neq 0 \\ \{0\} & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$$

không phải là ánh xạ đa trị đóng.



Hình 1

Bao đóng và *bao lồi* của ánh xạ $F : X \rightrightarrows Y$, ở đó X và Y là các không gian tuyến tính tôpô, là các ánh xạ $\mathrm{cl}\, F$ và $\mathrm{conv}\, F$ được cho tương ứng bởi các công thức sau

$$\mathrm{cl}\, F(x) = \{y \in Y \,:\, (x,y) \in \overline{\mathrm{gph}\, F}\} \quad \forall x \in X$$

và

$$\mathrm{conv}\, F(x) = \{y \in Y \,:\, (x,y) \in \mathrm{co}\,(\mathrm{gph}\, F)\} \quad \forall x \in X.$$

Dễ thấy rằng nếu F là ánh xạ trong Ví dụ 1.1.2 thì

$$(\mathrm{cl}\, F)(x) = \{\sin x, \cos x\} \ \text{ và } \ (\mathrm{conv}\, F)(x) = [-1,1] \quad (\forall x \in I\!R).$$

Với F là ánh xạ trong Ví dụ 1.1.3 ta có

$$(\mathrm{cl}\, F)(x) = [0,1] \quad (\forall x \in I\!R)$$

và

$$(\mathrm{conv}\, F)(x) = \begin{cases} (0,1) & \text{nếu } x \neq 0, \\ [0,1) & \text{nếu } x = 0. \end{cases}$$

Định nghĩa 1.1.3. Cho $F : X \rightrightarrows Y$ và $G : Y \rightrightarrows Z$ là hai ánh xạ đa trị. Ánh xạ đa trị

$$G \circ F : X \rightrightarrows Z$$

cho bởi công thức

$$(G \circ F)(x) = \bigcup_{x \in X} G(F(x)) = \bigcup_{x \in X} \left(\bigcup_{y \in F(x)} G(y) \right),$$

với mọi $x \in X$, được gọi là *ánh xạ hợp* (hay *tích*) của F và G.

> **Bài tập 1.1.5.** Cho X, Y, Z là các không gian tuyến tính, $F : X \rightrightarrows Y$ và $G : Y \rightrightarrows Z$ là hai ánh xạ đa trị lồi. Chứng minh rằng $G \circ F$ là ánh xạ đa trị lồi.

Ứng với mỗi hàm số thực $\varphi : X \to \overline{I\!R}$, ở đó

$$\overline{I\!R} = [-\infty, +\infty] = I\!R \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$$

là tập số thực suy rộng, ta có hai ánh xạ đa trị sau đây:

$$\text{(1.6)} \qquad \operatorname{epi} \varphi : X \rightrightarrows I\!R, \quad (\operatorname{epi} \varphi)(x) = \{\mu \in I\!R \,:\, \mu \geqslant \varphi(x)\} \quad \forall x \in X,$$

và

$$\text{(1.7)} \qquad \operatorname{hypo} \varphi : X \rightrightarrows I\!R, \quad (\operatorname{hypo} \varphi)(x) = \{\mu \in I\!R \,:\, \mu \leqslant \varphi(x)\} \quad \forall x \in X.$$

Nhắc lại rằng φ được gọi là *hàm lồi* nếu như

$$\varphi((1-t)x^1 + tx^2) \leqslant (1-t)\varphi(x^1) + t\varphi(x^2)$$

với mọi $x^1, x^2 \in \operatorname{dom} \varphi := \{x \in X \,:\, \varphi(x) < \infty\}$. Ta nói φ là *hàm lõm* nếu như $-\varphi$ là hàm lồi. (Theo định nghĩa, $(-\varphi)(x) = -\varphi(x)$ với mọi $x \in X$.)

> **Bài tập 1.1.6.** Cho X là không gian tuyến tính. Chứng minh rằng hàm số $\varphi : X \to \bar{I\!R}$ là lồi khi và chỉ khi $\operatorname{epi} \varphi : X \rightrightarrows I\!R$ là ánh xạ đa trị lồi, φ là hàm lõm khi và chỉ khi $\operatorname{hypo} \varphi : X \rightrightarrows I\!R$ là ánh xạ đa trị lồi.

Chúng ta kết thúc mục này với một vài ví dụ về các ánh xạ đa trị liên quan đến các bài toán tối ưu.

Ví dụ 1.1.4. Cho X, Y, Z là các không gian định chuẩn. Cho $f : X \times Z \to I\!R \cup \{+\infty\}$ là hàm số thực, $g : X \times Z \to Y$ là hàm véctơ, $K \subset Y$ là hình nón lồi, đóng; $\Delta \subset X$ là tập hợp bất kỳ. Xét bài toán tối ưu phụ thuộc tham số

$$(P_z) \qquad \min\{f(x,z) \,:\, x \in \Delta,\ g(x,z) \leqslant_K 0\},$$

ở đó

$$y_1 \leqslant_K y^2 \Longleftrightarrow y^2 - y^1 \in K.$$

Tập hợp
$$G(z) := \{x \in X \,:\, x \in \Delta,\ g(x,z) \leqslant_K 0\}$$
được gọi là *tập ràng buộc* (hay *tập hạn chế*, *tập chấp nhận được*) của (P_z). Hàm số
$$\varphi(z) := \inf\{f(x,z) \,:\, x \in G(z)\}$$
được gọi là *hàm giá trị tối ưu* (hay *hàm marginal*) của (P_z). Tập
$$F(z) := \{x \in G(z) \,:\, f(x,z) = \varphi(z)\}$$
được gọi là *tập nghiệm* của (P_z). Tập hợp các *nghiệm địa phương* của (P_z) được ký hiệu là $F_0(z)$. Như vậy, $\bar{x} \in F_0(z)$ khi và chỉ khi tồn tại $\delta > 0$ sao cho $f(x,z) \geqslant f(\bar{x},z)$ với mọi $x \in G(z) \cap B(\bar{x},\delta)$, ở đó $B(\bar{x},\delta) := \{x \in X \,:\, \|x - \bar{x}\| < \delta\}$ ký hiệu hình cầu mở có tâm tại $\bar{x}$ và bán kính δ. Hàm giá trị tối ưu $\varphi(\cdot)$, ánh xạ $G(\cdot)$, và các ánh xạ nghiệm $F(\cdot)$, $F_0(\cdot)$ là những đối tượng nghiên cứu chính trong lý thuyết ổn định trong tối ưu hoá; xem Bonnans và Shapiro (2000) và những tài liệu dẫn trong đó. Trong lý thuyết đó người ta đưa ra những điều kiện cần và đủ để φ, G, F và F_0 liên tục (theo một nghĩa nào đó) hoặc khả vi (theo một nghĩa nào đó), tùy thuộc vào cấu trúc cụ thể của lớp bài toán (P_z) được xét. Trong các chương sau chúng ta sẽ khảo sát một số điều kiện kiểu đó.

Một trường hợp riêng của bài toán tối ưu phụ thuộc tham số xét trong Ví dụ 1.1.4 là *bài toán quy hoạch toàn phương phụ thuộc tham số*.

Ví dụ 1.1.5. Cho các ma trận $A \in I\!\!R^{m\times n}$, $C \in I\!\!R^{s\times n}$ và ma trận đối xứng $D \in I\!\!R^{n\times n}$. Xét bài toán quy hoạch toàn phương

$$\min\left\{\frac{1}{2}x^\top Dx + c^\top x \,:\, x \in I\!\!R^n,\ Ax \geqslant b,\ Cx = d\right\} \tag{1.8}$$

phụ thuộc vào tham số $z = (c,b,d) \in I\!\!R^n \times I\!\!R^m \times I\!\!R^s$. Ở đây $^\top$ ký hiệu phép chuyển vị ma trận và véctơ. Ký hiệu hàm giá trị tối ưu, tập hạn chế, tập nghiệm và tập nghiệm địa phương của (1.8) tương ứng bởi $\varphi(c,b,d)$, $G(b,d)$, $\mathrm{Sol}(c,b,d)$ và $\mathrm{loc}(c,b,d)$. Tính chất của hàm φ và các ánh xạ đa trị $\mathrm{Sol}(\cdot)$, $\mathrm{loc}(\cdot)$ phụ thuộc khá nhiều vào tính chất của ma trận D. Ví dụ như, nếu D là *ma trận xác định dương* (tức là $v^\top Dv > 0$ với mọi $v \in I\!\!R^n \setminus \{0\}$) thì $\mathrm{Sol}(\cdot)$ là ánh xạ đơn trị, liên tục trên tập
$$\mathrm{dom}\, G = \{(b,d) \in I\!\!R^m \times I\!\!R^s \,:\, G(b,d) \neq \emptyset\}.$$
Ngoài ra, $\mathrm{loc}(c,b,d) = \mathrm{Sol}(c,b,d)$ với mọi $(c,b,d) \in I\!\!R^n \times I\!\!R^m \times I\!\!R^s$. Chúng ta lưu ý rằng tính chất Lipschitz của ánh xạ $G(\cdot)$ đã được chỉ ra trong Định lý 1.1.1. Có thể đọc một cách có hệ thống các kết quả về tính ổn định nghiệm của bài toán quy hoạch toàn phương trong Lee, Tam và Yen (2005).

Trong ví dụ sau đây chúng ta xét bài toán quy hoạch lồi.

Ví dụ 1.1.6. Cho $\Delta \subset X$ là một tập lồi và $\varphi : X \to I\!R \cup \{\infty\}$ là một hàm lồi, ở đó X là không gian định chuẩn. Xét bài toán quy hoạch lồi

$$(P) \qquad \min\{\varphi(x) \,:\, x \in \Delta\}.$$

Nón tiếp tuyến $T_\Delta(\bar{x})$ của Δ tại $\bar{x} \in \Delta$ được định nghĩa bởi công thức

$$T_\Delta(\bar{x}) = \overline{\{t(x-\bar{x}) \,:\, x \in \Delta,\ t \geqslant 0\}}.$$

Nón pháp tuyến $N_\Delta(\bar{x})$ của Δ tại $\bar{x} \in \Delta$ được định nghĩa như sau

$$\begin{aligned} N_\Delta(\bar{x}) \ &= \{x^* \in X^* \,:\, \langle x^*, v\rangle \leqslant 0 \quad \forall v \in T_\Delta(\bar{x})\} \\ &= \{x^* \in X^* \,:\, \langle x^*, x-\bar{x}\rangle \leqslant 0 \quad \forall x \in \Delta\}, \end{aligned}$$

ở đó X^* ký hiệu không gian đối ngẫu của X và $\langle x^*, v\rangle$ ký hiệu giá trị của phiếm hàm tuyến tính $x^* \in X^*$ tại $v \in X$. Nếu $\bar{x} \notin \Delta$, thì ta đặt $N_\Delta(\bar{x}) = \emptyset$. Có thể chứng minh rằng $\bar{x} \in \Delta$ là nghiệm của (P) khi và chỉ khi

$$0 \in \partial\varphi(\bar{x}) + N_\Delta(\bar{x}), \tag{1.9}$$

ở đó

$$\partial\varphi(\bar{x}) := \{x^* \in X^* \,:\, \langle x^*, x-\bar{x}\rangle \leqslant \varphi(x) - \varphi(\bar{x}) \quad \forall x \in X\}$$

là *dưới vi phân* (subdifferential) của φ tại $\bar{x} \in \operatorname{dom}\varphi = \{x \in X \,:\, \varphi(x) \in I\!R\}$; xem Ioffe và Tihomirov (1979). Đặt

$$F(x) = \partial\varphi(x) + N_\Delta(x) \quad \forall x \in \operatorname{dom}\varphi, \tag{1.10}$$

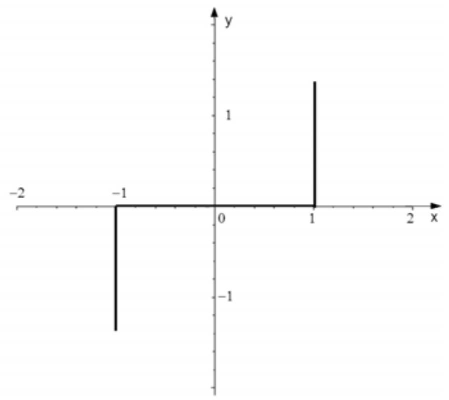
và $F(x) = \emptyset$ với mọi $x \notin \operatorname{dom}\varphi$. Khi đó bao hàm thức (1.9) trở thành $0 \in F(\bar{x})$. Vậy việc giải bài toán (P) được quy về việc tìm những điểm $\bar{x} \in X$ thỏa mãn bao hàm thức $0 \in F(\bar{x})$, tức là việc tìm các *điểm cân bằng* (các *không điểm*) của ánh xạ F cho bởi (1.10).

Hiển nhiên (1.10) là ánh xạ đa trị có giá trị lồi. Tuy thế, nó không nhất thiết là ánh xạ đa trị lồi.

Ví dụ 1.1.7. Cho $X = I\!R$, $\Delta = [-1, 1]$, $\varphi(x) \equiv 0$. Khi đó ánh xạ đa trị

$$F(x) := \partial\varphi(x) + N_\Delta(x) = N_\Delta(x) = \begin{cases} \emptyset & \text{nếu } x \notin \Delta \\ (-\infty, 0] & \text{nếu } x = -1 \\ \{0\} & \text{nếu } x = (-1, 1) \\ [0, \infty) & \text{nếu } x = 1 \end{cases}$$

có đồ thị là tập điểm tô đậm trong Hình 2. Hiển nhiên gph F không phải là tập lồi.



Hình 2

1.2 Tính nửa liên tục trên và tính nửa liên tục dưới của ánh xạ đa trị

Nhắc lại rằng một họ các tập con $\tau \subset 2^X$ của tập hợp X được gọi là một *tôpô* trong X nếu

(i) $\emptyset \in \tau$, $X \in \tau$;

(ii) giao của một họ hữu hạn tuỳ ý các tập thuộc τ lại là một tập thuộc τ;

(iii) hợp của một họ tuỳ ý các tập thuộc τ là một tập thuộc τ.

Các tập thuộc τ được gọi là các *tập mở*. Phần bù trong X của một tập mở được gọi là tập đóng. Tập X được trang bị một tôpô τ được gọi là một *không gian tôpô*, và được ký hiệu bởi (X, τ). Thay cho (X, τ), để cho đơn giản, nhiều khi ta chỉ viết X, nếu tôpô τ đã được xác định theo một cách nào đó. Nếu (X, d) là một không gian mêtric thì ta ký hiệu bởi $\mathcal{B}$ họ các hình cầu mở

$$B(x, \varepsilon) := \{y \in X \; : \; d(y, x) < \varepsilon\} \quad (x \in X, \varepsilon > 0).$$

Xét các tập là giao của một số hữu hạn các tập thuộc $\mathcal{B}$, và ký hiệu bởi τ họ các tập có thể biểu diễn dưới dạng hợp của một họ tuỳ ý các tập giao như vậy. Ta có τ là một tôpô trên X; đó chính là tôpô tương ứng với mêtric d đã cho trên X.

Nếu (X, τ) là một không gian tôpô và $M \subset X$ là một tập con tùy ý thì

$$\tau_M := \{U \cap M \,:\, U \in \tau\}$$

là một tôpô trên M. Tôpô τ_M được gọi là *tôpô cảm sinh* của M. Tập $U_M := U \cap M$ được gọi là *vết*[6] của U trên M.

Ta đã biết rằng nếu $f : X \to Y$ là ánh xạ đơn trị từ không gian tôpô X vào không gian tôpô Y, thì f được gọi là *liên tục* tại $\bar{x} \in X$ nếu với mỗi tập mở V chứa $f(\bar{x})$ (V là *lân cận mở* của $f(\bar{x})$ trong tôpô của Y) tồn tại lân cận mở U của $\bar{x}$ sao cho

$$f(x) \in V \quad \forall x \in U.$$

Ta nói f là liên tục ở trên X nếu nó là liên tục tại mọi điểm thuộc X. Dễ thấy rằng f là liên tục ở trên X nếu, với mỗi tập mở $V \subset Y$, ảnh ngược

$$f^{-1}(V) := \{x \in X \,:\, f(x) \in V\}$$

của V là tập mở trong X.

Có thể mở rộng khái niệm ánh xạ đơn trị liên tục sang cho ánh xạ đa trị theo hai cách khác nhau. Kết quả là ta thu được hai khái niệm có nội dung hoàn toàn khác nhau: ánh xạ đa trị nửa liên tục trên và ánh xạ đa trị nửa liên tục dưới. Theo Aubin và Frankowska (1990), hai khái niệm này đã được B. Bouligand và K. Kuratowski đưa ra năm 1932. Ngày nay, nhiều khi người ta dùng các cụm từ "ánh xạ đa trị nửa liên tục trên theo Berge" và "ánh xạ đa trị nửa liên tục dưới theo Berge" để chỉ hai khái niệm này, vì chúng được khảo sát khá kỹ trong một cuốn chuyên khảo của C. Berge (1959).

Cho $F : X \rightrightarrows Y$ là ánh xạ đa trị từ không gian tôpô X vào không gian tôpô Y.

Định nghĩa 1.2.1. Ta nói F là *nửa liên tục trên* tại $\bar{x} \in \operatorname{dom} F$ nếu với mọi tập mở $V \subset Y$ thỏa mãn $F(\bar{x}) \subset V$ tồn tại lân cận mở U của $\bar{x}$ sao cho

$$F(x) \subset V \quad \forall x \in U.$$

Nếu F là nửa liên tục trên tại mọi điểm thuộc $\operatorname{dom} F$, thì F được gọi là nửa liên tục trên ở trong X.

[6] TNTA: trace.

Định nghĩa 1.2.2. Ta nói F là *nửa liên tục dưới* tại $\bar{x} \in \operatorname{dom} F$ nếu với mọi tập mở $V \subset Y$ thỏa mãn $F(\bar{x}) \cap V \neq \emptyset$ tồn tại lân cận mở U của $\bar{x}$ sao cho

$$F(x) \cap V \neq \emptyset \quad \forall x \in U \cap \operatorname{dom} F.$$

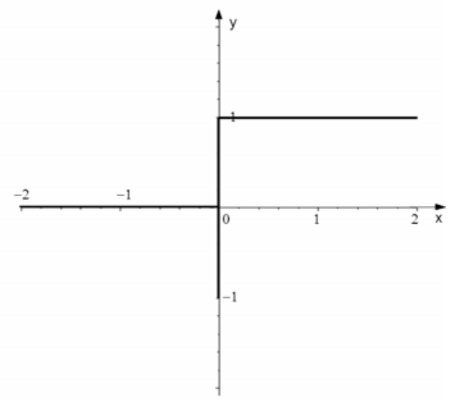
Nếu F là nửa liên tục dưới tại mọi điểm thuộc $\operatorname{dom} F$, thì F được gọi là nửa liên tục dưới ở trong X.

Định nghĩa 1.2.3. Ta nói F là *liên tục* tại $\bar{x} \in \operatorname{dom} F$ nếu F đồng thời là nửa liên tục trên và nửa liên tục dưới tại $\bar{x}$. Nếu F là liên tục tại mọi điểm thuộc $\operatorname{dom} F$, thì F được gọi là liên tục ở trên X.

Ví dụ 1.2.1. Ánh xạ đa trị

$$F(x) = \begin{cases} \{0\} & \text{nếu} \quad x < 0 \\ [-1, 1] & \text{nếu} \quad x = 0 \\ \{1\} & \text{nếu} \quad x > 0 \end{cases}$$

từ $I\!R$ vào $I\!R$ là nửa liên tục trên ở trong $I\!R$, nhưng không là nửa liên tục dưới tại $\bar{x} = 0$. Như vậy, F không phải là ánh xạ liên tục ở trên $I\!R$.



Hình 3

Ví dụ 1.2.2. Ánh xạ đa trị

$$F(x) = \begin{cases} [0, 1] & \text{nếu} \quad x \neq 0 \\ \{0\} & \text{nếu} \quad x = 0 \end{cases}$$

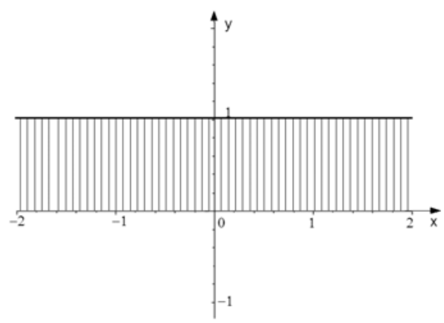
không phải là ánh xạ liên tục ở trên $I\!R$, vì F chỉ là nửa liên tục dưới tại $\bar{x} = 0$, chứ không là nửa liên tục trên tại điểm đó.

Ví dụ 1.2.3. Ánh xạ đa trị

$$F(x) = \begin{cases} [0,1] & \text{nếu } x \text{ là số hữu tỷ} \\ [-1,0] & \text{nếu } x \text{ là số vô tỷ} \end{cases}$$

không phải là ánh xạ liên tục ở trên $I\!R$; hơn thế, F không là nửa liên tục trên và cũng không là nửa liên tục dưới tại bất cứ điểm $\bar{x} \in I\!R$ nào.

Bài tập 1.2.1. Chứng minh rằng ánh xạ đơn trị $f : X \to Y$ từ không gian tôpô X vào không gian tôpô Y là liên tục tại $\bar{x}$ khi và chỉ khi ánh xạ $F : X \rightrightarrows Y$ cho bởi công thức $F(x) = \{f(x)\}$ là nửa liên tục trên (hoặc nửa liên tục dưới) tại $\bar{x}$.



Hình 4

Bài tập 1.2.2. Cho ánh xạ đa trị $F : X \to Y$, ở đó X và Y là các không gian tôpô. Chứng minh rằng:

(a) F là nửa liên tục trên ở trong X khi và chỉ khi *nhân*

$$F^{-}(V) := \{x \in \operatorname{dom} F \ : \ F(x) \subset V\}$$

của một tập mở bất kỳ $V \subset Y$ là tập mở trong tôpô cảm sinh của $\operatorname{dom} F$.

(b) F là nửa liên tục dưới ở trong X khi và chỉ khi *ảnh ngược*

$$F^{-1}(V) := \{x \in \operatorname{dom} F \ : \ F(x) \cap V \neq \emptyset\}$$

của một tập mở bất kỳ $V \subset Y$ là tập mở trong tôpô cảm sinh của $\operatorname{dom} F$; xem Hình 4.

Bài tập 1.2.3. Hãy chứng tỏ rằng ánh xạ đa trị

$$F(x) = \operatorname{co}\{\sin x, \cos x\}$$

từ $I\!R$ vào $I\!R$ là liên tục ở trên $I\!R$.

Nhắc lại rằng hàm số $\varphi : X \to I\!R \cup \{+\infty\}$ xác định trên không gian tôpô X được gọi là nửa liên tục dưới tại $\bar{x} \in \mathrm{dom}\,\varphi$, ở đó

$$\text{(2.1)} \qquad \mathrm{dom}\,\varphi = \{x \in X \,:\, \varphi(x) < +\infty\}$$

ký hiệu *miền hữu hiệu* của φ, nếu với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại lân cận mở U của $\bar{x}$ sao cho

$$\varphi(x) \geqslant \varphi(\bar{x}) - \varepsilon \quad \forall x \in U.$$

Hàm φ được gọi là nửa liên tục trên tại $\bar{x} \in \mathrm{dom}\,\varphi$ nếu với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại lân cận mở U của $\bar{x}$ sao cho

$$\varphi(x) \leqslant \varphi(\bar{x}) + \varepsilon \quad \forall x \in U.$$

Nếu X là không gian mêtric, thì điều kiện thứ nhất có thể viết dưới dạng

$$\liminf_{x \to \bar{x}} \varphi(x) \geqslant \varphi(\bar{x}),$$

ở đó

$$\liminf_{x \to \bar{x}} \varphi(x) := \inf \Big\{ \gamma \in I\!R \,:\, \exists x_k \to \bar{x},\ \lim_{k \to \infty} \varphi(x_k) = \gamma \Big\}.$$

Tương tự, điều kiện thứ hai có thể viết dưới dạng

$$\limsup_{x \to \bar{x}} \varphi(x) \leqslant \varphi(\bar{x}),$$

ở đó

$$\limsup_{x \to \bar{x}} \varphi(x) := \sup \Big\{ \gamma \in I\!R \,:\, \exists x_k \to \bar{x},\ \lim_{k \to \infty} \varphi(x_k) = \gamma \Big\}.$$

Bài tập 1.2.4. Cho $\varphi : X \to I\!R \cup \{+\infty\}$ là hàm số thực xác định trên không gian tôpô X. Chứng minh rằng:

(a) φ là nửa liên tục dưới tại $\bar{x} \in \mathrm{dom}\,\varphi$ (xem (2.1)) khi và chỉ khi ánh xạ đa trị $\mathrm{epi}\,\varphi$ (đã được định nghĩa trong Mục 1.1) là nửa liên tục dưới tại $\bar{x}$.

(b) φ là nửa liên tục trên tại $\bar{x} \in \mathrm{dom}\,\varphi$ khi và chỉ khi ánh xạ đa trị $\mathrm{hypo}\,\varphi$ (đã được định nghĩa trong Mục 1.1) là nửa liên tục trên tại $\bar{x}$.

Định lý cơ bản về sự tồn tại nghiệm của các bài toán tối ưu được phát biểu như sau.

Định lý 1.2.1 (Định lý Weierstrass). *Cho $X \neq \emptyset$ là không gian tôpô compắc. Nếu $\varphi : X \to I\!R$ là hàm số nửa liên tục dưới ở trong X, thì bài toán*

$$\text{(2.2)} \qquad \min\{\varphi(x) \,:\, x \in X\}$$

có nghiệm. Nếu φ là hàm số nửa liên tục trên ở trong X, thì bài toán

$$\text{(2.3)} \qquad \max\{\varphi(x) \,:\, x \in X\}$$

có nghiệm.

Chứng minh. Ta chỉ cần chứng minh khẳng định thứ nhất, vì hàm φ là nửa liên tục trên khi và chỉ khi hàm $(-\varphi)(x) := -\varphi(x)$ là nửa liên tục dưới, và $\bar{x}$ là nghiệm của (2.3) khi và chỉ khi $\bar{x}$ là nghiệm của bài toán

$$\min\{(-\varphi)(x) \,:\, x \in X\}.$$

Nhắc lại rằng không gian tôpô X được gọi là compắc nếu từ mỗi phủ mở $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ của X có thể trích ra một phủ con hữu hạn, tức là tồn tại các chỉ số $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_s\} \subset A$ sao cho

$$X = \bigcup_{i=1}^{s} U_{\alpha_i}.$$

Giả sử X là không gian compắc, $X \neq \emptyset$, $\varphi : X \to I\!R$ là hàm số nửa liên tục dưới ở trong X. Ta cần chứng minh rằng (2.2) có nghiệm, tức là tồn tại $\bar{x}$ sao cho

$$\varphi(\bar{x}) = \min\{\varphi(x) \,:\, x \in X\}. \tag{2.4}$$

Giả sử phản chứng: Không có $\bar{x}$ nào thỏa mãn (2.4). Đặt $\gamma = \inf\{\varphi(x) \,:\, x \in X\}$. Nếu $\gamma = -\infty$ thì ta đặt

$$\Omega_k = \{x \in X \,:\, \varphi(x) > -k\} \quad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Do φ là nửa liên tục dưới ở trong X nên, với mọi k, Ω_k là tập mở. Dễ thấy rằng $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Omega_k$. Vậy $\{\Omega_k\}_{k\in I\!N}$ là phủ mở của X. Do X là không gian compắc và do $\{\Omega_k\}$ là họ tập lồng nhau, nên tồn tại $\bar{k} \in I\!N$ sao cho $X = \Omega_{\bar{k}}$. Khi đó ta phải có $\gamma \geqslant -\bar{k}$, trái với giả thiết $\gamma = -\infty$. Bây giờ ta xét trường hợp $\gamma \in I\!R$. Với mỗi $k \in I\!N$ ta đặt

$$\Omega_k = \left\{x \in X \,:\, \varphi(x) > \gamma + \frac{1}{k}\right\}.$$

Dễ thấy rằng $\{\Omega_k\}_{k\in I\!N}$ là phủ mở của X (do không có $\bar{x} \in X$ nào thỏa mãn (2.4)) mà từ đó ta không thể trích ra một phủ con hữu hạn nào. Vậy X không là không gian tôpô compắc, trái với giả thiết. Định lý đã được chứng minh. □

Nhắc lại rằng không gian tôpô X được gọi là *liên thông* (hay *liên thông tôpô*) nếu không tồn tại hai tập mở U, V khác rỗng nào trong X sao cho $U \cup V = X$, $U \cap V = \emptyset$. Ta biết rằng ánh xạ đơn trị liên tục bảo tồn tính liên thông. Cụ thể hơn, ta có định lý sau.

Định lý 1.2.2. *Cho $f : X \to Y$ là ánh xạ liên tục từ không gian tôpô liên thông X vào không gian tôpô Y. Khi đó*

$$\operatorname{rge} f = \{f(x) \,:\, x \in X\},$$

xét với tôpô cảm sinh từ tôpô của Y, là không gian liên thông.

Chứng minh. Lập luận bằng phương pháp phản chứng, ta giả sử rằng $M := \mathrm{rge}\, f$ không phải là không gian liên thông. Khi đó tồn tại các tập mở U, V trong Y sao cho

$$U_M \cup V_M = M, \quad U_M \cap V_M = \emptyset, \quad U_M \neq \emptyset, \quad V_M \neq \emptyset, \tag{2.5}$$

ở đó $U_M := U \cap M$ và $V_M := V \cap M$ là các vết của các tập U và V trên M. Đặt

$$X_1 = f^{-1}(U) = \{x \in X \,:\, f(x) \in U\},$$

$$X_2 = f^{-1}(V) = \{x \in X \,:\, f(x) \in V\}.$$

Ta có:

(i) X_1, X_2 là các tập mở trong X;

(ii) $X_1 \neq \emptyset$, $X_2 \neq \emptyset$;

(iii) $X_1 \cup X_2 = X$;

(iv) $X_1 \cap X_2 = \emptyset$.

Thật vậy, do f là liên tục, U và V là mở, nên X_1 và X_2 là mở. Vì $U_M = U \cap \mathrm{rge}\, f = U \cap \{f(x) \,:\, x \in X\}$ khác rỗng, nên tồn tại $x \in X$ sao cho $f(x) \in U$. Vậy $X_1 \neq \emptyset$. Tương tự, $X_2 \neq \emptyset$. Lấy tuỳ ý $x \in X$. Do $f(x) \in \mathrm{rge}\, f = M$ và do $U_M \cup V_M = M$, ta có $f(x) \in U_M$ hoặc $f(x) \in V_M$. Nếu $f(x) \in U_M$ thì $f(x) \in U$; do đó $x \in X_1$. Nếu $f(x) \in V_M$ thì $x \in X_2$. Ta đã chứng minh rằng (iii) nghiệm đúng. Nếu tồn tại $x \in X_1 \cap X_2$ thì ta có $f(x) \in U$ và $f(x) \in V$. Hiển nhiên là $f(x) \in M$. Do đó $f(x) \in U_M$ và $f(x) \in V_M$. Vậy ta có $U_M \cap V_M \neq \emptyset$, mâu thuẫn với (2.5). Tính chất (iv) đã được chứng minh. Từ (i)–(iv) suy ra rằng X không liên thông, trái với giả thiết của định lý. Vậy $\mathrm{rge}\, f$ phải là không gian liên thông. □

Định lý sau đây chỉ ra rằng cả ánh xạ đa trị nửa liên tục trên lẫn ánh xạ đa trị nửa liên tục dưới đều bảo tồn tính liên thông. Một tập con của không gian tôpô được gọi là liên thông nếu, khi xét với tôpô cảm sinh, nó là không gian tôpô liên thông.

Định lý 1.2.3 (xem Warburton (1983)). *Cho $F : X \rightrightarrows Y$ là ánh xạ đa trị giữa các không gian tôpô sao cho, với mọi $x \in X$, $F(x)$ là tập liên thông (có thể rỗng). Khi đó:*

(a) *Nếu F là ánh xạ nửa liên tục trên ở trên X và nếu* $\mathrm{dom}\, F$ *là tập liên thông, thì* $\mathrm{rge}\, F$ *là tập liên thông.*

(b) *Nếu F là ánh xạ nửa liên tục dưới ở trong X và nếu* $\mathrm{dom}\, F$ *là tập liên thông, thì* $\mathrm{rge}\, F$ *là tập liên thông.*

Chứng minh. (a) Giả sử rằng F là nửa liên tục trên ở trong X, dom F là liên thông, và $F(x)$ là liên thông với mọi $x \in X$. Để chứng minh bằng phản chứng, ta giả sử rằng $M := \text{rge}\, F$ không là liên thông. Khi đó tồn tại các tập mở U, V của Y thỏa mãn (2.5), ở đó $U_M := U \cap M$ và $V_M := V \cap M$. Đặt

$$X_1 = F^{-}(U) = \{x \in \text{dom}\, F \,:\, F(x) \subset U\},$$

$$X_2 = F^{-}(V) = \{x \in \text{dom}\, F \,:\, F(x) \subset V\}.$$

Các tính chất sau nghiệm đúng:

(i) X_1, X_2 là các tập mở trong tôpô cảm sinh của dom F;

(ii) $X_1 \neq \emptyset$, $X_2 \neq \emptyset$;

(iii) $X_1 \cup X_2 = \text{dom}\, F$;

(iv) $X_1 \cap X_2 = \emptyset$.

Thật vậy, tính chất (i) được suy ra từ khẳng định (a) trong Bài tập 1.2.2. Do

$$U_M = U \cap \text{rge}\, F = U \cap \left(\bigcup_{x \in X} F(x) \right)$$

khác rỗng, tồn tại $x \in X$ sao cho $F(x) \cap U \neq \emptyset$. Nếu $F(x) \cap V \neq \emptyset$ thì từ (2.5) suy ra $F(x)$, xét với tôpô cảnh sinh từ tôpô của Y, không là không gian liên thông; trái với giả thiết. Vậy $F(x) \cap V = \emptyset$. Do $F(x) \subset M$ và do $U_M \cup V_M = M$, ta có $F(x) \subset U$; tức là $x \in X_1$. Ta đã chứng tỏ rằng $X_1 \neq \emptyset$. Tương tự, $X_2 \neq \emptyset$. Lấy tuỳ ý $x \in \text{dom}\, F$. Do $F(x) \neq \emptyset$ và $F(x) \subset M$, ta có $F(x) \cap U_M \neq \emptyset$ hoặc $F(x) \cap V_M \neq \emptyset$. Nếu trường hợp thứ nhất xảy ra, thì do lý luận đã trình bày ở trên, ta có $x \in X_1$. Nếu trường hợp thứ hai xảy ra thì ta có $x \in X_2$. Vậy dom $F \subset X_1 \cup X_2$, tức là (iii) nghiệm đúng. Nếu tồn tại $x \in X_1 \cap X_2$ thì ta có

$$F(x) \neq \emptyset, \quad F(x) \subset U, \quad F(x) \subset V.$$

Do $F(x) \subset M$, ta có $F(x) \subset U_M$ và $F(x) \subset V_M$. Vì $F(x) \neq \emptyset$ nên $U_M \cap V_M \neq \emptyset$, trái với (2.5). Vậy ta có $X_1 \cap X_2 = \emptyset$. Các tính chất (i)–(iv) đã được chứng minh. Từ đó suy ra dom F, xét với tôpô cảm sinh từ tôpô của X, không phải là không gian liên thông; trái với giả thiết. Tóm lại, rge F là không gian liên thông.

(b) Giả sử rằng F là nửa liên tục dưới ở trong X, dom F là liên thông, và $F(x)$ là liên thông với mọi $x \in X$. Nếu $M := \text{rge}\, F$ không liên thông, thì tồn tại các tập mở U, V của Y thỏa mãn (2.5), ở đó $U_M := U \cap M$ và $V_M := V \cap M$. Đặt

$$X_1 = F^{-1}(U) = \{x \in \text{dom}\, F \,:\, F(x) \cap U \neq \emptyset\},$$

$$X_2 = F^{-1}(V) = \{x \in \text{dom}\, F \,:\, F(x) \cap V \neq \emptyset\},$$

ta có thể chứng tỏ rằng các tính chất (i)–(iv) liệt kê trong phần chứng minh trên nghiệm đúng. Từ đó suy ra rằng dom F không liên thông, trái với giả thiết. Vậy rge F là tập liên thông. □

Bài tập 1.2.5. Trình bày chứng minh chi tiết khẳng định (b) của định lý trên. Xây dựng vài ví dụ đơn giản để chứng tỏ rằng mỗi một giả thiết

(i) $\mathrm{dom}\, F$ là tập liên thông

và

(ii) $F(x)$ là tập liên thông với mọi $x \in X$

trong khẳng định (b) của Định lý 1.2.3 là không thể bỏ được (trong khi các giả thiết khác vẫn được giữ nguyên).

Bài tập 1.2.6. Cho $F : X \rightrightarrows Y$ và $G : Y \rightrightarrows Z$ tương ứng là các ánh xạ đa trị nửa liên tục dưới ở trong X và ở trên Y, ở đó X, Y và Z là các không gian tôpô. Chứng minh rằng ánh xạ tích $G \circ F$ là nửa liên tục dưới ở trong X.

Bài tập 1.2.7. Cho $F : X \rightrightarrows Y$ và $G : X \rightrightarrows Y$ là các ánh xạ đa trị giữa các không gian tuyến tính tôpô. Chứng minh rằng nếu F và G là nửa liên tục dưới ở trong X, thì ánh xạ $F + G : X \rightrightarrows Y$ được cho bởi công thức

$$(F + G)(x) = F(x) + G(x) \quad (\forall x \in X)$$

cũng là nửa liên tục dưới ở trong X.

Bài tập 1.2.8*. Khảo sát các tính chất tương tự như những tính chất nói trong các Bài tập 1.2.6 và 1.2.7 đối với ánh xạ đa trị nửa liên tục trên.

Bài tập 1.2.9. Cho X, Y là các không gian tôpô, $F : X \rightrightarrows Y$ là ánh xạ đa trị nửa liên tục trên ở trong X. Chứng minh rằng nếu F có giá trị compắc (tức là $F(x)$ là compắc với mọi $x \in X$) và $\mathrm{dom}\, F$ là tập compắc, thì $\mathrm{rge}\, F$ là tập compắc.

Bài tập 1.2.10*. Khảo sát tính chất "bảo toàn tính compắc" nói trong Bài tập 1.2.9 đối với ánh xạ đa trị nửa liên tục dưới.

Ngoài khái niệm ánh xạ đa trị nửa liên tục trên nói trong Định nghĩa 1.2.1, người ta còn xét khái niệm ánh xạ đa trị nửa liên tục trên theo Hausdorff. Ánh xạ đa trị $F : X \rightrightarrows Y$ từ không gian tôpô X vào không gian mêtric Y được gọi là *nửa liên tục trên theo Hausdorff* tại $\bar{x} \in \mathrm{dom}\, F$ nếu với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại lân cận mở U của $\bar{x}$ sao cho

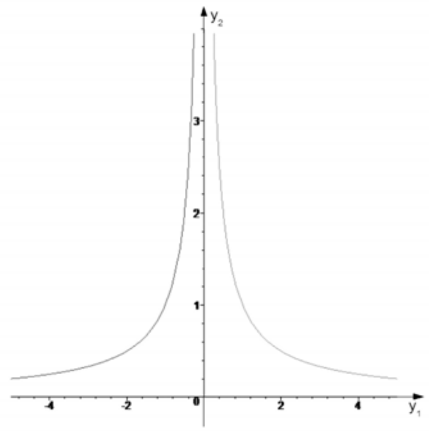
$$F(x) \subset B(F(\bar{x}), \varepsilon) \quad \forall x \in U,$$

ở đó

$$B(F(\bar{x}), \varepsilon) := \{y \in Y \,:\, d(y, F(\bar{x})) < \varepsilon\}$$

với $d(y, F(\bar{x})) := \inf\limits_{z \in F(\bar{x})} d(y, z)$ ký hiệu khoảng cách từ y đến $F(\bar{x})$. Nếu F là nửa liên tục trên theo Hausdorff tại mọi điểm thuộc $\mathrm{dom}\, F$, thì F được gọi là nửa liên tục trên theo Hausdorff ở trên X. Rõ ràng là tính nửa liên tục trên theo Berge (xem Định nghĩa 1.2.1) kéo theo tính nửa liên tục trên theo Hausdorff. Điều ngược lại không đúng.

Bài tập 1.2.11. Đặt $X = I\!R$, $Y = I\!R^2$, $F(x) = \{(x, \frac{1}{|x|})\}$ nếu $x \neq 0$ và $F(x) = \{0\} \times [0, +\infty)$ nếu $x = 0$. Hãy chứng tỏ rằng $F : X \rightrightarrows Y$ là nửa liên tục trên theo Hausdorff ở trên X, nhưng không là nửa liên tục trên (theo Berge) ở trên X.



Hình 5

Tính liên thông của miền hữu hiệu nói chung không được bảo toàn qua ánh xạ đa trị nửa liên tục trên theo Hausdorff. Ví dụ sau đây sẽ chứng tỏ điều đó.

Ví dụ 1.2.4[7]**.** Đặt $X = I\!R$, $Y = I\!R^2$, $F(x) = \big\{(x, \frac{1}{x})\big\}$ nếu $x \neq 0$ và $F(x) = \{0\} \times I\!R$ nếu $x = 0$. Khi đó, $F : X \rightrightarrows Y$ là nửa liên tục trên theo Hausdorf ở trên X, $\mathrm{dom}\, F = I\!R$ là không gian liên thông, $F(x)$ là liên thông với mọi x, nhưng

$$\mathrm{rge}\, F = \left\{\left(x, \frac{1}{x}\right) \,:\, x < 0\right\} \cup \Big(\{0\} \times I\!R\Big) \cup \left\{\left(x, \frac{1}{x}\right) \,:\, x > 0\right\}$$

không là tập liên thông (nó gồm 3 thành phần liên thông).

1.3 Định lý Kakutani

Định lý Kakutani (1941) là một định lý điểm bất động quan trọng được thiết lập cho ánh xạ đa trị nửa liên tục trên. Chúng ta tìm hiểu chứng minh chi tiết của định lý này để hiểu sâu hơn ý nghĩa của các tính chất nửa liên tục trên và nửa liên tục dưới của ánh xạ đa trị được xét trong mục trước.

[7]Ví dụ này thuộc về Nguyễn Mậu Nam. Hiệu quả tương tự cũng đạt được với ánh xạ đa trị nói trong Bài tập 1.2.11, một dạng cải biên của ánh xạ F ở đây.

Phân hoạch đơn vị:

Cho $\psi : X \to I\!R$ là hàm số thực xác định trên không gian tôpô X. *Giá* (support) của ψ được ký hiệu bởi $\operatorname{supp}\psi$, và được xác định bởi công thức

$$\operatorname{supp}\psi = \overline{\{x \in X \,:\, \psi(x) \neq \emptyset\}},$$

ở đó $\overline{M}$ ký hiệu bao đóng của tập M.

Định lý 1.3.1 (xem Rudin (1976), tr. 251). *Cho K là không gian mêtric compắc, $\{V_\alpha\}_{\alpha\in A}$ là một phủ mở của K. Khi đó tồn tại các hàm liên tục $\psi_i : K \to I\!R$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$ sao cho*

(a) $0 \leqslant \psi_i(x) \leqslant 1 \quad \forall x \in K, \ \ \forall i \in \{1, \ldots, s\}$;

(b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{s} \psi_i(x) = 1 \quad \forall x \in K$;

(c) *Với mỗi $i \in \{1, \ldots, s\}$ có tồn tại $\alpha \in A$ sao cho* $\operatorname{supp}\psi_i \subset V_\alpha$.

Họ hàm liên tục $\{\psi_i\}_{i=1,\ldots,s}$ có các tính chất (a)–(c) được gọi là một *phân hoạch đơn vị* tương thích với phủ mở $\{V_\alpha\}_{\alpha\in A}$.

Từ Định lý 1.3.1 ta rút ra hệ quả sâu đây.

Hệ quả 1.3.1. *Giả sử $\{\psi_i\}_{i=1,\ldots,s}$ là một phân hoạch đơn vị tương thích với phủ mở $\{V_\alpha\}_{\alpha\in A}$. Với mọi hàm liên tục $f : K \to I\!R$ ta có*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{s} \psi_i(x) f(x),$$

ở đó các hàm

$$f_i(x) := \psi_i(x) f(x) \quad (i = 1, \ldots, s)$$

là liên tục trên K và với mỗi $i \in \{1, \ldots, s\}$ tồn tại $\alpha \in A$ sao cho giá của hàm f_i nằm trong V_α.

Chứng minh Định lý 1.3.1:

Với mỗi $x \in K$ ta chọn được chỉ số $\alpha_x \in A$ sao cho $x \in V_{\alpha_x}$. Do V_{α_x} là tập mở, tồn tại $\rho_x > 0$ sao cho

$$\bar{B}(x, \rho_x) \subset V_{\alpha_x}.$$

Họ các hình cầu mở $\left\{B(x, \frac{\rho_x}{2})\right\}_{x\in K}$ là một phủ mở của K. Do K là không gian compắc, tồn tại các điểm $x^1, x^2, \ldots, x^s \in K$ sao cho

$$K \subset B(x^1, \frac{\rho_{x^1}}{2}) \cup \ldots \cup B(x^s, \frac{\rho_{x^s}}{2}). \tag{3.1}$$

Do
$$\bar{B}(x^i, \frac{\rho_{x^i}}{2}) \subset B(x^i, \rho_{x^i}) \subset \bar{B}(x^i, \rho_{x^i}),$$
tồn tại hàm liên tục $\varphi_i : K \to [0, 1]$ sao cho
$$\varphi_i(x) = 1 \quad \forall x \in \bar{B}(x^i, \frac{\rho_{x^i}}{2})$$
và
$$\varphi_i(x) = 0 \quad \forall x \in K \setminus B(x^i, \rho_{x^i}).$$
(Chúng ta nhắc lại rằng nếu M_1 và M_2 là hai tập đóng không giao nhau trong không gian mêtric compắc X thì tồn tại hàm số liên tục $\varphi : X \to [0, 1]$ sao cho $\varphi(x) = 1$ với mọi $x \in M_1$ và $\varphi(x) = 0$ với mọi $x \in M_2$. Khẳng định đó suy ra từ Bổ đề Urysohn (xem Kelley (1957), Chương 4). Đặt $\psi_1 = \varphi_1$ và
$$\psi_{i+1} = (1 - \varphi_1) \ldots (1 - \varphi_i)\varphi_{i+1} \quad (\forall i = 1, 2, \ldots, s - 1).$$
Hiển nhiên các tính chất (a) và (c) nghiệm đúng với họ hàm $\{\psi_i\}_{i=1,\ldots,s}$ vừa chọn. Rõ ràng đẳng thức

$$\psi_1 + \ldots + \psi_i = 1 - (1 - \varphi_1) \ldots (1 - \varphi_i) \tag{3.2}$$

đúng với $i = 1$. Nếu (3.2) đúng với chỉ số $i < s$, thì ta có
$$\begin{aligned} &\psi_1 + \ldots + \psi_i + \psi_{i+1} \\ &= 1 - (1 - \varphi_1) \ldots (1 - \varphi_i) + (1 - \varphi_1) \ldots (1 - \varphi_i)\varphi_{i+1} \\ &= 1 - (1 - \varphi_1) \ldots (1 - \varphi_i)(1 - \varphi_{i+1}); \end{aligned}$$
tức là (3.2) đúng cả khi i được thay bằng $i + 1$. Vậy ta có

$$\sum_{i=1}^{s} \psi_i(x) = 1 - \prod_{i=1}^{s}(1 - \varphi_i(x)) \tag{3.3}$$

với mọi $x \in K$. Do (3.1), với mỗi $x \in K$ tồn tại chỉ số $j \in \{1, \ldots, s\}$ sao cho $x \in B(x^j, \frac{\rho_{x^j}}{2})$. Do đó $\varphi_j(x) = 1$. Từ (3.3) suy ra
$$\sum_{i=1}^{s} \psi_i(x) = 1.$$
Vậy tính chất (b) đã được kiểm chứng. $\square$

Ánh xạ đa trị hêmi liên tục trên:

Giả sử X là không gian mêtric, Y là không gian định chuẩn, $F : X \rightrightarrows Y$ là ánh xạ đa trị . Với mỗi $p \in Y^*$, ở đó Y^* là không gian đối ngẫu của Y, và với mỗi $x \in X$ ta đặt

$$C_F(p,x) = \sup\{\langle p,y\rangle \,:\, y \in F(x)\}.$$

(Theo quy ước, $\sup\emptyset = -\infty$, $\inf\emptyset = +\infty$). Hàm số hai biến $C_F(p,x)$ được gọi là *hàm tựa* của của F.

Mệnh đề 1.3.1 (xem Aubin và Frankowska (1990), Hệ quả 2.6.1). *Giả sử $F : X \rightrightarrows Y$ là nửa liên tục trên ở trong X, có giá trị compắc yếu, khác rỗng; Y được xét với tôpô yếu. Khi đó, với mọi $p \in Y^*$, hàm số*

$$x \mapsto C_F(p,x)$$

là nửa liên tục trên ở trong $\operatorname{dom} F$.

Chứng minh. Giả sử F có các tính chất như trong phát biểu của mệnh đề, và $p \in Y^*$ là véctơ cho trước. Ta cần chứng tỏ rằng với mọi $\bar{x} \in \operatorname{dom} F$ và $\varepsilon > 0$ tồn tại lân cận mở U của $\bar{x} \in X$ sao cho

$$C_F(p,x) \leqslant C_F(p,\bar{x}) + \varepsilon \quad \forall x \in U.$$

Do $F(\bar{x})$ là compắc yếu và khác rỗng, tồn tại $\bar{y} \in F(\bar{x})$ sao cho $C_F(p,\bar{x}) = \langle p,\bar{y}\rangle$. Đặt

$$V = \{y \in Y \,:\, \langle p,y\rangle < \langle p,\bar{y}\rangle + \varepsilon\}.$$

Ta có V là lân cận mở yếu chứa $F(\bar{x})$. Vì F là nửa liên tục trên tại $\bar{x}$ (Y được xét với tôpô yếu), tồn tại lân cận mở U của $\bar{x}$ sao cho $F(U) \subset V$. Khi đó, với mỗi $x \in U$ ta có

$$\begin{aligned} C_F(p,x) &= \sup\{\langle p,y\rangle \,:\, y \in F(x)\} \\ &\leqslant \langle p,\bar{y}\rangle + \varepsilon \qquad (\text{do } F(x) \subset V) \\ &= C_F(p,\bar{x}) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Mệnh đề đã được chứng minh. $\square$

Định nghĩa 1.3.1. Ánh xạ đa trị $F : X \rightrightarrows Y$ từ không gian mêtric X vào không gian định chuẩn Y được gọi là *hêmi liên tục trên* tại $x \in \operatorname{dom} F$ nếu với mỗi $p \in Y^*$ hàm số $C_p(p,\cdot)$ là nửa liên tục trên tại x. Ta nói F là hêmi liên tục trên ở trong X nếu nó là hêmi liên tục trên tại mọi điểm thuộc $\operatorname{dom} F$.

Mệnh đề 1.3.1 đã chỉ ra điều kiện đủ để một ánh xạ đa trị là hêmi liên tục trên.

Bất đẳng thức Ky Fan:

Nguyên lý biến phân Ekeland (1974) và định lý sau đây là những công cụ mạnh để nghiên cứu nhiều vấn đề trong giải tích phi tuyến và tối ưu hoá.

Định lý 1.3.2 (Bất đẳng thức Ky Fan, 1972). *Cho K là tập lồi, compắc trong không gian Banach X, $\varphi : K \times K \to I\!R$ là hàm số thỏa mãn các điều kiện:*

(i) $\forall y \in K$, $\varphi(\cdot, y)$ *là hàm số nửa liên tục dưới;*

(ii) $\forall x \in K$, $\varphi(x, \cdot)$ *là hàm lõm;*

(iii) $\forall y \in K$, $\varphi(y, y) \leqslant 0$.

Khi đó, tồn tại $\bar{x} \in K$ sao cho

$$\forall y \in K, \quad \varphi(\bar{x}, y) \leqslant 0.$$

Nhận xét 1.3.1 (xem Aubin và Frankowska (1990), tr. 80). Định lý 1.3.2 vẫn đúng nếu thay cho không gian Banach X ta xét một không gian tuyến tính tôpô, lồi địa phương, Hausdorff. (Ví dụ như X là một không gian Banach xét với tôpô yếu.)

Chứng minh Định lý 1.3.2:

Trước hết, chúng ta chứng minh định lý cho trường hợp X là không gian Banach hữu hạn chiều. Ta sẽ chứng minh bằng phương pháp phản chứng. Giả sử rằng kết luận của định lý không đúng, tức là

$$\forall x \in K \;\; \exists y \in K \;\text{ sao cho }\; \varphi(x, y) > 0. \tag{3.4}$$

Với mỗi $y \in K$, đặt

$$U_y = \{x \in K \,:\, \varphi(x, y) > 0\}.$$

Vì $\varphi(\cdot, y)$ là hàm số nửa liên tục dưới, nên U_y là tập mở trong tôpô cảm sinh của K. Rõ ràng từ (3.4) suy ra rằng $\{U_y\}_{y \in K}$ là một phủ mở của K. Do K là compắc, tồn tại $y_1, y_2, \ldots, y_k \in K$ sao cho

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{k} U_{y_j}.$$

Theo Định lý 1.3.1, tồn tại phân hoạch đơn vị $\{\psi_i\}_{i=1,\ldots,s}$ của K tương thích với phủ mở $\{U_{y_j}\}_{j=1,\ldots,k}$. Tức là

$$\psi : K \to [0, 1] \quad (i = 1, \ldots, s)$$

là những hàm liên tục, $\sum_{i=1}^{s} \psi_i(x) = 1$ với mọi $x \in K$ và với mỗi $i \in \{1, \ldots, s\}$ tồn tại $j(i) \in \{1, \ldots, k\}$ sao cho

$$\operatorname{supp} \psi_i \subset U_{y_{j(i)}}.$$

Xét ánh xạ $f : K \to K$ cho bởi công thức

$$f(x) = \sum_{i=1}^{s} \psi_i(x) y_{j(i)} \quad (\forall x \in K).$$

(Vì K là tập lồi, $y_{j(i)} \in K$ với mọi i, $\psi_i(x) \geqslant 0$ với mọi i, và $\sum_{i=1}^{s} \psi_i(x) = 1$, nên $f(x) \in K$ với mọi $x \in K$.) Do $\psi_i(\cdot)$ $(i = 1, \ldots, s)$ là các hàm liên tục, $f(x)$ là ánh xạ liên tục. Theo Định lý điểm bất động Brouwer, tồn tại $\bar{y} \in K$ sao cho

$$\bar{y} = f(\bar{y}).$$

Do giả thiết (ii),

$$\begin{aligned} \varphi(\bar{y}, \bar{y}) &= \varphi(\bar{y}, f(\bar{y})) \\ &= \varphi\left(\bar{y}, \textstyle\sum_{i=1}^{s} \psi_i(\bar{y}) y_{j(i)}\right) \\ &\geqslant \textstyle\sum_{i=1}^{s} \psi_i(\bar{y}) \varphi\left(\bar{y}, y_{j(i)}\right). \end{aligned} \tag{3.5}$$

Đặt

$$I(\bar{y}) = \{i \in \{1, \ldots, s\} \, : \, \psi_i(\bar{y}) > 0\}.$$

Vì $\sum_{i=1}^{s} \psi_i(\bar{y}) = 1$ nên $I(\bar{y}) \neq \emptyset$. Ngoài ra, ta có

$$\sum_{i=1}^{s} \psi_i(\bar{y}) \varphi(\bar{y}, y_{j(i)}) = \sum_{i \in I(\bar{y})} \psi_i(\bar{y}) \varphi(\bar{y}, y_{j(i)}) > 0; \tag{3.6}$$

bởi vì nếu $i \in I(\bar{y})$ thì $\psi_i(\bar{y}) > 0$, do đó

$$\bar{y} \in \operatorname{supp} \psi_i \subset U_{y_{j(i)}} = \{x \in K \, : \, \varphi(x, y_{j(i)}) > 0\}.$$

(Từ tính chất viết ở dòng trên suy ra $\varphi(\bar{y}, y_{j(i)}) > 0$.) Kết hợp (3.6) với (3.5) ta được $\varphi(\bar{y}, \bar{y}) > 0$, mâu thuẫn với giả thiết (iii).

Bây giờ ta xét trường hợp X là không gian Banach bất kỳ và K là tập con lồi, compắc, khác rỗng của X. Ta có Định lý điểm bất động Schauder (xem Holmes (1974), tr. 101) sau đây: *"Cho A là tập lồi đóng khác rỗng trong không gian định chuẩn X, $f : A \to K$ là ánh xạ liên tục từ A vào tập con compắc $K \subset A$. Khi đó f có điểm bất động trong K"*. Lặp lại chứng minh trên và áp dụng Định lý điểm bất động Schauder thay cho Định lý điểm bất động Brouwer, ta sẽ chỉ ra được sự tồn tại của điểm $\bar{x} \in K$ có tính chất $\varphi(\bar{x}, y) \leqslant 0$ với mọi $y \in K$. $\square$

Định lý về sự tồn tại điểm cân bằng:

Ta nhắc lại rằng nếu K là một tập lồi trong không gian tuyến tính tôpô X thì *nón tiếp tuyến* $T_K(x)$ của K tại $x \in K$ được cho bởi công thức

$$\begin{aligned} T_K(x) &= \overline{\{t(y-x) \,:\, y \in K,\ t \geqslant 0\}} \\ &= \overline{\text{cone}\,(K-x)}, \end{aligned}$$

ở đó cone $M := \{tz \,:\, z \in M\}$ là hình nón sinh bởi M và $\overline{M}$ là bao đóng của M. Nón pháp tuyến $N_K(x)$ của K tại x là nón đối ngẫu âm của $T_K(x)$, tức là

$$\begin{aligned} N_K(x) &= (T_K(x))^* \\ &= \{x^* \in X^* \,:\, \langle x^*, v\rangle \leqslant 0 \quad \forall v \in T_K(x)\}\,. \end{aligned}$$

Định nghĩa 1.3.2. Cho $F : X \rightrightarrows X$, ở đó X là không gian Banach, là ánh xạ có giá trị đóng (có thể rỗng). Tập lồi $K \subset \text{dom}\,F$ được gọi là một *miền vững*[8] của F nếu

$$F(x) \cap T_K(x) \neq \emptyset \quad \forall x \in K.$$

Định lý 1.3.3 (The Equilibrium Theorem - Định lý về sự tồn tại điểm cân bằng). *Cho X là không gian Banach và $F : X \rightrightarrows X$ là ánh xạ đa trị hêmi liên tục trên ở trong X, có giá trị lồi đóng. Nếu tập lồi compắc khác rỗng $K \subset \text{dom}\,F$ là một miền vững của F thì K chứa ít nhất một điểm cân bằng của F, tức là*

$$\exists \bar{x} \in K \ \ \textit{sao cho} \ \ 0 \in F(\bar{x}).$$

Nhận xét 1.3.2. Nếu ánh xạ đa trị $G : K \rightrightarrows X$ là hêmi liên tục trên ở trong K và có giá trị lồi đóng, thì ánh xạ $F : X \rightrightarrows X$ cho bởi công thức

$$F(x) = \begin{cases} F(x) & \text{nếu } \ x \in K \\ \emptyset & \text{nếu } \ x \notin K \end{cases}$$

cũng có những tính chất đó. Vì thế Định lý 1.3.3 áp dụng được cả cho những ánh xạ đa trị chỉ xác định ở trên K.

Chứng minh Định lý 1.3.3:

Để chứng minh bằng phương pháp phản chứng, ta giả sử rằng $F : X \rightrightarrows X$ là ánh xạ đa trị thỏa mãn các giả thiết của định lý, $K \subset \text{dom}\,F$ là một miền vững lồi, compắc, khác rỗng của F, nhưng với mọi $x \in K$ ta đều có $0 \notin F(x)$.

[8]TNTA: viability domain.

Với mỗi $x \in K$, do $F(x)$ là lồi đóng và $0 \notin F(x)$, sử dụng Định lý tách các tập lồi (xem Rudin (1991), Định lý 3.4) ta tìm được $p \in X^*$ sao cho

$$\sup_{y \in F(x)} \langle p, y \rangle < 0,$$

hay

$$C_F(p, x) < 0.$$

Với mỗi $p \in X^*$ ta đặt

$$U_p = \{x \in K \, : \, C_F(p, x) < 0\}.$$

Do lập luận trên,

$$\forall x \in K \;\; \exists p \in X^* \;\text{ sao cho }\; x \in U_p.$$

Vậy họ $\{U_p\}_{p \in X^*}$ là một phủ mở của K. (Chúng ta nhận xét rằng vì F là hêmi liên tục trên ở trong X nên $C_F(p, \cdot)$ là hàm số nửa liên tục trên ở trong X. Do đó U_p là tập mở trong tôpô cảm sinh của K.) Vì K là compắc, tồn tại các phần tử $p_1, p_2, \ldots, p_k \in X^*$ sao cho $\left\{U_{p_j}\right\}_{j=1,\ldots,k}$ là một phủ mở hữu hạn của K. Theo Định lý 1.3.1, tồn tại phân hoạch đơn vị $\{\psi_i\}_{i=1,\ldots,s}$ trên K tương ứng với phủ mở ấy. Khi đó, với mỗi $i \in \{1, \ldots, s\}$ tồn tại $j(i) \in \{1, \ldots, k\}$ sao cho

$$\operatorname{supp} \psi_i \subset U_{p_{j(i)}}.$$

Xét hàm số $\varphi : K \times K \to I\!R$ cho bởi công thức

$$\varphi(x, y) = \sum_{i=1}^{s} \psi_i(x) \langle p_{j(i)}, x - y \rangle.$$

Rõ ràng là:

(i) $\forall y \in K$, $\varphi(\cdot, y)$ là hàm số liên tục;

(ii) $\forall x \in K$, $\varphi(x, \cdot)$ là hàm số aphin (do đó là hàm lõm);

(iii) $\forall y \in K$, $\varphi(y, y) = 0$.

Vậy các giả thiết của Định lý 1.3.2 được thỏa mãn. Do đó tồn tại $\bar{x} \in K$ sao cho với mọi $y \in K$ ta có $\varphi(\bar{x}, y) \leqslant 0$. Đặt $\overline{p} = \sum_{i=1}^{s} \psi_i(\bar{x}) p_{j(i)}$ và để ý rằng

$$\begin{aligned} 0 \geqslant \varphi(\bar{x}, y) &= \langle \sum_{i=1}^{s} \psi_i(\bar{x}) p_{j(i)}, \bar{x} - y \rangle \\ &= \langle \overline{p}, \bar{x} - y \rangle \end{aligned}$$

với mọi $y \in K$. Vì

$$\langle \overline{p}, y - \bar{x} \rangle \geqslant 0 \quad \forall y \in K$$

nên ta có

$$-\overline{p} \in (T_K(\bar{x}))^* = N_K(\bar{x}). \tag{3.7}$$

Vì K là miền vững của F, nên tồn tại

$$v \in F(\bar{x}) \cap T_K(\bar{x}).$$

Do đó, lưu ý đến (3.7) ta có

$$C_F(\overline{p}, \bar{x}) \geqslant \langle \overline{p}, v \rangle \geqslant 0. \tag{3.8}$$

Đặt

$$I(\bar{x}) = \{i \in \{1, \ldots, s\} \, : \, \psi_i(\bar{x}) > 0\}.$$

Vì $\sum_{i=1}^{s} \psi_i(\bar{x}) = 1$ và $\psi_i(\bar{x}) \geqslant 0$ với mọi i, nên $I(\bar{x}) \neq \emptyset$. Với mỗi $i \in I(\bar{x})$, do $\psi_i(\bar{x}) > 0$ nên

$$\bar{x} \in \operatorname{supp} \psi_i \subset U_{p_{j(i)}}.$$

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned} C_F(\overline{p}, \bar{x}) &= \sup \left\{ \langle \textstyle\sum_{i=1}^{s} \psi_i(\bar{x}) p_{j(i)}, y \rangle \, : \, y \in F(\bar{x}) \right\} \\ &\leqslant \textstyle\sum_{i \in I(\bar{x})} \psi_i(\bar{x}) C_F(p_{j(i)}, \bar{x}) \\ &< 0. \end{aligned}$$

Điều này mâu thuẫn với (3.8). Định lý đã được chứng minh. □

Nhận xét 1.3.3 (xem Aubin và Frankowska (1990), tr. 84). Định lý 1.3.3 vẫn đúng khi X là một không gian tuyến tính tôpô, lồi địa phương, Hausdorff.

Định lý điểm bất động Kakutani:

Định lý sau là dạng mở rộng của định lý điểm bất động Kakutani (xem Định lý 1.3.5 dưới đây) từ trường hợp các không gian hữu hạn chiều sang trường hợp không gian vô hạn chiều.

Định lý 1.3.4 (Định lý điểm bất động Ky Fan, 1972). *Cho K là tập lồi, compắc, khác rỗng trong không gian Banach X. Cho $G : K \rightrightarrows K$ là ánh xạ đa trị hêmi liên tục trên ở trong K, có giá trị lồi, đóng, khác rỗng. Khi đó, tồn tại $\bar{x} \in K$ sao cho $\bar{x} \in G(\bar{x})$.*

Chứng minh. Đặt $F(x) = G(x) - x$. Từ các giả thiết đặt trên G suy ra rằng $F : K \rightrightarrows X$ là ánh xạ đa trị hêmi liên tục trên, có giá trị lồi, đóng, khác rỗng. Ngoài ra, ta có

$$F(x) = G(x) - x \subset K - x \subset T_K(x) \tag{3.9}$$

với mọi $x \in K$. Vì $F(x) \neq \emptyset$ với mọi $x \in K$, nên từ (3.9) suy ra tập lồi K là miền vững của F. Theo Định lý 1.3.3, tồn tại $\bar{x} \in K$ sao cho $0 \in F(\bar{x})$. Tức là tồn tại $\bar{x} \in K$ sao cho $\bar{x} \in G(\bar{x})$. $\square$

Kết quả sau đây suy ra trực tiếp từ Định lý 1.3.4 và Mệnh đề 1.3.1.

Định lý 1.3.5 (Định lý điểm bất động Kakutani, 1941). *Cho $K \subset I\!R^n$ là tập lồi, compắc, khác rỗng. Cho $G : K \rightrightarrows K$ là ánh xạ đa trị nửa liên tục trên ở trong K, có giá trị lồi, đóng, khác rỗng. Khi đó, tồn tại $\bar{x} \in K$ sao cho $\bar{x} \in G(\bar{x})$.*

Bài tập 1.3.1. Đặt $K = [0, 1] \subset I\!R$. Hãy xây dựng các ánh xạ đa trị $G : K \rightrightarrows K$ thích hợp để chứng tỏ rằng nếu trong khi phát biểu Định lý 1.3.5 ta bỏ đi một trong các điều kiện sau (nhưng vẫn giữ nguyên ba điều kiện còn lại), thì kết luận của định lý không còn đúng nữa:

(i) G là ánh xạ nửa liên tục trên ở trong K;

(ii) G có giá trị lồi;

(iii) G có giá trị đóng;

(iv) G có giá trị khác rỗng.

(*Gợi ý:* Xét các ánh xạ đa trị

$$G_1(x) = \begin{cases} \{1\} & \text{nếu } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2} \\ \{0\} & \text{nếu } \frac{1}{2} < x \leqslant 1, \end{cases}$$

$$G_2(x) = \begin{cases} \{x + \frac{1}{2}\} & \text{nếu } 0 \leqslant x < \frac{1}{2} \\ \{0, 1\} & \text{nếu } x = \frac{1}{2} \\ \{x - \frac{1}{2}\} & \text{nếu } \frac{1}{2} < x \leqslant 1, \end{cases}$$

$$G_3(x) = \begin{cases} (x, 1) & \text{nếu } \ 0 \leqslant x < 1 \\ (0, 1) & \text{nếu } \ x = 1, \end{cases}$$

$$G_4(x) = \begin{cases} [\frac{1}{2}, 1] & \text{nếu } x = 0 \\ \emptyset & \text{nếu } 0 < x < 1 \\ [0, \frac{1}{2}] & \text{nếu } x = 1, \end{cases}$$

và để ý rằng ánh xạ đa trị $G : K \rightrightarrows K$ không có điểm bất động ở trong K khi và chỉ khi

$$\operatorname{gph} G \cap \{(y, y) \,:\, y \in K\} = \emptyset.)$$

Bài tập 1.3.2. Vẽ đồ thị của các ánh xạ $G_1 - G_4$ nói trong phần gợi ý của bài tập trên.

Bài tập 1.3.3. Chứng minh rằng ánh xạ G_1 nói trong phần gợi ý của Bài tập 1.3.1 không là hêmi liên tục trên ở trong K.

Bài tập 1.3.4. Đặt $K = [0, 1] \subset I\!R$. Hãy xây dựng các ánh xạ đa trị $G : K \rightrightarrows K$ thích hợp để chứng tỏ rằng nếu trong khi phát biểu Định lý 1.3.4 ta bỏ đi một trong các điều kiện sau (nhưng vẫn giữ nguyên ba điều kiện còn lại), thì kết luận của định lý không còn đúng nữa:

(i) G là ánh xạ hêmi liên tục trên ở trong K;

(ii) G có giá trị lồi;

(iii) G có giá trị đóng;

(iv) G có giá trị khác rỗng.

Bài tập 1.3.5. Cho $K = \bar{B}_{I\!R^2}$ là hình tròn đơn vị trong $I\!R^2$. Cho $F : K \rightrightarrows I\!R^2$ là ánh xạ đa trị nửa liên tục trên ở trong K, có giá trị lồi, đóng, khác rỗng. Chứng minh rằng nếu

$$\forall x \in \partial K \ \ \exists y \in F(x) \ \text{ sao cho } \ \langle x, y\rangle = 0,$$

ở đó $\partial K := \overline{K} \setminus \operatorname{int} K$ ký hiệu *biên* của K, thì tồn tại $\bar{x} \in K$ thỏa mãn $0 \in F(\bar{x})$.

1.4 Các quá trình lồi

Ánh xạ đa trị có đồ thị là một hình nón lồi có nhiều tính chất tương tự như các tính chất của toán tử tuyến tính. Lớp các ánh xạ đa trị có đồ thị là một hình nón lồi đã được S. M. Robinson nghiên cứu khá kỹ trong những năm 1972-1976.

Định nghĩa 1.4.1. Ánh xạ $F : X \rightrightarrows Y$, ở đó X và Y là các không gian định chuẩn, được gọi là một *quá trình lồi*[9] nếu $\operatorname{gph} F$ là một hình nón lồi trong không gian tích $X \times Y$. Nếu $\operatorname{gph} F$ là một hình nón lồi đóng trong $X \times Y$ thì F được gọi là một *quá trình lồi đóng*[10].

Nhắc lại rằng tập K trong một không gian tuyến tính Z được gọi là một hình nón nếu $0 \in K$ và $\lambda z \in K$ với mọi $z \in K$ và $\lambda > 0$.

Ví dụ 1.4.1. Các tập hợp sau đây là những hình nón trong $I\!R^n$:

$$K_1 := I\!R^n_+ = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in I\!R^n \ : \ x_i \geqslant 0 \ \ \forall i = 1, 2, \ldots, n\},$$

$$K_2 := \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in I\!R^n \ : \ x_i > 0 \ \ \forall i = 1, 2, \ldots, n\} \cup \{0\}.$$

Các tập hợp sau đây là những hình nón trong $C[a, b]$ (không gian gồm các hàm số $f : [a, b] \to I\!R$ liên tục trên đoạn $[a, b] \subset I\!R$):

$$K_3 = \{f \in C[a, b] \ : \ f(t) \geqslant 0 \ \ \forall t \in [a, b]\},$$

$$K_4 = \{f \in C[a, b] \ : \ f(t) > 0 \ \ \forall t \in [a, b]\} \cup \{0\}.$$

Bài tập 1.4.1. Chứng minh rằng $\operatorname{gph} F$ là một hình nón khi và chỉ khi $0 \in F(0)$ và $F(\lambda x) = \lambda F(x)$ với mọi $x \in X$ và $\lambda > 0$.

[9] TNTA: convex process.

[10] TNTA: closed convex process.

Định nghĩa 1.4.2. Cho $F : X \rightrightarrows Y$ là một quá trình lồi đóng. *Chuẩn* $\|F\|$ của F là số thực suy rộng được cho bởi công thức

$$\|F\| = \sup_{x \in (\mathrm{dom}\, F) \setminus \{0\}} \frac{d(0, F(x))}{\|x\|}, \tag{4.1}$$

ở đó $d(a, M) := \inf_{x \in M} \|a - x\|$ là khoảng cách từ a đến M.

Trong phần còn lại của mục này, nếu không nói gì thêm thì X, Y được giả thiết là các không gian Banach.

Từ Định nghĩa 1.4.1 suy ra rằng nếu F là quá trình lồi đóng thì F^{-1} cũng là một quá trình lồi đóng. Định lý sau đưa ra điều kiện đủ để F^{-1} là một ánh xạ đa trị Lipschitz.

Định lý 1.4.1 (Tính Lipschitz của quá trình ngược). *Cho $F : X \rightrightarrows Y$ là quá trình lồi đóng. Nếu $\mathrm{rge}\, F = Y$ thì F^{-1} là một ánh xạ đa trị Lipschitz, tức là tồn tại $\ell > 0$ sao cho*

$$F^{-1}(y^1) \subset F^{-1}(y^2) + \ell \|y^1 - y^2\| \bar{B}_Y \tag{4.2}$$

với mọi $y^1, y^2 \in Y$.

Để thiết lập (4.2) dưới giả thiết quá trình lồi đóng F là ánh xạ đa trị tràn (tức là $\mathrm{rge}\, F = X$), chúng ta cần sử dụng kết quả sau.

Định lý 1.4.2 (Định lý Robinson-Ursescu). *Cho $F : X \rightrightarrows Y$ là ánh xạ đa trị lồi, đóng. Giả sử rằng $\bar{y} \in F(\bar{x})$ và $\bar{y} \in \mathrm{int}(\mathrm{rge}\, F)$. Khi đó tồn tại $\ell > 0$ và $\gamma > 0$ sao cho với mỗi $y \in \bar{B}(\bar{y}, \gamma)$ tồn tại $x \in F^{-1}(y)$ thỏa mãn*

$$\|x - \bar{x}\| \leqslant \ell \|y - \bar{y}\|. \tag{4.3}$$

Chứng minh. Chứng minh đầy đủ của định lý này khá phức tạp (xem Ursescu (1975), Robinson (1976a), Aubin và Ekeland (1984)). Chúng ta sẽ chỉ xét trường hợp X là không gian Banach phản xạ. Đặt

$$\varphi(y) = d(\bar{x}, F^{-1}(y)) \quad (\forall y \in Y). \tag{4.4}$$

Khẳng định 1: φ là hàm lồi.

Thật vậy, do F là ánh xạ đa trị lồi nên F^{-1} cũng là ánh xạ đa trị lồi. Do đó, với mọi $y, y' \in Y$ và với mọi $t \in (0, 1)$ ta có

$$F^{-1}((1-t)y + ty') \supset (1-t)F^{-1}(y) + tF^{-1}(y').$$

Vì vậy, nếu $y \in \text{rge}\, F$ và $y' \in \text{rge}\, F$ thì

$$\begin{aligned}
&\varphi((1-t)y + ty') \\
&= d\left(\bar{x}, F^{-1}((1-t)y + ty')\right) \\
&\leqslant d\left(\bar{x}, (1-t)F^{-1}(y) + tF^{-1}(y')\right) \\
&= \inf\left\{\|\bar{x} - [(1-t)u + tv]\| \,:\, u \in F^{-1}(y), v \in F^{-1}(y')\right\} \\
&\leqslant \inf\left\{\|(1-t)(\bar{x} - u)\| + \|t(\bar{x} - v)\| \,:\, u \in F^{-1}(y), v \in F^{-1}(y')\right\} \\
&= (1-t) \inf_{u \in F^{-1}(y)} \|\bar{x} - u\| + t \inf_{v \in F^{-1}(y')} \|\bar{x} - v\| \\
&= (1-t)\varphi(y) + t\varphi(y').
\end{aligned}$$

Dễ thấy rằng $\varphi(y) < +\infty$ khi và chỉ khi $y \in \text{rge}\, F$. Ta đã chứng minh rằng với mọi $y, y' \in \text{dom}\varphi = \{y \,:\, \varphi(y) < +\infty\}$ ta có

$$\varphi((1-t)y + ty') \leqslant (1-t)\varphi(y) + t\varphi(y') \quad \forall t \in (0,1).$$

Nếu $y \notin \text{dom}\varphi$ hoặc $y' \notin \text{dom}\varphi$ thì bất đẳng thức cuối là hiển nhiên. Tóm lại, φ là hàm lồi.

Khẳng định 2: φ là nửa liên tục dưới ở trong Y.

Để chứng minh khẳng định này ta chỉ cần chứng tỏ rằng các tập mức $\text{lev}_\varphi(\lambda)$ ($\lambda \in I\!R$) là đóng (xem Bài tập 1.4.2 ở dưới đây). Lấy $\lambda \in I\!R$. Giả sử $\{y^k\} \subset \text{lev}_\varphi(\lambda)$, $y^k \to y$. Ta sẽ chứng tỏ rằng $y \in \text{lev}_\varphi(\lambda)$. Do X là không gian Banach phản xạ, các hình cầu đóng trong X là compắc yếu (Định lý Banach-Alaoglu). Với mỗi k, $F^{-1}(y^k)$ là tập lồi đóng khác rỗng. Theo Bổ đề Mazur ("Tập lồi đóng trong không gian định chuẩn là tập đóng yếu"), $F^{-1}(y^k)$ là tập lồi đóng yếu, khác rỗng. Do đó tồn tại $x^k \in F^{-1}(y^k)$ sao cho

$$\|x^k - \bar{x}\| = \inf_{x \in F^{-1}(y^k)} \|x - \bar{x}\|. \tag{4.5}$$

Thật vậy, lấy $\widehat{x} \in M$, ở đó $M := F^{-1}(y^k)$. Đặt $\rho = \|\bar{x} - \widehat{x}\|$ và

$$M_\rho = \{x \in M \,:\, \|x - \bar{x}\| \leqslant \rho\}.$$

Ta có M_ρ là tập compắc yếu, khác rỗng. Vì $\psi(x) := \|x - \bar{x}\|$ là hàm lồi, liên tục, nên từ Bổ đề Mazur suy ra rằng ψ là nửa liên tục dưới ở trong X theo tôpô yếu. Theo Định lý Weierstrass, tồn tại $x^k \in M_\rho$ thỏa mãn (4.5). Ta có

$$\|x^k - \bar{x}\| = d(\bar{x}, F^{-1}(y^k)) = \varphi(y^k) \leqslant \lambda \quad \forall k \in I\!N.$$

Vậy $\{x^k\} \subset \bar{B}(\bar{x}, \lambda)$. Suy ra $\{x^k\}$ có dãy con hội tụ theo tôpô yếu. Giả sử rằng $x^k \xrightarrow{w} x \in \bar{B}(\bar{x}, \lambda)$. Do $(x^k, y^k) \in \text{gph}\, F$, $(x^k, y^k) \xrightarrow{w} (x, y)$, và $\text{gph}\, F$ là tập lồi đóng yếu, ta có $(x, y) \in \text{gph}\, F$. Do đó $x \in F^{-1}(y)$. Vì $\|x^k - \bar{x}\| \leqslant \lambda$ với mọi $k \in I\!N$, ta có $\|x - \bar{x}\| \leqslant \lambda$. Suy ra

$$\varphi(y) = d(\bar{x}, F^{-1}(y)) \leqslant \|x - \bar{x}\| \leqslant \lambda.$$

Vậy ta có $y \in \text{lev}_\varphi(\lambda)$.
Khẳng định 3: φ là liên tục ở trên int(rge F).

Thật vậy, lấy $y^0 \in$ int(rge F) và $\varepsilon > 0$ sao cho

$$\bar{B}(y^0, \varepsilon) \subset \text{rge}\, F.$$

Xét họ các tập mức của hàm φ:

$$\text{lev}_\varphi(k) = \{y \,:\, \varphi(y) \leqslant k\} \quad (k \in I\!N).$$

Trong khi chứng minh Khẳng định 2 ta đã chỉ ra rằng $\text{lev}_\varphi(k)$ là đóng với mỗi $k \in I\!N$. Ta có

$$\bar{B}(y^0, \varepsilon) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left(\text{lev}_\varphi(k) \cap \bar{B}(y^0, \varepsilon)\right). \tag{4.6}$$

Thật vậy, lấy $y \in \bar{B}(y^0, \varepsilon) \subset$ rge F. Do $\varphi(y) \in I\!R$, tồn tại $k \in I\!N$ để $\varphi(y) \leqslant k$. Khi đó, $y \in \text{lev}_\varphi(k)$. Để tiếp tục chứng minh, chúng ta cần sử dụng Định lý Baire: "*Nếu M là một không gian mêtric đủ, thì M không thể biểu diễn được dưới dạng hợp của một số đếm được các tập đóng có phần trong rỗng*". Do X là không gian Banach, $\bar{B}(y^0, \varepsilon)$ là không gian mêtric đủ. Do định lý Baire và do (4.6), tồn tại $\bar{k} \in I\!N$ sao cho

$$\text{int}\left(\text{lev}_\varphi(\bar{k}) \cap \bar{B}(y^0, \varepsilon)\right) \neq \emptyset.$$

Vì vậy tồn tại $\hat{y} \in Y$ và $\rho > 0$ sao cho

$$\bar{B}(\hat{y}, \rho) \subset \text{lev}_\varphi(\bar{k}) \cap \bar{B}(y^0, \varepsilon),$$

tức là

$$0 \leqslant \varphi(y) \leqslant \bar{k} \quad \forall y \in \bar{B}(\hat{y}, \rho).$$

Do φ là lồi và bị chặn ở trên $\bar{B}(\hat{y}, \rho)$, nên φ là liên tục ở trên $B(\hat{y}, \rho) \subset$ int(rge F) (xem Ioffe và Tihomirov (1979)). Khi đó φ là liên tục trên int(rge F).

Vì $\bar{y} \in$ int(rge F) và hàm φ liên tục trên int(rge F), ta có φ là Lipschitz địa phương tại $\bar{y}$, tức là tồn tại $\gamma > 0$ và $\ell_0 > 0$ sao cho

$$|\varphi(y') - \varphi(y)| \leqslant \ell_0 \|y' - y\| \quad \forall y, y' \in \bar{B}(\bar{y}, \gamma)$$

(xem Ioffe và Tihomirov (1979)). Suy ra

$$|\varphi(y) - \varphi(\bar{y})| \leqslant \ell_0 \|y - \bar{y}\| \quad \forall y \in \bar{B}(\bar{y}, \gamma). \tag{4.7}$$

Đặt $\ell = 2\ell_0$ và lưu ý rằng $\varphi(\bar{y}) = 0$ vì $\bar{y} \in F(\bar{x})$. Với mỗi $y \in \bar{B}(\bar{y}, \gamma)$, do (4.7) tồn tại $x \in F^{-1}(y)$ sao cho (4.3) nghiệm đúng. Định lý đã được chứng minh. $\square$

Bài tập 1.4.2. Cho hàm số thực suy rộng $\varphi : X \to I\!R \cup \{+\infty\}$, ở đó X là không gian định chuẩn. Chứng minh rằng φ là nửa liên tục dưới ở trong X khi và chỉ khi các tập mức $\text{lev}_\varphi(\lambda) := \{x \in X \,:\, \varphi(x) \leqslant \lambda\}$ $(\lambda \in I\!R)$ là đóng.

Chứng minh Định lý 1.4.1:

Đặt $\bar{x} = 0,\ \bar{y} = 0$. Do F là quá trình lồi đóng, ta có $\bar{y} \in F(\bar{x})$. Từ giả thiết $\text{rge}\, F = Y$ suy ra $\bar{y} \in \text{int}(\text{rge}\, F)$. Theo Định lý 1.4.2, tồn tại $\ell > 0$ và $\gamma > 0$ sao cho với mỗi $y \in \bar{B}(\bar{y}, \gamma)$ tồn tại $x \in F^{-1}(y)$ thỏa mãn (4.3). Với mỗi $y' \in Y$ tồn tại $t > 0$ sao cho

$$ty' \in \bar{B}(\bar{y}, \gamma) = \bar{B}(0, \gamma).$$

Do (4.3), tồn tại $x \in F^{-1}(ty')$ sao cho $\|x - 0\| \leqslant \ell\|ty' - 0\|$. Vì F^{-1} là quá trình lồi, nên ta có $x \in tF^{-1}(y')$ và $\|x\| \leqslant t\ell\|y'\|$. Đặt $x' = \frac{1}{t}x$, ta có $x' \in F^{-1}(y')$ và $\|x'\| \leqslant \ell\|y'\|$.

Cố định hai điểm $y^1, y^2 \in Y$. Lấy tùy ý $x^1 \in F^{-1}(y^1)$. Do tính chất đã chứng minh ở đoạn trên, ta chọn được $u \in F^{-1}(y^2 - y^1)$ sao cho $\|u\| \leqslant \ell\|y^2 - y^1\|$. Đặt $x^2 = x^1 + u$, ta có

$$\|x^2 - x^1\| = \|u\| \leqslant \ell\|y^2 - y^1\|. \tag{4.8}$$

Ta lại có $x^2 \in F^{-1}(y^2)$. Thật vậy, do $u \in F^{-1}(y^2 - y^1)$, $x^1 \in F^{-1}(y^1)$, và do F^{-1} là quá trình lồi đóng, ta có

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}x^1 + \tfrac{1}{2}u \ &\in \tfrac{1}{2}F^{-1}(y^1) + \tfrac{1}{2}F^{-1}(y^2 - y^1) \\ &\subset F^{-1}(\tfrac{1}{2}y^1 + \tfrac{1}{2}(y^2 - y^1)) = F^{-1}(\tfrac{1}{2}y^2) = \tfrac{1}{2}F^{-1}(y^2). \end{aligned}$$

Từ đó suy ra $x^1 + u \in F^{-1}(y^2)$, hay $x^2 \in F^{-1}(y^2)$. Do (4.8), tồn tại $v \in \bar{B}_X$ sao cho $x^1 - x^2 = \ell\|y^1 - y^2\|v$. Vậy

$$x^1 \in F^{-1}(y^2) + \ell\|y^1 - y^2\|\bar{B}_Y.$$

Ta đã chứng tỏ rằng (4.2) nghiệm đúng với mọi $y^1, y^2 \in Y$. $\square$

Mệnh đề 1.4.1 (Định lý ánh xạ mở). *Cho $F : X \rightrightarrows Y$ là ánh xạ đa trị lồi, đóng. Nếu $\text{rge}\, F = Y$ thì F là ánh xạ mở; nghĩa là với mọi tập mở $U \subset X$, tập $F(U) = \cup_{x \in U} F(x)$ là mở trong Y.*

Chứng minh. Giả sử F thỏa mãn giả thiết của mệnh đề. Giả sử $U \subset X$ là tập mở. Lấy $\bar{y} \in F(U)$ và giả sử $\bar{x} \in U$ là điểm thỏa mãn bao hàm thức $\bar{y} \in F(\bar{x})$. Do $\text{rge}\, F = Y$, ta có $\bar{y} \in \text{int}(\text{rge}\, F)$. Theo Định lý 1.4.2, tồn tại $\gamma > 0$ và $\ell > 0$ để với mỗi $y \in \bar{B}(\bar{y}, \gamma)$ tồn tại $x \in F^{-1}(y)$ sao cho (4.3) nghiệm đúng. Chọn $\gamma' \in (0, \gamma)$ đủ bé để có

$$\bar{B}(\bar{x}, \ell\gamma') \subset U. \tag{4.9}$$

Khi đó, với mỗi $y \in \bar{B}(\bar{y}, \gamma')$ tồn tại $x \in F^{-1}(y)$ thỏa mãn

$$\|x - \bar{x}\| \leqslant \ell\|y - \bar{y}\| \leqslant \ell\gamma'.$$

Vậy $x \in \bar{B}(\bar{x}, \ell\gamma') \subset U$. Do $y \in F(x)$ và do (4.9), từ đó ta có $y \in F(U)$. Vì bao hàm thức cuối đúng với mọi $y \in \bar{B}(\bar{y}, \gamma')$, nên $\bar{B}(\bar{y}, \gamma') \subset F(U)$. Ta đã chứng tỏ rằng $F(U)$ là tập mở. $\square$

Nhận xét 1.4.1. Các định lý ánh xạ mở có vai trò quan trọng trong giải tích và giải tích ứng dụng. Ví dụ như một số điều kiện cần cực trị (trong lý thuyết tối ưu) hay điều kiện đủ cho tính điều khiển được của các hệ động lực (trong lý thuyết điều khiển) có thể được dẫn ra như những hệ quả trực tiếp của của các định lý ánh xạ mở. Định lý ánh xạ mở trong Mệnh đề 1.4.1 chỉ áp dụng được cho các ánh xạ đa trị có đồ thị là tập lồi đóng. Đồng thời với các nghiên cứu của các tác giả nước ngoài, Giáo sư Phạm Hữu Sách, Giáo sư Phan Quốc Khánh và Phó Giáo sư Phạm Huy Điển đã có nhiều đóng góp trong việc xây dựng các định lý ánh xạ mở và định lý hàm ngược tổng quát; xem Sach (1988a,b), Khanh (1986, 1988, 1989), Dien và Sach (1991). Trong các công trình đó, các ánh xạ đa trị được xét không nhất thiết phải có đồ thị lồi. Nói riêng ra, trong ba bài báo nói trên, bằng cách sử dụng khái niệm không gian tựa mêtric (quasi-metric space) tác giả Phan Quốc Khánh đã thu được các định lý ánh xạ mở tổng quát, mà từ đó ta có thể thu được Định lý Ljusternik quen biết, Định lý quy nạp của V. Pták (Pták's induction theorem, 1974), một kết quả trước đó của Phạm Hữu Sách, và nhiều kết quả khác. Các kết quả trong Khanh (1986, 1988, 1989) đã thu hút được sự chú ý của nhiều chuyên gia trong ngành.

Nhận xét 1.4.2. Trong Chương 5 của giáo trình này có trình bày một định lý ánh xạ mở địa phương (xem Định lý 5.4.1) và định lý hàm ngược (xem Định lý 5.4.2) cho ánh xạ đa trị có dạng đặc biệt: $F(x) = f(x) + K$, ở đó $F : I\!R^n \to I\!R^m$ là ánh xạ đơn trị và $K \subset I\!R^m$ là tập lồi.

Nhận xét 1.4.3. Các tác giả Huỳnh Thế Phùng và Phạm Huy Điển (xem Phung và Dien (1991)) đã chỉ ra rằng điểm cân bằng (không điểm) của một ánh xạ đa trị lồi đóng, nếu tồn tại, có thể tính được bằng một thuật toán gồm hữu hạn bước.

Bài tập 1.4.3. Cho $A : X \to Y$ là toán tử tuyến tính. Chứng minh rằng A là liên tục khi và chỉ khi ánh xạ F cho bởi công thức $F(x) = \{Ax\}$ $(x \in X)$ là ánh xạ đóng.

Bài tập 1.4.4. Chứng minh rằng Định lý ánh xạ mở Banach "Cho $A : X \to Y$ là toán tử tuyến tính liên tục. Nếu $A(X) = Y$ thì A là ánh xạ mở (tức là với mọi tập mở $U \subset X$, $A(U)$ là tập mở trong Y)" là hệ quả của Mệnh đề 1.4.1.

Ví dụ 1.4.1 (Quá trình lồi đóng). Cho $K \subset Y$ là hình nón lồi đóng và cho $f \in C^1(X,Y)$. Với mỗi $x^0 \in X$ ta đặt $F_{x^0}(v) = f'(x^0)v + K$ $(v \in X)$. Khi đó, $F_{x^0}(\cdot)$ là một quá trình lồi đóng phụ thuộc vào tham số x^0.

Mệnh đề 1.4.2 (Điều kiện đủ để một quá trình lồi đóng có chuẩn hữu hạn). *Cho $F : X \rightrightarrows Y$ là quá trình lồi đóng. Nếu $\operatorname{dom} F = X$, thì số $\|F\|$ được định nghĩa bởi công thức* (4.1) *là hữu hạn.*

Chứng minh. Xét quá trình ngược $F^{-1} : Y \rightrightarrows X$, $F^{-1}(y) = \{x \in X : y \in F(x)\}$. Vì F là quá trình lồi đóng, nên F^{-1} cũng là quá trình lồi đóng. Ta có

$$\begin{aligned} \operatorname{rge} F^{-1} &= \{x \in X : \exists y \in Y \text{ sao cho } x \in F^{-1}(y)\} \\ &= \{x \in X : \exists y \in Y \text{ sao cho } y \in F(x)\} \\ &= \{x \in X : F(x) \neq \emptyset\} \\ &= \operatorname{dom} F. \end{aligned}$$

Do giả thiết $\operatorname{dom} F = X$, ta có $\operatorname{rge} F^{-1} = X$. Áp dụng Định lý 1.4.1 cho ánh xạ F^{-1}, ta tìm được hệ số $\ell > 0$ sao cho

$$(F^{-1})^{-1}(x') \subset (F^{-1})^{-1}(x) + \ell\|x' - x\|\bar{B}_Y \quad (\forall x, x' \in X). \tag{4.10}$$

Với mọi $x \in X$,

$$\begin{aligned} (F^{-1})^{-1}(x) &= \{y \in Y : x \in F^{-1}(y)\} \\ &= \{y \in Y : y \in F(x)\} \\ &= F(x). \end{aligned}$$

Do đó $(F^{-1})^{-1} = F$. Vậy từ (4.10) ta có

$$F(x') \subset F(x) + \ell\|x' - x\|\bar{B}_Y \quad (\forall x, x' \in X). \tag{4.11}$$

(Điều đó chứng tỏ F là ánh xạ đa trị Lipschitz trên X.) Áp dụng (4.11) cho $x' = 0$ và lưu ý rằng $0 \in F(0)$, ta có

$$0 \in F(x) + \ell\|x\|\bar{B}_Y \quad (\forall x \in X).$$

Khi đó, với mọi $x \in X \setminus \{0\}$, tồn tại $y \in F(x)$ và $v \in \bar{B}_Y$ sao cho

$$0 = y + \ell\|x\|v.$$

Suy ra

$$\|y\| \leqslant \ell\|x\|\|v\| \leqslant \ell\|x\|.$$

Vậy

$$\frac{d(0, F(x))}{\|x\|} \leqslant \frac{\ell\|x\|}{\|x\|} = \ell \quad \forall x \in X \setminus \{0\}.$$

Từ đó ta có

$$\|F\| = \sup_{x \neq 0} \frac{d(0, F(x))}{\|x\|} \leqslant \ell.$$

Mệnh đề đã được chứng minh. $\square$

Ví dụ 1.4.2. Đặt $F(x) = \{y \in I\!R : y \geqslant x^2\}$ với mọi $x \in I\!R$. Ta có $F : I\!R \rightrightarrows I\!R$ là ánh xạ đa trị lồi đóng, vì $\mathrm{gph}\, F = \{(x, y) \in I\!R^2 : y \geqslant x^2\}$ là tập lồi đóng.

a) Lấy $\bar{x} = 0,\ \bar{y} = 0$. Vì $\mathrm{rge}\, F = I\!R_+$, nên $\bar{y} \notin \mathrm{int}(\mathrm{rge}\, F)$. Do đó giả thiết của Định lý 1.4.2 không được thỏa mãn với bộ ba $\{F, \bar{x}, \bar{y}\}$ đã chọn. Nhận xét rằng kết luận của định lý đó không còn đúng. Thật vậy, giả sử tồn tại $\gamma > 0$ và $\ell > 0$ với tính chất

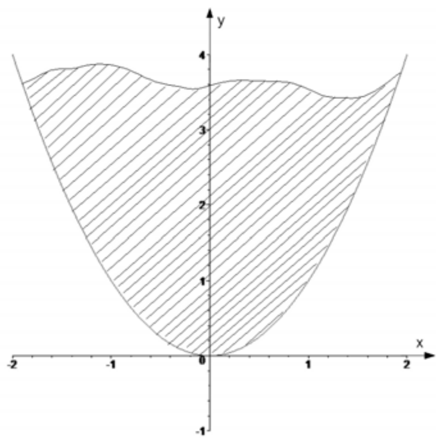
$$\forall y \in \bar{B}(\bar{y}, \gamma)\ \exists x \in F^{-1}(y)\ \text{ sao cho } \|x - \bar{x}\| \leqslant \ell \|y - \bar{y}\|. \tag{4.12}$$

Khi đó

$$\forall y \in [-\gamma, \gamma]\ \exists x \in I\!R\ \text{ sao cho } y \geqslant x^2,\ |x| \leqslant \ell |y|.$$

Chọn $y = -\gamma$, ta thấy ngay rằng không tồn tại $x \in I\!R$ sao cho $y \geqslant x^2$. Vậy không tồn tại $\gamma > 0$ và $\ell > 0$ với tính chất (4.12).

b) Bây giờ ta lấy $\bar{x} = 0,\ \bar{y} = 1$. Hiển nhiên $\bar{y} \in \mathrm{int}(\mathrm{rge}\, F)$. Do Định lý 1.4.2, $\gamma > 0$ và $\ell > 0$ với tính chất (4.12).



Hình 6

Bài tập 1.4.5. Với $\bar{x}$, $\bar{y}$ như trong phần b) của Ví dụ 1.4.2, hãy chỉ ra các số $\gamma > 0$ và $\ell > 0$ thỏa điều kiện (4.12).

1.5 Các tính chất Lipschitz của ánh xạ đa trị

Trong mục này, nếu không nói gì thêm thì X, Y là các không gian định chuẩn tùy ý và F là ánh xạ đa trị từ X vào Y.

Định nghĩa 1.5.1. Giả sử $\bar{x} \in \text{int}(\text{dom}\, F)$. Ta nói F là *Lipschitz địa phương*[11] tại (hoặc ở gần) $\bar{x}$, nếu tồn tại $\ell > 0$ và $\delta > 0$ sao cho

$$F(x^2) \subset F(x^1) + \ell\|x^2 - x^1\|\bar{B}_Y \tag{5.1}$$

với mọi $x^1, x^2 \in \bar{B}(\bar{x}, \delta)$. Trong trường hợp $F(x) = \{f(x)\}$ là ánh xạ đơn trị, bao hàm thức (5.1) trở thành

$$f(x^2) \in f(x^1) + \ell\|x^2 - x^1\|\bar{B}_Y.$$

Nếu tồn tại $\ell > 0$ và $\delta > 0$ sao cho tính chất đó nghiệm đúng với mọi $x \in \bar{B}(\bar{x}, \delta)$, thì ta nói ánh xạ đơn trị f là *Lipschitz địa phương* tại $\bar{x}$.

Định nghĩa 1.5.2 (Robinson (1979)). Ta nói F là *Lipschitz trên địa phương*[12] tại (hoặc ở gần) $\bar{x} \in \text{dom}\, F$ nếu tồn tại $\ell > 0$ và $\delta > 0$ sao cho

$$F(x) \subset F(\bar{x}) + \ell\|x - \bar{x}\|\bar{B}_Y \tag{5.2}$$

với mọi $x \in \bar{B}(\bar{x}, \delta)$. Trong trường hợp $F(x) = \{f(x)\}$ là ánh xạ đơn trị, bao hàm thức (5.2) trở thành

$$f(x) \in f(\bar{x}) + \ell\|x - \bar{x}\|\bar{B}_Y.$$

Nếu tồn tại $\ell > 0$ và $\delta > 0$ sao cho tính chất đó nghiệm đúng với mọi $x \in \bar{B}(\bar{x}, \delta)$, thì ta nói ánh xạ đơn trị f là *Lipschitz trên địa phương* tại $\bar{x}$.

Định nghĩa 1.5.3 (Robinson (1981)). Cho $X = I\!R^n$, $Y = I\!R^m$. Ta nói $F : X \rightrightarrows Y$ là *ánh xạ đa trị đa diện*[13] nếu tồn tại một số hữu hạn các tập lồi đa diện $\Delta^1, \Delta^2, \ldots, \Delta^s$ trong không gian tích $I\!R^n \times R^m$ sao cho

$$\text{gph}\, F = \bigcup_{i=1}^{s} \Delta^i.$$

Định lý 1.5.1 (Robinson (1981)). *Nếu $F : I\!R^n \rightrightarrows I\!R^m$ là ánh xạ đa trị đa diện thì, với mọi $\bar{x} \in \text{dom}\, F$, F là Lipschitz trên địa phương tại $\bar{x}$.*

Định lý này được chứng minh bằng cách áp dụng Định lý 1.1.2. Bạn đọc có thể xem chứng minh chi tiết trong Chương 7 cuốn chuyên khảo của G. M. Lee, Nguyễn Năng Tâm và N. Đ. Yên (Lee, Tam và Yen (2005)).

[11] TNTA: locally Lipschitz at $\bar{x}$, locally Lipschitz near $\bar{x}$.
[12] TNTA: locally upper-Lipschitz.
[13] TNTA: polyhedral multifunction.

Định nghĩa 1.5.4 (Aubin (1984)). Ta nói F là *giả-Lipschitz*[14] ở gần điểm $(\bar{x}, \bar{y}) \in \operatorname{gph} F$ nếu tồn tại $\ell > 0$, $\delta > 0$ và $\mu > 0$ sao cho

$$F(x^2) \cap B(\bar{y}, \mu) \subset F(x^1) + \ell\|x^2 - x^1\|\bar{B}_Y$$

với mọi $x^1, x^2 \in \bar{B}(\bar{x}, \delta)$.

Nhận xét 1.5.1. Nếu F là giả-Lipschitz ở gần điểm $(\bar{x}, \bar{y}) \in \operatorname{gph} F$, thì ta phải có $\bar{x} \in \operatorname{int}(\operatorname{dom} F)$.

Nhận xét 1.5.2. Tính chất giả-Lipschitz của ánh xạ đa trị có vai trò quan trọng giải tích phi tuyến và lý thuyết tối ưu (xem Rockafellar và Wets (1998), Mordukhovich (2006a,b)). Để ghi công của J.-P. Aubin trong việc đề xuất khái niệm này, Donchev và Rockafellar (1996) đề nghị gọi tính chất giả-Lipschitz là *tính liên tục Aubin* (Aubin continuity). Trong Chương 5 chúng ta sẽ đưa ra những điều kiện đủ để ánh xạ nghiệm của một hệ bất đẳng thức phụ thuộc tham số là liên tục Aubin theo tham số. Sử dụng kết quả đó, cũng trong Chương 5, ta sẽ đưa ra điều kiện đủ để hàm giá trị tối ưu của một bài toán quy hoạch toán học phụ thuộc tham số là Lipschitz địa phương.

> **Bài tập 1.4.5.** Cho $\bar{x} \in X$. Chứng minh rằng nếu $F : X \rightrightarrows Y$ là giả-Lipschitz ở gần mỗi điểm $(\bar{x}, \bar{y}) \in \{\bar{x}\} \times F(\bar{x})$ thì F là nửa liên tục dưới tại $\bar{x}$. Khẳng định ngược lại có đúng không?

[14] TNTA: pseudo-Lipschitz.

Chương 2

Đạo hàm của ánh xạ đa trị

Tay nào cầm được khói sương
Mới mong giữ nổi yêu thương cho mình
(Trần Mạnh Hảo, "Ru em Thúy Kiều")

Chương này giới thiệu các khái niệm cơ bản và một số định lý chính về đạo hàm của ánh xạ đa trị. Cách xây dựng đạo hàm của ánh xạ đa trị thông qua nón tiếp tuyến Bouligand của đồ thị ở đây được J.-P. Aubin (1981) đề xuất. Ông đã sử dụng cách tiếp cận này để nghiên cứu các tính chất của nghiệm của bao hàm thức vi phân.

2.1 Nguyên lý biến phân Ekeland

Được I. Ekeland đề xuất năm 1974, nguyên lý biến phân sau đây là một công cụ hiệu quả để thiết lập các định lý ánh xạ mở, hàm ẩn, hàm ngược trong giải tích không trơn. Ngoài ra, ngay từ năm 1976, F. H. Clarke đã sử dụng nguyên lý này để thiết lập quy tắc nhân tử Lagrange cho các bài toán quy hoạch toán học trong không gian Banach với dữ liệu là các hàm số không trơn. Trong lý thuyết đối đạo hàm (xem Mordukhovich (2006a,b)), nguyên lý biến phân của Ekeland cũng đóng một vai trò hết sức quan trọng. Nguyên lý này là công cụ chính để thu được các định lý ánh xạ mở, hàm ẩn, hàm ngược cho ánh xạ đa trị trong chương này và trong Chương 5.

Định lý 2.1.1 (Nguyên lý biến phân Ekeland). *Cho (X, d) là không gian mêtric đủ, $\varphi : X \to I\!R \cup \{+\infty\}$ là hàm số nửa liên tục dưới, bị chặn dưới ở trong X. Khi đó, nếu $\bar{x} \in X$ thỏa mãn*

$$\varphi(\bar{x}) \leqslant \inf_{x \in X} \varphi(x) + \varepsilon \tag{1.1}$$

với $\varepsilon > 0$ và nếu $\lambda > 0$ là số thực cho trước, thì tồn tại $\widehat{x} \in X$ sao cho

(i) $\varphi(\widehat{x}) \leqslant \varphi(\bar{x})$;

(ii) $d(\widehat{x}, \bar{x}) \leqslant \lambda$;

(iii) *Với mọi* $x \in X \setminus \{\widehat{x}\}$, $\varphi(\widehat{x}) < \varphi(x) + \frac{\varepsilon}{\lambda} d(x, \widehat{x})$.

Chứng minh. Trong chứng minh này chúng ta sẽ sử dụng kiểu thứ tự bộ phận do Bishop và Phelps đưa ra năm 1963. Với mỗi $\alpha > 0$, ta định nghĩa thứ tự "$\leqslant_\alpha$" trong tích $X \times I\!R$ như sau:

$$(x^1, y^1) \leqslant_\alpha (x^2, y^2) \quad \Leftrightarrow \quad y^2 - y^1 + \alpha d(x^1, x^2) \leqslant 0. \tag{1.2}$$

Thứ tự "$\leqslant_\alpha$" là phản xạ, phản xứng và bắc cầu.

• *Tính phản xạ:* Hiển nhiên ta có $(x, y) \leqslant_\alpha (x, y)$ với mọi $(x, y) \in X \times I\!R$.

• *Tính phản xứng:* Giả sử rằng $(x^1, y^1) \leqslant_\alpha (x^2, y^2)$ và $(x^2, y^2) \leqslant_\alpha (x^1, y^1)$. Ta cần chứng tỏ rằng $(x^1, y^1) = (x^2, y^2)$. Do (1.2),

$$(x^1, y^1) \leqslant_\alpha (x^2, y^2) \quad \Leftrightarrow \quad d(x^1, x^2) \leqslant \frac{y^1 - y^2}{\alpha}.$$

Theo giả thiết,

$$d(x^1, x^2) \leqslant \frac{y^1 - y^2}{\alpha} \ \text{ và } \ d(x^2, x^1) \leqslant \frac{y^2 - y^1}{\alpha}. \tag{1.3}$$

Suy ra $2d(x^1, x^2) \leqslant 0$. Vì thế $x^1 = x^2$. Từ (1.3) ta có $y^1 \geqslant y^2$ và $y^2 \geqslant y^1$. Do đó $(x^1, y^1) = (x^2, y^2)$.

• *Tính bắc cầu:* Giả sử rằng $(x^1, y^1) \leqslant_\alpha (x^2, y^2)$ và $(x^2, y^2) \leqslant_\alpha (x^3, y^3)$. Khi đó

$$d(x^1, x^2) \leqslant \frac{y^1 - y^2}{\alpha} \ \text{ và } \ d(x^2, x^3) \leqslant \frac{y^2 - y^3}{\alpha}.$$

Suy ra

$$d(x^1, x^2) + d(x^2, x^3) \leqslant \frac{y^1 - y^3}{\alpha}.$$

Do $d(x^1, x^3) \leqslant d(x^1, x^2) + d(x^2, x^3)$, nên ta có

$$d(x^1, x^3) \leqslant \frac{y^1 - y^3}{\alpha}.$$

Từ đó suy ra $(x^1, y^1) \leqslant_\alpha (x^3, y^3)$.

Khẳng định 1: Nếu $(x^1, y^1) \in X \times I\!R$, thì

$$\Omega := \{(x, y) \in X \times I\!R \,:\, (x^1, y^1) \leqslant_\alpha (x, y)\}$$

là tập đóng.

Thật vậy, giả sử dãy $\{(x^k, y^k\} \subset X \times I\!R$ thỏa mãn

$$(x^1, y^1) \leqslant_\alpha (x^k, y^k) \quad (k = 2, 3, 4, \ldots)$$

và $x^k \to x,\ y^k \to y$. Do $d(x^1, x^k) \leqslant (y^1 - y^k)/\alpha$ với mọi $k \in I\!N$, nên ta có $d(x^1, x) \leqslant (y^1 - y)/\alpha$; tức là $(x^1, y^1) \leqslant_\alpha (x, y)$. Vậy $(x, y) \in \Omega$. Ta đã chứng minh rằng Ω là tập đóng.

Khẳng định 2: Cho $M \subset X \times I\!R$ là tập đóng sao cho tồn tại $\gamma > 0$ để $y \geqslant \gamma$ với mọi $(x, y) \in M$. Khi đó, với mỗi $(x^1, y^1) \in M$ tồn tại $(\bar{x}, \bar{y}) \in M$ sao cho $(x^1, y^1) \leqslant_\alpha (\bar{x}, \bar{y})$ và $(\bar{x}, \bar{y})$ là một phần tử cực đại trong M theo thứ tự "$\leqslant_\alpha$" (tức là, nếu $(x, y) \in M$ và $(\bar{x}, \bar{y}) \leqslant_\alpha (x, y)$ thì $(x, y) = (\bar{x}, \bar{y})$).

Bắt đầu từ $(x^1, y^1) \in M$ ta xây dựng dãy $\{(x^k, y^k)\}$ như sau: Giả sử (x^k, y^k) đã được xác định. Đặt

$$M^k = \{(x, y) \in M\ :\ (x^k, y^k) \leqslant_\alpha (x, y)\}.$$

Theo Khẳng định 1, M^k là tập đóng. Ngoài ra, vì $(x^k, y^k) \in M^k$ nên $M^k \neq \emptyset$. Đặt

$$\gamma_k = \inf\{y\ :\ \exists x \in X,\ (x, y) \in M^k\}.$$

Hiển nhiên $\gamma_k \geqslant \gamma$ và $\gamma_k \leqslant y^k$. Chọn $(x^{k+1}, y^{k+1}) \in M^k$ sao cho

$$y^{k+1} \leqslant \frac{\gamma_k + y^k}{2}. \tag{1.4}$$

(Nếu $\gamma_k = y^k$ thì đặt $(x^{k+1}, y^{k+1}) = (x^k, y^k)$. Giả sử $\gamma_k < y^k$. Do $\gamma_k < (\gamma_k + y^k)/2$, tồn tại $(x, y) \in M$ sao cho $\gamma_k \leqslant y < (\gamma_k + y^k)/2$. Đặt $(x^{k+1}, y^{k+1}) = (x, y)$, ta thấy rằng (1.4) nghiệm đúng.) Dãy $\{M^k\}$ là các tập đóng lồng nhau: $M^{k+1} \subset M^k$ với mọi $k \in I\!N$. (Thật vậy, nếu $(x, y) \in M^{k+1}$ thì

$$(x^k, y^k) \leqslant_\alpha (x^{k+1}, y^{k+1}) \leqslant_\alpha (x, y).$$

Do đó $(x, y) \in M^k$.) Đặt $d((x, y), (x', y')) = d(x, x') + |y - y'|$. Với mọi k, ta có $\gamma_k \leqslant \gamma_{k+1} \leqslant y^{k+1}$ và

$$|y^{k+1} - \gamma_{k+1}| \leqslant \frac{1}{2}|y^k - \gamma_k| \leqslant 2^{-k}|y^1 - \gamma|.$$

(Thật vậy, do (1.4) ta có

$$y^{k+1} - \gamma_{k+1} \leqslant y^{k+1} - \gamma_k \leqslant \frac{1}{2}(y^k - \gamma_k) = \frac{1}{2}|y^k - \gamma_k|.$$

Vì $y^{k+1} - \gamma_{k+1} \geqslant 0$, từ đó suy ra

$$|y^{k+1} - \gamma_{k+1}| \leqslant \ldots \leqslant 2^{-k}|y^1 - \gamma_1| \leqslant 2^{-k}|y^1 - \gamma|).$$

Với mọi $(x,y) \in M^{k+1}$ ta có

$$|y^{k+1} - y| \leqslant |y^{k+1} - \gamma_{k+1}| \leqslant 2^{-k}|y^1 - \gamma|.$$

Vì $(x^{k+1}, y^{k+1}) \leqslant_\alpha (x,y)$, nên

$$0 \leqslant d(x^{k+1}, x) \leqslant \frac{y^{k+1} - y}{\alpha}.$$

Do đó

$$0 \leqslant d(x^{k+1}, x) \leqslant \frac{y^{k+1} - y}{\alpha} \leqslant \frac{2^{-k}}{\alpha}|y^1 - \gamma|.$$

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned}&\operatorname{diam} M^{k+1}\\ &:= \sup\{d((x,y),(x',y')) \,:\, (x,y) \in M^{k+1}, (x',y') \in M^{k+1}\} \to 0\end{aligned}$$

khi $k \to \infty$. Vậy $\{M^k\}$ là dãy tập đóng lồng nhau, có đường kính giảm tới 0. Vì $X \times I\!R$ là không gian mêtric đủ, nên tồn tại duy nhất phần tử $(\bar{x}, \bar{y}) \in X \times I\!R$ thỏa mãn

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} M^k = \{(\bar{x}, \bar{y})\}.$$

Do $(\bar{x}, \bar{y}) \in M^1$, ta có $(\bar{x}, \bar{y}) \in M$ và $(x^1, y^1) \leqslant_\alpha (\bar{x}, \bar{y})$. Giả sử $(x,y) \in M$ thỏa mãn

$$(\bar{x}, \bar{y}) \leqslant_\alpha (x,y). \tag{1.5}$$

Do (1.5) và do $(\bar{x}, \bar{y}) \in M^k$ với mọi $k \in I\!N$, ta có

$$(x^k, y^k) \leqslant_\alpha (\bar{x}, \bar{y}) \leqslant_\alpha (x,y).$$

Vậy $(x,y) \in M^k$ với mọi $k \in I\!N$. Từ đó suy ra $(x,y) = (\bar{x}, \bar{y})$. Ta đã chứng minh rằng $(\bar{x}, \bar{y})$ là phần tử cực đại trong M. Khẳng định 2 đã được chứng minh.

Đặt

$$M = \operatorname{epi} \varphi = \{(x,y) \in X \times I\!R \,:\, \varphi(x) \leqslant y\}.$$

Do hàm số φ là nửa liên tục dưới, M là tập đóng trong $X \times I\!R$. Thật vậy, ta sẽ chứng minh rằng $\Omega := (X \times I\!R) \setminus M$ là tập mở. Giả sử $(\bar{x}, \bar{y}) \in \Omega$. Do $(\bar{x}, \bar{y}) \notin M$, ta có $\varphi(\bar{x}) > \bar{y}$. Lấy $\varepsilon \in \left(0, \frac{\varphi(\bar{x}) - \bar{y}}{2}\right)$. Vì φ là nửa liên tục dưới tại $\bar{x}$, tồn tại lân cận mở U của $\bar{x}$ sao cho

$$\varphi(x) \geqslant \varphi(\bar{x}) - \varepsilon \quad \forall x \in U.$$

Đặt $V = (\bar{y} - \varepsilon, \bar{y} + \varepsilon)$, ta có $W := U \times V$ là lân cận mở của $(\bar{x}, \bar{y})$ và $W \subset \Omega$. Thật thế, với mọi $(x, y) \in W$ ta có $\varphi(x) \geqslant \varphi(\bar{x}) - \varepsilon$. Nếu $(x, y) \in M$, thì $y \geqslant \varphi(x) \geqslant \varphi(\bar{x}) - \varepsilon$. Do $y \in V$, $y < \bar{y} + \varepsilon$. Vì thế, $\bar{y} + \varepsilon > y \geqslant \varphi(\bar{x}) - \varepsilon$. Suy ra $\varepsilon > (\varphi(\bar{x}) - \bar{y})/2$, mâu thuẫn với cách chọn ε. Vậy $(x, y) \notin M$. Điều đó chứng tỏ rằng $W \subset \Omega$. Vậy Ω là tập mở, do dó M là tập đóng.

Ta có $(\bar{x}, \varphi(\bar{x})) \in M$. Đặt $(x^1, y^1) = (\bar{x}, \varphi(\bar{x}))$. Do Khẳng định 2, tồn tại $(\widehat{x}, \widehat{y})$ sao cho

$$(x^1, y^1) \leqslant_\alpha (\widehat{x}, \widehat{y}) \tag{1.6}$$

và $(\widehat{x}, \widehat{y})$ là phần tử cực đại trong M theo thứ tự "$\leqslant_\alpha$".

Đặt $\alpha = \dfrac{\varepsilon}{\lambda}$. Do (1.6),

$$\widehat{y} - y^1 + \alpha d(\bar{x}, \widehat{x}) \leqslant 0,$$

hay

$$\widehat{y} - \varphi(\bar{x}) + \alpha d(\bar{x}, \widehat{x}) \leqslant 0. \tag{1.7}$$

Ta có $\widehat{y} = \varphi(\widehat{x})$. Thật thế, giả sử $\widehat{y} > \varphi(\widehat{x})$. Khi đó $d(\widehat{x}, \widehat{x}) < (\widehat{y} - \varphi(\widehat{x}))/2$. Suy ra $(\widehat{x}, \widehat{y}) \leqslant_\alpha (\widehat{x}, \varphi(\widehat{x}))$ và $(\widehat{x}, \widehat{y}) \neq (\widehat{x}, \varphi(\widehat{x}))$. Điều đó chứng tỏ rằng $(\widehat{x}, \widehat{y})$ không thể là phần tử cực đại; mâu thuẫn. Vậy

$$\widehat{y} = \varphi(\widehat{x}). \tag{1.8}$$

Thế (1.8) vào (1.7), ta có

$$\varphi(\widehat{x}) - \varphi(\bar{x}) + \alpha d(\bar{x}, \widehat{x}) \leqslant 0. \tag{1.9}$$

Suy ra $\varphi(\widehat{x}) - \varphi(\bar{x}) \leqslant 0$, tức là tính chất (i) trong kết luận của định lý nghiệm đúng. Do đó

$$\varphi(\bar{x}) \leqslant \inf_{x \in X} \varphi(x) + \varepsilon \leqslant \varphi(\widehat{x}) + \varepsilon.$$

Từ (1.9) ta có

$$\alpha d(\bar{x}, \widehat{x}) \leqslant \varphi(\bar{x}) - \varphi(\widehat{x}) \leqslant \varepsilon.$$

Do đó

$$d(\bar{x}, \widehat{x}) \leqslant \frac{\varepsilon}{\alpha} = \varepsilon \frac{\lambda}{\varepsilon}.$$

Vậy tính chất (ii) nghiệm đúng. Để kiểm tra tính chất (iii), ta lấy tùy ý $x \in X \setminus \{\widehat{x}\}$. Nếu $\varphi(x) = +\infty$ thì bất đẳng thức chặt trong (iii) là đúng. Giả sử $\varphi(x) \in I\!R$. Vì $(x, \varphi(x)) \in M$, $(x, \varphi(x)) \neq (\widehat{x}, \varphi(\widehat{x}))$ và $(\widehat{x}, \varphi(\widehat{x}))$ là phần tử cực đại trong M, nên bất đẳng thức $(\widehat{x}, \varphi(\widehat{x})) \leqslant_\alpha (x, \varphi(x))$ là sai. Do đó

$$\varphi(x) - \varphi(\widehat{x}) + \alpha d(x, \widehat{x}) > 0,$$

hay

$$\varphi(x) - \varphi(\widehat{x}) + \frac{\varepsilon}{\lambda} d(x, \widehat{x}) > 0.$$

Vậy tính chất (iii) nghiệm đúng. Định lý đã được chứng minh. $\square$

Trong quá trình chứng minh ở trên, chúng ta đã thu được cả dạng sau đây của nguyên lý biến phân Ekeland.

Định lý 2.1.2 (xem Aubin và Frankowska (1990)). *Cho* (X, d) *và* φ *như ở Định lý 2.1.1. Khi đó, với mọi* $\bar{x} \in \operatorname{dom} \varphi$ và *với mọi* $\alpha > 0$, *tồn tại* $\widehat{x} \in X$ *sao cho*

(i) $\varphi(\widehat{x}) - \varphi(\bar{x}) + \alpha d(\widehat{x}, \bar{x}) \leqslant 0$;

(ii) *Với mọi* $x \in X \setminus \{\widehat{x}\}$, $\varphi(\widehat{x}) < \varphi(x) + \alpha d(x, \widehat{x})$.

Nhận xét 2.1.1. Chứng minh nguyên lý biến phân Ekeland trình bày ở trên được lấy từ cuốn chuyên khảo của Clarke (1983). Có những chứng minh ngắn gọn hơn cho định lý này; xem, ví dụ như, Ekeland (1974), Borwein và Zhu (2005), Mordukhovich (2006a; Theorem 2.26).

Nhận xét 2.1.2. Điểm $\bar{x} \in X$ thỏa điều kiện (1.1) được gọi là *điểm ε-cực tiểu*[1] của hàm φ trên tập X.

Nhận xét 2.1.3. Nếu X là không gian Banach thì từ tính chất (iii) trong kết luận của Định lý 2.1.1 suy ra

$$\varphi(\widehat{x}) + \frac{\varepsilon}{\lambda} \|\widehat{x} - \widehat{x}\| \leqslant \varphi(x) + \frac{\varepsilon}{\lambda} \|x - \widehat{x}\| \quad \forall x \in X.$$

Đặt $f(x) = \varphi(x) + \frac{\varepsilon}{\lambda} \|x - \widehat{x}\|$, ta có $f(\widehat{x}) \leqslant f(x)$ với mọi $x \in X$; tức là $\widehat{x}$ là cực tiểu toàn cục của hàm f (một xấp xỉ của φ). Vậy, nói một cách thô thiển, nguyên lý Ekeland khẳng định rằng *với mỗi điểm ε-cực tiểu của hàm số thực nửa liên tục dưới trên một không gian mêtric đủ, tồn tại điểm cực tiểu toàn cục của một hàm số xấp xỉ của hàm số thực đó, sao cho điểm mới này cách điểm đã cho "không xa lắm" và giá trị của hàm số thực ban đầu tại đó không lớn hơn giá trị của hàm số xấp xỉ tại điểm ε-cực tiểu đã cho.*

Bài tập 2.1.1. Hãy chứng tỏ rằng nếu $\varphi(\bar{x}) = \inf_{x \in X} \varphi(x)$, thì phần tử $\widehat{x}$ trong kết luận của Định lý 2.1.1 có thể lấy bằng $\bar{x}$.

Bài tập 2.1.2. Cho $X = [1, +\infty) \subset I\!R$,

$$\varphi(x) = \frac{1}{x}, \quad \bar{x} = 100, \ \varepsilon = \frac{1}{100}, \quad \lambda = \frac{1}{10}.$$

Hãy tìm tất cả những điểm $\hat{x} \in X$ thỏa mãn kết luận của Định lý 2.1.1. (Kết quả: $\widehat{x} \in [\bar{x}, \bar{x} + \frac{1}{10}]$.)

[1]TNTA: ε-minimum.

2.2 Nón tiếp tuyến

Đạo hàm của hàm số thực có liên quan chặt chẽ đến tiếp tuyến của đồ thị.

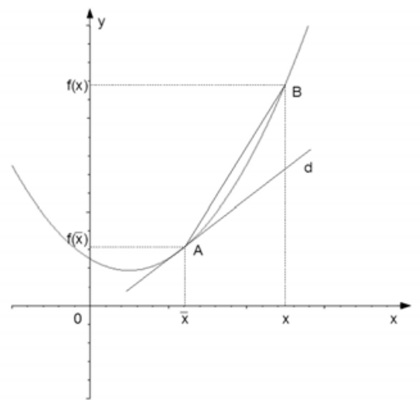
Xét hàm số $f : I\!R \to I\!R$ và điểm $\bar{x} \in I\!R$. Đặt $\alpha = \lim\limits_{x \to \bar{x}} \dfrac{f(x) - f(\bar{x})}{x - \bar{x}}$ (nếu giới hạn này tồn tại thì đó chính là hệ số góc của tiếp tuyến d với đồ thị $\{(x, f(x)) : x \in I\!R\}$ tại điểm $(\bar{x}, f(\bar{x}))$) và đặt

$$f'(\bar{x})(v) = \alpha v \quad \forall v \in I\!R.$$

(Đối với các hàm số thực, người ta thường đồng nhất ánh xạ tuyến tính $f'(\bar{x}) : I\!R \to I\!R$ với số α.) Đồ thị của ánh xạ đạo hàm trùng với đường thẳng

$$d - (\bar{x}, f(\bar{x}))$$

đi qua gốc tọa độ.



Hình 7

Năm 1981, J.-P. Aubin (xem Aubin (1981)) đề nghị xây dựng đạo hàm $DF_z(\cdot)$ của ánh xạ đa trị $F : X \rightrightarrows Y$, ở đó X và Y là các không gian Banach, tại $z = (x, y) \in \operatorname{gph} F$ như ánh xạ đa trị từ X vào Y có đồ thị trùng với nón tiếp tuyến Bouligand[2] của đồ thị của F tại z. Để xây dựng khái niệm đạo hàm

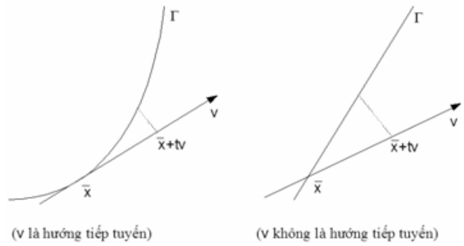
[2]Nón tiếp tuyến này có vai trò quan trọng trong hình học vi phân, phương trình vi phân, và đặc biệt là trong lý thuyết tối ưu. Nó thường được gọi là contingent cone hay Bouligand tangent cone, mặc dù khái niệm này được G. Bouligand và F. Severi *đưa ra đồng thời trong hai bài báo công bố trên cùng một số tạp chí*; xem Mordukhovich (2006a; tr. 14, 133), Bouligand (1930), Severi (1930). Trong việc sử dụng các tên gọi đôi khi có thể xảy ra những sự "bất công" như vậy. Theo thói quen chung, chúng ta sẽ tiếp tục gọi tiếp tuyến Bouligand-Severi này là nón tiếp tuyến Bouligand.

của ánh xạ đa trị, ngoài nón tiếp tuyến Bouligand người ta còn sử dụng nón tiếp tuyến Clarke (do F. H. Clarke đưa ra năm 1975) và nón tiếp tuyến trung gian (do H. Frankowska đưa ra).

Cho $\Gamma \subset Z$ là một tập con của không gian định chuẩn Z, và $z \in \overline{\Gamma}$. Ta nói véctơ $v \in Z$ là một *véctơ tiếp tuyến* của Γ tại $\bar{z}$ khi đại lượng

$$\frac{d(z+tv,\Gamma)}{t} \tag{2.1}$$

hội tụ đến 0 khi $t \to 0^+$. Tùy thuộc vào kiểu cách hội tụ của đại lượng (2.1) mà ta có các khái niệm tiếp tuyến khác nhau.



Hình 8

Trước hết, chúng ta trình bày khái niệm nón tiếp tuyến Bouligand và một số tính chất của hình nón tiếp tuyến này.

Nón tiếp tuyến Bouligand:

Định nghĩa 2.2.1. Cho M là tập con trong không gian định chuẩn X, và $\bar{x}$ là một điểm thuộc bao đóng $\overline{M}$ của M. *Nón tiếp tuyến Bouligand* của M tại $\bar{x}$, được ký hiệu bởi $T_M(\bar{x})$, là tập hợp những véctơ $v \in X$ thỏa mãn điều kiện

$$\liminf_{t\to 0^+} \frac{d(\bar{x}+tv,M)}{t} = 0. \tag{2.2}$$

Nhắc lại rằng $d(x,M) = \inf\limits_{y\in M} \|x-y\|$.

Vì $d(x,M) \geqslant 0$ với mọi x, đẳng thức (2.2) có nghĩa là

$$\begin{cases} \exists\{t^k\} \subset I\!R_+ \setminus \{0\} \ \text{ sao cho } \ \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{d(\bar{x}+t^k v,M)}{t^k} = 0, \\ t^k \to 0 \ \text{ khi } \ k \to \infty. \end{cases} \tag{2.3}$$

Nhận xét 2.2.1. $T_M(\bar{x})$ là hình nón chứa 0, tức là $0 \in T_M(\bar{x})$ và

$$\lambda v \in T_M(\bar{x}) \quad \forall v \in T_M(\bar{x}),\ \forall \lambda > 0.$$

Mệnh đề 2.2.1. *Ta có:*

(i)

$$T_M(\bar{x}) = \{v : \ \exists \{t^k\} \subset I\!R_+ \setminus \{0\},\ t^k \to 0,\ \exists \{v^k\} \subset X,\ v^k \to v,\ \bar{x} + t^k v^k \in M \ \ \forall k \in I\!N\}; \tag{2.4}$$

(ii) $T_M(\bar{x})$ *là nón đóng;*

(iii)

$$T_M(\bar{x}) \subset \overline{\text{cone}(M - \bar{x})}. \tag{2.5}$$

Chứng minh. (i) Ký hiệu vế phải của (2.4) bởi V. Lấy $v \in T_M(\bar{x})$. Chọn $\{t^k\} \subset I\!R_+ \setminus \{0\}$, $t^k \to 0$, sao cho giới hạn trong (2.3) bằng 0. Đặt $\varepsilon^k = \dfrac{d(\bar{x} + t^k v, M)}{t^k}$, ta có $\varepsilon^k \to 0^+$. Với mỗi k,

$$d(\bar{x} + t^k v, M) = t^k \varepsilon^k < t^k \varepsilon^k + \frac{1}{k} t^k.$$

Do đó tồn tại $x^k \in M$ để

$$\|(\bar{x} + t^k v) - x^k\| < t^k \varepsilon^k + \frac{1}{k} t^k.$$

Đặt $v^k = \dfrac{x^k - \bar{x}}{k}$, ta có

$$\|v - v^k\| = \left\| v - \frac{x^k - \bar{x}}{t^k} \right\| < \varepsilon^k + \frac{1}{k}.$$

Vậy $v^k \to v$ khi $k \to \infty$. Vì $\bar{x} + t^k v^k = x^k \in M$ với mọi k, nên $v \in V$.

Ngược lại, giả sử $v \in V$. Chọn $\{t^k\}$, $\{v^k\}$, $t^k \to 0^+$, $v^k \to v$, sao cho $\bar{x} + t^k v^k \in M$ với mọi k. Ta có

$$\frac{d(\bar{x} + t^k v, M)}{t^k} \leqslant \frac{\|(\bar{x} + t^k v) - (\bar{x} + t^k v^k)\|}{t^k} = \|v - v^k\| \to 0.$$

Do đó (2.3) nghiệm đúng. Suy ra $v \in T_M(\bar{x})$.

(ii) Giả sử $\{w^k\} \subset T_M(\bar{x})$, $w^k \to w$. Với mỗi $k \in I\!N$, do tính chất (i), tồn tại $t^k \in \left(0, \dfrac{1}{k}\right)$ và $v^k \in X$ sao cho

$$\|v^k - w^k\| < \frac{1}{k}, \quad \bar{x} + t^k v^k \in M.$$

Ta có $t^k \to 0^+$ khi $k \to \infty$, và

$$\|v^k - w\| \leqslant \|v^k - w^k\| + \|w^k - w\| < \frac{1}{k} + \|w^k - w\| \to 0.$$

Theo (i), từ đó ta có $w \in T_M(\bar{x})$.

(iii) Lấy $v \in T_M(\bar{x})$. Chọn $\{t^k\}$, $\{v^k\}$, $t^k \to 0^+, v^k \to v$, sao cho $\bar{x} + t^k v^k \in M$ với mọi k. Khi đó,

$$v^k \in \frac{1}{t^k}(M - \bar{x}) \subset \text{cone}(M - \bar{x}) \subset \overline{\text{cone}(M - \bar{x})}.$$

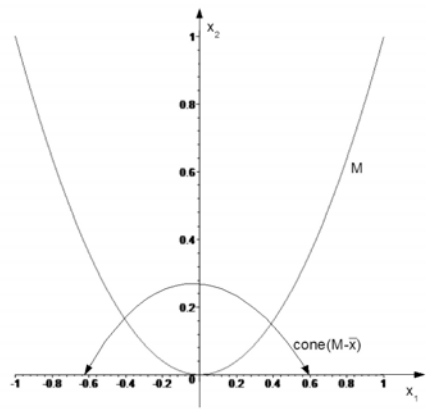
Vì $v^k \to v$, nên ta có $v \in \overline{\text{cone}(M - \bar{x})}$. $\square$

Nón tiếp tuyến Bouligand không nhất thiết là nón lồi.

Ví dụ 2.2.1. Đặt $M = \{x = (x_1, x_2) : x_2 = |x_1|\} \subset I\!R^2$. Với $\bar{x} := (0,0)$, ta có

$$T_M(0) = M = \overline{\text{cone}(M - 0)}.$$

Nói chung, ta không có đẳng thức trong (2.5).



Hình 9

Ví dụ 2.2.2. Đặt $M = \{x = (x_1, x_2) : x_2 = x_1^2\} \subset I\!R^2$. Lấy $\bar{x} = (0,0)$, ta có

$$\begin{aligned} \overline{\text{cone}(M - \bar{x})} &= \{v = (v_1, v_2) : v_2 \geqslant 0\}, \\ T_M(\bar{x}) &= \{v = (v_1, 0) : v_1 \in I\!R\}. \end{aligned}$$

Dễ thấy rằng $\text{cone}(M - \bar{x}) = \{v = (v_1, v_2) : v_2 > 0\} \cup \{(0,0)\}$. Do đó $\text{cone}(M - \bar{x})$ không phải là nón đóng; xem Hình 9.

Mệnh đề sau đây cho ta công thức tính nón tiếp tuyến Bouligand của tập nghiệm của hệ bất đẳng thức cho bởi các hàm khả vi Fréchet.

Mệnh đề 2.2.2 (Công thức tính nón tiếp tuyến Bouligand). *Giả sử $g_i : X \to I\!R$ $(i = 1, \ldots, m)$ là các hàm số thực liên tục trên không gian định chuẩn X. Đặt*

$$M = \{x \in X : g_i(x) \leqslant 0 \quad \forall i = 1, \ldots, m\}.$$

Giả sử $\bar{x} \in M$. Đặt $I(\bar{x}) = \{i : g_i(\bar{x}) = 0\}$ [3]*. Khi đó,*

(i) *Nếu $I(\bar{x}) = \emptyset$, thì $T_M(\bar{x}) = X$;*

(ii) *Nếu $I(\bar{x}) \neq \emptyset$ và $g_i(\cdot)$ $(i = 1, \ldots, m)$ là khả vi Fréchet tại $\bar{x}$, thì*

$$T_M(\bar{x}) \subset \{v \in X : g_i'(\bar{x})(v) \leqslant 0 \quad \forall i \in I(\bar{x})\};$$

(iii) *Nếu $I(\bar{x}) \neq \emptyset$, $g_i(\cdot)$ $(i = 1, \ldots, m)$ khả vi Fréchet tại $\bar{x}$, và điều kiện chính quy* [4] *sau được thỏa mãn*

$$\exists v^0 \in X \text{ để } g_i'(\bar{x})(v^0) < 0 \quad \forall i \in I(\bar{x}) \tag{2.6}$$

thì

$$T_M(\bar{x}) = \{v \in X : g_i'(\bar{x})(v) \leqslant 0 \quad \forall i \in I(\bar{x})\}. \tag{2.7}$$

Chứng minh. (i) Giả sử rằng $I(\bar{x}) = \emptyset$. Khi đó, $g_i(\bar{x}) < 0$ với mọi $i = 1, \ldots, m$. Do các hàm số $g_i(\cdot)$ là liên tục, tồn tại $\delta > 0$ sao cho

$$g_i(x) < 0 \quad \forall i = 1, \ldots, m, \ \forall x \in \bar{B}(\bar{x}, \delta).$$

Từ đó suy ra $\bar{B}(\bar{x}, \delta) \subset M$. Vì vậy, $T_M(\bar{x}) = X$.

(ii) Giả sử rằng $I(\bar{x}) \neq \emptyset$ và $g_i(\cdot)$ $(i = 1, \ldots, m)$ là khả vi Fréchet tại $\bar{x}$. Lấy tùy ý $v \in T_M(\bar{x})$. Do Mệnh đề 2.2.1(i), ta chọn được $\{t^k\}$, $t^k \to 0^+$, $\{v^k\}$, $v^k \to v$, sao cho $\bar{x} + t^k v^k \in M$ với mọi $k \in I\!N$. Với mỗi $i \in I(\bar{x})$, ta có

$$\frac{1}{t^k}(g_i(\bar{x} + t^k v^k) - g_i(\bar{x})) \leqslant 0.$$

Lấy giới hạn khi $k \to \infty$, từ bất đẳng thức cuối ta thu được $g_i'(\bar{x})(v) \leqslant 0$. Đó là điều phải chứng minh.

[3] $I(\bar{x})$ được gọi là *tập chỉ số hoạt* (the active index set) ứng với điểm $\bar{x} \in M$.

[4] *Điều kiện chính quy* (regularity condition) kiểu này còn được gọi là *điều kiện chuẩn hóa ràng buộc* (constraint qualification), nếu như M đóng vai trò tập ràng buộc trong một bài toán tối ưu.

(iii) Giả sử rằng $I(\bar{x}) \neq \emptyset$, $g_i(\cdot)$ $(i = 1, \dots, m)$ khả vi Fréchet tại $\bar{x}$, và tồn tại $v^0 \in X$ thỏa các bất đẳng thức chặt trong (2.6). Lấy tùy ý một phần tử v thuộc tập hợp viết ở vế phải của (2.7). Ta phải chứng minh rằng $v \in T_M(\bar{x})$. Lấy $\mu \in (0,1)$ và đặt $v_\mu = (1-\mu)v + \mu v^0$. Khi đó,

$$g_i'(\bar{x})(v) \leqslant 0 \quad \forall i \in I(\bar{x})$$

và

$$g_i'(\bar{x})(v_\mu) = (1-\mu)g_i'(\bar{x})(v) + \mu g_i'(\bar{x})(v^0) < 0 \quad \forall \mu \in (0,1). \tag{2.8}$$

(Bất đẳng thức cuối nghiệm đúng bởi vì $g_i'(\bar{x})(v) = 0$ và $g_i'(\bar{x})(v^0) < 0$.) Ta có

$$v_\mu \in T_M(\bar{x}) \quad \forall \mu \in (0,1).$$

Thật vậy, với mọi $i \in I(\bar{x})$, vì $g_i(\cdot)$ khả vi Fréchet tại $\bar{x}$ nên

$$g_i(\bar{x} + tv_\mu) - g_i(\bar{x}) = tg_i'(\bar{x})(v_\mu) + o(t),$$

với $\lim\limits_{t \to 0^+} \dfrac{o(t)}{t} = 0$. Từ đó suy ra

$$\frac{1}{t}(g_i(\bar{x} + tv_\mu) - g_i(\bar{x})) = g_i'(\bar{x})(v_\mu) + \frac{o(t)}{t}.$$

Do vậy, lưu ý đến (2.8), ta chọn được $\delta_i > 0$ sao cho

$$g_i(\bar{x} + tv_\mu) - g_i(\bar{x}) \leqslant 0 \quad \forall t \in (0, \delta_i).$$

Do $g_i(\bar{x}) = 0$ với mọi $i \in I(\bar{x})$, nên với $\delta := \min\{\delta_i \,:\, i \in I(\bar{x})\}$ ta có

$$g_i(\bar{x} + tv_\mu) \leqslant 0 \quad \forall t \in (0, \delta), \quad \forall i \in I(\bar{x}).$$

Vì $g_i(\bar{x}) < 0$ với mọi $i \notin I(\bar{x})$, bằng cách lấy $\delta > 0$ bé hơn (nếu cần) ta sẽ có

$$g_i(\bar{x} + tv_\mu) \leqslant 0 \quad \forall t \in (0, \delta), \quad \forall i = 1, \dots, m.$$

Do vậy,

$$\bar{x} + tv_\mu \in M \quad \forall t \in (0, \delta).$$

Từ đó suy ra $v_\mu \in T_M(\bar{x})$. Cho $\mu \to 0^+$ và sử dụng tính đóng của hình nón $T_M(\bar{x})$, ta có $v \in T_M(\bar{x})$. $\square$

Bài tập 2.2.1. Sử dụng Mệnh đề 2.2.1(iii) để tính nón $T_M(\bar{x})$ với

$$M := \{x = (x_1, x_2) \,:\, x_1 + x_2 \geqslant 2,\ x_2 \leqslant x_1^3\} \subset I\!R^2$$

và $\bar{x} = (1,1)$. (*Kết quả*: $T_M(\bar{x}) = \{v = (v_1, v_2) \,:\, v_1 + v_2 \geqslant 0,\ v_2 \leqslant 3v_1\}$; xem Hình 10.)

Bài tập 2.2.2. Hãy xây dựng một ví dụ đơn giản để chứng tỏ rằng đẳng thức (2.7) có thể không đúng nếu như $I(\bar{x}) \neq \emptyset$, $g_i(\cdot)$ $(i = 1, \ldots, m)$ khả vi Fréchet tại $\bar{x}$, nhưng điều kiện chính quy (2.6) không được thỏa mãn tại $\bar{x}$.

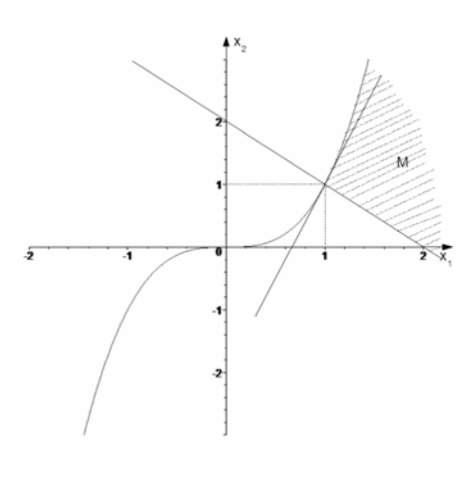
Bài tập 2.2.3. Chứng minh các khẳng định sau:

(a) Nếu $M_1 \subset M_2$ và $\bar{x} \in M_1$, thì $T_{M_1}(\bar{x}) \subset T_{M_2}(\bar{x})$.

(b) Nếu $M_1 \subset X$, $M_2 \subset X$, $\bar{x} \in \overline{M_1 \cap M_2}$, thì

$$T_{M_1 \cap M_2}(\bar{x}) \subset T_{M_1}(\bar{x}) \cap T_{M_2}(\bar{x}).$$

Bài tập 2.2.4. Bằng một ví dụ thích hợp, hãy chứng tỏ rằng chứng tỏ rằng bao hàm thức trong khẳng định (b) ở bài tập trên có thể là một bao hàm thức chặt (tập hợp bên vế trái là tập con thực sự của tập hợp bên vế phải).



Hình 10

Nhận xét 2.2.2. Trên cơ sở Mệnh đề 2.2.2, ta có thể đặt vấn đề xây dựng công thức tính hình nón tiếp tuyến Bouligand cho một tập hợp có cấu trúc xác định, ví dụ như tập nghiệm của một hệ hỗn hợp các đẳng thức và bất đẳng thức, hoặc tập nghiệm của một bài toán nào đó. Nói chung, đó là một vấn đề nan giải[5]. Chúng ta sẽ còn trở lại chủ đề này sau khi tìm hiểu các khái niệm nón tiếp tuyến trung gian và nón tiếp tuyến Clarke.

[5]Mới đây, Nguyễn Huy Chiêu đã thu được một kết quả thú vị về nón tiếp tuyến Bouligand của các tập hợp trong $I\!R^2$ có thể biểu diễn được dưới dạng tích của hai tập dãy (sequencial sets) trong $I\!R$; xem Chiêu (2006b).

Nón tiếp tuyến trung gian và nón tiếp tuyến Clarke:

Định nghĩa 2.2.2. Cho X là không gian định chuẩn. *Nón tiếp tuyến trung gian*[6] hay *nón kề*[7] của tập $M \subset X$ tại $\bar{x} \in \overline{M}$, được ký hiệu bởi $T^b_M(\bar{x})$, là tập hợp những véctơ $v \in X$ thỏa mãn điều kiện

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{d(\bar{x} + tv, M)}{t} = 0. \tag{2.9}$$

Điều kiện (2.9) có nghĩa là

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \text{sao cho} \;\; \frac{d(\bar{x} + tv, M)}{t} \leqslant \varepsilon \quad \forall t \in (0, \delta).$$

Định nghĩa 2.2.3. Cho X là không gian định chuẩn. *Nón tiếp tuyến Clarke*[8] hay *nón tiếp tuyến làm tròn*[9] của tập $M \subset X$ tại $\bar{x} \in \overline{M}$, được ký hiệu[10] bởi $C_M(\bar{x})$, là tập hợp những véctơ $v \in X$ thỏa mãn điều kiện

$$\lim_{t \to 0^+, x \xrightarrow{M} \bar{x}} \frac{d(x + tv, M)}{t} = 0. \tag{2.10}$$

Ở đây $x \xrightarrow{M} \bar{x}$ ký hiệu giới hạn trong $M \cup \{\bar{x}\}$.

Điều kiện (2.10) có nghĩa là

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \text{sao cho} \;\; \frac{d(x + tv, M)}{t} \leqslant \varepsilon \quad \forall t \in (0, \delta) \;\; \forall x \in M \cap B(\bar{x}, \delta).$$

Mệnh đề 2.2.3. *Ta có:*

(i) $C_M(\bar{x}) \subset T^b_M(\bar{x}) \subset T_M(\bar{x}) \subset \overline{\text{cone}(M - \bar{x})}$;

(ii)

$$\begin{aligned} T^b_M(\bar{x}) = \{v \in X \quad &: \forall \{t^k\} \subset I\!R_+ \setminus \{0\},\; t^k \to 0,\; \exists \{v^k\},\; v^k \to v, \\ &\bar{x} + t^k v^k \in M \;\forall k \in I\!N\}; \end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned} C_M(\bar{x}) = \;\; &\{v \in X \;:\; \forall \{t^k\} \subset I\!R_+ \setminus \{0\},\; t^k \to 0,\; \forall \{x^k\} \subset M, \\ &x^k \to \bar{x},\; \exists \{v^k\},\; v^k \to v,\; x^k + t^k v^k \in M \;\forall k \in I\!N\}; \end{aligned}$$

---

[6] TNTA: the intermediate tangent cone.

[7] TNTA: the adjacent cone.

[8] TNTA: the Clarke tangent cone.

[9] TNTA: the circatangent cone.

[10] Chữ C trong ký hiệu $C_M(\bar{x})$ được Aubin và Frankowska (1990) sử dụng để vinh danh F. H. Clarke, nhà toán học người Canađa, một trong số những người đi tiên phong trong việc xây dựng giải tích không trơn. Clarke sinh năm 1948 ở Montreal. Ông viết luận án Tiến sĩ ở University of Washington dưới sự hướng dẫn của R. T. Rockafellar, nhà toán học nổi tiếng người Mỹ.

(iv) $T^b_M(\bar{x})$ *là nón đóng;*

(v) $C_M(\bar{x})$ *là nón lồi, đóng;*

(vi) $C_M(\bar{x}) + T^b_M(\bar{x}) \subset T^b_M(\bar{x})$;

(vii) $C_M(\bar{x}) + T_M(\bar{x}) \subset T_M(\bar{x})$.

Chứng minh. Các tính chất (i)-(iv) có thể chứng minh tương tự như các tính chất (i) và (ii) trong Mệnh đề 2.2.1. Đó là một bài tập không khó, nhưng bổ ích, được dành cho bạn đọc.

(v) Ta cần chứng tỏ rằng $v^1 + v^2 \in C_M(\bar{x})$ với mọi $v^1, v^2 \in C_M(\bar{x})$. Giả sử rằng $v^1, v^2 \in C_M(\bar{x})$. Giả sử $\{t^k\} \subset I\!R_+ \setminus \{0\}$ và $\{x^k\} \subset M$ là các dãy thỏa mãn $t^k \to 0$, $x^k \to \bar{x}$. Do $v^1 \in C_M(\bar{x})$ và do (iii), tồn tại $\{v^{1,k}\},\ v^{1,k} \to v^1$, sao cho

$$\widetilde{x}^k := x^k + t^k v^{1,k} \in M \quad \forall k.$$

Hiển nhiên $\widetilde{x}^k \to \bar{x}$. Vì $v^2 \in C_M(\bar{x})$, tồn tại $\{v^{2,k}\},\ v^{2,k} \to v^2$,

$$\widetilde{x}^k + t^k v^{2,k} \in M \quad \forall k.$$

Ta có

$$x^k + t^k(v^{1,k} + v^{2,k}) = \widetilde{x}^k + t^k v^{2,k} \in M \quad \forall k.$$

Do $v^{1,k} + v^{2,k} \to v^1 + v^2$, ta kết luận rằng $v^1 + v^2 \in C_M(\bar{x})$.

(vi) Cho tùy ý $v^1 \in C_M(\bar{x})$ và $v^2 \in T^b_M(\bar{x})$. Giả sử rằng $\{t^k\} \subset I\!R_+ \setminus \{0\}$, $t^k \to 0$. Do (ii) và do $v^2 \in T^b_M(\bar{x})$, tồn tại $\{v^{2,k}\},\ v^{2,k} \to v^2$, sao cho

$$\widetilde{x}^k := \bar{x} + t^k v^{2,k} \in M \quad \forall k.$$

Do $\widetilde{x}^k \xrightarrow{M} \bar{x}$ và do $v^1 \in C_M(\bar{x})$, tồn tại $\{v^{1,k}\},\ v^{1,k} \to v^1$, sao cho

$$\widetilde{x}^k + t^k v^{1,k} \in M \quad \forall k.$$

Ta có

$$\bar{x} + t^k(v^{1,k} + v^{2,k}) = \widetilde{x}^k + t^k v^{1,k} \in M \quad \forall k,$$

$v^{1,k} \to v^1$ và $v^{2,k} \to v^2$. Vậy $v^1 + v^2 \in T^b_M(\bar{x})$.

(vii) Chứng minh tương tự như (vi). $\square$

Ví dụ 2.2.3 ($T^b_M(\bar{x}) \neq T_M(\bar{x})$). Đặt

$$M = \left\{ \frac{1}{2^i} \ :\ i = 1, 2, \dots \right\} \subset I\!R.$$

Với $\bar{x} := 0 \in \overline{M}$, ta có

$$T_M(\bar{x}) = I\!R_+, \quad T^b_M(\bar{x}) = \{0\}.$$

Trước hết, ta sẽ chứng tỏ rằng $v = 1 \in T_M(\bar{x})$. Đặt $t^k = \dfrac{1}{2^k}$, $v^k = v$ với mọi $k \in I\!N$. Vì

$$\bar{x} + t^k v^k = \frac{1}{2^k} \in M \quad \forall k,$$

nên $v \in T_M(\bar{x})$. Suy ra

$$I\!R_+ \subset T_M(\bar{x}) \subset \overline{\text{cone}(M - \bar{x})} = I\!R_+.$$

Vậy $T_M(\bar{x}) = I\!R_+$. Do Mệnh đề 2.2.3(i), $T_M^b(\bar{x}) \subset T_M(\bar{x}) = I\!R_+$. Nếu ta chứng minh được rằng $v = 1 \notin T_M^b(\bar{x})$, thì $T_M^b(\bar{x}) = \{0\}$. Giả sử phản chứng: $v = 1 \in T_M^b(\bar{x})$. Khi đó

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{d(\bar{x} + tv, M)}{t} = 0. \tag{2.11}$$

Lấy

$$t^k = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}}\right) \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Do (2.11),

$$\lim_{k \to \infty} \frac{d(\bar{x} + t^k v, M)}{t^k} = 0. \tag{2.12}$$

Vì

$$\begin{aligned}\frac{d(\bar{x} + t^k v, M)}{t^k} = \frac{d(t^k, M)}{t^k} &= \frac{\left|\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2^k} + \dfrac{1}{2^{k+1}}\right) - \dfrac{1}{2^{k+1}}\right|}{\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2^k} + \dfrac{1}{2^{k+1}}\right)} \\ &= \frac{\dfrac{1}{2^{k+1}}}{\dfrac{1}{2^k} + \dfrac{1}{2^{k+1}}} = \frac{1}{3},\end{aligned}$$

nên (2.12) là sai. Vậy ta phải có $v = 1 \notin T_M^b(\bar{x})$.

Ví dụ 2.2.4 ($T_M^b(\bar{x}) \neq C_M(\bar{x})$). Lấy $\bar{x} = (0, 0) \in I\!R^2$ và

$$M = \{x = (x_1, x_2) \,:\, x_1 \geqslant 0,\ x_2 = 0\} \cup \{x = (x_1, x_2) \,:\, x_1 = 0,\ x_2 \geqslant 0\}.$$

Ta có

$$T_M^b(\bar{x}) = T_M(\bar{x}) = M, \quad C_M(\bar{x}) = \{0\}.$$

Thật vậy, các đẳng thức $T_M^b(\bar{x}) = T_M(\bar{x}) = M$ là hiển nhiên. Vì $C_M(\bar{x}) \subset T_M^b(\bar{x})$, nên để chứng minh rằng $C_M(\bar{x}) = \{0\}$ ta chỉ cần chứng tỏ rằng $v^1 := (1, 0) \notin C_M(\bar{x})$ và $v^2 := (0, 1) \notin C_M(\bar{x})$. Nếu $v^1 \in C_M(\bar{x})$, thì

$$\lim_{t \to 0^+,\, x \xrightarrow{M} \bar{x}} \frac{d(x + tv^1, M)}{t} = 0. \tag{2.13}$$

Lấy $t^k = 1/k,\ x^k = (0, 1/k)\ (k = 1, 2, \ldots)$. Vì $t^k \to 0^+$ và $x^k \xrightarrow{M} \bar{x}$, nên từ (2.13) ta suy ra

$$\lim_{k\to\infty} \frac{d(x^k + t^k v^1, M)}{t^k} = 0.$$

Đẳng thức này không thể xảy ra, bởi vì

$$\begin{aligned}\frac{d(x^k + t^k v^1, M)}{t^k} &= \frac{d((0, \frac{1}{k}) + \frac{1}{k}(1, 0), M)}{\frac{1}{k}} \\ &= \frac{d\left(\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right), M\right)}{\frac{1}{k}} = \frac{\frac{1}{k}}{\frac{1}{k}} = 1\end{aligned}$$

với mọi $k \in I\!N$. Vậy $v^1 \notin C_M(\bar{x})$. Do tính đối xứng, ta cũng có $v^2 \notin C_M(\bar{x})$.

Tập mượt, tập có tính chất khả vi, tập chính quy tiếp tuyến:

Định nghĩa 2.2.4.

1. Ta nói M là *mượt*[11] tại $\bar{x} \in \overline{M}$ nếu ánh xạ đa trị $T_M(\cdot) : X \rightrightarrows X$, $x \mapsto T_M(x)$, là nửa liên tục dưới tại $\bar{x}$. (Ta đặt $T_M(x) = \emptyset$ với mọi $x \notin \overline{M}$. Khi đó, $\operatorname{dom} T_M(\cdot) = \overline{M}$.)

2. Ta nói M là *có tính chất khả vi*[12] tại $\bar{x} \in \overline{M}$ nếu $T^b_M(\bar{x}) = T_M(\bar{x})$.

3. Ta nói M là *chính quy tiếp tuyến*[13] tại $\bar{x} \in \overline{M}$ nếu $C_M(\bar{x}) = T_M(\bar{x})$.

4. Ta nói M là *tập mượt* (tương ứng, *tập có tính chất khả vi*, *tập chính quy tiếp tuyến*) nếu M là mượt (tương ứng, có tính chất khả vi, chính quy tiếp tuyến) tại mỗi điểm thuộc $\overline{M}$.

Ta sẽ quay lại với các khái niệm nói trong Định nghĩa 2.2.4 sau khi chứng tỏ rằng nón tiếp tuyến Bouligand (nón tiếp tuyến trung gian, nón tiếp tuyến Clarke) có thể biểu diễn như giới hạn Painlevé-Kuratowski của một họ tập hợp.

Nón tiếp tuyến và giới hạn Painlevé-Kuratowski của họ tập hợp:

Định nghĩa 2.2.5 (Giới hạn theo Painlevé-Kuratowski). Cho $\{\Omega_\mu\}_{\mu\in M}$ là họ tập hợp phụ thuộc vào tham số $\mu \in M$, M là không gian mêtric, $\Omega_\mu \subset X$ với mọi μ, X là không gian định chuẩn. Giả sử $\bar{\mu} \in M$. Tập hợp

$$\operatorname*{Lim\,sup}_{\mu\to\bar{\mu}} \Omega_\mu := \{x \in X\ :\ \liminf_{\mu\to\bar{\mu}} d(x, \Omega_\mu) = 0\} \tag{2.14}$$

được gọi là *giới hạn trên theo Painlevé-Kuratowski* của họ $\{\Omega_\mu\}_{\mu\in M}$ khi $\mu \to \bar{\mu}$. Tập hợp

$$\operatorname*{Lim\,inf}_{\mu\to\bar{\mu}} \Omega_\mu := \{x \in X\ :\ \lim_{\mu\to\bar{\mu}} d(x, \Omega_\mu) = 0\} \tag{2.15}$$

[11] TNTA: sleek.
[12] TNTA: derivable.
[13] TNTA: tangentially regular.

được gọi là *giới hạn dưới theo Painlevé-Kuratowski* của họ $\{\Omega_\mu\}_{\mu\in M}$ khi $\mu \to \bar{\mu}$.

Do (2.14),

$$x \in \operatorname*{Lim\,sup}_{\mu\to\bar{\mu}} \Omega_\mu \Leftrightarrow \left(\exists \{\mu^k\}_{k\in I\!N} \subset M, \mu^k \to \bar{\mu}, \lim_{k\to\infty} d(x, \Omega_{\mu^k}) = 0 \right).$$

Do (2.15),

$$x \in \operatorname*{Lim\,inf}_{\mu\to\bar{\mu}} \Omega_\mu \Leftrightarrow \left(\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ d(x, \Omega_\mu) < \varepsilon\ \forall \mu \in \bar{B}(\bar{\mu}, \delta)\right).$$

Nói cách khác,

$$x \in \operatorname*{Lim\,inf}_{\mu\to\bar{\mu}} \Omega_\mu \Leftrightarrow \left(\forall \{\mu^k\}_{k\in I\!N} \subset M, \mu^k \to \bar{\mu}, \lim_{k\to\infty} d(x, \Omega_{\mu^k}) = 0 \right).$$

Nhận xét 2.2.3. Từ định nghĩa suy ra $\operatorname*{Lim\,inf}_{\mu\to\bar{\mu}} \Omega_\mu \subset \operatorname*{Lim\,sup}_{\mu\to\bar{\mu}} \Omega_\mu$.

Bài tập 2.2.5. Chứng minh rằng $\operatorname*{Lim\,sup}_{\mu\to\bar{\mu}} \Omega_\mu$ và $\operatorname*{Lim\,inf}_{\mu\to\bar{\mu}} \Omega_\mu$ là những tập đóng trong X. (*Chứng minh:* Giả sử rằng

$$\{x^j\} \subset \operatorname*{Lim\,sup}_{\mu\to\bar{\mu}} \Omega_\mu, \quad x^j \to \bar{x}.$$

Với mỗi $k \in I\!N$, lấy $j(k) \in I\!N$ sao cho

$$\|x^{j(k)} - \bar{x}\| < \frac{1}{k}.$$

Vì $x^{j(k)} \in \operatorname*{Lim\,sup}_{\mu\to\bar{\mu}} \Omega_\mu$, nên tồn tại $\mu^k \in M$ sao cho

$$d(\mu^k, \bar{\mu}) < \frac{1}{k}, \quad d(x^{j(k)}, \Omega_{\mu^k}) < \frac{1}{k}.$$

Do đó ta chọn được $y^k \in \Omega_{\mu^k}$ thỏa mãn điều kiện $\|x^{j(k)} - y^k\| < \frac{1}{k}$. Với các dãy $\{x^{j(k)}\}$, $\{\mu^k\}$ và $\{y^k\}$ đó, ta có $\mu^k \to \bar{\mu}$, $x^{j(k)} \to \bar{x}$ (khi $k \to \infty$), và với mỗi k:

$$\begin{aligned} d(\bar{x}, \Omega_{\mu^k}) \leqslant \|\bar{x} - y^k\| &\leqslant \|\bar{x} - x^{j(k)}\| + \|x^{j(k)} - y^k\| \\ &< \frac{1}{k} + \frac{1}{k} = \frac{2}{k}. \end{aligned}$$

Vậy $\lim_{k\to\infty} d(\bar{x}, \Omega_{\mu^k}) = 0$. Do đó $\bar{x} \in \operatorname*{Lim\,sup}_{\mu\to\bar{\mu}} \Omega_\mu$. Để chứng minh $\operatorname*{Lim\,inf}_{\mu\to\bar{\mu}} \Omega_\mu$ là đóng, ta giả sử phản chứng rằng $\operatorname*{Lim\,inf}_{\mu\to\bar{\mu}} \Omega_\mu$ không đóng. Khi đó tồn tại $\{x^j\} \subset \operatorname*{Lim\,inf}_{\mu\to\bar{\mu}} \Omega_\mu$, $x^j \to \bar{x}$, $\bar{x} \notin \operatorname*{Lim\,inf}_{\mu\to\bar{\mu}} \Omega_\mu$. Vậy tồn tại $\varepsilon > 0$ và $\{\mu^k\}$, $\mu^k \to \bar{\mu}$ sao cho

$$d\left(\bar{x}, \Omega_{\mu^k}\right) \geqslant \varepsilon \quad \forall k \in I\!N. \tag{2.16}$$

Do $x^j \to \bar{x}$, tồn tại $j \in I\!N$ sao cho $\|x^j - \bar{x}\| < \frac{\varepsilon}{4}$. Do $\lim\limits_{\mu \to \bar{\mu}} d(x^j, \Omega_\mu) = 0$ và do $\mu^k \to \bar{\mu}$, tồn tại $k \in I\!N$ thỏa điều kiện

$$d(x^j, \Omega_{\mu^k}) < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Ta có

$$d(\bar{x}, \Omega_{\mu^k}) \leqslant \|\bar{x} - x^j\| + d(x^j, \Omega_{\mu^k}) < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2},$$

mâu thuẫn với (2.16).)

Bài tập 2.2.6. Cho $M \subset X$ là tập con trong không gian định chuẩn, $\bar{x} \in \overline{M}$. Chứng minh rằng

(a) $T_M(\bar{x}) = \operatorname*{Lim\,sup}\limits_{t \to 0^+} \dfrac{M - \bar{x}}{t}$,

(b) $T^b_M(\bar{x}) = \operatorname*{Lim\,inf}\limits_{t \to 0^+} \dfrac{M - \bar{x}}{t}$,

(c) $C_M(\bar{x}) = \operatorname*{Lim\,inf}\limits_{t \to 0^+,\, x \xrightarrow{M} \bar{x}} \dfrac{M - x}{t}$.

(*Chứng minh:* (a) Theo định nghĩa, $v \in T_M(\bar{x})$ khi và chỉ khi

$$\liminf_{t \to 0^+} \frac{d(\bar{x} + tv, M)}{t} = 0;$$

tức là tồn tại $\{t^k\} \subset I\!R_+ \setminus \{0\}$, $t^k \to 0$, $\{v^k\} \subset X$, $v^k \to v$ sao cho $\bar{x} + t^k v^k \in M$ với mọi $k \in I\!N$. Rõ ràng là $\bar{x} + t^k v^k \in M$ khi và chỉ khi $v^k \in \dfrac{M - \bar{x}}{t^k}$. Vậy $v \in T_M(\bar{x})$ khi và chỉ khi tồn tại $\{t^k\} \subset I\!R_+ \setminus \{0\}$, $t^k \to 0$, sao cho $\lim\limits_{k \to \infty} d(v, \dfrac{M - \bar{x}}{t^k}) = 0$; tức là $v \in \operatorname*{Lim\,sup}\limits_{t \to 0^+} \dfrac{M - \bar{x}}{t}$. Các khẳng định (b) và (c) được chứng minh hoàn toàn tương tự.)

<u>Quan hệ giữa tập mượt và tập chính quy tiếp tuyến:</u>

Định lý sau chứng tỏ rằng, dưới những điều kiện khá tổng quát, một tập mượt phải là tập chính quy tiếp tuyến.

Định lý 2.2.1 (xem Aubin và Frankowska (1990)). *Cho X là không gian Banach, $M \subset X$ là tập con đóng. Nếu M là mượt tại $\bar{x} \in M$ (tức là ánh xạ đa trị $x \mapsto T_M(x)$ là nửa liên tục dưới tại $\bar{x}$) thì M là chính quy tiếp tuyến tại $\bar{x}$ (tức là $C_M(\bar{x}) = T_M(\bar{x})$).*

Tập hợp $M = \left\{ \frac{1}{2^i} \,:\, i = 1, 2, \ldots \right\} \subset I\!R$ xét trong Ví dụ 2.2.4 là tập đóng, không là chính quy tiếp tuyến tại $\bar{x} = (0, 0)$. Theo Định lý 2.2.1, M không thể là mượt tại $\bar{x}$.

Quan hệ giữa họ nón Bouligand $\{T_M(x)\}_{x\in M}$ và nón tiếp tuyến Clarke $C_M(\bar{x})$:

Định lý sau cho thấy rằng giới hạn dưới theo Painlevé-Kuratowski của họ nón tiếp tuyến Bouligand $\{T_M(x)\}_{x\in M}$ (khi $x \to \bar{x}$) là một bộ phận của nón tiếp tuyến Clarke $C_M(\bar{x})$.

Định lý 2.2.2 (B. Cornet 1981, J. S. Treiman 1983; xem Aubin và Frankowska (1990)). *Cho X là không gian Banach, $M \subset X$ là tập con đóng. Khi đó, với mọi $\bar{x} \in M$,*

$$\operatorname*{Lim\,inf}_{x \xrightarrow{M} \bar{x}} T_M(x) \subset C_M(\bar{x}).$$

Khi X là không gian định chuẩn hữu hạn chiều, thì bao hàm thức cuối trở thành đẳng thức. Cụ thể hơn, ta có định lý sau.

Định lý 2.2.3 (B. Cornet 1981, J. S. Treiman 1983; xem Aubin và Frankowska (1990)). *Cho X là không gian định chuẩn hữu hạn chiều, $M \subset X$ là tập con đóng. Khi đó, với mọi $\bar{x} \in M$,*

$$\operatorname*{Lim\,inf}_{x \xrightarrow{M} \bar{x}} T_M(x) = \operatorname*{Lim\,inf}_{x \xrightarrow{M} \bar{x}} \overline{\text{co}}(T_M(x)) = C_M(\bar{x}).$$

Bạn đọc có thể tìm hiểu chứng minh của hai định lý trên trong cuốn chuyên khảo của Aubin và Frankowska (1990), tr. 128-138.

Các hình nón $T_M(\bar{x})$, $T_M^b(\bar{x})$ và $C_M(\bar{x})$ là trùng nhau nếu M là tập lồi hoặc M là tập nghiệm của hệ bất đẳng thức/đẳng thức cho bởi các hàm trơn thỏa mãn một điều kiện chính quy nào đó.

Mệnh đề 2.2.4. *Nếu M là tập lồi trong gian định chuẩn X và $\bar{x} \in \overline{M}$, thì*

$$C_M(\bar{x}) = T_M^b(\bar{x}) = T_M(\bar{x}) = \overline{\text{cone}(M - \bar{x})}. \tag{2.17}$$

Chứng minh. Ta đã chứng minh rằng

$$C_M(\bar{x}) \subset T_M^b(\bar{x}) \subset T_M(\bar{x}) \subset \overline{\text{cone}(M - \bar{x})}.$$

Vậy để thu được (2.17) ta chỉ cần chứng tỏ rằng

$$\overline{\text{cone}(M - \bar{x})} \subset C_M(\bar{x}).$$

Vì $C_M(\bar{x})$ là tập đóng, nên chỉ cần chứng minh rằng

$$\text{cone}(M - \bar{x}) \subset C_M(\bar{x}).$$

Lấy tùy ý $v \in \text{cone}(M - \bar{x})$, và lấy $t > 0$, $x \in M$ để có biểu diễn $v = \dfrac{x - \bar{x}}{t}$. Giả sử $x^k \xrightarrow{M} \bar{x}$, $t^k \to 0^+$. Chọn $\bar{k} \in I\!N$ sao cho $t^k \in (0, t)$ với mọi $k \geqslant \bar{k}$. Đặt

$$v^k = \begin{cases} 0 & \text{nếu } \ k < \bar{k} \\ \dfrac{x - x^k}{t} & \text{nếu } \ k \geqslant \bar{k}. \end{cases}$$

Ta có $v^k \to \dfrac{x - \bar{x}}{t} = v$ khi $k \to \infty$. Nếu $k < \bar{k}$, thì $x^k + t^k v^k = x^k \in M$. Nếu $k \geqslant \bar{k}$ thì $\frac{t^k}{t} \in (0, 1)$ và ta có

$$x^k + t^k v^k = x^k + t^k \frac{x - x^k}{t} = \left(1 - \frac{t^k}{t}\right) x^k + \frac{t^k}{t} x \in M$$

(do M là tập lồi). Theo Mệnh đề 2.2.3, điều đó chứng tỏ rằng $v \in C_M(\bar{x})$. □

Từ mệnh đề vừa được chứng minh suy ra rằng tập lồi trong không gian định chuẩn là chính quy tiếp tuyến.

Định lý 2.2.1 nói rằng nếu một tập con đóng trong không gian Banach là tập mượt, thì nó là tập chính quy tiếp tuyến. Như vậy *tính mượt* (sleekness) nói chung mạnh hơn tính *chính quy tiếp tuyến* (tangential regularity). Mệnh đề tiếp sau đây cho thấy rằng đối với các tập lồi đóng trong không gian Banach thì hai tính chất đó là tương đương.

Mệnh đề 2.2.5. *Mọi tập con lồi đóng trong không gian Banach đều là tập mượt.*

Chứng minh. Ta có thể chứng minh mệnh đề này bằng cách sử dụng Định lý tách các tập lồi. Giả sử M là tập lồi đóng trong không gian Banach X. Ánh xạ đa trị nón pháp tuyến

$$N_M(\cdot) : X \rightrightarrows X^* \quad (x \mapsto N_M(x) \quad \forall x \in X),$$

ở đó X được xét với tôpô của chuẩn và X^* được xét với tôpô yếu*, là đóng. Thật vậy, giả sử $\{p^\alpha\}$ và $\{x^\alpha\}$ là các dãy suy rộng sao cho $p^\alpha \in N_M(x^\alpha)$ với mọi α, $x^\alpha \to \bar{x}$, và $p^\alpha \xrightarrow{w^*} \bar{p}$. Ta sẽ chỉ ra rằng $\bar{p} \in N_M(\bar{x})$. Do $N_M(x) = \emptyset$ với mọi $x \notin M$, nên ta có thể giả sử rằng $x^\alpha \in M$ với mọi α. Với mọi $y \in M$ và với mọi α, ta có

$$0 \geqslant \langle p^\alpha, y - x^\alpha \rangle = \langle p^\alpha, y - \bar{x} \rangle + \langle p^\alpha, \bar{x} - x^\alpha \rangle.$$

Lấy giới hạn theo α (lưu ý rằng vì $p^\alpha \xrightarrow{w^*} \bar{p}$, nên $\{\|p^\alpha\|\}$ là dãy giới nội), ta được

$$0 \geqslant \langle \bar{p}, y - \bar{x} \rangle.$$

Vì bất đẳng thức cuối đúng với mọi $y \in M$, nên $\bar{p} \in N_M(\bar{x})$. Tính đóng của ánh xạ nón pháp tuyến đã được chứng minh.

Lấy $\bar{x} \in M$. Ta khẳng định rằng ánh xạ đa trị nón tiếp tuyến

$$T_M(\cdot) : X \rightrightarrows X$$

là nửa liên tục dưới tại $\bar{x}$. (Ta có $\operatorname{dom} T_M(\cdot) = M$.) Nếu khẳng định đó là sai, thì tồn tại $\bar{v} \in T_M(\bar{x})$, $\varepsilon > 0$ và dãy $\{x^k\}$ sao cho $x^k \xrightarrow{M} \bar{x}$ sao cho với mỗi $k \in I\!N$ ta có

$$T_M(x^k) \cap \bar{B}(\bar{v}, \varepsilon) = \emptyset.$$

Do đó, với mỗi k, sử dụng Định lý tách các tập lồi (xem Rudin (1973), Định 3.4), ta tìm được $p^k \in X^*$, $\|p^k\| = 1$ sao cho

$$\sup_{v \in T_M(x^k)} \langle p^k, v\rangle \leqslant \inf_{v \in \bar{B}(\bar{v},\varepsilon)} \langle p^k, v\rangle.$$

Vì $T_M(x^k)$ là hình nón, điều đó kéo theo

$$\sup_{v \in T_M(x^k)} \langle p^k, v\rangle \leqslant 0,$$

tức là $p^k \in N_M(x^k)$. Vì $0 \in T_M(x^k)$, nên từ những điều nói trên ta có

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \inf_{v \in \bar{B}(\bar{v},\varepsilon)} \langle p^k, v\rangle &= \langle p^k, \bar{v}\rangle - \varepsilon\|p^k\| \\ &= \langle p^k, \bar{v}\rangle - \varepsilon. \end{aligned}$$

Do hình cầu đơn vị trong X^* là compắc yếu* (theo Định lý Banach-Alaoglu), dãy $\{p^k\}$ có dãy con hội tụ theo tôpô yếu*. Không giảm tổng quát, ta có thể giả sử rằng $p^\alpha \xrightarrow{w^*} \bar{p}$. Do $p^k \in N_M(x^k)$ với mọi k và do $x^k \to \bar{x}$, từ tính đóng của ánh xạ $N_M(\cdot)$ suy ra $\bar{p} \in N_K(\bar{x})$. Vì vậy $\langle p, \bar{v}\rangle \leqslant 0$. Mặt khác, cho $k \to \infty$, từ các bất đẳng thức $\varepsilon \leqslant \langle p^k, \bar{v}\rangle$ $(k \in I\!N)$, ta thu được $\varepsilon \leqslant \langle p, \bar{v}\rangle$. Ta đã đi đến mâu thuẫn. Vậy ánh xạ đa trị $T_M(\cdot)$ là nửa liên tục dưới tại $\bar{x}$. Vì $\bar{x} \in M$ được lấy tùy ý, ta kết luận rằng M là tập mượt. □

Mệnh đề 2.2.2 đã thiết lập công thức tính nón tiếp tuyến Bouligand của tập nghiệm hệ bất đẳng thức cho bởi các hàm số khả vi Fréchet. Tiếp sau đây chúng ta sẽ tìm hiểu công thức tính nón tiếp tuyến Bouligand của tập nghiệm *hệ hỗn hợp các bất đẳng thức và đẳng thức* và cho bởi các hàm trơn (tức là các hàm số khả vi Fréchet liên tục).

Cho X là không gian Banach, $\Delta \subset X$ là tập con đóng, $\Omega \supset \Delta$ là tập mở, $g_i : \Omega \to I\!R$ $(i = 1, \ldots, m)$ và $h_j : \Omega \to I\!R$ $(j = 1, \ldots, s)$ là các hàm khả vi Fréchet liên tục. Đặt

$$M = \{x \in \Delta \,:\, g_i(x) \leqslant 0 \;\; \forall i = \overline{1,m}, \;\; h_j(x) = 0 \;\; \forall j = \overline{1,s}\}. \tag{2.18}$$

Ta có $M \subset X$ là tập đóng. Với mỗi $x \in M$, ta đặt

$$I(x) = \{i \,:\, g_i(x) = 0\}$$

và gọi $I(x)$ là tập chỉ số hoạt ứng với điểm $x \in M$. Để cho gọn, ta đặt

$$h(x) = (h_1(x), \ldots, h_s(x))^\top,$$

ở đó dấu $^\top$ chỉ phép chuyển vị ma trận. Như vậy, h là ánh xạ từ Ω vào $I\!R^s$.

Mệnh đề 2.2.6 (Công thức tính nón tiếp tuyến Bouligand; xem Aubin và Frankowska (1990)). *Giả sử M được cho bởi* (2.18). *Giả sử $\bar{x} \in M$ và điều kiện chính quy sau được thỏa mãn:*

$$\begin{cases} \text{(a)} \;\; h'(\bar{x})(C_\Delta(\bar{x})) = I\!R^s \\ \text{(b)} \;\; \exists v^0 \in X \;\; \text{để} \;\; h'(\bar{x})(v^0) = 0, \;\; g_i'(\bar{x})(v^0) < 0 \;\; \forall i \in I(\bar{x}). \end{cases} \tag{2.19}$$

Khi đó, $v \in T_M(\bar{x})$ khi và chỉ khi $v \in T_\Delta(\bar{x})$ và

$$\begin{cases} g_i'(\bar{x})(v) \leqslant 0 \quad \forall i \in I(\bar{x}) \\ h_j'(\bar{x})(v) = 0 \quad \forall j = \overline{1, s}. \end{cases} \tag{2.20}$$

Nói một cách hình ảnh, điều kiện (a) trong (2.19) nói rằng phần hạn chế của toán tử đạo hàm $h'(\bar{x}) : X \to I\!R^s$ trên nón $C_M(\bar{x})$ là *tràn*. Ta sẽ còn trở lại với kiểu điều kiện này khi xét khái niệm *toán tử tràn trên nón* trong Chương 5. Điều kiện (b) trong (2.19) nói rằng có tồn tại véctơ v^0 nào đó trong không gian tiếp xúc[14] của đa tạp $\{x \in X \,:\, h(x) = 0\}$ tại điểm $\bar{x}$ *hướng vào phần trong* của hình nón tiếp tuyến Bouligand của tập hợp $\{x \in X \,:\, g(x) \leqslant 0 \; \forall i = 1, \ldots, m\}$.

Mệnh đề 2.2.7 (Công thức tính nón tiếp tuyến Clarke; xem Aubin và Frankowska (1990)). *Giả sử M được cho bởi* (2.17) *với $\Delta = X$. Giả sử $\bar{x} \in M$ và điều kiện chính quy* (2.19) *được thỏa mãn (với $C_M(\bar{x})$ được thay bởi X). Khi đó, với mọi $v \in X$, $v \in C_M(\bar{x})$ khi và chỉ khi điều kiện* (2.20) *được thỏa mãn.*

Từ các mệnh đề 2.2.6 và 2.2.7 và tính chất $C_M(\bar{x}) \subset T_M^b(\bar{x}) \subset T_M(\bar{x})$, ta rút ra điều kiện đủ sau đây cho tính chính quy tiếp tuyến của tập nghiệm của (2.18) tại một điểm cho trước.

Hệ quả 2.2.1. *Dưới các giả thiết của Mệnh đề 2.2.7, ta có*

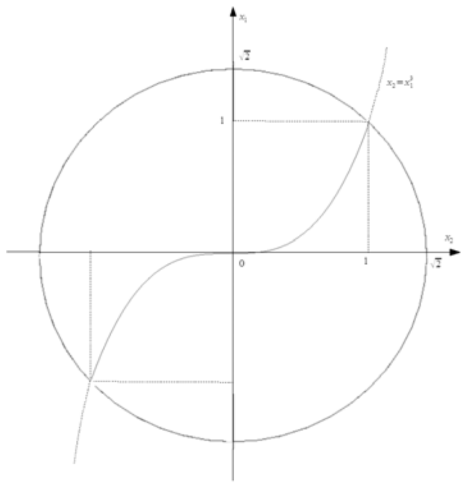
$$\begin{aligned} C_M(\bar{x}) &= T_M^b(\bar{x}) \\ &= T_M(\bar{x}) \\ &= \{v \in X \,:\, g_i'(\bar{x})(v) \leqslant 0 \;\forall i \in I(\bar{x}), \;\; h_j'(\bar{x})(v) = 0 \;\forall j = \overline{1, s}\}. \end{aligned}$$

[14] Là tập hợp $\{v \in X \,:\, h'(\bar{x})(v) = 0\}$.

Bài tập 2.2.7. Cho $\Delta = X$. Chứng minh rằng điều kiện (a) trong (2.19) tương đương với đòi hỏi *"hệ véctơ* $h_1'(\bar{x}), \ldots, h_s'(\bar{x})\}$ [của không gian X^*] *là độc lập tuyến tính"*.

Nhận xét 2.2.4. Trong trường hợp $\Delta = X = I\!R^n$, điều kiện chính quy (2.19) trở thành *điều kiện chuẩn hóa ràng buộc Mangasarian-Fromovitz*[15]- nói gọn là *điều kiện MFCQ*[16], vì nó được đưa ra trong bài báo của Mangasarian và Fromovitz (1967).

Nhận xét 2.2.5. Điều kiện MFCQ và các dạng mở rộng của nó đóng vai trò hết sức quan trọng trong các nghiên cứu về tính ổn định, ổn định vi phân, và độ nhạy nghiệm của các bài toán tối ưu (xem, ví dụ như, Gauvin và Dubeau (1981), Mordukhovich (2006a,b), Chương 4 và Chương 5 giáo trình này).



Hình 11

Ví dụ đơn giản sau đây cho thấy rằng nếu điều kiện MFCQ bị vi phạm, thì kết luận của các mệnh đề 2.2.6, 2.2.7 và Hệ quả 2.2.1 nói chung không còn đúng nữa.

Ví dụ 2.2.5. Đặt $\Delta = X = I\!R^2$, $m = s = 1$, $g_1(x) = x_2 + x_1^2$, $h(x) = x_2$ với mọi $x = (x_1, x_2) \in I\!R^2$, và $\bar{x} = (0,0)$. Xét tập M cho bởi (2.18). Ta có $M = \{\bar{x}\}$ và

$$C_M(\bar{x}) = T_M^b(\bar{x}) = T_M(\bar{x}) = \{(0,0)\}.$$

Trong khi đó,

$$\{v \in X \,:\, g_i'(\bar{x})(v) \leqslant 0 \ \forall i \in I(\bar{x}),\ h_j'(\bar{x})(v) = 0 \ \forall j = \overline{1,s}\} = I\!R \times \{0\}.$$

[15]TNTA: the Mangasarian-Fromovitz Constraint Qualification.

[16]TNTA: the MFCQ condition.

Lưu ý rằng, đối với ví dụ đang xét, ta không thể tìm được véctơ $v^0 \in X = I\!R^2$ nào thỏa mãn điều kiện (b) trong (2.19).

Bài tập 2.2.8. Cho $\Delta = X = I\!R^2$, $\bar{x} = (1,1)$, và

$$M = \{x = (x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 \leqslant 2, \quad x_2 = x_1^3\}.$$

Tính các hình nón tiếp tuyến $T_M(\bar{x})$, $T_M^b(\bar{x})$ và $C_M(\bar{x})$. (*Kết quả*: $C_M(\bar{x}) = T_M^b(\bar{x}) = T_M(\bar{x}) = \{v = (v_1, v_2) : v_1 \leqslant 0, \ v_2 = 3v_1\}$; xem Hình 11 ở trang trước.)

2.3 Đạo hàm

Cho X, Y là các không gian định chuẩn, $F : X \rightrightarrows Y$ là ánh xạ đa trị.

Định nghĩa 2.3.1 (Đạo hàm contingent, đạo hàm Bouligand). *Đạo hàm contingent*[17], hay *đạo hàm Bouligand*, $DF_{\bar{z}}(\cdot) : X \rightrightarrows Y$ của F tại điểm $\bar{z} = (\bar{x}, \bar{y}) \in \operatorname{gph} F$ là ánh xạ đa trị có đồ thị trùng với hình nón tiếp tuyến Bouligand $T_{\operatorname{gph} F}(\bar{z})$, tức là

$$DF_{\bar{z}}(u) = \Big\{v \in Y : (u,v) \in T_{\operatorname{gph} F}(\bar{z})\Big\} \quad \forall u \in X.$$

Nếu $F \equiv f$ là ánh xạ đơn trị, thì ta viết $Df_{\bar{x}}(\cdot)$ thay cho $DF_{(\bar{x}, f(\bar{x}))}(\cdot)$.

Định nghĩa 2.3.2 (Đạo hàm kề). *Đạo hàm kề* $D^bF_{\bar{z}}(\cdot) : X \rightrightarrows Y$ của F tại điểm $\bar{z} = (\bar{x}, \bar{y}) \in \operatorname{gph} F$ là ánh xạ đa trị có đồ thị trùng với hình nón tiếp tuyến trung gian $T^b_{\operatorname{gph} F}(\bar{z})$, tức là

$$D^bF_{\bar{z}}(u) = \Big\{v \in Y : (u,v) \in T^b_{\operatorname{gph} F}(\bar{z})\Big\} \quad \forall u \in X.$$

Nếu $F \equiv f$ là ánh xạ đơn trị, thì ta viết $D^bf_{\bar{x}}(\cdot)$ thay cho $D^bF_{(\bar{x}, f(\bar{x}))}(\cdot)$.

Định nghĩa 2.3.3 (Đạo hàm Clarke). *Đạo hàm Clarke*[18] $CF_{\bar{z}}(\cdot) : X \rightrightarrows Y$ của F tại điểm $\bar{z} = (\bar{x}, \bar{y}) \in \operatorname{gph} F$ là ánh xạ đa trị có đồ thị trùng với hình nón tiếp tuyến Clarke $C_{\operatorname{gph} F}(\bar{z})$, tức là

$$CF_{\bar{z}}(u) = \Big\{v \in Y : (u,v) \in C_{\operatorname{gph} F}(\bar{z})\Big\} \quad \forall u \in X.$$

[17]Chúng tôi chưa tìm được từ thích hợp để dịch thuật ngữ này ra tiếng Việt. Trong vai trò một tính từ, chữ “contingent” có nghĩa là bất định, tùy chọn, ngẫu nhiên... Có người đã dịch “contingent derivative” thành “đạo hàm tiếp liên”. Cách dịch này có lẽ không đạt, vì trong tiếng Việt dường như không có chữ “tiếp liên” (không rõ nghĩa, không có trong Từ điển tiếng Việt của Giáo sư Hoàng Phê và các đồng tác giả).

[18]Đạo hàm Clarke $CF_{\bar{z}}(\cdot)$ còn được gọi là *đạo hàm tiếp tuyến làm tròn*[19].

Nếu $F \equiv f$ là ánh xạ đơn trị, thì ta viết $Cf_{\bar{x}}(\cdot)$ thay cho $CF_{(\bar{x},f(\bar{x}))}(\cdot)$.

Ba khái niệm đạo hàm nêu trên được xây dựng nhờ các cấu trúc hình học - đó là các *nón tiếp tuyến của đồ thị* của ánh xạ đa trị được xét tại một điểm cho trước. Trong Chương 4 của giáo trình này, chúng ta sẽ nghiên cứu khái niệm *đối đạo hàm*, là một ánh xạ đa trị từ không gian đối ngẫu Y^* vào không gian đối ngẫu X^*, lưu giữ các thông tin đã được mã hóa trong ngôn ngữ của các không gian đối ngẫu về tốc độ thay đổi của ánh xạ đa trị trong các không gian nền. Đối đạo hàm được xây dựng nhờ các *nón pháp tuyến của đồ thị* của ánh xạ đa trị tại một điểm cho trước. Ngoài hai cách xây dựng xấp xỉ bậc nhất đó, người ta còn có thể sử dụng thủ thuật vô hướng hóa: thay việc xét ánh xạ đa trị $F : X \rightrightarrows Y$ từ không gian định chuẩn X vào không gian định chuẩn Y bằng việc xét *hàm tựa*

$$C_F(y^*, x) := \sup\{\langle y^*, y\rangle \,:\, y \in F(x)\} \quad (x \in X,\ y^* \in Y^*).$$

Nếu F là ánh xạ đa trị có giá trị lồi đóng, thì họ hàm số thực

$$C_F(y^*, \cdot) : X \to \overline{I\!R} \quad (y^* \in Y^*)$$

được định nghĩa như vậy lưu giữ *đầy đủ* các thông tin về F. Thật vậy, khi đó dựa vào họ hàm số $\{C_F(y^*, \cdot)\}_{y*\in Y^*}$ ta có thể tìm lại được F bằng công thức

$$F(x) = \{y \in Y \,:\, \langle y^*, y\rangle \leqslant C_F(y^*, x) \text{ với mọi } y^* \in Y^*\}.$$

Khảo sát các tính chất vi phân của họ hàm số thực $\{C_F(y^*, \cdot)\}_{y^*\in Y^*}$, ta có được các thông tin về tốc độ thay đổi của F. Phương pháp này được gọi là *phương pháp hàm tựa*. Một số công trình của Phó Giáo sư Phạm Huy Điển và các tác giả khác (xem Dien (1982, 1985), Dien và Sach (1989), Dien và Yen (1991), Thibault (1991)) về điều kiện cần cực trị cho bài toán tối ưu với ràng buộc đa trị, tập nghiệm của bao hàm thức đa trị phụ thuộc tham số, các tính chất vi phân của hàm giá trị tối ưu..., đã cho thấy tính hiệu quả của cách tiếp cận này. Khái niệm *sơ đạo hàm*[20] của ánh xạ đa trị do Giáo sư Phạm Hữu Sách đề xuất cũng sử dụng hàm tựa, nhưng đó là *hàm tựa của ánh xạ đạo hàm*. Cụ thể hơn, sơ đạo hàm của $F : X \rightrightarrows Y$ tại $\bar{z} = (\bar{x}, \bar{y}) \in \operatorname{gph} F$ là một ánh xạ đa trị $T : X \rightrightarrows Y$, Lipschitz địa phương tại $0 \in X$, sao cho với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại lân cận U của $\bar{x}$ thỏa mãn: $\forall x \in U\ \exists y \in F(x)$ với tính chất

$$\sup_{y^*\in \bar{B}_{Y^*}} \Big\{\langle y^*, y - \bar{y}\rangle - [C_T(y^*, x - \bar{x}) - C_T(y^*, 0)]\Big\} \leqslant \varepsilon\|x - \bar{x}\|,$$

ở đó $C_T(y^*, x)$ ký hiệu hàm tựa của T; xem Sach (1988a), tr. 220. Xuất phát từ khái niệm này ta có thể đưa ra các định lý ánh xạ mở, hàm ẩn, hàm ngược, định

[20]TNTA: prederivative.

lý về đạo hàm của hàm hợp, định lý giá trị trung bình, quy tắc nhân tử Lagrange, nguyên lý tựa dạng tổng quát (xem, ví dụ như, Sach (1988a,b), Dien và Sach (1989), Yen (1987)). Nghiên cứu mới nhất mà chúng tôi được biết về đạo hàm của ánh xạ đa trị dựa trên khái niệm hàm tựa là công trình của Gorokhovich và Zabreiko[21] (2005).

Dựa trên các khái niệm đạo hàm contingent và đạo hàm Clarke trong các định nghĩa 2.3.1 và 2.3.3, người ta có thể đặc trưng tính lồi và *tính lồi theo nón* của ánh xạ đa trị $F : X \rightrightarrows Y$ thông qua tính đơn điệu và *tính đơn điệu theo nón* của các họ ánh xạ đạo hàm $\{DF_z(\cdot)\}_{z\in \mathrm{gph}\, F}$ và $\{CF_z(\cdot)\}_{z\in \mathrm{gph}\, F}$. Các kết quả theo hướng này có thể xem trong Sach (1996), Sach và Yen (1997), và các tài liệu được dẫn trong các bài báo đó. Ở đây chúng ta chỉ nhắc lại hai khái niệm chính là tính lồi theo nón và tính đơn điệu theo nón. Cho $K \subset Y$ là nón lồi. Ta nói F là ánh xạ đa trị *lồi theo nón* K, nói gọn là K-*lồi*, nếu với mọi $x^1, x^2 \in X$ và $t \in (0,1)$ ta có

$$(1-t)F(x^1) + tF(x^2) \subset \overline{F((1-t)x^1 + tx^2) + K}.$$

(Trong trường hợp đặc biệt, khi $K = \{0\}$ và F là ánh xạ có giá trị đóng, khái niệm này trùng với khái niệm ánh xạ đa trị lồi đã xét trong Chương 1.) Ta nói họ ánh xạ đạo hàm contingent $\{DF_z(\cdot)\}_{z\in \mathrm{gph}\, F}$ là *đơn điệu theo nón* K, hay K-*đơn điệu*, nếu với mọi điểm $z^1 = (x^1, y^1)$ và $z^2 = (x^2, y^2)$ thuộc $\mathrm{gph}\, F$ ta có

$$0 \in \overline{\mathrm{co}}\left[D\hat{F}_{z^1}(x^2 - x^1) + D\hat{F}_{z^2}(x^1 - x^2)\right],$$

ở đó $\hat{F}(x) = F(x) + K$ là *ánh xạ mở rộng* của F theo nón K. Tính lồi theo nón K của họ ánh xạ đạo hàm Clarke $\{CF_z(\cdot)\}_{z\in \mathrm{gph}\, F}$ được định nghĩa hoàn toàn tương tự.

Có thể sử dụng đạo hàm contingent để xây dựng các điều kiện cần cực trị trong các tối ưu véctơ đa trị (xem D. T. Luc (1989), D. T. Luc và C. Malivert (1992)).

Bài tập 2.3.1. Xét ánh xạ đa trị $F : I\!\!R \rightrightarrows I\!\!R$ cho bởi công thức

$$F(x) = \{y \in I\!\!R : x^2 + y^2 \leqslant 2, \ \ y = x^3\}.$$

Tính các ánh xạ đạo hàm $DF_{\bar z}(\cdot)$, $D^bF_{\bar z}(\cdot)$ và $CF_{\bar z}(\cdot)$, ở đó $\bar z = (1,1)$. (*Gợi ý*: Để ý rằng $\mathrm{gph}\, F$ trùng với tập M trong Bài tập 2.2.8 và sử dụng kết quả tính các hình nón tiếp tuyến của M tại điểm $\bar x = (1,1)$.)

[21]Giáo sư Petr Petrovich Zabreiko (Belarus State University, Minsk, Belarus) là một chuyên gia nổi tiếng về Giải tích hàm. GS. TSKH. Nguyễn Hồng Thái (University of Szczecin, Ba Lan) và PGS. TSKH. Nguyễn Văn Minh (Đại học Quốc gia Hà Nội; University of West Georgia, Mỹ) là các học trò Việt Nam của ông.

Trong giải tích cổ điển (xem Rudin (1976)), sử dụng khái niệm đạo hàm Fréchet người ta đã xây dựng các định lý ánh xạ mở, hàm ẩn, hàm ngược - những kết quả được sử dụng rộng rãi trong hình học vi phân, tôpô vi phân, lý thuyết phương trình vi phân, lý thuyết bậc, và trong nhiều lý thuyết toán học khác. Hoàn toàn tương tự, dựa vào các khái niệm đạo hàm vừa được trình bày ở trên, người ta đã đưa ra các định lý ánh xạ mở, hàm ẩn, hàm ngược cho ánh xạ đa trị. Ở đây chúng ta sẽ xem xét hai định lý hàm ngược tiêu biểu thuộc về Aubin và Frankowska (1984). Định lý thứ nhất sử dụng giả thiết về tính mở đều của họ đạo hàm contingent. Định lý thứ hai sử dụng giả thiết về tính tràn của đạo hàm Clarke. Các định lý này đều được chứng minh bằng nguyên lý biến phân Ekeland. Vì các chứng minh là khá cồng kềnh, phức tạp, nên sẽ không được trình bày ở đây.

Định lý 2.3.1 (Định lý hàm ngược cho ánh xạ đa trị sử dụng đạo hàm contingent; xem Aubin và Frankowska (1990), tr. 204-205). *Giả sử X, Y là các không gian Banach, $F : X \rightrightarrows Y$ là ánh xạ đa trị, $\bar{z} = (\bar{x}, \bar{y}) \in \mathrm{gph}\, F$. Giả sử tồn tại các hằng số $c > 0$, $\delta > 0$ và $\alpha \in [0, 1)$ sao cho*

$$\begin{array}{l} \forall (x,y) \in (\mathrm{gph}\, F) \cap B(\bar{z}, \delta),\ \forall v \in Y,\ \exists u \in X,\ \exists w \in Y \textit{ để} \\ v \in DF_{(x,y)}(u) + w, \quad \|u\| \leqslant c\|v\|, \quad \|w\| \leqslant \alpha \|v\|. \end{array}$$

Khi đó $\bar{y} \in \mathrm{int}(\mathrm{rge}\, F)$ và ta có F^{-1} là ánh xạ đa trị giả-Lipschitz tại $(\bar{x}, \bar{y})$.

Định lý 2.3.2 (Định lý hàm ngược cho ánh xạ đa trị sử dụng đạo hàm Clarke; xem Aubin và Frankowska (1984, 1990)). *Giả sử X là không gian Banach, Y là không gian định chuẩn hữu hạn chiều, $F : X \rightrightarrows Y$ là ánh xạ đa trị đóng, $\bar{z} = (\bar{x}, \bar{y}) \in \mathrm{gph}\, F$. Nếu $\mathrm{rge}\,(CF_{\bar{z}}) = Y$, thì $\bar{y} \in \mathrm{int}(\mathrm{rge}\, F)$ và ta có F^{-1} là ánh xạ đa trị giả-Lipschitz tại $(\bar{x}, \bar{y})$.*

Bài tập 2.3.2.

(a) Phát biểu Định lý 2.3.1 cho trường hợp $F = f$ là ánh xạ đơn trị khả vi Fréchet tại mọi điểm trong một lân cận của điểm $\bar{x} \in X$.

(b) Cho $X = Y = I\!R$, $F(x) = \{f(x)\}$, $f(x) = x^3$. Hãy tìm tất cả những điểm $\bar{x} \in I\!R$ sao cho Định lý 2.3.1 áp dụng được với $\bar{z} := (\bar{x}, f(\bar{x}))$.

Bài tập 2.3.3.

(a) Phát biểu Định lý 2.3.2 cho trường hợp $F = f$ là ánh xạ đơn trị khả vi Fréchet liên tục trong một lân cận của điểm $\bar{x} \in X$.

(b) Cho $X = Y = I\!R$, $F(x) = \{f(x)\}$, $f(x) = x^4$. Hãy tìm tất cả những điểm $\bar{x} \in I\!R$ sao cho Định lý 2.3.2 áp dụng được với $\bar{z} := (\bar{x}, f(\bar{x}))$.

Những quy tắc tính (nói đúng hơn là các ước lượng) đạo hàm của hàm hợp sau đây cho thấy *mỗi loại đạo hàm của ánh xạ đa trị xét trong mục này đều có vai trò riêng:* đạo hàm Clarke tham gia trong điều kiện chính quy, đạo hàm kề tham gia trong công thức tính đạo hàm contingent của hàm hợp[22].

Định lý 2.3.3 (Đạo hàm của hàm hợp; xem Aubin và Frankowska (1990), tr. 198-199). *Giả sử X, Z là các không gian Banach, Y là không gian định chuẩn hữu hạn chiều, $F : X \rightrightarrows Y$, $G : Y \rightrightarrows Z$, $\bar{y} \in F(\bar{x})$, $\bar{z} \in G(\bar{y})$. Giả sử F và G là các ánh xạ đóng. Nếu điều kiện sau thỏa mãn*

$$\text{rge}\left(CF_{(\bar{x},\bar{y})}\right) - \text{dom}\left(CG_{(\bar{y},\bar{z})}\right) = Y$$

thì

(i) $D^bG_{(\bar{y},\bar{x})} \circ DF_{(\bar{x},\bar{y})} \subset D(G \circ F)_{(\bar{x},\bar{z})}$;

(ii) $D^bG_{(\bar{y},\bar{x})} \circ DF^b_{(\bar{x},\bar{y})} \subset D^b(G \circ F)_{(\bar{x},\bar{z})}$;

(iii) $CG_{(\bar{y},\bar{x})} \circ CF_{(\bar{x},\bar{y})} \subset C(G \circ F)_{(\bar{x},\bar{z})}$.

Bài tập 2.3.4. Áp dụng Định lý 2.3.3 cho trường hợp $X = Y = Z = I\!R$, $F(x) = \{\sqrt{|x|}\}$, $G(y) = \{z \,:\, z \geqslant y^3\}$, và $\bar{x} = \bar{y} = \bar{z} = 0$. Trong trường hợp này, các bao hàm thức trong các khẳng định (i)–(iii) có trở thành các đẳng thức hay không?

[22]Không rõ là quy tắc (i) trong Định lý 2.3.3 có còn đúng không nếu như ánh xạ $D^bG_{(\bar{y},\bar{x})}$ ở vế trái của bao hàm thức được thay bằng ánh xạ $DG_{(\bar{y},\bar{x})}$ - là ánh xạ có đồ thị lớn hơn.

Chương 3

Tích phân của ánh xạ đa trị

Hỏi tên, rằng "Biển-Dâu-Ngàn"
Hỏi quê, rằng "Xứ Mơ Màng", đã quên
(Bùi Giáng)

Chương này trình bày khái niệm tích phân Aumann (tích phân đa trị). Vì lát cắt đo được là cơ sở để xây dựng tích phân Aumann, nên chúng ta sẽ tìm hiểu kỹ các định lý về sự tồn tại lát cắt đo được của ánh xạ đa trị. Ngoài ra, trong chương có giới thiệu các kết quả của Nguyễn Huy Chiêu (2004, 2006a) về tích phân Aumann của ánh xạ dưới vi phân Clarke. Các kết quả trong Chieu (2006c) về tích phân Aumann của ánh xạ dưới vi phân Mordukhovich và dưới vi phân Mordukhovich của phiếm hàm tích phân sẽ được giới thiệu trong mục cuối của chương sau.

Các định lý về lát cắt đo được và tích phân Aumann có vai trò quan trọng trong lý thuyết bao hàm thức vi phân (phương trình vi phân đa trị). Bạn đọc có quan tâm có thể đọc về bao hàm thức vi phân trong Aubin và Frankowska (1990), Aubin và Cellina (1984). Ứng dụng của bao hàm thức vi phân trong các vấn đề về điều khiển tối ưu được trình bày trong Clarke (1983).

3.1 Ánh xạ đa trị đo được, lát cắt đo được

Khái niệm ánh xạ đa trị đo được mở rộng một cách tự nhiên khái niệm ánh xạ (đơn trị) đo được trong giải tích hàm. Một kết quả quan trọng ở đây là định lý của von Neumann nói rằng ánh xạ đa trị đo được có giá rị khác rỗng có lát cắt đo được.

Trong suốt mục này, giả sử Y là một không gian mêtric đầy đủ, *khả li*[1], và $\mathcal{A}$ là một σ-đại số các tập con của tập hợp X. Các tập thuộc $\mathcal{A}$ được gọi là các tập đo được. Tập X xét với σ-đại số $\mathcal{A}$ (hay cặp $(X, \mathcal{A})$) được gọi là *không gian đo được*[2]. Ký hiệu *σ-đại số Borel* của không gian mêtric Y bởi $\mathcal{B}$ - tức là $\mathcal{B}$ là σ-đại số nhỏ nhất chứa tất cả các tập mở của Y.

Nhắc lại rằng họ $\mathcal{A}$ được gọi là một *σ-đại số* nếu nó thỏa mãn ba tính chất sau:

(i) $X \in \mathcal{A}$,

(ii) $X \setminus A$ thuộc $\mathcal{A}$ với mọi $A \in \mathcal{A}$,

(iii) hợp của một họ tùy ý gồm một số đếm được các tập thuộc $\mathcal{A}$ là một tập thuộc $\mathcal{A}$.

Từ (i)-(iii) suy ra rằng $\emptyset \in \mathcal{A}$ và giao của một họ tùy ý gồm một số đếm được các tập thuộc $\mathcal{A}$ là một tập thuộc $\mathcal{A}$.

Trong định nghĩa sau và trong các khẳng định ở các bài tập 3.1.1–3.1.3 ta không cần giả thiết Y là không gian mêtric đủ, khả li, mà chỉ cần giả sử Y là không gian tôpô[3]. Khi đó, $\mathcal{B}$ vẫn ký hiệu σ-đại số sinh ra bởi các tập mở của Y. Hiển nhiên $\mathcal{B}$ chứa tất cả các tập đóng của Y.

Định nghĩa 3.1.1 (Ánh xạ đơn trị đo được; xem Aubin và Frankowska (1990), tr. 307, và Rudin (1987), tr. 8). Ánh xạ đơn trị $f : X \to Y$ được gọi là *đo được* nếu ta có $f^{-1}(V) := \{x \in X \,:\, f(x) \in V\}$ là tập thuộc $\mathcal{A}$ với mỗi tập mở $V \subset Y$. (Ảnh ngược của mỗi tập mở là tập đo được.)

Dễ thấy rằng hàm số thực $\varphi : X \to I\!R$ là đo được khi và chỉ khi với mọi $\alpha \in I\!R$ tập hợp

$$\varphi^{-1}((-\infty, \alpha)) := \{x \in X \,:\, \varphi(x) < \alpha\}$$

là đo được.

Bài tập 3.1.1. Chứng minh rằng ánh xạ đơn trị $f : X \to Y$ là đo được khi và chỉ khi với mọi tập đóng $C \subset Y$ ta có $f^{-1}(C) \in \mathcal{A}$. (Ảnh ngược của mỗi tập đóng là tập đo được.)

Bài tập 3.1.2. Chứng minh rằng ánh xạ đơn trị $f : X \to Y$ là đo được khi và chỉ khi

$$\forall B \in \mathcal{B}(Y), \quad f^{-1}(B) \in \mathcal{A}.$$

(Ảnh ngược của mỗi tập Borel là một tập đo được.)

[1]Ta nói Y là không gian khả li nếu tồn tại tập con đếm được trù mật trong Y.

[2]TNTA: measurable space; xem Rudin (1987), tr. 8.

[3]Giả thiết Y là không gian mêtric đủ, khả li chỉ cần cho các định lý về sự tồn tại lát cắt đo được (xem các định lý 3.1.1–3.1.3).

Bài tập 3.1.3. Cho $f : X \to Y$ là giới hạn theo điểm của một dãy ánh xạ đo được $f_k : X \to Y$ $(k \in I\!N)$, nghĩa là

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x) \quad \forall x \in X.$$

Chứng minh rằng f là ánh xạ đo được. (Gợi ý: Do Y là khả li, tồn tại tập điểm $\{y_i : i \in \mathbb{N}\}$ trù mật trong Y. Khi đó, với mỗi tập mở $V \subset Y$ ta có

$$\begin{aligned}
&f^{-1}(V)\\
&= \{x \in X : f(x) \in V\}\\
&= \bigcup_{j\geqslant 1}\bigcup_{i\geqslant 1}\{x \in X : B\big(y_i, \frac{1}{j}\big) \subset V,\ f(x) \in B\big(y_i, \frac{1}{2j}\big)\}\\
&= \bigcup_{j\geqslant 1}\bigcup_{i\geqslant 1}\bigcup_{\ell\geqslant 1}\{x \in X : B\big(y_i, \frac{1}{j}\big) \subset V,\ f(x) \in B\big(y_i, \frac{1}{2j} - \frac{1}{\ell}\big)\}\\
&= \bigcup_{j\geqslant 1}\bigcup_{i\geqslant 1}\bigcup_{\ell\geqslant 1}\bigcup_{p\geqslant 1}\bigcap_{k\geqslant p}\{x \in X : B\big(y_i, \frac{1}{j}\big) \subset V,\ f_k(x) \in B\big(y_i, \frac{1}{2j} - \frac{1}{\ell}\big)\}.)
\end{aligned}$$

Ánh xạ đơn trị được gọi là *đơn giản* nếu nó chỉ có một số hữu hạn giá trị.

Bài tập 3.1.4. Chứng minh rằng ánh xạ đơn giản $f : X \to Y$ là đo được khi và chỉ khi ảnh ngược của mỗi điểm thuộc Y là một tập đo được (có thể rỗng) thuộc X.

Định nghĩa sau đây mở rộng khái niệm ánh xạ đơn trị đo được trong Định nghĩa 3.1.1.

Định nghĩa 3.1.2 (Ánh xạ đa trị đo được; xem Aubin và Frankowska (1990), Định nghĩa 8.1.1). Giả sử $F : X \rightrightarrows Y$ là ánh xạ đa trị có giá trị đóng. Ta nói F là *đo được* nếu với mỗi tập mở $V \subset Y$,

$$F^{-1}(V) := \{x \in X : F(x) \cap V \neq \emptyset\}$$

là tập thuộc $\mathcal{A}$. (Ảnh ngược của mỗi tập mở là tập đo được.)

Ví dụ 3.1.1. Cho $X = [-1, 2] \subset I\!R$, $\mathcal{A}$ là σ-đại số các tập con đo được theo Lebesgue[4] của X, $Y = I\!R$, $F : X \rightrightarrows Y$ là ánh xạ đa trị được cho bởi công thức $F(x) = \{-1\}$ nếu $x < 0$, $F(x) = \{1\}$ nếu $x > 0$, $F(0) = [-1, 1]$. Ta có F là ánh xạ đa trị đo được; xem Hình 12.

Bài tập 3.1.5. Sử dụng Định nghĩa 3.1.2, hãy chứng tỏ rằng ánh xạ F nói trong ví dụ trên là ánh xạ đa trị đo được.

Bài tập 3.1.6. Cho X, $\mathcal{A}$ và Y như trong Ví dụ 3.1.1. Hãy xây dựng ví dụ một ánh xạ đa trị *không đo được* $F : X \rightrightarrows Y$. (Gợi ý: Lấy $K \subset (0, 1)$ là một tập không đo được theo Lebesgue (xem Rudin (1987), tr. 53-54) và đặt $F(x) = \{1\}$ với mọi $x \in K$, $F(x) = \{0\}$ với mọi $x \in [-1, 2] \setminus K$.)

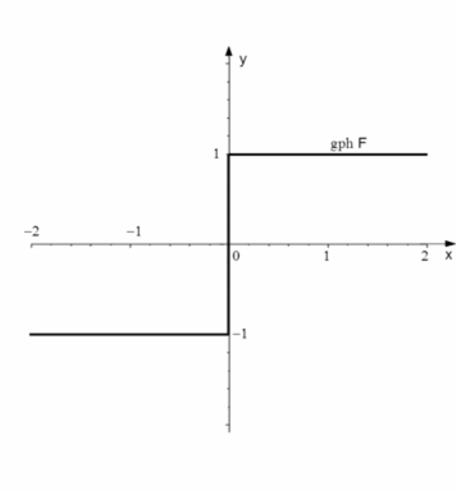
[4]Xem Rudin (1987) và Hoàng Tụy (2003).

Bài tập 3.1.7. Chứng minh rằng:

a) Nếu $F : X \rightrightarrows Y$ là ánh xạ đa trị đo được, thì $\operatorname{dom} F \in \mathcal{A}$;

b) Nếu $F : X \rightrightarrows Y$ là ánh xạ đa trị đo được, thì với mọi $y \in Y$ ta có $F^{-1}(\{y\}) \in \mathcal{A}$. (Gợi ý: Hãy biểu diễn $\{y\}$ dưới dạng giao của một số đếm được các hình cầu mở.)

c) Nếu $F : X \rightrightarrows Y$ là ánh xạ đa trị (không nhất thiết có giá trị đóng) thỏa mãn tính chất $F^{-1}(V) \in \mathcal{A}$ với mọi tập mở $V \subset Y$, thì $\bar{F} : X \rightrightarrows Y$, ở đó $\bar{F}(x) = \overline{F(x)}$ với mọi $x \in X$, là ánh xạ đa trị đo được.



Hình 12

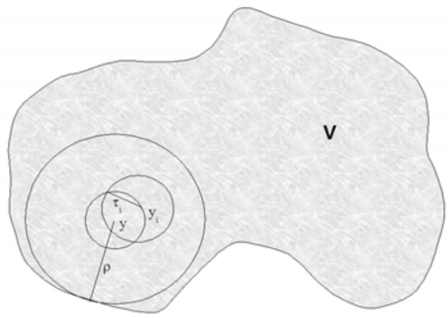
Nhận xét 3.1.1. Tính chất c) trong bài tập trên cho thấy rằng việc xây dựng khái niệm ánh xạ đa trị đo được chỉ cho các ánh xạ nhận giá trị đóng không là quá cực đoan.

Cần lưu ý rằng *đối với các ánh xạ đa trị, tính đo được theo Định nghĩa 3.1.2 (gọi là tính đo được yếu*[5]*) chưa chắc đã tương đương với tính chất "Ảnh ngược của mỗi tập đóng là tập đo được" (gọi là tính đo được mạnh*[6]*). Do đó, ảnh ngược của mỗi tập Borel qua ánh xạ đa trị đo được yếu chưa chắc đã là một tập đo được*. Định lý 3.1.3 dưới đây đưa ra một điều kiện đủ cho sự tương đương của tính đo được yếu và tính đo được mạnh. Vì khái niệm tích phân Aumann sẽ được xây dựng đối với các đối tượng thỏa mãn điều kiện đủ đó nên, để cho đơn giản, ta gọi các ánh xạ đa trị thỏa mãn điều kiện "Ảnh ngược của mỗi tập mở là tập đo được" là ánh xạ đa trị đo được; xem Aubin và Frankowska (1990), tr. 307–308.

[5] TNTA: weak measurability.

[6] TNTA: strong measurability.

Bài tập 3.1.8. Cho $V \subset Y$ là tập mở trong không gian mêtric khả li. Chứng minh rằng V biểu diễn được dưới dạng hợp của một số đếm được các hình cầu mở trong Y. (*Gợi ý*: Giả sử $Y = \overline{\{y_i : i \in I\!N\}}$. Họ các hình cầu $\{B(y_i, \tau_i) : i \in I\!N, \ \tau_i \in \mathbb{Q}, \ \tau_i > 0\}$ là đếm được. Với mỗi $y \in V$, tồn tại $\rho = \rho(y) > 0$ sao cho $B(y, \rho) \subset X$. Chọn $i \in I\!N$ sao cho $y_i \in B(y, \rho/4)$, sau đó chọn $\tau_i \in \mathbb{Q}, \ \tau_i > 0$, sao cho $\rho/4 < \tau_i < \rho/2$. Khi đó $y \in B(y_i, \tau_i) \subset V$.)



Hình 13

Bài tập 3.1.9. Cho $V \subset Y$ là tập mở trong không gian mêtric khả li. Chứng minh rằng V biểu diễn được dưới dạng hợp của một số đếm được các hình cầu đóng trong Y. (*Gợi ý*: Để ý rằng, trong các ký hiệu ở bài tập trên, ta cũng có $y \in \bar{B}(y_i, \tau_i) \subset V$.)

Bài tập 3.1.10. Cho $(X, \mathcal{A})$ là không gian đo được, Y là không gian mêtric khả li, $F : X \rightrightarrows Y$ là ánh xạ đa trị sao cho $F^{-1}(C) \in \mathcal{A}$ với mọi tập đóng $C \subset Y$. Chứng minh rằng F là ánh xạ đa trị đo được (theo Định nghĩa 3.1.2). (*Gợi ý*: Cho $V \subset Y$ là tập mở. Do khẳng định ở bài tập 3.1.9, ta có thể biểu diễn V dưới dạng

$$V = \bigcup_{j=1}^{\infty} \bar{B}(y_j, \tau_j) \quad (\tau_j > 0 \text{ với mọi } j).$$

Khi đó,

$$F^{-1}(V) = \bigcup_{j=1}^{\infty} F^{-1}\big(\bar{B}(y_j, \tau_j)\big).)$$

Định nghĩa 3.1.3 (Lát cắt). Ánh xạ đơn trị $f : X \to Y$ thỏa mãn điều kiện $f(x) \in F(x)$ với mọi $x \in X$ được gọi là một *lát cắt* của F. Nếu f là ánh xạ đo được, thì ta nói nó là một *lát cắt đo được* của F. Nếu X là tập con trong không gian định chuẩn và nếu f là ánh xạ liên tục hoặc Lipschitz địa phương, thì ta nói nó là một *lát cắt liên tục* hoặc *lát cắt Lipschitz địa phương* của F.

Định lý 3.1.1 (von Neumann, 1949). *Cho $(X, \mathcal{A})$ là không gian đo được, Y là không gian mêtric đủ, khả li, và $F : X \rightrightarrows Y$ là ánh xạ đa trị đo được, có giá trị đóng, khác rỗng. Khi đó, tồn tại lát cắt đo được $f : X \to Y$ của F.*

Chứng minh. Giả sử
$$Y_0 = \{y_i \,:\, i \in I\!N\}$$
là một tập con đếm được trù mật trong Y. Ta sẽ xây dựng dãy ánh xạ đo được
$$f_k : X \to Y \quad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$
nhận giá trị trong Y_0 sao cho f_k hội tụ theo điểm đến một lát cắt f của F khi $k \to \infty$. Do kết quả ở Bài tập 3.1.3, từ đó suy ra rằng f là lát cắt đo được cần tìm.

Với mỗi $x \in X$, giả sử $i = i(x)$ là số tự nhiên nhỏ nhất sao cho
$$F(x) \cap B(y_i, 1) \neq \emptyset. \tag{1.1}$$
(Vì Y_0 là trù mật trong Y, với mọi $y \in Y$ và với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại $i \in I\!N$ sao cho $y \in B(y_i, \varepsilon)$. Vậy tập hợp các chỉ số $i \in I\!N$ thỏa mãn (1.1) là khác rỗng. Hiển nhiên trong tập đó có phần tử nhỏ nhất.) Ta đặt
$$f_0(x) = y_i \quad \forall x \in X, \tag{1.2}$$
ở đó $i = i(x)$. Ánh xạ f_0 là đo được. Thật vậy, với mọi $i \in I\!N$,
$$\begin{aligned} f_0^{-1}(y_i) \; &= \{x \in X \,:\, F(x) \cap B(y_i, 1) \neq \emptyset\} \\ &\quad \bigcap \{x \in X \,:\, F(x) \cap B(y_j, 1) = \emptyset \;\; \forall j = 1, 2, \ldots, i-1\} \\ &= F^{-1}(B(y_i, 1)) \bigcap \Big(X \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} F^{-1}(B(y_j, 1)) \Big) \end{aligned}$$
là tập hợp thuộc $\mathcal{A}$ do F là ánh xạ đa trị đo được. Với mọi tập mở $V \subset Y$, từ đó ta suy ra rằng
$$f_0^{-1}(V) = \bigcup_{i \in \{j \,:\, y_j \in V\}} f_0^{-1}(y_i)$$
là tập hợp thuộc $\mathcal{A}$. Điều đó chứng tỏ rằng f_0 là ánh xạ đo được. Đối với f_0, do (1.1) và (1.2) ta còn có
$$d(f_0(x), F(x)) < 1 \quad \forall x \in X. \tag{1.3}$$

Giả sử ta đã xây dựng được dãy hữu hạn các ánh xạ

$$f_k : X \to Y \quad (k = 0, 1, \dots, m)$$

nhận giá trị trong Y_0 sao cho

$$d(f_k(x), F(x)) < 2^{-k} \quad (\forall x \in X,\ \forall k \in \{0, 1, \dots, m\}) \tag{1.4}$$

và

$$d(f_k(x), f_{k+1}(x)) < 2^{-(k-1)} \quad (\forall x \in X,\ \forall k \in \{0, 1, \dots, m-1\}) \tag{1.5}$$

Đối với $m = 0$, vì (1.3) nghiệm đúng nên ta có (1.4). Tính chất (1.5) được thỏa mãn vì lúc này tập chỉ số $\{0, 1, \dots, m-1\}$ là rỗng. Với mỗi $i \in I\!N$, ta đặt

$$S_i = \{x \in X \,:\, f_m(x) = y_i\}.$$

Các tập $\{S_i\}_{i \in I\!N}$ là đôi một không giao nhau, và ta có $X = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} S_i$. Do (1.4),

$$F(x) \cap B(y_i, 2^{-m}) \neq \emptyset \quad \forall x \in S_i. \tag{1.6}$$

Cố định điểm $x \in X$ và chọn $i \in I\!N$ sao cho $x \in S_i$. Ký hiệu bởi $j = j(x)$ số tự nhiên nhỏ nhất sao cho

$$[F(x) \cap B(y_i, 2^{-m})] \cap B(y_j, 2^{-(m+1)}) \neq \emptyset. \tag{1.7}$$

Do (1.6), số tự nhiên $j = j(x)$ như vậy là tồn tại và duy nhất. Đặt $f_{m+1}(x) = y_j$. Khi đó, lấy y là một phần tử thuộc tập hợp ở vế trái của (1.7), ta có

$$\begin{aligned} d(f_m(x), f_{m+1}(x)) = d(y_i, y_j) \ &\leqslant d(y_i, y) + d(y_j, y) \\ &\leqslant 2^{-m} + 2^{-(m+1)} \\ &< 2^{-(m-1)}. \end{aligned}$$

Ngoài ra, từ (1.7) suy ra rằng

$$d(f_{m+1}(x), F(x)) < 2^{-(m+1)}.$$

Vậy ta đã xây dựng được ánh xạ *đo được* (xem Bài tập 3.1.10) $f_{m+1} : X \to Y$ nhận giá trị trong Y_0 sao cho (1.4) và (1.5), với m được thay bởi $m+1$, nghiệm đúng.

Từ (1.5) suy ra rằng, với mọi $x \in X$, dãy $\{f_k(x)\}_{k \in I\!N}$ là dãy Cauchy. Thật vậy, theo (1.5) ta có

$$\begin{aligned} &d(f_{k+p}(x), f_k(x)) \\ &\leqslant d(f_{k+p}(x), f_{k+p-1}(x)) + d(f_{k+p-1}(x), f_{k+p-2}(x)) \\ &\quad + \dots + d(f_{k+1}(x), f_k(x)) \\ &\leqslant 2^{-(k+p-2)} + 2^{-(k+p-3)} + \dots + 2^{-(k-1)} \\ &\leqslant 2^{-k+2} \end{aligned} \tag{1.8}$$

với mọi $k \in I\!N$ và $p \in I\!N$. Vì Y là không gian mêtric đủ, nên tồn tại giới hạn $\lim_{k\to\infty} f_k(x) \in Y$. Ký hiệu phần tử giới hạn đó là $f(x)$. Từ (1.8) suy ra rằng dãy $\{f_k\}$ hội tụ đều đến f. Cho $k = m$ và lấy giới hạn trong bất đẳng thức ở (1.4) khi $m \to \infty$, ta nhận được

$$d(f(x), F(x)) = 0 \quad \forall x \in X.$$

Vì $F(x)$ là tập đóng với mọi $x \in X$, từ đó suy ra

$$f(x) \in F(x) \quad \forall x \in X.$$

Vậy f là lát cắt đo được của F. □

Bài tập 3.1.11. Chứng minh rằng ánh xạ f_{m+1} được xây dựng trong chứng minh trên là đo được. (*Gợi ý*: Lập luận tương tự như khi chứng minh f_0 là ánh xạ đo được.)

Bài tập 3.1.12. Hãy chỉ ra một vài lát cắt đo được khác nhau của

a) ánh xạ đa trị F trong Ví dụ 3.1.1,

b) ánh xạ đa trị $F : I\!R^n \rightrightarrows I\!R^n,\ n \geqslant 2$, được cho bởi công thức

$$F(x) = \partial\varphi(x) \quad (x \in I\!R^n),$$

ở đó $\partial\varphi(x)$ ký hiệu dưới vi phân của hàm lồi $\varphi(u) = \|u\|$ tại điểm x. (Ký hiệu miền xác định của F bởi X và lấy $\mathcal{A}$ là họ các tập con đo được theo Lebesgue của X.)

Trong chứng minh của Định lý 3.1.1, các giả thiết sau đã được sử dụng triệt để:

(i) X là không gian mêtric khả li,
(ii) X là không gian mêtric đủ,
(iii) F là ánh xạ đo được,
(iv) F là ánh xạ có giá trị đóng, khác rỗng.

C. Castaing[7] đã phát hiện ra rằng nếu các điều kiện (i)–(iv) được thỏa mãn, thì chẳng những tồn tại *một lát cắt đo được nào đó* của ánh xạ đa trị F, mà còn tồn tại *một họ đếm được các lát cắt đo được* $\{f_k\}_{k\in I\!N}$ của F sao cho

$$F(x) = \overline{\{f_k(x) \,:\, k \in I\!N\}} \quad (\forall x \in X). \tag{1.9}$$

Như vậy, với mỗi $x \in X$, tập giá trị $\{f_k(x) : k \in I\!N\}$ của các lát cắt là *trù mật* trong tập $F(x)$. Khi tính chất (1.9) nghiệm đúng, thì người ta nói $\{f_k\}$ là

[7]Charles Castaing là nhà toán học Pháp gốc Việt, giáo sư toán học ở Université de Montpellier II (Montpellier, Pháp), thành viên Ban cố vấn của tạp chí Acta Mathematica Vietnamica.

họ đếm được các lát cắt đo được trù mật[8]; xem Aubin và Frankowska (1990), tr. 310.

Định lý sau đây vừa chỉ ra sự tồn tại họ đếm được các lát cắt đo được trù mật của ánh xạ đa trị đo được, vừa khẳng định rằng tính chất đó cũng đặc trưng cho tính đo được của các ánh xạ đa trị. Ở đây cũng sẽ chứng tỏ rằng ta có thể đặc trưng tính đo được của ánh xạ đa trị thông qua tính đo được họ hàm khoảng cách

$$x \mapsto d(y, F(x)) \quad (y \in Y).$$

Định lý 3.1.2 (C. Castaing, 1967). *Cho $(X, \mathcal{A})$ là không gian đo được, Y là không gian mêtric đủ, khả li, và $F : X \rightrightarrows Y$ là ánh xạ đa trị có giá trị đóng, khác rỗng. Khi đó, các khẳng định sau là tương đương:*

(a) *F là ánh xạ đa trị đo được;*

(b) *Tồn tại một họ đếm được các lát cắt đo được trù mật $\{f_k\}_{k\in \mathbb{N}}$ của F;*

(c) *Với mỗi $y \in Y$, hàm số $x \mapsto d(y, F(x))$ là đo được.*

Chứng minh. (a) $\Rightarrow$ (b). Giả sử $Y_0 = \{y_i : i \in \mathbb{N}\}$ là một tập con đếm được trù mật trong Y. Với mỗi $k \in \mathbb{N}$ và $i \in \mathbb{N}$ ta xét ánh xạ đa trị $F_{i,k} : X \rightrightarrows Y$ cho bởi công thức

$$F_{i,k}(x) = \begin{cases} F(x) \cap B(y_i, k^{-1}) & \text{nếu } F(x) \cap B(y_i, k^{-1}) \neq \emptyset \\ F(x) & \text{trong trường hợp còn lại.} \end{cases}$$

(Ta thấy rằng $F_{i,k}$ là ánh xạ cắt gọn của F. Để ý thêm rằng bán kính của các hình cầu $B(y_i, k^{-1})$ càng nhỏ khi k càng lớn.) Rõ ràng $\bar{F}_{i,k} : X \rightrightarrows Y$, ở đó $\bar{F}_{i,k}(x) := \overline{F_{i,k}(x)}$, là ánh xạ đa trị có giá trị đóng, khác rỗng, và

$$\bar{F}_{i,k}(x) \subset F(x) \quad \forall x \in X.$$

Ngoài ra, $\bar{F}_{i,k}$ là ánh xạ đa trị đo được. Thật vậy, giả sử $V \subset Y$ là tập mở bất kỳ cho trước. Vì

$$\begin{aligned} \bar{F}_{i,k}^{-1}(V) &= \{x \in X : \bar{F}_{i,k}(x) \cap V \neq \emptyset\} \\ &= \{x \in X : F_{i,k}(x) \cap V \neq \emptyset\} \\ &= \{x \in X : F(x) \cap (B(y_i, k^{-1}) \cap V) \neq \emptyset\} \\ &\quad \bigcup \Big((X \setminus \{x \in X : F(x) \cap B(y_i, k^{-1}) \neq \emptyset\}) \\ &\qquad \cap \{x \in X : F(x) \cap V \neq \emptyset\} \Big) \\ &= F^{-1}(B(y_i, k^{-1}) \cap V) \bigcup \Big((X \setminus F^{-1}(B(y_i, k^{-1}))) \cap F^{-1}(V) \Big) \end{aligned}$$

[8]TNTA: dense countable family of measurable selections.

và F là đo được, nên $\bar{F}_{i,k}^{-1}(V) \in \mathcal{A}$. Điều đó chứng tỏ rằng $\bar{F}_{i,k}$ là ánh xạ đa trị đo được.

Theo Định lý 3.1.1, $\bar{F}_{i,k}$ có lát cắt đo được $f_{i,k} : X \to Y$. Rõ ràng $\{f_{i,k}\}_{(i,k)\in I\!N\times I\!N}$ là một họ đếm được các lát cắt đo được của F. Ta sẽ chứng minh rằng

$$\overline{\{f_{i,k}(x) \,:\, (i,k) \in I\!N \times I\!N\}} = F(x) \quad \forall x \in X. \tag{1.10}$$

Lấy tùy ý $x \in X$, $y \in F(x)$, và $\varepsilon > 0$. Để thu được (1.10), ta chỉ cần chứng minh rằng

$$\exists (i,k) \in I\!N \times I\!N \ \text{ sao cho } \ f_{i,k}(x) \in B(y,\varepsilon). \tag{1.11}$$

Chọn $k \in I\!N$ sao cho $k^{-1} < \varepsilon/2$ và chọn $i \in I\!N$ sao cho $d(y, y_i) < k^{-1}$. Khi đó, vì $y \in F(x) \cap B(y_i, k^{-1})$, nên $F(x) \cap B(y_i, k^{-1}) \neq \emptyset$. Do vậy,

$$F_{i,k}(x) = F(x) \cap B(y_i, k^{-1}).$$

Vì $f_{i,k}(x) \in \bar{F}_{i,k}(x)$, từ đó ta có $f_{i,k}(x) \in \bar{B}(y_i, k^{-1})$. Vậy

$$\begin{aligned} d(f_{i,k}(x), y) &\leqslant d(f_{i,k}(x), y_i) + d(y_i, y) \\ &< k^{-1} + k^{-1} \\ &< \varepsilon, \end{aligned}$$

và ta có (1.11).

(b) $\Rightarrow$ (c). Giả sử $\{f_k\}_{k\in I\!N}$ một họ đếm được các lát cắt đo được trù mật của F. Lấy tùy ý $y \in Y$. Với mỗi $k \in I\!N$, xét hàm số $x \mapsto d(y, f_k(x))$. Với mọi $\alpha \in I\!R$, tập hợp

$$\begin{aligned} X_\alpha := \{x \in X \,:\, d(y, f_k(x)) < \alpha\} &= \{x \in X \,:\, f_k(x) \in B(y,\alpha)\} \\ &= f_i^{-1}(B(y,\alpha)) \end{aligned}$$

thuộc $\mathcal{A}$. Điều đó chứng tỏ rằng, với mỗi $k \in I\!N$, $d(y, f_k(\cdot))$ là hàm số thực đo được. Vì vậy, theo Định lý 1.14 trong Rudin (1987), hàm số

$$x \mapsto \inf_{k\in I\!N} d(y, f_k(x))$$

là đo được. Do (1.9) ta có

$$\inf_{k\in I\!N} d(y, f_k(x)) = d(y, F(x)).$$

Suy ra hàm số $x \mapsto d(y, F(x))$ là đo được.

(c) $\Rightarrow$ (a). Giả sử rằng với mỗi $y \in Y$ hàm số $x \mapsto d(y, f_k(x))$ là đo được. Khi đó, với mỗi $\alpha \in I\!R$ ta có $\{x \in X : d(y, F(x)) < \alpha\}$ là tập đo được. Vì

$$\begin{aligned} &\{x \in X \,:\, d(y, F(x)) < \alpha\} \\ &= \{x \in X \,:\, F(x) \cap B(y,\alpha) \neq \emptyset\} \\ &= F^{-1}(B(y,\alpha)), \end{aligned}$$

nên $F^{-1}(B(y,\alpha)) \in \mathcal{A}$. Cho trước một tập mở tùy ý $V \subset Y$, sử dụng kết quả ở Bài tập 3.1.8 ta cho thể biểu diễn V dưới dạng

$$V = \bigcup_{j=1}^{\infty} B(y_j, \tau_j) \quad (\tau_j > 0 \text{ với mọi } j).$$

Khi đó,

$$F^{-1}(V) = \bigcup_{j=1}^{\infty} F^{-1}(B(y_j, \tau_j)))$$

là tập đo được. Vậy F là ánh xạ đa trị đo được. $\square$

Bài tập 3.1.13. Hãy kiểm chứng khẳng định (a) $\Rightarrow$ (b) của Định lý 3.1.2 đối với các ánh xạ đa trị trong Bài tập 3.1.12.

Bài tập 3.1.14. Xét ánh xạ đa trị F trong Ví dụ 3.1.1 và lấy $y = -3$. Vẽ đồ thị của hàm số $x \mapsto d(y, F(x))$. Giải thích tại sao hàm số đó là đo được.

Bài tập 3.1.15. Không sử dụng Định lý von Neumann, hãy đưa ra chứng minh trực tiếp cho khẳng định (a) $\Leftrightarrow$ (c) của Định lý 3.1.5. Chứng minh đó có cần dựa vào các giả thiết

(i) X là không gian mêtric khả li,

(ii) X là không gian mêtric đủ,

hay không?

Nhận xét 3.1.2. Sự tồn tại chứng minh trực tiếp khá đơn giản cho khẳng định (a) $\Leftrightarrow$ (c) của Định lý 3.1.2 cho thấy rằng việc sử dụng hàm khoảng cách[9] là một kỹ thuật hiệu quả giúp chứng minh sự tương đương giữa (a) và (b).

Phần cuối của mục này được dành để chứng minh Định lý đặc trưng cho ánh xạ đa trị đo được. Ngoài sự tương đương (a) $\Leftrightarrow$ (b) $\Leftrightarrow$ (c) đã thu được ở trên, các đặc trưng khác sẽ được chứng minh dưới giả thiết phụ (khá rắc rối!) sau đây: *$\mathcal{A}$ là σ-đại số tương ứng với một độ đo dương, σ-hữu hạn μ của X, và $\mathcal{A}$ là μ-đủ.* (Trong Định lý von Neumann và Định lý Castaing, $\mathcal{A}$ là một σ-đại số *tùy ý* của X.)

Định nghĩa 3.1.4 (Độ đo; không gian có độ đo; độ đo đủ; độ đo σ-hữu hạn).

[9] Hàm khoảng cách chính là một dạng hàm giá trị tối ưu (hàm marginal) đóng vai trò quan trọng trong một số chứng minh và cấu trúc toán học. Cho đến nay, các tính chất vi phân của hàm khoảng cách vẫn là đối tượng được người ta quan tâm nghiên cứu; xem Mordukhovich và Nam (2005b, 2006) và các tài liệu được trích dẫn trong đó.

1. Ánh xạ $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ được gọi là một *độ đo dương* trên σ-đại số $\mathcal{A}$ nếu với mọi họ đếm được các tập đôi một không giao nhau $\{A_k\}_{k\in I\!N}$, ở đó $A_k \in \mathcal{A}$ với mọi $k \in I\!N$, ta có

$$\mu\left(\bigcup_{k\in I\!N} A_k\right) = \sum_{k\in I\!N} \mu(A_k).$$

2. Tập X với σ-đại số $\mathcal{A}$ và độ đo dương μ trên $\mathcal{A}$ (hay bộ ba $(X, \mathcal{A}, \mu)$) được gọi là *không gian có độ đo*[10].

3. Ta nói μ là $\sigma-$*hữu hạn* nếu X là hợp của một họ đếm được các tập có độ đo hữu hạn.

4. Nếu với mọi $A \in \mathcal{A}$ thỏa mãn $\mu(A) = 0$ và với mọi $A' \subset A$ ta có $A' \in \mathcal{A}$, thì ta nói rằng $\sigma-$đại số $\mathcal{A}$ là $\mu-$*đủ* (tức là *đủ theo độ đo* μ).

5. Bộ ba $(X, \mathcal{A}, \mu)$ được gọi là một *không gian có độ đo đủ, σ-hữu hạn*[11] nếu μ là độ đo dương $\sigma-$hữu hạn và $\mathcal{A}$ là $\mu-$đủ.

Ví dụ 3.1.2. Cho $X = I\!R^n$, $\mathcal{A}$ là $\sigma-$đại số các tập con đo được theo Lebesgue của $I\!R^n$, μ là độ đo Lebesgue trên $I\!R^n$. Ta có $(X, \mathcal{A}, \mu)$ là một không gian có độ đo đủ, σ-hữu hạn.

Cho $(X, \mathcal{A})$ là không gian đo được, Y là không gian mêtric. Như đã quy ước từ đầu mục này, $\mathcal{B}$ ký hiệu $\sigma-$đại số Borel của Y. Ta xét $\sigma-$đại số sinh ra bởi họ tập

$$\{A \times B \subset X \times Y \,:\, A \in \mathcal{A},\ B \in \mathcal{B}\}, \tag{1.12}$$

và ký hiệu nó bởi $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Như vậy, $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ là $\sigma-$đại số nhỏ nhất trong $X \times Y$ chứa họ tập (1.12).

Để chứng minh Định lý đặc trưng, chúng ta phải dựa vào hai bổ đề sau.

Bổ đề 3.1.1 (xem Castaing và Valadier (1977)). *Cho $(X, \mathcal{A}, \mu)$ là không gian có độ đo đủ, σ-hữu hạn, Y là không gian mêtric đủ, khả li. Nếu $M \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, thì*

$$\mathrm{pr}_X(M) := \{x \in X \,:\, \exists y \in Y,\ (x, y) \in M\}$$

là tập thuộc $\mathcal{A}$. (Hình chiếu lên X của một tập đo được theo $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ là đo được theo $\mathcal{A}$.)

Bổ đề 3.1.2. *Giả sử $(X, \mathcal{A})$ là không gian đo được, Y và Z là hai không gian mêtric khả li, $g : X \times Y \to Z$ là ánh xạ Caratheodory (điều đó có nghĩa là với mọi $y \in Y$ ánh xạ $g(\cdot, y)$ là đo được, và với mọi $x \in X$ ánh xạ $g(x, \cdot)$ là liên tục). Khi đó g là đo được theo $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$.*

[10]TNTA: measure space; xem Rudin (1987), tr. 16.

[11]TNTA: complete σ-finite measure space.

Chứng minh. Ta chỉ cần chứng minh rằng tồn tại dãy ánh xạ

$$g_k : X \times Y \to Z \quad (k \in I\!N)$$

đo được theo $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ và hội tụ theo điểm đến g (xem Bài tập 3.1.3). Giả sử $\{y_i : i \in I\!N\}$ là tập điểm đếm được trù mật trong Y. Giả sử $(x, y) \in X \times Y$. Với mỗi $k \in I\!N$, ký hiệu $i = i(k) \in I\!N$ là chỉ số nhỏ nhất sao cho $y \in B(y_i, k^{-1})$ hay, hoàn toàn tương đương,

$$y_i \in B(y, k^{-1}). \tag{1.13}$$

Ta đặt

$$g_k(x, y) = g(x, y_i).$$

Do (1.13) và do tính liên tục của ánh xạ $g(x, \cdot)$ ta có

$$\lim_{k\to\infty} g_k(x, y) = \lim_{k\to\infty} g(x, y_{i(k)}) = g(x, y)$$

với mọi $(x, y) \in X \times Y$. Ta chỉ còn phải chứng minh rằng g_k là đo được theo $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Đặt

$$Y_{i,k} := B(y_i, k^{-1}) \setminus \Big(\bigcup_{j=1}^{i-1} B(y_j, k^{-1}) \Big).$$

Vì $\{y_i : i \in I\!N\}$ là trù mật trong Y, nên ta có

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} Y_{i,k} = Y. \tag{1.14}$$

Rõ ràng $Y_{i,k} \in \mathcal{B}$ với mọi $(i, k) \in I\!N \times I\!N$. Ngoài ra,

$$g_k(x, y) = g(x, y_i) \quad \forall (x, y) \in X \times Y_{i,k}.$$

Điều đó chứng tỏ rằng g_k là đo được theo $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Thật vậy, giả sử $W \subset Z$ là tập mở tùy ý. Ta có

$$\begin{aligned} g_k^{-1}(W) &= \{(x, y) \in X \times Y : g_k(x, y) \in W\} \\ &= \bigcup_{i=1}^{\infty} \{(x, y) \in X \times Y_{i,k} : g(x, y_i) \in W\} \\ &= \bigcup_{i=1}^{\infty} \Big((g(\cdot, y_i))^{-1}(W) \times Y_{i,k} \Big) \end{aligned}$$

là tập thuộc $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. □

Định lý 3.1.3 (Characterization Theorem - Định lý đặc trưng; xem Aubin và Frankowska (1990), tr. 310). *Cho $(X, \mathcal{A}, \mu)$ là không gian có độ đo đủ, σ-hữu hạn, Y là không gian mêtric đủ, khả li. Cho $F : X \rightrightarrows Y$ là ánh xạ đa trị có giá trị đóng, khác rỗng. Khi đó, các khẳng định* (a), (b), (c) *trong Định lý 3.1.2 và các khẳng định sau là tương đương:*

(d) $\operatorname{gph} F \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$;

(e) $F^{-1}(C) \in \mathcal{A}$ *với mọi tập đóng* $C \subset Y$*;*

(f) $F^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ *với mọi tập Borel* $B \in \mathcal{B}$.

Chứng minh. Do (a) $\Leftrightarrow$ (b) $\Leftrightarrow$ (c), định lý sẽ được chứng minh nếu chúng ta chứng tỏ được rằng

$$\text{(f)} \Rightarrow \text{(e)}, \quad \text{(e)} \Rightarrow \text{(a)}, \quad \text{(a)} \Rightarrow \text{(c)}, \quad \text{(c)} \Rightarrow \text{(d)}, \quad \text{(d)} \Rightarrow \text{(f)}.$$

(Tất nhiên ta không cần chứng minh khẳng định (a) $\Rightarrow$ (c) nữa.)

(f) $\Rightarrow$ (e). Hiển nhiên, vì mọi tập đóng là tập Borel.

(e) $\Rightarrow$ (a). Khẳng định này đã được thiết lập trong Bài tập 3.1.10.

(c) $\Rightarrow$ (d). Giả sử rằng với mọi $y \in Y$ hàm số $d(y, F(\cdot))$ là đo được. Vì F có giá trị đóng, khác rỗng, nên ta có

$$\operatorname{gph} F = \{(x, y) \in X \times Y \,:\, d(y, F(x)) = 0\}. \tag{1.14}$$

Vì với mỗi $x \in X$ hàm số $d(\cdot, F(x))$ là liên tục, nên áp dụng Bổ đề 3.1.2 cho trường hợp

$$g(x, y) := d(y, F(x)) \quad \forall (x, y) \in X \times Y$$

ta suy ra rằng $g : X \times Y \to I\!R$ là đo được theo $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Do (1.14),

$$\operatorname{gph} F = g^{-1}(\{0\}).$$

Theo khẳng định b) ở Bài tập 3.1.7, ta có $\operatorname{gph} F \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$.

(d) $\Rightarrow$ (f). Giả sử rằng $\operatorname{gph} F \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ và giả sử $B \subset Y$ là tập Borel bất kỳ. Dễ thấy rằng

$$F^{-1}(B) = \operatorname{pr}_X(\operatorname{gph} F \cap (X \times B)).$$

Vì $\operatorname{gph} F \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ và $X \times B \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, từ đó ta có $F^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ theo Bổ đề 3.1.1. □

Định lý đặc trưng cho ta hệ quả sau đây về sự tương đương giữa tính đo được (còn gọi là tính đo được yếu) và tính đo được mạnh của ánh xạ đa trị.

Hệ quả 3.1.1. *Cho* $X = I\!R^n$, $\mathcal{A}$ *là* $\sigma-$*đại số các tập đo được theo Lebesgue của* $I\!R^n$, μ *là độ đo Lebesgue trên* $I\!R^n$. *Cho* Y *là không gian mêtric đủ, khả li, và* $F : X \rightrightarrows Y$ *là ánh xạ đa trị có giá trị đóng, khác rỗng. Khi đó,* F *là đo được khi và chỉ khi* $F^{-1}(C) \in \mathcal{A}$ *với mọi tập đóng* $C \subset Y$.

Bài tập 3.1.16. Cho $X = I\!R^n$, $\mathcal{A}$ là $\sigma-$đại số các tập đo được theo Lebesgue của $I\!R^n$, μ là độ đo Lebesgue trên $I\!R^n$. Cho Y là không gian mêtric đủ, khả li, và $F : X \rightrightarrows Y$ là ánh xạ đa trị có giá trị đóng, khác rỗng. Chứng minh rằng:

a) Nếu F là nửa liên tục dưới ở trong X, thì F là ánh xạ đa trị đo được;

b) Nếu F là nửa liên tục trên ở trên X, thì F là ánh xạ đa trị đo được.

(*Gợi ý*: Lưu ý rằng F là nửa liên tục dưới ở trong X khi và chỉ khi ảnh ngược của mỗi tập mở trong Y là tập mở trong X, F là nửa liên tục trên ở trong X khi và chỉ khi ảnh ngược của mỗi tập đóng trong Y là tập đóng trong X. Áp dụng Hệ quả 3.1.1 để chứng minh khẳng định b).)

Nhận xét 3.1.3. Có những ánh xạ đa trị là đo được nhưng không là nửa liên tục trên hoặc nửa liên tục dưới tại bất cứ điểm nào thuộc miền xác định của nó. Ví dụ, $F : I\!R \rightrightarrows I\!R$ cho bởi công thức $f(x) = \{0\}$ nếu $x \in \mathbb{Q}$ và $f(x) = \{1\}$ nếu $x \notin \mathbb{Q}$.

Kết hợp các khẳng định nói trong Bài tập 3.1.16 với Định lý 3.1.1 (t.ư., với Định lý 3.1.2) ta có kết luận về sự tồn tại lát cắt đo được (t.ư., về sự tồn tại một họ đếm được trù mật các lát cắt đo được) của ánh xạ đa trị nửa liên tục trên, hoặc nửa liên tục dưới. Theo các thuật ngữ của mục tiếp sau, nếu Y là không gian Banach khả li, thì *ta có thể lấy tích phân ánh xạ đa trị nửa liên tục trên, hoặc nửa liên tục dưới trên các tập đo được trong* $X = I\!R^n$.

3.2 Tích phân của ánh xạ đa trị

Trong suốt mục này, $(X, \mathcal{A}, \mu)$ là một không gian có độ đo đủ, $\sigma-$hữu hạn, và Y là không gian Banach khả li[12].

Ta sử dụng ký hiệu $L^1(X; Y, \mu)$ để chỉ tập hợp các ánh xạ đơn trị đo được khả tích từ X vào Y, tức là

$$L^1(X; Y, \mu) = \left\{ f : X \to Y \ : \ f \text{ đo được}, \int_X \|f(x)\| d\mu < \infty \right\}.$$

Giả sử $F : X \rightrightarrows Y$ là ánh xạ đa trị có giá trị đóng, khác rỗng. Ta ký hiệu *tập hợp các lát cắt khả tích* của F bởi $\mathcal{F}$:

$$\mathcal{F} = \{ f \in L^1(X; X, \mu) \ : \ f(x) \in F(x) \text{ hầu khắp trên } X \}.$$

Ta nói F là *giới nội khả tích*[13] nếu tồn tại một hàm $\gamma \in L^1(X; I\!R, \mu)$ sao cho

$$F(x) \subset \gamma(x) \bar{B}_Y \text{ hầu khắp trên } X.$$

Nếu F có tính chất đó, thì mỗi lát cắt đo được của F là một phần tử thuộc tập $\mathcal{F}$.

[12]Trường hợp hay được xét nhất và có nhiều ứng dụng nhất là $X = I\!R^n$, $\mathcal{A}$ là σ-đại số gồm các tập con đo được theo Lebesgue của $I\!R^n$, μ là độ đo Lebesgue trên $I\!R^n$, còn $Y = I\!R^m$ là không gian Euclide hữu hạn chiều; xem Clarke (1983), tr. 111.

[13]TNTA: intergrably bounded.

Trước khi định nghĩa tích phân của ánh xạ đa trị, chúng ta cần nhắc đến *phép lấy tích phân của các hàm nhận giá trị véctơ*[14].

Định nghĩa 3.2.1 (xem Rudin (1991), tr. 77). Giả sử $f : X \to Y$ là ánh xạ đo được sao cho với mỗi $y^* \in Y^*$ hàm số $y^* \circ f$ cho bởi công thức

$$(y^* \circ f)(x) = \langle y^*, f(x) \rangle \quad \forall x \in X \tag{2.1}$$

là khả tích[15]. Nếu tồn tại véctơ $y \in Y$ sao cho

$$\langle y^*, y \rangle = \int_X (y^* \circ f)(x) d\mu \quad \forall y^* \in Y^*$$

thì ta nói *tích phân của f trên X theo độ đo μ bằng y*, và viết

$$y = \int_X f d\mu. \tag{2.2}$$

Dễ thấy rằng không thể có nhiều hơn một phần tử y thỏa mãn (2.2). Vậy tính duy nhất của tích phân của hàm nhận giá trị véctơ là hiển nhiên. Nếu X là không gian tôpô, $\mathcal{A}$ chứa $\sigma-$đại số Borel của X, $f : X \to Y$ là hàm liên tục, và $f(X) \subset Y$ là tập compắc, thì tồn tại tích phân (2.2); xem Rudin (1991), tr. 77. Nếu $Y = I\!R^m$ và $f = (f_1, \dots, f_m)$, thì từ định nghĩa trên suy ra rằng tích phân (2.2) tồn tại khi và chỉ khi mỗi hàm f_i $(i = 1, \dots, m)$ là khả tích. Khi đó ta có

$$\int_X f d\mu = \left(\int_X f_1(x) d\mu, \dots, \int_X f_m(x) d\mu \right). \tag{2.3}$$

Đối với các hàm véctơ nhận giá trị trong không gian Banach hữu hạn chiều, người ta thường lấy công thức (2.3) làm định nghĩa tích phân $\int_X f d\mu$.

Để định nghĩa tích phân của ánh xạ đa trị, R. J. Aumann đề nghị gọi tập hợp các *tích phân của các lát cắt đo được khả tích* của F là tích phân của F.

Định nghĩa 3.2.2 (R. J. Aumann, 1965). Tích phân $\int_X F d\mu$ của ánh xạ đa trị đo được $F : X \rightrightarrows Y$ là tập hợp các tích phân của các lát cắt đo được khả tích của F:

$$\int_X F\, d\mu := \left\{ \int_X f\, d\mu \ : \ f \in \mathcal{F} \right\}. \tag{2.4}$$

Vậy $\int_X F d\mu$ là một tập con của Y.

---

[14]TNTA: vector-valued integration.

[15]Nếu $f \in \mathcal{F}$, thì f có tính chất đó.

Bài tập 3.2.1. Cho X, $\mathcal{A}$ và F như trong Ví dụ 3.1.1. Cho μ là độ đo Lebesgue trên đoạn $[-1,2]$. Tính tích phân $\int_X F\,d\mu$. (Gợi ý: Với mỗi $f \in \mathcal{F}$ ta có $f(x) \in F(x)$ với mọi x, ngoại trừ $x \in X_f$, ở đó X_f là một tập có độ đo 0. Đặt $\tilde{f}(x) = f(x)$ với mọi $x \in \Big(X \setminus X_f\Big)$ và chọn tùy ý $\tilde{f}(x) \in F(x)$ với $x \in X_f$. Do rge F là giới nội, nên $\tilde{f} \in \mathcal{F}$ và ta có $\int_X \tilde{f}(x)\,d\mu = \int_X f(x)\,d\mu$. Vì vậy, trong công thức (2.4) chỉ cần xét các lát cắt $f \in \mathcal{F}$ mà $f(x) \in F(x)$ với mọi $x \in X$. Ký hiệu tập các lát cắt đó bởi $\mathcal{F}_0$. Để ý rằng $f \in \mathcal{F}_0$ khi và chỉ khi tồn tại $\alpha \in [-1,1]$ sao cho $f(x) = -1$ nếu $x < 0$, $f(0) = \alpha$, $f(x) = 1$ nếu $x > 0$. Từ đó suy ra $\int_X F\,d\mu = \{1\}$.)

Tích phân của ánh xạ đa trị có nhiều tính chất thú vị, trong đó có một số tính chất tương tự như trong trường hợp tích phân của các hàm số thực.

Mệnh đề 3.2.1 (xem Aubin và Frankowska (1990), tr. 327). *Giả sử* $F_i : X \rightrightarrows Y$ $(i = 1,2)$ *là các ánh xạ đa trị có giá trị đóng, khác rỗng. Đặt*

$$G(x) := \overline{F_1(x) + F_2(x)}.$$

Khi đó, các tính chất sau nghiệm đúng:

(i) *Với mọi* $\lambda \in I\!R$, $\int_X (\lambda F)\,d\mu = \lambda \int_X F\,d\mu$;

(ii) $\overline{\int_X \overline{\mathrm{co}} F\,d\mu} = \overline{\mathrm{co}} \int_X F\,d\mu$;

(iii) *Với mọi* $p \in Y^*$,

$$\sup\left\{\langle p,y\rangle \,:\, y \in \int_X F\,d\mu\right\} = \int_X C_F(p,x)\,d\mu,$$

ở đó $C_F(p,x) = \sup\{\langle p,y\rangle \,:\, y \in F(x)\}$ *là hàm tựa của* F;

(iv) $\overline{\int_X G\,d\mu} = \overline{\int_X F_1\,d\mu + \int_X F_2\,d\mu}.$

Định nghĩa 3.2.3. Tập $A \in \mathcal{A}$ được gọi là một *nguyên tử*[16] của độ đo μ nếu $\mu(A) > 0$ và với mọi $A' \subset A$, $\mu(A')$ hoặc bằng 0 hoặc bằng $\mu(A)$. Độ đo μ được gọi là *không có nguyên tử*[17] nếu μ không chứa các nguyên tử.

Ví dụ 3.2.1. Độ đo Lebesgue trên $I\!R^n$ là độ đo không có nguyên tử.

[16]TNTA: atom.
[17]TNTA: nonatomic.

Nhắc lại rằng điểm $w \in K$ được gọi là *điểm cực biên*[18] của tập lồi K trong một không gian định chuẩn nếu không tồn tại $u, v \in K$ và $\lambda \in (0,1)$ sao cho $w = (1-\lambda)u + \lambda v$. Tập các điểm cực biên của K được ký hiệu là $\mathrm{extr}\, K$.

Sau đây là một kết quả về tính lồi của tích phân Aumann.

Định lý 3.2.1 (R. J. Aumann, G. Debreu và C. Olech; xem Aubin và Frankowska (1990), tr. 329, 419). *Cho $F : X \rightrightarrows I\!\!R^m$ là ánh xạ đa trị đo được có giá trị đóng, khác rỗng. Nếu μ là độ đo không có nguyên tử, thì $\displaystyle\int_X F\, d\mu$ là tập lồi và*

$$\mathrm{extr}\left(\overline{\mathrm{co}}\int_X F\, d\mu\right) \subset \int_X F\, d\mu.$$

Ngoài ra, nếu F còn là giới nội khả tích, thì $\displaystyle\int_X F\, d\mu$ là tập compắc.

Chứng minh của định lý này (xem Aubin và Frankowska (1990), tr. 333–340) dựa vào định lý sau đây về tính lồi của tập hợp các tích phân của hàm véctơ khả tích theo các tập đo được thuộc $\mathcal{A}$.

Định lý 3.2.2 (Lyapunov's Convexity Theorem - Định lý của Lyapunov về tính lồi). *Giả sử rằng μ là độ đo không có nguyên tử và $f \in L^1(X; I\!\!R^m, \mu)$. Khi đó, tập hợp*

$$\nu(\mathcal{A}) := \left\{\int_A f\, d\mu\right\}_{A \in \mathcal{A}}$$

là tập con lồi, compắc trong $I\!\!R^m$.

Trong Định lý 3.2.1, nếu thay cho $I\!\!R^n$ ta xét một không gian Banach vô hạn chiều Y, thì chưa chắc tích phân $\displaystyle\int_X F\, d\mu$ đã là tập lồi. Tuy thế, bao đóng của nó là tập lồi. Cụ thể là ta có định lý sau.

Định lý 3.2.3 (J. J. Uhl, F. Hiai và H. Umegaki; xem Aubin và Frankowska (1990), tr. 330, 419) *Cho Y là không gian Banach khả li, $F : X \rightrightarrows Y$ là ánh xạ đa trị đo được có giá trị đóng, khác rỗng. Nếu μ là độ đo không có nguyên tử, thì*

(i) $\overline{\displaystyle\int_X F\, d\mu}$ *là tập lồi;*

(ii) $\overline{\displaystyle\int_X F\, d\mu} = \overline{\mathrm{co}} \displaystyle\int_X F\, d\mu$;

(iii) *Nếu $y \in \mathrm{extr}\left(\displaystyle\int_X F\, d\mu\right)$, thì phần tử $f \in \mathcal{F}$ thỏa mãn $\displaystyle\int_X f\, d\mu = y$ là duy nhất;*

[18]TNTA: extreme point.

(iv) *Nếu F là ánh xạ đa trị giới nội khả tích, thì*

$$\int_X \overline{\text{co}} F \, d\mu = \overline{\int_X F \, d\mu}.$$

Chứng minh của định lý này có thể xem trong Aubin và Frankowska (1990), tr. 340-342.

Bài tập 3.2.2. Xét ánh xạ đa trị $F : I\!R \rightrightarrows I\!R$ cho bởi công thức

$$F(x) = \text{co}\{\sin x, \cos x\}.$$

a) Chứng minh F là đo được, giới nội khả tích trên $[0, 2\pi]$.

b) Tính tích phân $\int_0^{2\pi} F \, d\mu$.

(*Gợi ý*: F là ánh xạ đa trị liên tục và giới nội trên $[0, 2\pi]$. Theo Định lý 3.2.1, $\int_0^{2\pi} F \, d\mu$ là lồi, compắc. Vẽ tập $\text{gph}\, F$ trước khi tiến hành tính toán. *Kết quả*: $\int_0^{2\pi} F \, d\mu = 3\sqrt{2}$.)

3.3 Lát cắt liên tục và lát cắt Lipschitz

Định lý sau đây đưa ra điều kiện đủ để ánh xạ đa trị nửa liên tục dưới có lát cắt liên tục.

Định lý 3.3.1 (E. Michael, 1956). *Cho X là không gian mêtric compắc, Y là không gian Banach, $F : X \rightrightarrows Y$ là ánh xạ đa trị nửa liên tục dưới, có giá trị lồi đóng khác rỗng. Khi đó F có lát cắt liên tục.*

Chứng minh của định lý trên có thể xem trong Aubin và Frankowska (1990), tr. 357, hoặc trong Chiêu (2004). Trong Định lý 3.3.1, giả thiết về tính compắc của không gian mêtric X có thể bỏ đi được (xem Zeidler (1986), tr. 466).

Ánh xạ đa trị nửa liên tục trên, có giá trị lồi đóng khác rỗng, từ một không gian mêtric compắc vào một không gian Banach chưa chắc đã có lát cắt liên tục.

Bài tập 3.3.1. Cho một ví dụ cụ thể để chứng tỏ rằng ánh xạ đa trị nửa liên tục trên, có giá trị lồi đóng khác rỗng, từ một không gian mêtric compắc vào một không gian Banach chưa chắc đã có lát cắt liên tục. (*Gợi ý*: Đặt $X = [-1, 1]$ và xét ánh xạ đa trị $F : X \rightrightarrows I\!R$ cho bởi công thức $F(x) = \{-1\}$ với mọi $x < 0$, $F(0) = [-1, 1]$ và $F(x) = \{1\}$ với mọi $x > 0$.)

Định nghĩa 3.3.1. Cho X là không gian mêtric, Y là không gian Banach.

a) Ta nói ánh xạ đơn trị $f : X \to Y$ là Lipschitz địa phương nếu với mọi $\bar{x} \in X$ tồn tại $\delta > 0$ và $\ell > 0$ sao cho

$$\|f(x') - f(x)\| \leqslant \ell d(x', x) \quad \forall x, x' \in B(\bar{x}, \delta).$$

Nếu tồn tại $\ell > 0$ sao cho

$$\|f(x') - f(x)\| \leqslant \ell d(x', x) \quad \forall x, x' \in X$$

thì F được gọi là ánh xạ Lipschitz trên X.

b) Ta nói ánh xạ đa trị $F : X \rightrightarrows Y$ là Lipschitz địa phương nếu với mọi $\bar{x} \in X$ tồn tại $\delta > 0$ và $\ell > 0$ sao cho

$$F(x') \subset F(x) + \ell d(x', x)\bar{B}_Y \quad \forall x', x \in B(\bar{x}, \delta).$$

Nếu tồn tại $\ell > 0$ sao cho

$$F(x') \subset F(x) + \ell d(x', x)\bar{B}_Y \quad \forall x', x \in X,$$

thì F được gọi là ánh xạ đa trị Lipschitz trên X.

Định lý sau đây bàn về sự tồn tại lát cắt xấp xỉ của ánh xạ đa trị nửa liên tục trên.

Định lý 3.3.2 (A. Cellina; xem Aubin và Frankowska (1990), tr. 358–360). *Cho X là không gian mêtric compắc, Y là không gian Banach, $F : X \rightrightarrows Y$ là ánh xạ đa trị nửa liên tục trên, có giá trị lồi khác rỗng. Khi đó, tồn tại ánh xạ đơn trị Lipschitz địa phương $f_\varepsilon : X \to Y$ sao cho*

$$\mathrm{gph}\, f_\varepsilon \subset B(\mathrm{gph}\, F, \varepsilon)$$

và

$$f_\varepsilon(x) \in \mathrm{co}(\mathrm{rge}\, F),$$

ở đó $d((x, y), (x', y')) := \max\{d(x, x'), \|y - y'\|\}$ và

$$B(\mathrm{gph}\, F, \varepsilon) = \{(x, y) \in X \times Y \ : \ d((x, y), \mathrm{gph}\, F) < \varepsilon\}.$$

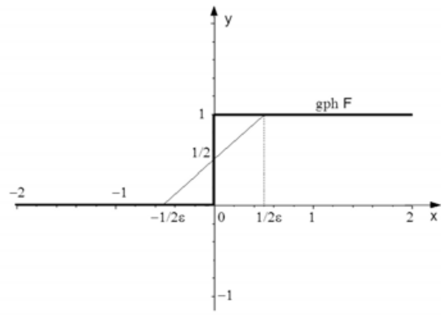
Trong Định lý 3.3.2, giả thiết về tính compắc của X có thể bỏ đi được (xem Aubin và Frankowska (1990), tr. 358).

Nhiều tác giả đã sử dụng Định lý Michael về sự tồn tại lát cắt liên tục để nghiên cứu sự tồn tại nghiệm của bất đẳng thức biến phân suy rộng và của các bài toán cân bằng. Điều thú vị là ta có thể sử dụng Định Cellina về sự tồn tại của lát cắt xấp xỉ Lipschitz địa phương để chứng minh định lý tồn tại nghiệm cho bất đẳng thức biến phân suy rộng với *toán tử đa trị nửa liên tục trên*[19]. Nếu để ý thêm rằng nói chung dưới vi phân của các hàm lồi (ví dụ như $\partial\varphi(\cdot)$ ở đó $\varphi(x) := \|x\|$, $x \in I\!R^n$) và dưới vi phân Clarke của các hàm Lipschitz địa phương[20] thường chỉ là ánh xạ đa trị nửa liên tục trên, không là nửa liên tục dưới, thì ta càng thấy sự cần thiết của Định lý Cellina.

Ví dụ 3.3.1 (xem Chiêu (2004), tr. 23). Đặt $X = I\!R$ và xét ánh xạ đa trị $F : X \to I\!R$ cho bởi công thức $F(x) = \{0\}$ với mọi $x < 0$, $F(0) = [0, 1]$ và $F(x) = \{1\}$ với mọi $x > 0$. Ta có F là nửa liên tục trên ở trong X. Ngoài ra, F có giá trị lồi, compắc, khác rỗng. Mặc dù F không có lát cắt liên tục, nhưng vẫn có lát cắt xấp xỉ Lipschitz địa phương với độ chính xác tùy ý. Thật vậy, với mỗi $\varepsilon > 0$, ánh xạ đơn trị Lipschitz

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x \leqslant -\frac{1}{2}\varepsilon \\ \frac{1}{\varepsilon}x + \frac{1}{2} & \text{nếu } -\frac{1}{2}\varepsilon < x < \frac{1}{2}\varepsilon \\ 1 & \text{nếu } x \geqslant \frac{1}{2}\varepsilon \end{cases}$$

là một lát cắt xấp xỉ của F với độ chính xác ε, bởi vì $\mathrm{gph}\, f_\varepsilon \subset B(\mathrm{gph}\, F, \varepsilon)$.



Hình 14

Định lý sau đây đưa ra điều kiện đủ cho sự tồn tại lát cắt Lipschitz.

Định lý 3.3.3 (xem Aubin và Frankowska (1990), tr. 372). *Cho X là không gian mêtric và $F : X \rightrightarrows I\!R^n$ là ánh xạ đa trị Lipschitz có giá trị lồi đóng khác rỗng. Khi đó, F có lát cắt Lipschitz.*

Chứng minh của định lý này có thể xem trong Aubin và Frankowska (1990), hoặc trong Chiêu (2004).

[19] Xem Kien, Yao và Yen (2007).

[20] Xem công thức (4.3) và Nhận xét 3.4.1 dưới đây.

3.4 Tích phân Aumann của ánh xạ dưới vi phân Clarke

Các kết quả trình bày trong mục này thuộc về Nguyễn Huy Chiêu (xem Chiêu (2004, 2006a)). Bạn đọc có quan tâm xin đọc các chứng minh chi tiết trong luận văn và trong bài báo đó.

Trong lý thuyết tích phân Lebesgue, người ta đã chứng minh rằng nếu $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ là hàm số Lipschitz xác định trên đoạn $[a,b] \subset \mathbb{R}$, thì công thức Newton-Leibnitz

$$\int_a^b f'(t)\, d\mu = f(b) - f(a), \tag{4.1}$$

ở đó μ ký hiệu độ đo Lebesgue trên $[a,b]$, nghiệm đúng. (Ta lưu ý rằng, do f là Lipschitz trên $[a,b]$, đạo hàm Fréchet $f'(x)$ tồn tại hầu khắp trên $[a,b]$ theo định lý Rademacher; xem Clarke (1983).) *Vấn đề đặt ra là vế phải của công thức này sẽ như thế nào nếu toán tử đạo hàm $f'(\cdot)$ và tích phân Lebesgue ở vế trái được thay tương ứng bởi ánh xạ dưới vi phân Clarke $\partial^{\mathrm{Cl}} f(\cdot)$ và tích phân Aumann.* Ngoài việc trình bày lời giải cho vấn đề đó, chúng ta cũng sẽ xét một ứng dụng của kết quả thu được và một ví dụ minh họa thú vị.

Giả sử X là không gian Banach và $f : X \to \mathbb{R}$ là hàm số Lipschitz địa phương.

Định nghĩa 3.4.1. *Đạo hàm theo hướng Clarke* của f tại $x \in X$ theo hướng $v \in X$ được xác định bởi công thức

$$f^0(x;v) := \limsup_{x' \to x,\ t \to 0^+} \frac{f(x'+tv) - f(x')}{t}. \tag{4.2}$$

Dưới vi phân Clarke của f tại x là tập hợp

$$\partial^{\mathrm{Cl}} f(x) := \{x^* \in X^* \,:\, \langle x^*, v\rangle \leqslant f^0(x;v),\ \forall v \in X\}. \tag{4.3}$$

Nhận xét 3.4.1 (xem Clarke (1983)). Nếu $\ell > 0$ là hệ số Lipschitz của f trong lân cận của x, thì $\partial^{\mathrm{Cl}} f(x)$ là tập hợp khác rỗng, lồi, compắc yếu* trong X^*. Ngoài ra, $\|x^*\| \leqslant \ell$ với mọi $x^* \in \partial^{\mathrm{Cl}} f(x)$, và với mọi $v \in X$ ta có

$$f^0(x;v) = \max\{\langle x^*, v\rangle \,:\, x^* \in \partial^{\mathrm{Cl}} f(x)\}.$$

Nếu X là không gian hữu hạn chiều, thì ánh xạ đa trị $\partial^{\mathrm{Cl}} f(\cdot)$ là nửa liên tục trên tại x.

Nhận xét 3.4.2. Nếu $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ là hàm số Lipschitz và μ là độ đo Lebesgue trên $[a,b]$, thì ánh xạ đa trị $\partial^{\mathrm{Cl}} f(\cdot)$ là giới nội khả tích. Khẳng định này được chứng minh dễ dàng nhờ một tính chất nói trong Nhận xét 3.4.1.

Nhận xét 3.4.3 (xem Aubin và Frankowska (1990), tr. 343). Nếu $X = [a, b]$, $Y = \mathbb{R}^n$, μ là độ đo Lebesgue trên $[a, b]$, $F : X \rightrightarrows Y$ là ánh xạ đa trị giới nội khả tích, có giá trị đóng khác rỗng, thì tập hợp $\int_X F\, d\mu$ là lồi, compắc.

Định nghĩa 3.4.2 (xem Clarke (1983), tr. 39). Hàm số f được gọi là *chính quy Clarke*[21] tại x nếu, với mọi $v \in X$, đạo hàm theo hướng

$$f'(x; v) := \lim_{t \to 0^+} \frac{f(x + tv) - f(x)}{t}$$

tồn tại và ta có $f'(x; v) = f^0(x; v)$.

Bài tập 3.4.1. Cho $f(x) = |x|$ và $g(x) = -|x|$ với mọi $x \in I\!R$. Các hàm số $f : I\!R \to I\!R$ và $g : I\!R \to I\!R$ đó có là chính quy Clarke tại

(a) $\bar{x} \neq 0$,

(b) $\bar{x} = 0$,

hay không? Tại sao?

Kết quả sau đây là của Nguyễn Huy Chiêu.

Định lý 3.4.1 (xem Chiêu (2004, 2006a)). *Giả sử $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ là hàm số Lipschitz xác định trên đoạn $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Khi đó ta có*

$$\int_a^b \partial^{\mathrm{Cl}} f(t)\, d\mu = \Big[-\int_a^b f^0(t; -1)\, d\mu, \int_a^b f^0(t; 1)\, d\mu \Big], \tag{4.4}$$

ở đó tích phân $\int_a^b \partial^{\mathrm{Cl}} f(t)\, d\mu$ của ánh xạ đa trị $\partial^{\mathrm{Cl}} f(\cdot)$ được hiểu theo nghĩa tích phân Aumann.

Định lý 3.4.1 cho ta công thức hiển để tính *tích phân Aumann của ánh xạ dưới vi phân Clarke* của hàm số thực Lipschitz trên một đoạn $[a, b] \subset I\!R$ cho trước: để tính tích phân đó, ta chỉ cần tính tích phân Lebesgue của các hàm số thực $f^0(\cdot; -1)$ và $f^0(\cdot; 1)$ trên đoạn $[a, b]$. Từ đó kết quả đó ta có hệ quả sau.

Hệ quả 3.4.1. *Giả sử $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ là hàm số Lipschitz. Khi đó,*

$$\int_a^b \partial^{\mathrm{Cl}} f(t)\, d\mu = \{f(b) - f(a)\} \tag{4.5}$$

khi và chỉ khi

$$\int_a^b \Big(f^0(t; 1) + f^0(t; -1) \Big) d\mu = 0. \tag{4.6}$$

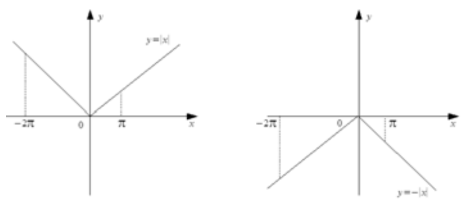
[21]TNTA: Clarke regular.

Như vậy (4.6), ở đó chỉ lấy tích phân Lebesgue của hàm số thực, là điều kiện cần và đủ để có (4.5); tức là (4.6) là *điều kiện cần và đủ để tích phân Aumann* $\int_a^b \partial^{\mathrm{Cl}} f(t)\, d\mu$ *là tập hợp có một phần tử.* Ví dụ 3.4.1 dưới đây[22] sẽ chứng tỏ rằng **không phải lúc nào tích phân** $\int_a^b \partial^{\mathrm{Cl}} f(t)\, d\mu$ **cũng là tập hợp có một phần tử**.

Nhận xét 3.4.4. Theo Hệ quả 3.4.1, nếu $f^0(t;1) + f^0(t;-1) = 0$ hầu khắp trên $[a,b]$, thì $\int_a^b \partial^{\mathrm{Cl}} f(t)dt = \{f(b) - f(a)\}$.

Hệ quả 3.4.2. *Giả sử* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *là hàm Lipschitz, chính quy Clarke hầu khắp trên* $[a,b]$*. Khi đó, đẳng thức* (4.5) *nghiệm đúng.*

> **Bài tập 3.4.2.** Cho f và g như trong Bài tập 3.4.1. Hãy kiểm chứng kết luận của Định lý 3.4.1 và các hệ quả 3.4.1, 3.4.2 đối với các hàm f và g khi lấy $[a,b] = [-2\pi, \pi]$.



Hình 15

Định nghĩa 3.4.3 (xem Clarke (1983), tr. 30-31). Hàm véctơ $f : X \to Y$, ở đó X, Y là các không gian Banach, được gọi là *khả vi chặt*[23] tại $\bar{x} \in X$ nếu tồn tại toán tử tuyến tính liên tục $D_s f(\bar{x}) : X \to Y$ sao cho

$$\lim_{x \to \bar{x},\, t \to 0^+} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t} = D_s f(\bar{x})(v)$$

[22]Sử dụng một kết quả của R. T. Rockafellar (xem Borwein và Zhu (2005), Ví dụ 5.2.12, tr. 191), N. H. Chiêu đã xây dựng được một ví dụ có cùng hiệu ứng như Ví dụ 3.4.1. Ngoài ra, Chieu (2006c) đã thiết lập các công thức tương tự như (4.4) cho *dưới vi phân Fréchet* và *dưới vi phân Mordukhovich* - chúng ta sẽ nghiên cứu các dưới vi phân này trong Chương 4.

[23]TNTA: strictly differentiable.

và sự hội tụ là đều theo v trong mỗi tập con compắc của X.

Nhận xét 3.4.5 (xem Clarke (1983), tr. 32). Nếu f là khả vi Fréchet liên tục tại $\bar{x}$, thì f là Lipschitz địa phương tại $\bar{x}$ và khả vi chặt tại $\bar{x}$.

Nhận xét 3.4.6. Giả sử $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ là hàm số Lipschitz. Nếu f là khả vi chặt hầu khắp trên $[a, b]$ hoặc f là lồi trên $[a, b]$, thì đẳng thức (4.5) nghiệm đúng. Khẳng định này suy ra từ Hệ quả 3.4.2 và các sự kiện nói rằng nếu f là khả vi chặt tại x hoặc f là hàm lồi thì nó chính quy Clarke tại x (xem Clarke (1983), tr. 40).

Sau đây là một ứng dụng của Định lý 3.4.1 trong việc chỉ ra điều kiện đủ *cho phép khôi phục một hàm số Lipschitz địa phương từ ánh xạ dưới vi phân Clarke của nó.*

Năm 1982 R. T. Rockafellar chứng minh rằng nếu $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ là các hàm Lipschitz địa phương, f là chính quy Clarke, và

$$\partial^{\mathrm{Cl}} g(x) \subset \partial^{\mathrm{Cl}} f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

thì tồn tại một hằng số $C \in \mathbb{R}$ sao cho

$$g(x) = f(x) + C \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

(xem Wu and Ye(2000)). Kết quả của Rockafellar đã được một số tác giả khác phát triển theo các hướng khác nhau; xem Thibault và Zagrodny (1995), Ngai, Luc và Théra (2000), Wu và Ye (2000).

Định lý 3.4.1 cho phép mở rộng kết quả nói trên của Rockafellar sang trường hợp không gian vô hạn chiều.

Định lý 3.4.2 (xem Chiêu (2004, 2006a)). *Giả sử rằng X là không gian Banach, $f, g : X \to \mathbb{R}$ là các hàm số Lipschitz địa phương ở trên X. Nếu f là chính quy Clarke và $\partial^{\mathrm{Cl}} g(x) \subset \partial^{\mathrm{Cl}} f(x)$ với mọi $x \in X$, thì tồn tại hằng số $C \in \mathbb{R}$ sao cho $g(x) = f(x) + C$ với mọi $x \in X$.*

Bây giờ chúng ta xét một ví dụ minh họa cho Định lý 3.4.1. Ví dụ này chứng tỏ rằng đoạn thẳng ở vế phải của (4.5) có thể chứa vô hạn phần tử.

Ví dụ 3.4.1 (xem Chiêu (2006a)). Giả sử $\{r_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ là tập hợp tất cả các số hữu tỷ trên khoảng $(a, b) \subset \mathbb{R}$, $a < b$. Với mỗi $k \in \mathbb{N}$, ta chọn $\delta_k > 0$ đủ bé sao cho $(r_k - \delta_k, r_k + \delta_k) \subset (a, b)$ và $\delta_k < 2^{-(k+3)}(b - a)$. Đặt $A = \cup_{k=0}^{\infty}(r_k - \delta_k, r_k + \delta_k)$ và $P = [a, b] \setminus A$. Vì A là tập mở trong $\mathbb{R}$, ta có thể biểu diễn

$$A = \bigcup_{m=0}^{\infty} (a_m, b_m),$$

ở đó $\{(a_m, b_m)\}_{m\in\mathbb{N}}$ là dãy các khoảng mở rời nhau (đôi một không giao nhau). Định nghĩa hàm số $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ bằng cách đặt

$$f(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{nếu} \;\; x \in P \\ (x - a_m)^2(x - b_m)^2 \sin \dfrac{1}{(b_m - a_m)(x - a_m)(x - b_m)} \\ \qquad \text{nếu} \quad x \in (a_m, b_m). \end{cases}$$

Khi đó, f là Lipschitz trên $[a, b]$ và tập $\int_a^b \partial^{\mathrm{Cl}} f(t)\, d\mu$ chứa vô hạn phần tử[24].

[24]Lập luận chứng minh khẳng định này khá phức tạp. Ý tưởng chính của Ví dụ 3.4.1 là khảo sát một hàm số Lipschitz trên đoạn $[a, b] \subset I\!R$ mà tập điểm không chính quy Clarke của nó có độ đo Lebesgue dương. Xin xem chi tiết trong Chiêu (2006a).

Chương 4

Đối đạo hàm của ánh xạ đa trị

Yêu cành hoa bên những vực sâu
Yêu hoa một phần nhưng chính là yêu sự hái
Biết bao tình yêu còn lại
Nhờ một cành hoa không đâu.
(Chế Lan Viên, "Hái hoa", 12-6-1980)

Trong chương này, sau khi giới thiệu vắn tắt lý thuyết đối đạo hàm, chúng ta sẽ sử dụng công cụ đối đạo hàm để xây dựng các công thức tính toán hoặc ước lượng các dưới vi phân (dưới vi phân Fréchet, dưới vi phân Mordukhovich, và dưới vi phân Clarke) của hàm giá trị tối ưu trong các bài toán quy hoạch toán học phụ thuộc tham số.

Chương này được viết trên cơ sở một bài giảng của chúng tôi về lý thuyết đối đạo hàm, một bài báo chung của B. S. Mordukhovich, Nguyễn Mậu Nam và N. Đ. Yên (Mordukhovich, Nam và Yen (2007)), và một bản thảo bài báo của Nguyễn Huy Chiêu (xem Chieu (2006c)).

Mục 4.1 giới thiệu sự phát triển của lý thuyết đối đạo hàm của ánh xạ đa trị. Mục 4.2 điểm qua một số khái niệm cơ sở của lý thuyết này và đưa ra các ví dụ minh họa. Mục 4.3 giới thiệu bài toán tìm các công thức tính đánh giá dưới vi phân (là tập các dưới gradient) của hàm giá trị tối ưu trong bài toán quy hoạch toán học có tham số dưới ràng buộc đa trị. Một số kiến thức chuẩn bị cho việc nghiên cứu bài toán này được trình bày trong Mục 4.4. Mục 4.5 và Mục 4.6 giới thiệu các công thức cho phép tính toán/ước lượng các dưới vi phân Fréchet hoặc dưới vi phân qua giới hạn[1]. Trong hai mục này có trình bày một

[1]Còn được gọi là dưới vi phân Mordukhovich.

số ví dụ minh họa cho các kết quả thu được[2]. Mục 4.7 thông báo một vài kết quả mới của Nguyễn Huy Chiêu về tích phân Aumann của ánh xạ dưới vi phân Mordukhovich và về dưới vi phân Mordukhovich của phiếm hàm tích phân.

4.1 Sự phát triển của lý thuyết đối đạo hàm

Ngay sau sự ra đời của lý thuyết vi phân của F. H. Clarke vào những năm 1973-1975, năm 1976 B. S. Mordukhovich[3] đã đề xuất những khái niệm cơ bản của lý thuyết vi phân của ông, bao gồm:

a) **Nón pháp tuyến không lồi** ([nonconvex] normal cone) của các tập hợp[4];

b) **Đối đạo hàm qua giới hạn**[5] (limiting coderivative) của ánh xạ đa trị;

c) **Dưới vi phân không lồi** ([nonconvex] subdifferential) của hàm số nhận giá trị thực suy rộng.

Lý thuyết của Mordukhovich *được phát triển song song với lý thuyết vi phân của Clarke*. Các khái niệm chính của lý thuyết của Clarke bao gồm nón tiếp tuyến Clarke[6], nón pháp tuyến Clarke[7], đạo hàm theo hướng Clarke[8], và dưới vi phân Clarke[9].

Năm 1988[10] B. S. Mordukhovich in cuốn sách đầu tiên của ông (xem Mordukhovich (1988)) ở nhà xuất bản Nauka. Cuốn sách tiếng Nga này trình bày

[2]Theo suy nghĩ chúng tôi, kết quả ở các mục 4.5 và 4.6 còn có thể đào sâu và phát triển được thêm nữa.

[3]Khi đó ông Mordukhovich đang dạy học tại một trường đại học ở Minxcơ - thủ đô của nước Cộng hoà Bạch Nga (nay là Belarus).

[4]**Không có nón tiếp tuyến nào tương ứng với nón pháp tuyến này!**

[5]Còn được gọi là đối đạo hàm theo nghĩa Mordukhovich.

[6]Xem Mục 2.2, Chương 2.

[7]Nón pháp tuyến Clarke của tập $M \subset X$, ở đó X là một không gian Banach, tại $\bar{x} \in \overline{M}$ được định nghĩa bởi công thức

$$N_M^{Cl}(\bar{x}) := \{x^* \in X^* : \langle x^*, v\rangle \leqslant 0, \forall v \in C_M(\bar{x})\}.$$

Ta quy ước rằng $N_M^{Cl}(\bar{x}) = \emptyset$ với mọi $\bar{x} \notin \overline{M}$.

[8]Xem Mục 3.4, Chương 3.

[9]Xem Mục 3.4, Chương 3. Lúc đầu, dưới vi phân Clarke chỉ được định nghĩa cho các hàm số Lipschitz địa phương. Về sau, R. T. Rockafellar đề xuất một định nghĩa cho phép ta làm việc được với các hàm bất kỳ nhận giá trị thực suy rộng, xác định trên không gian Banach; xem F. H. Clarke (1983).

[10]Cũng trong năm đó, B. S. Mordukhovich cùng gia đình chuyển từ Minxcơ sang Mỹ. Ông là giáo sư, giảng dạy tại Khoa Toán, trường Đại học Tổng hợp Quốc gia Wayne (The Wayne State University) ở thành phố Detroit, bang Michigan. Ông và gia đình sống tại thành phố Ann Arbor. Wayne là tên trước kia những người thổ dân đặt cho vùng đất có Detroit - thành phố đầu não của công nghiệp ôtô Mỹ. Ann Arbor, một thành phố đẹp mang dáng dấp kiến trúc Âu Châu, là thủ phủ của bang Michigan. Tạp chí Mathematical Reviews đặt trụ sở tại Ann Arbor. Một số hội thảo quốc tế về quy hoạch toán học cũng đã được tổ chức ở thành phố này.

những ý tưởng và kết quả chính của lý thuyết của ông, cùng với các ứng dụng quan trọng trong quy hoạch toán học và điều khiển tối ưu.

Trong khoảng những năm 1993-1996 B. S. Mordukhovich công bố một loạt bài báo quan trọng[11] ở đó ông đưa ra nhiều ý tưởng và kỹ thuật mới, phát triển một phiên bản vô hạn chiều sâu sắc và đẹp đẽ cho lý thuyết vi phân của ông, đồng thời chỉ ra rằng một số tính chất cơ bản của ánh xạ đa trị (như tính giả-Lipschitz theo nghĩa Aubin, tính chính quy mêtric, tính mở địa phương) có thể đặc trưng được bằng cách sử dụng khái niệm đối đạo hàm qua giới hạn (đối đạo hàm theo nghĩa Mordukhovich).

Trong giai đoạn 2005-2006 B. S. Mordukhovich tiếp tục công bố

a) nhiều bài báo trình bày các kết quả nghiên cứu mới[12],

b) một bộ sách hai tập[13] với tổng số hơn 1200 trang in, ở Nhà xuất bản Springer.[14]

Mordukhovich xây dựng lý thuyết vi phân vô hạn chiều của ông theo lược đồ sau[15]:

Bước 1. Định nghĩa khái niệm *dưới vi phân*[16] của các hàm số nhận giá trị trong tập số thực suy rộng.

Bước 2. Sử dụng dưới vi phân để định nghĩa *nón pháp tuyến* (nói chung là không lồi) của các tập hợp.

Bước 3. Sử dụng nón pháp tuyến (không lồi) để định nghĩa *đối đạo hàm* (coderivative) của ánh xạ đa trị.

Bước 4. Phát triển các quy tắc tính toán (calculus rules) như công thức tính đối đạo hàm của tổng hai ánh xạ đa trị, công thức tính đối đạo hàm của hàm hợp, công thức tính nón pháp tuyến của giao của một họ tập hợp... (trong các không gian Banach, hoặc trong các không gian Asplund).

---

[11] Một số bài được viết chung với Y. Shao, một nghiên cứu sinh Trung Quốc của B. S. Mordukhovich trong thời gian đó.

[12] Trong số đó có ba bài (Mordukhovich và Nam (2005a,b; 2006)) viết chung với Nguyễn Mậu Nam - một nghiên cứu sinh Việt Nam của ông - và hai bài viết chung với Nam và chúng tôi (Mordukhovich, Nam và Yen (2006, 2007)). Ngoài Nguyễn Mậu Nam (Đại học Sư phạm Huế), B. S. Mordukhovich còn hướng dẫn các nghiên cứu sinh Việt Nam khác, như Trương Quang Bảo (Đại học Khoa học Tự nhiên, Đại học Quốc gia Tp. Hồ Chí Minh), Nguyễn Thị Yến Nhi (Đại học Sư phạm Huế).

[13] Xem B. S. Mordukhovich (2006a,b).

[14] Dưới tựa đề "Lý thuyết cơ sở", tập I có 4 chương sách: 1. Phép tính vi phân suy rộng trong các không gian Banach, 2. Nguyên lý cực trị trong giải tích biến phân, 3. Phép tính toán đầy đủ trong các không gian Asplund, 4. Các đặc trưng của tính đặt chỉnh và phép phân tích độ nhạy. Tập II được công bố dưới tựa đề "Ứng dụng" với 4 chương sách: 5. Tối ưu có ràng buộc và điểm cân bằng, 6. Điều khiển tối ưu các hệ tiến hoá trong các không gian Banach, 7. Điều khiển tối ưu các hệ có tham số phân phối [distributed systems], 8. Các ứng dụng trong kinh tế.

[15] Bước 1 và Bước 2 có thể đổi chỗ cho nhau; xem Mordukhovich (2006a; Chương 1).

[16] Dưới vi phân Fréchet (Fréchet subdifferential), dưới vi phân qua giới hạn (limiting subdifferential), dưới vi phân proximal (proximal subdifferential).

Bước 5. Áp dụng các khái niệm và quy tắc tính toán nói trên để
- chứng minh các định lý cơ bản (như các định lý ánh xạ mở, định lý hàm ẩn, định lý hàm ngược, các điều kiện cực trị, ...) trong giải tích biến phân[17] và trong lý thuyết tối ưu;
- nghiên cứu hoặc đặc trưng các tính chất đáng quan tâm của các ánh xạ và hàm số xuất hiện trong các lý thuyết toán học[18];
- đưa ra các thuật toán giải các lớp bài toán khác nhau[19].

Chúng ta lưu ý rằng *lý thuyết vi phân xây dựng theo lược đồ trên vẫn đang tiếp tục được phát triển và đưa đến những thành quả mới.*

Có thể nêu hai câu hỏi:

1. Mối quan hệ giữa các kết quả thu được bởi lý thuyết vi phân của Mordukhovich và những kết quả đã thu được bằng các lý thuyết vi phân khác[20] là như thế nào?
2. Liệu có thể xây dựng được một lý thuyết tích phân tương ứng với lý thuyết vi phân của Mordukhovich hay không?

Cùng với mối quan hệ giữa các điều kiện cực trị thu được bằng lý thuyết đối đạo hàm và các điều kiện cực trị thu được bằng lý thuyết vi phân của Clarke đã được chỉ ra trong Mordukhovich (2006a,b), các kết quả nghiên cứu trình bày trong các mục 4.5 và 4.6 cho ta câu trả lời khá rõ ràng cho câu hỏi thứ nhất. Đối với câu hỏi thứ hai, chúng tôi hy vọng rằng sau khoảng 5-7 năm nữa người ta cũng sẽ tìm ra câu trả lời chấp nhận được. Mục 4.7 giới thiệu một vài kết quả bước đầu theo hướng này.

4.2 Các khái niệm cơ bản của lý thuyết đối đạo hàm

TẠI SAO PHẢI SỬ DỤNG ĐỐI ĐẠO HÀM?

Chúng ta cần lưu ý những điều sau:
- Cách tiếp cận bằng không gian đối ngẫu (dual-space approach) nhiều khi rất hữu hiệu; có những trường hợp còn hữu hiệu hơn[21] cả cách tiếp cận bằng không gian nền (primal-space approach).

[17]TNTA: variational analysis.

[18]Các định lý về tính ổn định và độ nhạy nghiệm của các bài toán tối ưu phụ thuộc tham số cũng thuộc loại này. Một số định lý như vậy sẽ được chứng minh trong các mục 4.5 và 4.6 trong chương này.

[19]Kết quả theo hướng này chưa có nhiều.

[20]Ví dụ như mối quan hệ giữa các kết quả của Mordukhovich và Shao, của Mordukhovich và Nam về tính ổn định vi phân của các bài toán tối ưu với ràng buộc đa trị và các kết quả thuộc về J. Gauvin, F. Dubeau, F. H. Clarke, R. T. Rockafellar, và các tác giả khác.

[21]Bổ đề Farkas về tính tương thích của một hệ bất đẳng thức tuyến tính (xem Rockafellar (1970), tr. 200) là một ví dụ.

- Cả cách tiếp cận bằng không gian đối ngẫu lẫn cách tiếp cận bằng không gian nền đều hữu ích, đều áp dụng được.
- Đối đạo hàm của một ánh xạ *tương ứng với toán tử liên hợp của một ánh xạ tuyến tính*.

Ta hãy làm rõ thêm điều lưu ý thứ ba.

1. Cho $f : X \to Y$ là ánh xạ đơn trị giữa các không gian Banach. Ký hiệu bởi $f'(\bar{x})$ đạo hàm Fréchet của f tại $\bar{x} \in X$ (nếu nó tồn tại). Giả sử $(f'(\bar{x}))^* : Y^* \to X^*$ là toán tử liên hợp[22] của toán tử tuyến tính $f'(\bar{x}) : X \to Y$.

2. Cho $A : X \to Y$ là toán tử tuyến tính liên tục với toán tử liên hợp $A^* : Y^* \to X^*$. Với mọi $y^* \in Y^*$,

$$\langle A^*y^*, x\rangle = \langle y^*, Ax\rangle \quad \forall x \in X.$$

Vì vậy,

$$\langle A^*y^*, x\rangle - \langle y^*, Ax\rangle = 0 \quad \forall x \in X,$$

hay

$$\langle (A^*y^*, -y^*), (x, Ax)\rangle = 0 \quad \forall x \in X.$$

3. Ký hiệu $A = f'(\bar{x})$ và $A^* = (f'(\bar{x}))^*$, ta có [23]

$$(A^*y^*, -y^*) \in \hat{N}_{\text{gph}\, f}(\bar{x}, f(\bar{x}));$$

vì thế

$$A^*y^* = \{x^* : (x^*, -y^*) \in \hat{N}_{\text{gph}\, f}(\bar{x}, f(\bar{x}))\}.$$

Công thức sau cùng gợi ý cho ta cách định nghĩa đối đạo hàm của ánh xạ đa trị.

Tiếp theo, chúng ta sẽ xét các khái niệm
- dưới vi phân,
- nón pháp tuyến,
- đối đạo hàm

và một số ví dụ minh họa.

---

[22] Nó được gọi là *đối đạo hàm Fréchet* của f tại $\bar{x}$.

[23] Ở đây $\text{gph}\, f := \{(x, f(x)) : x \in X\}$ là đồ thị của f và

$$\hat{N}_{\text{gph}\, f}(\bar{x}, f(\bar{x})) = \{(x^*, y^*) : \langle (x^*, y^*), (x, f'(\bar{x})(x))\rangle = 0\ \forall x \in X\}$$

là *nón pháp tuyến Fréchet* của đồ thị đó tại $(\bar{x}, f(\bar{x}))$.

DƯỚI VI PHÂN

Xét ánh xạ đa trị $F : X \rightrightarrows X^*$ giữa không gian Banach X và không gian đối ngẫu X^* của nó. Ký hiệu

$$\text{(2.1)} \qquad \operatorname*{Lim\,sup}_{x \to \bar{x}} F(x) := \Big\{ x^* \in X^* : \ \exists \ x_k \to \bar{x}, \ x_k^* \xrightarrow{w^*} x^*, \ x_k^* \in F(x_k) \ \ \forall k = 1, 2, \ldots \Big\}$$

được dùng để chỉ *giới hạn trên theo dãy theo nghĩa Painlevé-Kuratowski*[24] trong tôpô chuẩn của X và tôpô yếu* (được ký hiệu bằng chữ w^*) của X^*.

Các ký hiệu $x \xrightarrow{\varphi} \bar{x}$ đối với một hàm $\varphi \colon X \to \overline{I\!R}$ và $x \xrightarrow{\Omega} \bar{x}$ đối với một tập $\Omega \subset X$ tương ứng có nghĩa là

$$x \to \bar{x} \ \text{ với } \ \varphi(x) \to \varphi(\bar{x}) \ \text{ và } \ x \to \bar{x} \ \text{ với } \ x \in \Omega.$$

Dưới vi phân Fréchet

Cho X là không gian Banach, $\varphi \colon X \to \overline{I\!R}$ là hàm nhận giá trị trong tập số thực suy rộng, hữu hạn tại $\bar{x}$. Với mỗi $\varepsilon \geqslant 0$, đặt

$$\text{(2.2)} \qquad \widehat{\partial}_{\varepsilon}\varphi(\bar{x}) := \Big\{ x^* \in X^* : \liminf_{x \to \bar{x}} \frac{\varphi(x) - \varphi(\bar{x}) - \langle x^*, x - \bar{x} \rangle}{\|x - \bar{x}\|} \geqslant -\varepsilon \Big\}.$$

Các phần tử của tập hợp ở vế trái công thức này được gọi là các *ε-dưới gradient Fréchet* của φ tại $\bar{x}$, còn bản thân tập hợp đó được gọi là *ε-dưới vi phân Fréchet* của φ tại $\bar{x}$. Tập hợp $\widehat{\partial}\varphi(\bar{x}) := \widehat{\partial}_0\varphi(\bar{x})$ được gọi là *dưới vi phân Fréchet dưới* hay nói gọn hơn là *dưới vi phân Fréchet*[25] của φ tại $\bar{x}$. Rõ ràng $\widehat{\partial}\varphi(\bar{x}) \subset \widehat{\partial}_{\varepsilon}\varphi(\bar{x})$ với mọi $\varepsilon \geqslant 0$. Tập hợp

$$\text{(2.3)} \qquad \widehat{\partial}^{+}\varphi(\bar{x}) = -\widehat{\partial}(-\varphi)(\bar{x})$$

được gọi là *dưới vi phân Fréchet trên*[26] của φ tại $\bar{x}$.

Để có thể hiểu rõ thêm các định nghĩa ε-dưới gradient Fréchet và ε-dưới vi phân Fréchet nêu trên, ta nhắc lại rằng phần tử $x^* \in X^*$ được gọi là đạo hàm Fréchet của φ tại $\bar{x}$ nếu

$$\lim_{x \to \bar{x}} \frac{\varphi(x) - \varphi(\bar{x}) - \langle x^*, x - \bar{x} \rangle}{\|x - \bar{x}\|} = 0.$$

[24] Nếu X là không gian hữu hạn chiều, thì tập $\operatorname{Lim\,sup}_{x \to \bar{x}} F(x)$ xác định bởi (2.1) trùng với giới hạn trên theo Painlevé-Kuratowski của họ tập $\{F(x)\}_{x \in X}$ (khi $x \to \bar{x}$) xác định bởi công thức (2.14) trong Chương 2.

[25] TNTA: (lower) Fréchet subdifferential.

[26] TNTA: upper Fréchet subdifferential.

Thay dấu $\lim$ bằng dấu $\liminf$, thay dấu bằng bởi dấu $\geqslant$ và thay số 0 bởi số âm $-\varepsilon$, ta có điều kiện yếu hơn đặt lên phần tử x^* như sau:

$$\liminf_{x\to\bar{x}} \frac{\varphi(x)-\varphi(\bar{x})-\langle x^*, x-\bar{x}\rangle}{\|x-\bar{x}\|} \geqslant -\varepsilon.$$

Đó chính là điều kiện để kiểm tra xem một phần tử $x^* \in X^*$ có phải là ε-dưới gradient Fréchet của φ tại $\bar{x}$ hay không. **Việc thay tiêu chuẩn trong định nghĩa đạo hàm Fréchet bằng một tiêu chuẩn hoàn toàn tương tự, cùng cấu trúc và ở dạng yếu hơn (nhưng cũng rất tự nhiên!), cho phép xây dựng phép tính vi phân[27] cho các hàm số bất kỳ.**

Dễ thấy rằng nếu x^* là đạo hàm Fréchet của φ tại $\bar{x}$ thì

$$\{x^*\} = \widehat{\partial}\varphi(\bar{x}) \subset \widehat{\partial}_\varepsilon\varphi(\bar{x}) \quad \forall\varepsilon \geqslant 0.$$

Dưới vi phân proximal

Véctơ $x^* \in X^*$ được gọi là *dưới gradient proximal* (hay *dưới gradient gần kề*) của φ tại $\bar{x}$ nếu tồn tại $\varepsilon \geqslant 0$ sao cho

$$\liminf_{x\to\bar{x}} \frac{\varphi(x)-\varphi(\bar{x})-\langle x^*, x-\bar{x}\rangle}{\|x-\bar{x}\|^2} \geqslant -\varepsilon; \tag{2.4}$$

tức là tồn tại $\varepsilon \geqslant 0$ và $\delta > 0$ sao cho

$$\varphi(x)-\varphi(\bar{x}) \geqslant \langle x^*, x-\bar{x}\rangle - \varepsilon\|x-\bar{x}\|^2 \quad \forall x \in B(\bar{x},\delta).$$

Tập hợp $\partial^P\varphi(\bar{x})$ gồm tất cả các dưới gradient gần kề của φ tại $\bar{x}$ được gọi là *dưới vi phân proximal* (hay *dưới vi phân gần kề*[28]) của φ tại $\bar{x}$.

So với công thức định nghĩa đạo hàm Fréchet của hàm số thực vừa được nhắc lại ở trên, điều kiện đặt lên phần tử $x^* \in \partial^P\varphi(\bar{x})$ trong (2.4) vừa mạnh hơn (cấp độ xấp xỉ $o(\|x-\bar{x}\|)$ được thay bởi $o(\|x-\bar{x}\|^2)$), vừa yếu hơn ($\lim$ được thay bằng $\liminf$, dấu bằng được thay bởi dấu $\geqslant$ và số 0 được thay bởi số $-\varepsilon$). Đạo hàm Fréchet của hàm số tại một điểm chưa chắc đã là một dưới gradient gần kề. Thật vậy, với $X=\mathbb{R}$, $\varphi(x)=x\sqrt{|x|}$, $\bar{x}=0$, ta có $\varphi'(\bar{x})=0$ và $\partial^P\varphi(\bar{x})=\emptyset$.

Dưới vi phân qua giới hạn

Tập hợp

$$\partial\varphi(\bar{x}) := \operatorname*{Lim\,sup}_{\substack{x\xrightarrow{\varphi}\bar{x}\\ \varepsilon\downarrow 0}} \widehat{\partial}_\varepsilon\varphi(x) \tag{2.5}$$

[27]Nói chính xác hơn, đó là phép tính vi phân suy rộng (generalized differentiation).

[28]TNTA: (lower) proximal subdifferential.

được gọi là *dưới vi phân qua giới hạn*[29] (hay *dưới vi phân Mordukhovich*). Như vậy, $x^* \in \partial\varphi(\bar{x})$ khi và chỉ khi tồn tại các dãy $x_k \xrightarrow{\varphi} \bar{x}$, $\varepsilon_k \to 0^+$, và $x_k^* \in \widehat{\partial}\varphi_{\varepsilon_k}\varphi(x_k)$, sao cho

$$x_k^* \xrightarrow{w^*} x^*.$$

Từ đó ta thấy rằng dưới vi phân Mordukhovich $\partial\varphi(\bar{x})$ được tính qua các dưới vi phân Fréchet $\widehat{\partial}\varphi_\varepsilon(x)$ với $\varepsilon > 0$ được lấy đủ bé và x được lấy đủ gần $\bar{x}$.

Hiển nhiên ta có

$$\widehat{\partial}\varphi(\bar{x}) \subset \partial\varphi(\bar{x}).$$

Nhận xét 4.2.1 (xem Mordukhovich (2006a)). Nếu X là không gian Asplund (theo nghĩa là *mọi hàm lồi, liên tục $\varphi : U \to I\!R$ xác định trên một tập lồi, mở $U \subset X$ là khả vi Fréchet trên một tập con trù mật của U* hay, một cách tương đương, *các không gian con đóng, khả li của X có không gian đối ngẫu khả li*)[30] và nếu φ là nửa liên tục dưới trong lân cận của $\bar{x}$, thì trong công thức (2.5) ta có thể cho $\varepsilon = 0$; tức là

$$\partial\varphi(\bar{x}) = \operatorname*{Lim\,sup}_{x \xrightarrow{\varphi} \bar{x}} \widehat{\partial}\varphi(x).$$

Ngoài ra, ta có $\partial\varphi(\bar{x}) \neq \emptyset$ với mọi hàm Lipschitz địa phương trên không gian Asplund.

Chứng minh chi tiết của hai mệnh đề sau có trong Mordukhovich (2006a).

Mệnh đề 4.2.1. *Nếu φ là khả vi chặt*[31] *tại $\bar{x}$ thì tập $\partial\varphi(\bar{x})$ chỉ chứa một phần tử, đó là đạo hàm chặt của φ tại $\bar{x}$.*

Mệnh đề 4.2.2. *Nếu φ là hàm lồi, thì tập $\partial\varphi(\bar{x})$ trùng với dưới vi phân theo nghĩa giải tích lồi của φ tại $\bar{x}$, tức là*

$$\partial\varphi(\bar{x}) = \{x^* \in X^* : \langle x^*, x - \bar{x}\rangle \leqslant \varphi(x) - \varphi(\bar{x}) \;\; \forall x \in X\}.$$

[29]TNTA: limiting subdifferential.

[30]Mọi không gian Banach phản xạ đều là không gian Asplund. Mọi không gian Banach có hàm chuẩn khả vi Fréchet tại những điểm khác 0, đều là không gian Asplund. Nói riêng ra, mọi không gian Euclide hữu hạn chiều và mọi không gian Hilbert đều là không gian Asplund. (Xem Phelps (1993)).

[31]Theo Định nghĩa 1.13 trong Mordukhovich (2006a), hàm $f : X \to Y$ giữa các không gian Banach được gọi là *khả vi chặt* tại $\bar{x} \in X$ nếu f khả vi Fréchet tại $\bar{x}$ và

$$\lim_{x \to \bar{x},\, u \to \bar{x}} \frac{f(x) - f(u) - f'(\bar{x})(x-u)}{\|x - u\|} = 0.$$

Khái niệm này suy ra khái niệm nói trong Định nghĩa 3.4.3 trong Chương 3. Bằng lập luận trực tiếp, ta có thể chứng minh rằng nếu X là không gian hữu hạn chiều, thì hai khái niệm vừa được nói tới là tương đương. Một hàm là khả vi Fréchet liên tục trong một lân cận của một điểm, thì nó cũng khả vi chặt tại điểm đó.

Ta nói φ là *chính quy dưới*[32] tại $\bar{x}$ nếu $\widehat{\partial}\varphi(\bar{x}) = \partial\varphi(\bar{x})$. Họ các hàm chính quy dưới là đủ rộng. Ngoài các hàm khả vi chặt và hàm lồi, nó còn bao gồm nhiều lớp hàm quan trọng khác trong giải tích biến phân và lý thuyết tối ưu[33]

Tập hợp

$$\partial^{\infty}\varphi(\bar{x}) := \operatorname*{Lim\,sup}_{\substack{x \xrightarrow{\varphi} \bar{x} \\ \varepsilon,\lambda \downarrow 0}} \lambda\widehat{\partial}_{\varepsilon}\varphi(x) \tag{2.6}$$

được gọi là *dưới vi phân qua giới hạn suy biến* hay đơn giản là *dưới vi phân suy biến*[34] của φ tại $\bar{x}$. Tập $\partial^{\infty}\varphi(\bar{x})$ chứa thông tin không tầm thường về hàm φ chỉ khi φ không phải là hàm số Lipschitz địa phương tại $\bar{x}$, bởi vì nếu φ là Lipschitz địa phương tại $\bar{x}$ thì $\partial^{\infty}\varphi(\bar{x}) \subset \{0\}$ (xem Bài tập 4.2.2 dưới đây). Như vậy, $x^* \in \partial^{\infty}\varphi(\bar{x})$ khi và chỉ khi tồn tại các dãy $x_k \xrightarrow{\varphi} \bar{x}$, $\varepsilon_k \to 0^+$, $\lambda_k \to 0^+$, và $x_k^* \in \lambda_k\widehat{\partial}_{\varepsilon_k}\varphi(x_k)$, sao cho

$$x_k^* \xrightarrow{w^*} x^*.$$

Bài tập 4.2.1. Chứng minh rằng $\partial^{\infty}\varphi(\bar{x})$ là một hình nón trong X^*.

Bài tập 4.2.2. Sử dụng công thức (2.6) để chứng minh rằng nếu φ là Lipschitz địa phương tại $\bar{x}$, thì $\partial^{\infty}\varphi(\bar{x}) \subset \{0\}$. (*Gợi ý:* Để ý rằng nếu φ là Lipschitz địa phương tại $\bar{x}$ thì tồn tại lân cận U của $\bar{x}$ sao cho họ tập hợp $\{\widehat{\partial}\varphi(x)\}_{x\in U}$ là giới nội đều; tức là tồn tại $K > 0$ sao cho $\|x^*\| \leqslant K$ với mọi $x \in U$ và với mọi $x^* \in \widehat{\partial}\varphi(x)$.)

NÓN PHÁP TUYẾN

Cho tập hợp $\Omega \subset X$, ở đó X là không gian Banach. Xét *hàm chỉ*[35] $\delta_{\Omega}(\cdot)$ của Ω. Theo định nghĩa, $\delta_{\Omega}(x) = 0$ nếu $x \in \Omega$ và $\delta_{\Omega}(x) = +\infty$ nếu $x \notin \Omega$. Nón pháp tuyến Fréchet và nón pháp tuyến qua giới hạn (còn được gọi là nón pháp tuyến Mordukhovich) của Ω tại $\bar{x} \in \Omega$ được định nghĩa tương ứng bởi các công thức

$$\widehat{N}_{\Omega}(\bar{x}) := \widehat{\partial}\delta(\bar{x};\Omega) \tag{2.7}$$

và

$$N_{\Omega}(\bar{x}) := \partial\delta(\bar{x};\Omega) \tag{2.8}$$

[32]TNTA: lower regular.

[33]Xem Mordukhovich (2006a,b), Rockafellar và Wets (1998).

[34]TNTA: singular (limiting) subdifferential.

[35]TNTA: indicator function.

thông qua dưới vi phân tương ứng của hàm chỉ. Ta đặt $\widehat{N}_\Omega(\bar{x}) = \emptyset$ và $N_\Omega(\bar{x}) = \emptyset$ nếu $\bar{x} \notin \Omega$.

Do (2.7) và do công thức của hàm chỉ, ta có $x^* \in \widehat{N}_\Omega(\bar{x})$ khi và chỉ khi

$$\liminf_{x \xrightarrow{\Omega} \bar{x}} \frac{-\langle x^*, x - \bar{x}\rangle}{\|x - \bar{x}\|} \geqslant 0,$$

hay

$$\limsup_{x \xrightarrow{\Omega} \bar{x}} \frac{\langle x^*, x - \bar{x}\rangle}{\|x - \bar{x}\|} \leqslant 0.$$

Điều kiện cuối là khá thuận tiện cho việc tính toán nón pháp tuyến Fréchet.

Đặt $N^\varepsilon_\Omega(\bar{x}) = \widehat{\partial}_\varepsilon \delta(\bar{x}; \Omega)$ và gọi đó là *tập các véctơ ε-pháp tuyến Fréchet* của Ω tại $\bar{x} \in \Omega$. Từ các định nghĩa suy ra rằng $x^* \in N^\varepsilon_\Omega(\bar{x})$ khi và chỉ khi

$$\limsup_{x \xrightarrow{\Omega} \bar{x}} \frac{\langle x^*, x - \bar{x}\rangle}{\|x - \bar{x}\|} \leqslant \varepsilon.$$

Do (2.8) và (2.5), nón pháp tuyến Mordukhovich $N_\Omega(\bar{x})$ của Ω tại $\bar{x} \in \Omega$ được xác định qua các tập véctơ ε-pháp tuyến Fréchet $\widehat{N}^\varepsilon_\Omega(x)$ với $x \in \Omega$ được lấy đủ gần $\bar{x}$ và ε được lấy đủ bé. Kết hợp (2.7) với (2.8), ta thấy rằng $x^* \in N_\Omega(\bar{x})$ khi và chỉ khi tồn tại các dãy $x_k \xrightarrow{\Omega} \bar{x}$, $\varepsilon_k \to 0^+$ và $x_k^* \xrightarrow{w^*} x^*$ sao cho

$$\limsup_{x \xrightarrow{\Omega} x_k} \frac{\langle x^*, x - x_k\rangle}{\|x - x_k\|} \leqslant \varepsilon_k.$$

Nhận xét 4.2.2. Do Nhận xét 4.2.1, nếu X là không gian Asplund và nếu Ω là tập đóng địa phương trong lân cận điểm $\bar{x}$ (tức là tồn tại hình cầu đóng tâm $\bar{x}$ với bán kính dương có giao với Ω là một tập đóng trong X), thì

$$N_\Omega(\bar{x}) = \operatorname*{Lim\,sup}_{x \xrightarrow{\Omega} \bar{x}} \widehat{N}_\Omega(x).$$

Điều đó cũng có nghĩa là $x^* \in N_\Omega(\bar{x})$ khi và chỉ khi tồn tại các dãy $x_k \xrightarrow{\Omega} \bar{x}$, $x_k^* \xrightarrow{w^*} x^*$ sao cho

$$\limsup_{x \xrightarrow{\Omega} x_k} \frac{\langle x^*, x - x_k\rangle}{\|x - x_k\|} \leqslant 0.$$

Bài tập 4.2.3. Chứng minh rằng $\widehat{N}_\Omega(\bar{x})$ là hình nón đóng yếu* trong X^*.

Bài tập 4.2.4. Chứng minh rằng $N_\Omega(\bar{x})$ là hình nón[36] trong X^*.

[36]Trong Mordukhovich (2006a; tr. 11) có trình bày ví dụ chứng tỏ rằng nếu X là không gian vô hạn chiều (ví dụ như X là không gian Hilbert vô hạn chiều) thì hình nón $N_\Omega(\bar{x})$ có thể không đóng trong tôpô w^*.

Bài tập 4.2.5. Tính các tập $N_\Omega^\varepsilon(x)$ $(\varepsilon > 0)$ và các nón pháp tuyến $\widehat{N}_\Omega(\bar{x})$, $N_\Omega(\bar{x})$ trong các trường hợp sau:

a) $X = I\!R^2$, $\Omega = \{x = (x_1, x_2) \,:\, x_2 = 0\}$, $\bar{x} = (0, 1)$;

b) $X = I\!R^2$, $\Omega = \{x = (x_1, x_2) \,:\, x_2 \leqslant 0\}$, $\bar{x} = (0, 1)$.

ĐỐI ĐẠO HÀM

Xét ánh xạ đa trị $F\colon X \rightrightarrows Y$ giữa các không gian Banach. Như ở các chương trước, ta đặt

$$\text{dom}\, F := \{x \in X \,:\, F(x) \neq \emptyset\}$$

và

$$\text{gph}\, F := \{(x, y) \in X \times Y \,:\, y \in F(x)\}.$$

Đối đạo hàm Fréchet[37] của F tại $(\bar{x}, \bar{y}) \in \text{gph}\, F$ và *đối đạo hàm qua giới hạn*[38] (hay *đối đạo hàm Mordukhovich*) của F tại $(\bar{x}, \bar{y})$ tương ứng được cho bởi các công thức

$$\widehat{D}^* F(\bar{x}, \bar{y})(y^*) := \left\{x^* \in X^* \,:\, (x^*, -y^*) \in \widehat{N}_{\text{gph}\, F}(\bar{x}, \bar{y})\right\}, \tag{2.9}$$

$$D^* F(\bar{x}, \bar{y})(y^*) := \left\{x^* \in X^* \,:\, (x^*, -y^*) \in N_{\text{gph}\, F}(\bar{x}, \bar{y})\right\}. \tag{2.10}$$

Nếu $F(x) = \{f(x)\}$ là ánh xạ đơn trị, thì ta viết $\widehat{D}^* f(\bar{x})$ thay cho $\widehat{D}^* f(\bar{x}, f(\bar{x}))$ và $D^* f(\bar{x})$ thay cho $D^* f(\bar{x}, f(\bar{x}))$. Nếu f tương ứng là khả vi Fréchet và khả vi chặt[39] tại $\bar{x}$, thì các đối đạo hàm trong (2.9) và (2.10) được tính như sau:

$$\widehat{D}^* f(\bar{x})(y^*) = (f'(\bar{x}))^*(y^*) \quad \forall y^* \in Y^*$$

và

$$D^* f(\bar{x})(y^*) = (f'(\bar{x}))^*(y^*) \quad \forall y^* \in Y^*.$$

Lúc này, với mọi $y^* \in Y^*$, $\widehat{D}^* f(\bar{x})(y^*)$ và $D^* f(\bar{x})(y^*)$ là các tập có một phần tử. Nếu f là khả vi chặt tại $\bar{x}$, thì

$$D^* f(\bar{x})(y^*) = \widehat{D}^* f(\bar{x})(y^*) = (f'(\bar{x}))^*(y^*) \quad \forall y^* \in Y^*.$$

(Ánh xạ đối đạo hàm Mordukhovich trùng với ánh xạ đối đạo hàm Fréchet.) Ta đã thấy rằng các đối đạo hàm trong (2.9) và (2.10) là những mở rộng tự nhiên của toán tử đạo hàm liên hợp của ánh xạ đơn trị khả vi.

[37] TNTA: Fréchet coderivative.

[38] TNTA: limiting coderivative.

[39] Xem khái niệm khả vi chặt trong chú thích ở Mệnh đề 4.2.1.

Ánh xạ $F\colon X \rightrightarrows Y$ được gọi là *chính quy pháp tuyến*[40] tại $(\bar{x},\bar{y})$ nếu

$$\widehat{D}^*F(\bar{x},\bar{y})(y^*) = D^*F(\bar{x},\bar{y})(y^*) \quad \forall y^* \in Y^*.$$

Ngoài các hàm khả vi chặt, tính chất này còn nghiệm đúng với các ánh xạ đa trị có đồ thị lồi. Tuy nhiên, tính chính quy pháp tuyến có thể không nghiệm đúng trong nhiều trường hợp quan trọng.

Quan hệ giữa đối đạo hàm của ánh xạ đơn trị Lipschitz địa phương $f\colon X \to Y$ và dưới vi phân Fréchet của hàm vô hướng hoá

$$(y^* \circ f)(x) := \langle y^*, f(x)\rangle \quad (y^* \in Y^*)$$

của nó được mô tả bởi công thức[41] sau:

$$\widehat{D}^*f(\bar{x})(y^*) = \widehat{\partial}(y^* \circ f)(\bar{x}) \quad \forall y^* \in Y^*. \tag{2.11}$$

Chứng minh của công thức này có trong Mordukhovich (2006a).

CÁC VÍ DỤ

Chúng ta xét một số ví dụ minh họa cho những khái niệm trừu tượng vừa được trình bày ở trên.

Ví dụ 4.2.1[42]**.** Nếu $\Omega = \{x = (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x_2 \geqslant 0, x_1 \geqslant 0\}$ và $\bar{x} = (0,0)$, thì

$$\begin{aligned} N_\Omega(\bar{x}) &= \widehat{N}_\Omega(\bar{x}) \\ &= \{x = (x_1,x_2) \,:\, x_1 \leqslant 0, x_2 \leqslant 0\}. \end{aligned}$$

Ví dụ 4.2.2[43]**.** Nếu

$$\begin{aligned} \Omega &= \{x = (x_1,0) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x_1 \geqslant 0\} \\ &\quad \cup \{x = (0,x_2) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x_2 \geqslant 0\} \end{aligned}$$

và $\bar{x} = (0,0)$, thì

$$\widehat{N}_\Omega(\bar{x}) = \{x = (x_1,x_2) \,:\, x_1 \leqslant 0, x_2 \leqslant 0\}$$

và

$$\begin{aligned} &N_\Omega(\bar{x}) \\ &= \widehat{N}_\Omega(\bar{x}) \cup \Big([0,+\infty) \times \{0\}\Big) \cup \Big(\{0\} \times [0,+\infty)\Big). \end{aligned}$$

[40] TNTA: normally regular.

[41] Được gọi là công thức vô hướng hoá.

[42] Vì tập Ω này là lồi, nón pháp tuyến qua giới hạn trùng với nón pháp tuyến theo nghĩa giải tích lồi.

[43] Tập Ω này là không lồi. Cấu trúc của hình nón pháp tuyến qua giới hạn phản ánh đầy đủ cấu trúc địa phương của Ω tại $\bar{x}$.

Ví dụ 4.2.3[44]**.** Nếu

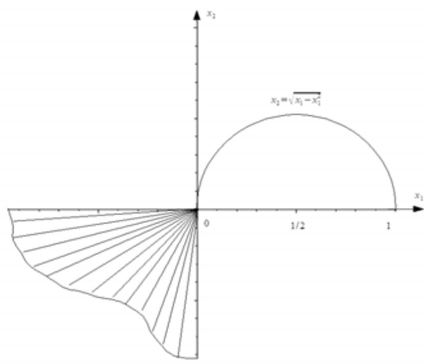
$$\begin{aligned}\Omega \; &= \{x = (x_1, 0) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \leqslant x_1 \leqslant 1\} \\ &\quad \cup \{x = (0, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \leqslant x_1 \leqslant 1, \\ &\qquad x_2 = \sqrt{x_1 - x_1^2}\}\end{aligned}$$

và $\bar{x} = (0, 0)$, thì

$$\widehat{N}_\Omega(\bar{x}) = \{x = (x_1, x_2) \,:\, x_1 \leqslant 0, x_2 \leqslant 0\}$$

và

$$\begin{aligned}&N_\Omega(\bar{x}) \\ &= \widehat{N}_\Omega(\bar{x}) \cup \Big([0, +\infty) \times \{0\}\Big) \cup \Big(\{0\} \times [0, +\infty)\Big).\end{aligned}$$



Hình 16

Ví dụ 4.2.4[45]**.** Nếu $f(x) = |x|$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $\bar{x} = 0$, thì

$$\partial^P f(\bar{x}) = \widehat{\partial} f(\bar{x}) = \partial f(\bar{x}) = [-1, 1].$$

Ví dụ 4.2.5[46]**.** Nếu $f(x) = -|x|$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $\bar{x} = 0$, thì

$$\partial^P f(\bar{x}) = \widehat{\partial} f(\bar{x}) = \emptyset, \quad \partial f(\bar{x}) = \{-1, 1\}.$$

[44]Cấu trúc địa phương của tập Ω này tại $(0, 0)$ tương tự như cấu trúc của tập hợp xét ở Ví dụ 4.2.2 trong lân cận của điểm $(0, 0)$.

[45]Vì hàm số f này là lồi, nên dưới vi phân qua giới hạn trùng với dưới vi phân theo nghĩa giải tích lồi.

[46]Hàm f này không lồi và dưới vi phân qua giới hạn cũng là tập không lồi. Dưới vi phân Clarke của f tại $\bar{x}$ là đoạn $[-1, 1]$, một tập hợp lồi compắc.

Ví dụ 4.2.6 [47]**.** Đặt $f(x) = |x_1| - |x_2|$ với mọi $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ và lấy $\bar{x} = (0,0)$. Hàm số f không lồi, cũng không lõm. Ta có

$$\begin{aligned}
&N_{\text{gph}f}((\bar{x},0))\\
&= \operatorname*{Lim\,sup}_{z\to(\bar{x},0)} \widehat{N}_{\text{gph}f}(z)\\
&= \text{cone}\{(1,-1,-1),(1,1,-1),\\
&\qquad (-1,1,-1),(-1,-1,-1)\}\\
&\quad \cup\{(-\mu,\mu-\lambda,\mu)\ :\ 2\mu \geqslant \lambda \geqslant 0\}\\
&\quad \cup\{(\mu,\lambda-\mu,\mu)\ :\ 2\mu \geqslant \lambda \geqslant 0\}\\
&\quad \cup\{(-\lambda-\mu,\mu,\mu)\ :\ -2\mu \geqslant \lambda \geqslant 0\}\\
&\quad \cup\{(-\lambda-\mu,-\mu,\mu)\ :\ -2\mu \geqslant \lambda \geq 0\}.
\end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned}
&D^*f(\bar{x})(y^*)\\
&= \begin{cases}
\{(y^*,-y^*),(y^*,y^*),(-y^*,y^*),(-y^*,-y^*)\}\\
\cup\{(-\lambda^*+y^*,-y^*)\ :\ 2y^* \geqslant \lambda^* \geqslant 0\}\\
\cup\{(-\lambda^*+y^*,y^*)\ :\ 2y^* \geqslant \lambda^* \geqslant 0\}\\
\qquad\qquad\qquad \text{nếu}\ \ y^* > 0,\\
\{(y^*,-y^*),(y^*,y^*),(-y^*,y^*),(-y^*,-y^*)\}\\
\cup\{(y^*,-y^*-\lambda^*)\ :\ -2y^* \geqslant \lambda^* \geqslant 0\}\\
\cup\{(-y^*,y^*+\lambda^*)\ :\ -2y^* \geqslant \lambda^* \geqslant 0\}\\
\qquad\qquad\qquad \text{nếu}\ \ y^* < 0,\\
\{(0,0)\} \qquad\qquad \text{nếu}\ \ y^* = 0.
\end{cases}
\end{aligned}$$

Vì thế, với mỗi y^*, $D^*f(0)(y^*)$ là tập compắc khác rỗng. Lưu ý thêm rằng, với hầu hết các $y^* \in \mathbb{R}$, $D^*f(0)(y^*)$ là tập không lồi.

> **Bài tập 4.2.6.** Sử dụng các định nghĩa và công thức trong mục này để kiểm tra các khẳng định nói trong các ví dụ 4.2.1-4.2.5.

4.3 Vấn đề đánh giá dưới vi phân của hàm giá trị tối ưu

Các hàm giá trị tối ưu được hiểu là các hàm số nhận giá trị trong tập số thực suy rộng có dạng sau:

$$\mu(x) := \inf\{\varphi(x,y)\ :\ y \in G(x)\}, \tag{3.1}$$

ở đó $\varphi\colon X \times Y \to \overline{I\!R}$ là *hàm giá* [48] hay *hàm mục tiêu* [49] nhận giá trị trong tập số thực suy rộng $\overline{I\!R}$, $G\colon X \rightrightarrows Y$ là *ánh xạ đa trị mô tả ràng buộc* [50] giữa các không

[47] Các tính toán chi tiết liên quan đến ví dụ này được trình bày ở Mục 5.8 trong Chương 5.

[48] TNTA: cost function.

[49] TNTA: objective function.

[50] TNTA: constraint set-valued mapping.

gian Banach. Thuật ngữ giá/ràng buộc có nguồn gốc từ *tối ưu có ràng buộc*, ở đó hàm số (3.1) thường được gọi là *hàm giá trị tối ưu*[51] (hay *hàm marginal*) của bài toán tối ưu có tham số

$$\text{(3.2)} \qquad \text{Tìm cực tiểu } \varphi(x,y) \text{ với ràng buộc } y \in G(x)$$

với *ánh xạ nghiệm* $M(\cdot)$ xác định bởi công thức

$$\text{(3.3)} \qquad M(x) := \{y \in G(x) \,:\, \mu(x) = \varphi(x,y)\}.$$

Các hàm số dạng (3.1) đóng vai trò quan trọng trong giải tích biến phân, tối ưu có ràng buộc, lý thuyết điều khiển, và nhiều ứng dụng khác nhau của các lý thuyết đó. Song song với việc đưa ra những điều kiện đủ để hàm giá trị tối ưu là liên tục hoặc Lipschitz địa phương tại một tham số cho trước (xem, ví dụ như, Mục 5.5 trong Chương 5), trong khoảng thời gian 30 năm trở lại đây, người ta đã quan tâm nghiên cứu các tính chất khả vi và khả vi theo hướng của hàm giá trị tối ưu. Các kết quả theo hướng này thường được gọi là các kết quả về *tính ổn định vi phân của các bài toán tối ưu.* Các bài báo của Gauvin và Tolle (1977), Gauvin (1979), Auslender (1979) thuộc trong số những nghiên cứu đầu tiên về các tính chất vi phân hàm giá trị tối ưu trong các bài toán quy hoạch phi tuyến cho bởi các hàm trơn, không lồi. Thông tin thêm về lý thuyết và ứng dụng của các hàm giá trị tối ưu có thể xem trong Auslender và Teboulle (2003), Bonnans và Shapiro (2000), Borwein và Zhu (2005), Clarke (1983), Dien và Yen (1991), Gauvin và Dubeau (1982, 1984), Gollan (1984), Ha (2005), Lucet và Ye (2001, 2002), Mordukhovich (1992, 2006a, 2006b), Mordukhovich và Nam (2005a), Mordukhovich và Shao (1996a), Rockafellar (1982, 1985), Rockafellar và Wets (1998), Thibault (1991), và các tài liệu được trích dẫn trong đó.

Tất nhiên chúng ta có thể đặt vấn đề tính đạo hàm và đối đạo hàm của ánh xạ nghiệm $M(\cdot)$. Đây là một vấn đề khó, đang được nhiều người quan tâm nghiên cứu.

Một trong những tính chất đặc trưng của các hàm giá trị tối ưu dạng (3.1) là chúng là *những hàm không trơn về bản chất*, cho dù các hàm giá là trơn và tập ràng buộc là tập nghiệm của hệ bất đẳng thức và đẳng thức mô tả bởi các hàm trơn. Vì vậy, ta cần nghiên cứu các tính chất vi phân theo nghĩa suy rộng của hàm giá trị tối ưu để có được các thông tin cốt yếu về độ nhạy và tính ổn định của các bài toán tối ưu và điều khiển có nhiễu, về điều kiện cực trị, về tính điều khiển được địa phương, v.v... Một bước căn bản để thu được các thông tin như thế là tiến hành đánh giá các đạo hàm suy rộng của hàm giá trị tối ưu μ cho bởi công thức (3.1) tại một tham số $\bar{x}$ cho trước thông qua các cấu trúc vi phân suy rộng của φ và G.

[51]TNTA: optimal value function.

Đạo hàm suy rộng có thể có hai loại chính: đạo hàm theo hướng/các xấp xỉ tiếp tuyến trong không gian nền và dưới vi phân (tập hợp các dưới gradient)/các xấp xỉ pháp tuyến trong không gian đối ngẫu. Trong một số trường hợp (bao gồm các trường hợp bài toán với dữ liệu trơn và bài toán với dữ liệu lồi) phương pháp tiếp cận bằng không gian nền và phương pháp tiếp cận bằng không gian đối ngẫu là tương đương. Nhưng cũng có nhiều tình huống ở đó các cấu trúc trong không gian đối ngẫu không thể thu được từ bất cứ xấp xỉ nào trong không gian nền bằng các quan hệ đối ngẫu, trong khi các cấu trúc đối ngẫu đó vẫn cho những thông tin có giá trị về dáng điệu của hàm giá trị tối ưu và các ứng dụng quan trọng của nó, đặc biệt là trong việc phân tích độ nhạy và trong việc thiết lập các điều kiện tối ưu.

Trong các mục 4.5 và 4.6 chúng ta sẽ đưa ra các quy tắc để tính toán hoặc đánh giá dưới vi phân Fréchet và dưới vi phân Mordukhovich của hàm $\mu(\cdot)$ trong (3.1) thông qua dưới vi phân tương ứng của hàm giá φ và đối đạo hàm của ánh xạ mô tả ràng buộc G. Các quy tắc này được thiết lập cho trường hợp không gian vô hạn chiều, trong khi hầu hết các quy tắc thu được nhờ cách tiếp cận bằng không gian nền cần tới giả thiết các không gian X và Y được xét là hữu hạn chiều. Chúng ta cũng sẽ minh họa các kết quả thu được bằng một số ví dụ cụ thể.

4.4 Tính compắc pháp tuyến theo dãy

Một trong những điểm khác biệt cơ bản giữa giải tích biến phân hữu hạn chiều và giải tích biến phân vô hạn chiều là sự cần thiết phải đặt ra các yêu cầu về *tính compắc pháp tuyến* (normal compactness) khi ta xét các ánh xạ và tập hợp trong không gian vô hạn chiều. Nếu những yêu cầu đó được thỏa mãn thì khi lấy giới hạn dãy theo tôpô yếu* ta mới có được các kết luận không tầm thường.

Mục này cung cấp một và khái niệm liên quan đến tính compắc pháp tuyến theo dãy của các tập hợp trong không gian Banach vô hạn hiều. Những khái niệm này là cần thiết cho việc trình bày các kết quả và chứng minh trong Mục 4.6. Để hiểu sâu thêm, bạn đọc có thể tham khảo bộ sách của B. S. Mordukhovich (2006a,b). Nếu không nói gì thêm, thì tất cả các không gian được xét đề là các không gian Banach.

Các tính chất compắc pháp tuyến được đưa ra sau đây tự động thỏa mãn trong không gian hữu hạn chiều. Ngoài ra, chúng cũng nghiệm đúng với các tập hợp và ánh xạ 'tốt', và được bảo tồn dưới các phép biến đổi khá đa dạng.

Định nghĩa 4.4.1. Tập hợp Ω trong không gian Banach X được gọi là *compắc pháp tuyến theo dãy*[52] (SNC) tại $\bar{x}$ nếu với mọi dãy $\varepsilon_k \downarrow 0$, $x_k \xrightarrow{\Omega} \bar{x}$, và

[52]TNTA: sequentially normally compact (SNC).

$x_k^* \in \widehat{N}_{\varepsilon_k}(x_k;\Omega)$ ta có

$$\left[x_k^* \xrightarrow{w^*} 0\right] \Longrightarrow \left[\|x_k^*\| \to 0\right] \text{ khi } k \to \infty.$$

Nhận xét 4.4.1 (xem Mordukhovich (2006a)). Nếu X là không gian Asplund và nếu Ω là tập đóng địa phương trong lân cận điểm $\bar{x}$, thì trong định nghĩa trên ta có thể bỏ ký hiệu ε_k (mà vẫn không thay đổi tính chất được xét).

Trong Định nghĩa 4.4.1 có đòi hỏi, đối với những dãy véctơ nào đó trong X^*, nếu dãy hội tụ về 0 theo tôpô yếu* thì dãy các chuẩn tương ứng phải hội tụ về 0 (tức là từ sự hội tụ của dãy về 0 theo tôpô yếu* suy ra sự hội tụ của nó về 0 theo chuẩn của X^*). Để có thể hiểu rõ hơn ý nghĩa của đòi hỏi đó, ta xét ví dụ sau.

Ví dụ 4.4.1. Lấy $X = \ell_2$ là không gian Hilbert của các dãy số thực $x = (x_1, x_2, \ldots)$ thỏa điều kiện $\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < +\infty$ với chuẩn và tích vô hướng được cho bởi

$$\|x\| = \Big(\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2\Big)^{1/2}, \quad \langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i.$$

Nhờ Định lý Riesz, ta có thể đồng nhất X^* với X và tôpô w^* của X^* với tôpô yếu (ký hiệu là w) của X. Lấy $x^{(k)} = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$, ở đó số 1 đứng ở vị trí thứ k. Ta có $x^{(k)} \xrightarrow{w} 0$, vì với mọi $v = (v_1, v_2, \ldots) \in X$ tính chất $\lim\limits_{k\to\infty} \langle x^{(k)}, v\rangle = 0$ hiển nhiên nghiệm đúng. Tuy thế, $\|x^{(k)}\| = 1 \nrightarrow 0$ khi $k \to \infty$.

Định nghĩa 4.4.2. Ánh xạ đa trị $F\colon X \rightrightarrows Y$ được gọi là *compắc pháp tuyến theo dãy* tại $(\bar{x}, \bar{y}) \in \operatorname{gph} F$ nếu đồ thị của nó có tính chất đó.

Đối với trường hợp các ánh xạ, ta có thể định nghĩa một tính chất yếu hơn tính compắc pháp tuyến theo dãy.

Định nghĩa 4.4.3. Ta nói ánh xạ đa trị $F\colon X \rightrightarrows Y$ là *compắc pháp tuyến riêng rẽ theo dãy*[53] (PSNC) tại $(\bar{x}, \bar{y})$ nếu với mọi dãy $\varepsilon_k \downarrow 0$, $(x_k, y_k) \to (\bar{x}, \bar{y})$ mà $(x_k, y_k) \in \operatorname{gph} F$, và $(x_k^*, y_k^*) \in \widehat{N}_{\varepsilon_k}((x_k, y_k); \operatorname{gph} F)$ ta có

$$[x_k^* \xrightarrow{w^*} 0,\ \|y_k^*\| \to 0] \Longrightarrow [\|x_k^*\| \to 0] \text{ khi } k \to \infty.$$

Nhận xét 4.4.2 (xem Mordukhovich (2006a)). Nếu X và Y là các không gian Asplund và F là ánh xạ đa trị có đồ thị đóng, thì trong định nghĩa trên ta có thể bỏ ký hiệu ε_k (nói cách khác, ta có thể lấy $\varepsilon_k = 0$).

Nhận xét 4.4.3 (xem Mordukhovich (2006a)). Tính chất compắc pháp tuyến riêng rẽ theo dãy luôn nghiệm đúng khi F là giả-Lipschitz (liên tục Aubin) tại

[53]TNTA: partial sequentially normally compact (PSNC).

$(\bar{x}, \bar{y})$, tức là khi tồn tại các lân cận U của $\bar{x}$ và V của $\bar{y}$ cùng với hằng số $\ell \geqslant 0$ sao cho

$$F(u) \cap V \subset F(v) + \ell\|u - v\|\bar{B}_Y \quad \text{với mọi} \quad u, v \in U.$$

Định nghĩa 4.4.4. Hàm số $\varphi : X \to \overline{I\!R}$ được gọi là *epi-compắc pháp tuyến theo dãy*[54] (SNEC) tại $\bar{x}$ nếu tập trên đồ thị (epigraph)

$$\text{epi}\,\varphi := \{(x, \alpha) \in X \times I\!R : \varphi(x) \leqslant \alpha\}$$

của nó là SNC tại $(\bar{x}, \varphi(\bar{x}))$.

Nếu φ là Lipschitz địa phương tại $\bar{x}$, thì nó là SNEC tại $\bar{x}$.

Trong Mục 4.6 chúng ta sẽ cần đến các khái niệm đưa ra trong các định nghĩa 4.4.1–4.4.4. Do khuôn khổ có hạn của giáo trình này, ta sẽ không đi sâu phân tích các khái niệm đó. Bạn đọc có quan tâm có thể đọc thêm cuốn chuyên khảo Mordukhovich (2006a).

4.5 Dưới vi phân Fréchet của hàm giá trị tối ưu

Mục này được dành để trình bày các công thức tính toán dưới vi phân Fréchet của *hàm giá trị tối ưu tổng quát* (ở đó ta không giả thiết ánh xạ đa trị G tham gia trong công thức (3.1) có một cấu trúc đặc thù nào). Áp dụng các công thức thu được cho trường hợp $G(x)$ là tập nghiệm của hệ đẳng thức và bất đẳng thức phụ thuộc tham số[55] hoặc $G(x)$ là tập nghiệm của bất đẳng thức biến phân phụ thuộc tham số[56], ta sẽ có các đánh giá dưới vi phân Fréchet của $\mu(\cdot)$ thông qua tập nhân tử Lagrange của bài toán quy hoạch toán học được xét.

Trước hết chúng ta sẽ chứng tỏ rằng có thể đặc trưng các dưới gradient Fréchet của hàm số thực qua các hàm số xấp xỉ dưới, khả vi Fréchet tại điểm được xét.

Bổ đề 4.5.1 (xem Mordukhovich (2006a), Định lý 1.88). *Cho Z là không gian Banach. Giả sử hàm số $\varphi\colon Z \to \overline{I\!R}$ là hữu hạn tại $\bar{z} \in Z$. Khi đó $z^* \in \widehat{\partial}\varphi(\bar{z})$ khi và chỉ khi tồn tại hàm số $s\colon Z \to \overline{I\!R}$ hữu hạn trong lân cận của $\bar{z}$, khả vi Fréchet tại $\bar{z}$, và thỏa mãn các tính chất sau*

$$s(\bar{z}) = \varphi(\bar{z}), \quad s'(\bar{z}) = z^*, \quad \text{và} \quad s(z) \leqslant \varphi(z) \quad \text{với mọi} \quad z \in Z. \tag{5.1}$$

[54]TNTA: sequentially normally epi-compact (SNEC).
[55]Khi đó (3.2) là bài toán quy hoạch toán học phụ thuộc tham số.
[56]Khi đó (3.2) là bài toán quy hoạch toán học với ràng buộc cân bằng phụ thuộc tham số.

Chứng minh. Giả sử $z^* \in \widehat{\partial}\varphi(\bar{z})$. Từ định nghĩa dưới gradient Fréchet suy ra rằng tồn tại một lân cận U của $\bar{z}$ sao cho $\varphi(z) > -\infty$ với mọi $z \in U$. Hàm số

$$s(z) := \min\{\varphi(z), \varphi(\bar{z}) + \langle z^*, z - \bar{z}\rangle\} \quad (\forall z \in Z)$$

thỏa mãn tất cả các tính chất cần có. Thật vậy, ta có s hữu hạn trên U vì rằng $s(z) > -\infty$ với mọi $z \in U$ và $s(z) \leqslant \varphi(\bar{z}) + \langle z^*, z - \bar{z}\rangle < \infty$ với mọi $z \in Z$. Từ công thức định nghĩa s ta suy ra rằng $s(\bar{z}) = \varphi(\bar{z})$ và $s(z) \leqslant \varphi(z)$ với mọi $z \in Z$. Ngoài ra,

$$\limsup_{z \to \bar{z}} \frac{s(z) - s(\bar{z}) - \langle z^*, z - \bar{z}\rangle}{\|z - \bar{z}\|} \leqslant 0.$$

Do điều kiện $z^* \in \widehat{\partial}\varphi(\bar{z})$, sử dụng định nghĩa dưới gradient Fréchet và công thức của hàm s ta thu được

$$\liminf_{z \to \bar{z}} \frac{s(z) - s(\bar{z}) - \langle z^*, z - \bar{z}\rangle}{\|z - \bar{z}\|} \geqslant 0.$$

Từ đó suy ra s hữu hạn trong lân cận của $\bar{z}$, khả vi Fréchet tại $\bar{z}$ và $s'(\bar{z}) = z^*$.

Ngược lại, giả sử rằng $z^* \in Z^*$ và tồn tại hàm số $s\colon Z \to I\!R$ thỏa mãn các tính chất trong (5.1). Khi đó ta có

$$\liminf_{z \to \bar{z}} \frac{\varphi(z) - \varphi(\bar{z}) - \langle z^*, z - \bar{z}\rangle}{\|z - \bar{z}\|} \geqslant \liminf_{z \to \bar{z}} \frac{s(z) - s(\bar{z}) - \langle z^*, z - \bar{z}\rangle}{\|z - \bar{z}\|} = 0.$$

Chứng minh kết thúc. $\square$

> **Bài tập 4.5.1.** Kiểm tra kết luận của của Bổ đề 4.5.1 cho các trường hợp $Z = I\!R^2, \varphi(z) = \|z\|, \bar{z} = 0$ và $Z = I\!R^2, \varphi(z) = -\|z\|, \bar{z} = 0$. Vẽ hình để minh họa cho kết quả nói rằng $\widehat{\partial}\varphi(\bar{z}) = [-1, 1]$ trong trường hợp thứ nhất và $\widehat{\partial}\varphi(\bar{z}) = \emptyset$ trong trường hợp thứ hai.

Định lý sau đây cho ta một đánh giá trên (upper estimate) cho dưới vi phân Fréchet của hàm giá trị tối ưu tổng quát trong công thức (3.1) tại tham số $\bar{x}$ cho trước. Đánh giá này được thiết lập thông qua đối đạo hàm Fréchet của ánh xạ mô tả ràng buộc G và các tập dưới vi phân Fréchet trên của hàm giá φ. Giả thiết cơ bản ở đây là $\widehat{\partial}^+\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ khác rỗng đối với một phần tử $\bar{y} \in M(\bar{x})$ nào đó. Đòi hỏi này được thỏa mãn trong nhiều lớp bài toán tối ưu[57].

Định lý 4.5.1. *Giả sử hàm giá trị tối ưu $\mu(\cdot)$ trong* (3.1) *là hữu hạn tại $\bar{x} \in \operatorname{dom} M$, và giả sử $\bar{y} \in M(\bar{x})$ là véctơ thỏa mãn $\widehat{\partial}^+\varphi(\bar{x}, \bar{y}) \neq \emptyset$. Khi đó*

$$\widehat{\partial}\mu(\bar{x}) \subset \bigcap_{(x^*, y^*) \in \widehat{\partial}^+\varphi(\bar{x}, \bar{y})} \left[x^* + \widehat{D}^*G(\bar{x}, \bar{y})(y^*)\right]. \tag{5.2}$$

[57]Một vài kết quả tương tự như các định lý 4.5.1 và 4.5.2 đã được thiết lập cho hàm giá trị tối ưu trong bài toán quy hoạch toán học có tham số với dữ liệu là các hàm trơn; xem Gollan (1984), Maurer và Zowe (1979).

Chứng minh. Để kiểm chứng (5.2), ta lấy tùy ý $u^* \in \widehat{\partial}\mu(\bar{x})$ và với mỗi $\varepsilon > 0$ ta chọn $\eta > 0$ sao cho

$$-\varepsilon\|x - \bar{x}\| \leqslant \mu(x) - \mu(\bar{x}) - \langle u^*, x - \bar{x}\rangle \quad \forall x \in B(\bar{x}, \eta).$$

Vì $\bar{y} \in M(\bar{x})$, ta có

$$\langle u^*, x - \bar{x}\rangle \leqslant \mu(x) - \varphi(\bar{x}, \bar{y}) + \varepsilon\|x - \bar{x}\| \quad \forall x \in B(\bar{x}, \eta). \tag{5.3}$$

Lấy cố định một véctơ tùy ý $(x^*, y^*) \in \widehat{\partial}^+\varphi(\bar{x}, \bar{y})$. Do (2.3), áp dụng Bổ đề 4.5.1 cho véctơ $(-x^*, -y^*) \in \widehat{\partial}(-\varphi)(\bar{x}, \bar{y})$ ta tìm được hàm số $s\colon X \times Y \to \overline{I\!R}$ khả vi Fréchet tại $(\bar{x}, \bar{y})$ sao cho

$$\begin{cases} s(\bar{x}, \bar{y}) = \varphi(\bar{x}, \bar{y}), \quad s'(\bar{x}, \bar{y}) = (x^*, y^*), \\ s(x, y) \geqslant \varphi(x, y) \quad \forall (x, y) \in X \times Y. \end{cases} \tag{5.4}$$

Để ý rằng $\mu(x) \leqslant \varphi(x, y) \leqslant s(x, y)$ với mọi $y \in G(x)$. Từ (5.3) và (5.4) ta suy ra

$$\begin{aligned}
&\langle u^*, x - \bar{x}\rangle \\
&\leqslant \varphi(x, y) - \varphi(\bar{x}, \bar{y}) + \varepsilon\|x - \bar{x}\| \leqslant s(x, y) - s(\bar{x}, \bar{y}) + \varepsilon\|x - \bar{x}\| \\
&= \langle s'_x(\bar{x}, \bar{y}), x - \bar{x}\rangle + \langle s'_y(\bar{x}, \bar{y}), y - \bar{y}\rangle \\
&\quad + o(\|x - \bar{x}\| + \|y - \bar{y}\|) + \varepsilon\|x - \bar{x}\| \\
&= \langle x^*, x - \bar{x}\rangle + \langle y^*, y - \bar{y}\rangle + o(\|x - \bar{x}\| + \|y - \bar{y}\|) + \varepsilon\|x - \bar{x}\|
\end{aligned}$$

với mọi (x, y) mà $x \in B(\bar{x}, \eta)$ và $y \in G(x)$. Vì $\varepsilon > 0$ được chọn tùy ý, từ đó suy ra

$$\limsup_{(x,y) \xrightarrow{\operatorname{gph} G} (\bar{x}, \bar{y})} \frac{\langle u^* - x^*, x - \bar{x}\rangle - \langle y^*, y - \bar{y}\rangle}{\|x - \bar{x}\| + \|y - \bar{y}\|} \leqslant 0.$$

Điều đó chứng tỏ rằng $(u^* - x^*, -y^*) \in \widehat{\partial}\delta((\bar{x}, \bar{y}); \operatorname{gph} G)$, ở đó $\delta(\cdot; \operatorname{gph} G)$ là hàm chỉ của tập $\operatorname{gph} G$. Lưu ý đến (2.7) ta thu được

$$(u^* - x^*, -y^*) \in \widehat{N}_{\operatorname{gph} G}(\bar{x}, \bar{y}).$$

Do (2.9), từ đó ta có

$$u^* - x^* \in \widehat{D}^*G(\bar{x}, \bar{y})(y^*).$$

Vậy ta có bao hàm thức

$$u^* \in x^* + \widehat{D}^*G(\bar{x}, \bar{y})(y^*),$$

tức là (5.2) nghiệm đúng. □

Định nghĩa 4.5.1 (xem Robinson (1979)). Ánh xạ $h\colon D \to Y$ được gọi là *Lipschitz trên địa phương*[58] tại $\bar{x} \in D$, ở đó D là một tập con của X, nếu tồn tại $\eta > 0$ và $\ell \geqslant 0$ sao cho

$$\|h(x) - h(\bar{x})\| \leqslant \ell\|x - \bar{x}\| \quad \forall x \in B(\bar{x}, \eta) \cap D.$$

Định nghĩa 4.5.2. Ta nói rằng ánh xạ đa trị $F\colon D \rightrightarrows Y$, ở đó $D \subset X$, *có lát cắt Lipschitz trên địa phương*[59] tại $(\bar{x}, \bar{y}) \in \operatorname{gph} F$ nếu tồn tại ánh xạ đơn trị $h\colon D \to Y$ Lipschitz trên địa phương tại $\bar{x}$ sao cho $h(\bar{x}) = \bar{y}$ và $h(x) \in F(x)$ với mọi $x \in D$ trong một lân cận của $\bar{x}$.

Định lý sau đưa ra điều kiện đủ để bao hàm thức (5.2) nghiệm đúng dưới dạng một đẳng thức.

Định lý 4.5.2. *Ngoài các giả thiết của Định lý 4.5.1, ta giả sử thêm rằng φ là khả vi Fréchet tại $(\bar{x}, \bar{y})$ và ánh xạ nghiệm $M\colon \operatorname{dom} G \rightrightarrows Y$ có lát cắt Lipschitz trên địa phương tại $(\bar{x}, \bar{y})$. Khi đó*

$$\widehat{\partial}\mu(\bar{x}) = x^* + \widehat{D}^*G(\bar{x}, \bar{y})(y^*), \tag{5.5}$$

với

$$(x^*, y^*) := \varphi'(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{\partial\varphi(\bar{x}, \bar{y})}{\partial x}, \frac{\partial\varphi(\bar{x}, \bar{y})}{\partial y}\right)$$

là véctơ gradient của φ tại $(\bar{x}, \bar{y})$.

Chứng minh. Theo Định lý 4.5.1 ta có $\widehat{\partial}\mu(\bar{x}) \subset x^* + \widehat{D}^*G(\bar{x}, \bar{y})(y^*)$. Để chứng minh rằng bao hàm thức ngược lại

$$x^* + \widehat{D}^*G(\bar{x}, \bar{y})(y^*) \subset \widehat{\partial}\mu(\bar{x})$$

nghiệm đúng dưới các điều kiện phụ nói trong định lý, ta cố định một phần tử bất kỳ $u^* \notin \widehat{\partial}\mu(\bar{x})$. Ta cần chứng tỏ rằng

$$u^* \notin x^* + \widehat{D}^*G(\bar{x}, \bar{y})(y^*). \tag{5.6}$$

Do định nghĩa dưới gradient Fréchet, điều kiện $u^* \notin \widehat{\partial}\mu(\bar{x})$ kéo theo

$$\liminf_{x \to \bar{x}} \frac{\mu(x) - \mu(\bar{x}) - \langle u^*, x - \bar{x}\rangle}{\|x - \bar{x}\|} < 0.$$

Vì vậy tồn tại $\bar{\varepsilon} > 0$ và dãy $x_k \to \bar{x}$, $x_k \neq \bar{x}$ với mọi $k \in I\!N$, sao cho

$$\frac{\mu(x_k) - \mu(\bar{x}) - \langle u^*, x_k - \bar{x}\rangle}{\|x_k - \bar{x}\|} \leqslant -\bar{\varepsilon}. \tag{5.7}$$

[58] TNTA: locally upper Lipschitzian.

[59] TNTA: admits a local upper Lipschitzian selection.

Nếu $x_k \notin \mathrm{dom}\, G$ thì $G(x_k) = \emptyset$. Khi đó ta có

$$\mu(x_k) = \inf\{\varphi(x_k, y) \,:\, y \in G(x_k)\} = +\infty,$$

mâu thuẫn với (5.7). Vậy ta phải có $x_k \in \mathrm{dom}\, G$ với mọi $k \in I\!N$. Lấy lát cắt $h(\cdot)$ Lipschitz trên địa phương tại $(\bar{x}, \bar{y})$ của ánh xạ nghiệm $M\colon \mathrm{dom}\, G \rightrightarrows Y$ như trong giả thiết của định lý. Đặt $y_k := h(x_k)$ và để ý rằng $\mu(\bar{x}) = \varphi(\bar{x}, \bar{y})$, $\mu(x_k) = \varphi(x_k, y_k)$. Từ (5.7) suy ra

$$\begin{aligned}
&\langle u^*, x_k - \bar{x}\rangle \\
&\geqslant \varphi(x_k, y_k) - \varphi(\bar{x}, \bar{y}) + \bar{\varepsilon}\|x_k - \bar{x}\| \\
&= \langle \varphi'(\bar{x}, \bar{y}), (x_k - \bar{x}, y_k - \bar{y})\rangle + o(\|x_k - \bar{x}\| + \|y_k - \bar{y}\|) \\
&\quad\ +\bar{\varepsilon}\|x_k - \bar{x}\| \\
&= \langle x^*, x_k - \bar{x}\rangle + \langle y^*, y_k - \bar{y}\rangle + o(\|x_k - \bar{x}\| + \|y_k - \bar{y}\|) \\
&\quad\ +\bar{\varepsilon}\|x_k - \bar{x}\|.
\end{aligned}$$

Sử dụng tính chất Lipschitz trên địa phương của $h(\cdot)$ tại $\bar{x}$, ta có

$$\|x_k - \bar{x}\| \geqslant \frac{1}{\ell}\|y_k - \bar{y}\| \quad \text{với} \quad k \in I\!N \text{ đủ lớn.}$$

Điều đó kéo theo các đánh giá

$$\begin{aligned}
&\langle u^* - x^*, x_k - \bar{x}\rangle - \langle y^*, y_k - \bar{y}\rangle \\
&\geqslant \tfrac{\bar{\varepsilon}}{2}\|x_k - \bar{x}\| + \tfrac{\bar{\varepsilon}}{2\ell}\|y_k - \bar{y}\| + o(\|x_k - \bar{x}\| + \|y_k - \bar{y}\|) \\
&\geqslant \widehat{\varepsilon}(\|x_k - \bar{x}\| + \|y_k - \bar{y}\|) + o(\|x_k - \bar{x}\| + \|y_k - \bar{y}\|),
\end{aligned}$$

ở đó $\widehat{\varepsilon} := \min\{\bar{\varepsilon}/2, \bar{\varepsilon}/(2\ell)\}$. Vì vậy,

$$\limsup_{(x,y)\xrightarrow{\mathrm{gph}\, G}(\bar{x},\bar{y})} \frac{\langle u^* - x^*, x - \bar{x}\rangle - \langle y^*, y - \bar{y}\rangle}{\|x - \bar{x}\| + \|y - \bar{y}\|} \geqslant \widehat{\varepsilon};$$

có nghĩa là $(u^* - x^*, -y^*) \notin \widehat{N}_{\mathrm{gph}\, G}(\bar{x}, \bar{y})$. Tính chất đó chứng tỏ rằng (5.6) nghiệm đúng. Chứng minh kết thúc. $\square$

Bây giờ chúng ta xét một số ví dụ để thấy những nét đặc trưng của hai định lý vừa thu được và của các giả thiết của chúng. Chúng ta bắt đầu với các ví dụ chứng tỏ rằng bao hàm thức (5.2) trong Định lý 4.5.1 có thể trở thành đẳng thức ngay cả hàm giá φ không khả vi Fréchet. Để cho tiện, chúng ta ký hiệu các biểu thức ở vế trái và vế phải của (5.2) tương ứng bởi LHS (left-hand side) và RHS (right-hand side).

Ví dụ 4.5.1. Lấy $X = Y = I\!R$. Đặt $\varphi(x, y) = -|y|$ và

$$G(x) = \begin{cases} [-\sqrt{x}, \sqrt{x}] & \text{nếu } x \geqslant 0, \\ \emptyset & \text{nếu } x < 0. \end{cases}$$

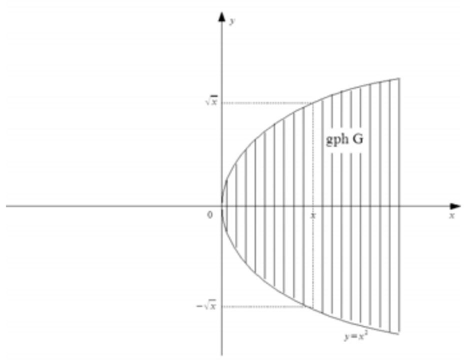
Dễ thấy rằng $\operatorname{gph} G = \{(x,y) \in I\!R^2 : y^2 - x \leqslant 0\}$. Tính hàm giá trị tối ưu theo công thức (3.1), ta có

$$\mu(x) = \begin{cases} -\sqrt{x} & \text{nếu } x \geqslant 0, \\ \infty & \text{nếu } x < 0. \end{cases}$$

Do đó

$$\text{LHS} = \text{RHS} = \begin{cases} \emptyset & \text{nếu } \bar{x} = \bar{y} = 0, \\ \{-1/(2\sqrt{\bar{x}})\} & \text{nếu } \bar{x} > 0 \text{ và hoặc là } \bar{y} = \sqrt{\bar{x}} \\ & \text{hoặc } \bar{y} = -\sqrt{\bar{x}}. \end{cases}$$

Vậy (5.2) nghiệm đúng dưới dạng đẳng thức với mọi $(\bar{x}, \bar{y}) \in \operatorname{gph} M$.



Hình 17

Ví dụ 4.5.2. Lấy $X = Y = I\!R$. Đặt $\varphi(x,y) = -|x| + 2y$ và

$$G(x) = \{y \in I\!R : y \geqslant |x|\}.$$

Ta có $\mu(x) = |x|$ và $0 \in M(0)$. Dễ thấy rằng

$$\widehat{\partial}\mu(0) = [-1,1], \quad \widehat{\partial}^+\varphi(0,0) = [-1,1] \times \{2\}, \quad \widehat{D}^*G(0,0)(2) = [-2,2].$$

Do đó,

$$\bigcap_{(x^*,y^*) \in \widehat{\partial}^+\varphi(0,0)} \{x^* + D^*G(0,0)(y^*)\} = \bigcap_{x^* \in [-1,1]} \{x^* + [-2,2]\} = [-1,1],$$

nghĩa là (5.2) nghiệm đúng dưới dạng đẳng thức.

Trong hai ví dụ trên, hàm mục tiêu $\varphi(x, y)$ là hàm lõm và ánh xạ đa trị mô tả ràng buộc G là lồi. Vậy đánh giá (5.2) vẫn có thể nghiệm đúng dưới dạng đẳng thức đối với những bài toán tối ưu không lồi. Ví dụ sau đây chứng tỏ rằng giả thiết về sự tồn tại lát cắt Lipschitz trên địa phương trong Định lý 4.5.2 là thiết yếu, không thể bỏ đi được.

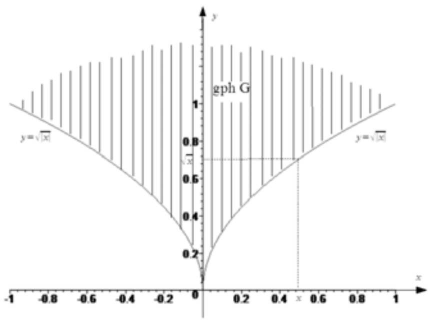
Ví dụ 4.5.3. Lấy $X = Y = I\!R$ và $\bar{x} = \bar{y} = 0$. Xét hàm giá trị tối ưu $\mu(x)$ xác định bởi (3.1) với

$$\varphi(x, y) = 0 \;\text{ và }\; G(x) := [\sqrt{|x|}, \infty).$$

Khi đó ta có

$$\mu(x) = 0 \;\text{ và }\; \widehat{\partial}^{+}\varphi(x, y) = \{0\} \;\text{ với mọi }\; (x, y) \in I\!R^2.$$

Ngoài ra, $\widehat{N}_{\text{gph}\, G}((0, 0)) = I\!R \times (-\infty, 0]$. Vì vậy LHS = $\{0\}$, trong khi RHS=$I\!R$, nghĩa là bao hàm thức (5.2) là *chặt*. Nhận xét rằng ánh xạ nghiệm (3.3) không có lát cắt Lipschitz trên địa phương tại $(\bar{x}, \bar{y})$.



Hình 18

Ví dụ sau đây chứng tỏ rằng tuy giả thiết về sự tồn tại lát cắt Lipschitz trên địa phương trong Định lý 4.5.2 là không thể bỏ được, nhưng nó cũng không phải là điều kiện cần để có dấu bằng trong bao hàm thức (5.2).

Ví dụ 4.5.4. Lấy $X = Y = I\!R$ và $\bar{x} = \bar{y} = 0$. Xét hàm số $\mu(x)$ trong (3.1) với

$$\varphi(x, y) := (x - y^2)^2 \;\text{ và }\; G(x) := I\!R.$$

Sử dụng (3.1) và (3.3) ta tìm được

$$\mu(x) = \begin{cases} x^2 & \text{nếu } x \leqslant 0 \\ 0 & \text{nếu } x > 0 \end{cases}$$

và

$$M(x) = \begin{cases} \{0\} & \text{nếu } x \leqslant 0 \\ \{-\sqrt{x}, \sqrt{x}\} & \text{nếu } x > 0. \end{cases}$$

Trong khi ánh xạ nghiệm $M(\cdot)$ không có lát cắt Lipschitz trên địa phương, đẳng thức vẫn xảy ra trong (5.2) vì rằng

$$\widehat{\partial}\mu(0) = \{0\}, \quad \varphi'(0,0) = \{(0,0)\}, \quad \text{và} \quad \widehat{D}^*G(0,0)(0) = \{0\}.$$

Vậy giả thiết về sự tồn tại lát cắt Lipschitz trên địa phương là điều kiện đủ, nhưng nói chung không phải là điều kiện cần để có dấu đẳng thức trong (5.2).

> **Bài tập 4.5.2.** Bằng các tính toán cụ thể, hãy kiểm tra các kết quả nói trong các ví dụ 4.5.1-4.5.4.

Từ các định lý 4.5.1 và 4.5.2 chúng ta có thể rút ra quy tắc tính dưới vi phân Fréchet của tổng hai hàm số và quy tắc hàm hợp cho dưới vi phân Fréchet. Các quy tắc khác (ở cùng dạng) có thể xem trong Mordukhovich, Nam và Yen (2006). Nhận xét rằng các *quy tắc tính toán chính xác*[60] các phần tử dưới gradient Fréchet (khác với các quy tắc tính toán mờ[61] trong Borwein và Zhu (2005), Mordukhovich (2006a)) thu được ở đây là khá thú vị.

Hệ quả 4.5.1 (Quy tắc tính dưới vi phân Fréchet của tổng). *Cho $\varphi_i\colon X \to \overline{I\!R}$ $(i = 1, 2)$ là các hàm số thực, hữu hạn tại $\bar{x}$. Giả sử rằng $\widehat{\partial}^+\varphi_1(\bar{x}) \neq \emptyset$. Khi đó*

$$\widehat{\partial}(\varphi_1 + \varphi_2)(\bar{x}) \subset \bigcap_{x^* \in \widehat{\partial}^+\varphi_1(\bar{x})} [x^* + \widehat{\partial}\varphi_2(\bar{x})] \subset \widehat{\partial}^+\varphi_1(\bar{x}) + \widehat{\partial}\varphi_2(\bar{x}). \tag{5.8}$$

Chứng minh. Đặt

$$\varphi(x, y) = \varphi_1(x) + y, \quad G(x) = [\varphi_2(x), \infty)$$

và để ý rằng $\operatorname{gph} G = \operatorname{epi} \varphi_2$, trong khi

$$\mu(x) := \inf_{y \in G(x)} \varphi(x, y) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x).$$

Ngoài ra, $\bar{y} := \varphi_2(\bar{x}) \in M(\bar{x})$, ở đó M được xác định bởi (3.3). Lấy tùy ý $x^* \in \widehat{\partial}^+\varphi_1(\bar{x})$, ta có $(x^*, 1) \in \widehat{\partial}^+\varphi(\bar{x}, \bar{y})$. Do Định lý 4.5.1,

$$\widehat{\partial}\mu(\bar{x}) = \widehat{\partial}(\varphi_1 + \varphi_2)(\bar{x}) \subset x^* + \widehat{D}^*G(\bar{x}, \varphi_2(\bar{x}))(1) = x^* + \widehat{\partial}\varphi_2(\bar{x}).$$

Quy tắc (5.8) đã được chứng minh. $\square$

---
[60]TNTA: exact calculus rules.
[61]TNTA: fuzzy calculus rules.

Hệ quả 4.5.2 (Quy tắc tính dưới vi phân Fréchet của hàm hợp). *Giả sử ánh xạ $f: X \to Y$ là Lipschitz địa phương tại $\bar{x}$ và giả sử hàm số $\varphi: Y \to \overline{I\!R}$ là hữu hạn tại $\bar{y} := f(\bar{x})$. Nếu $\widehat{\partial}^+\varphi(\bar{y}) \neq \emptyset$, thì bao hàm thức*

$$\widehat{\partial}(\varphi \circ f)(\bar{x}) \subset \bigcap_{y^* \in \widehat{\partial}^+\varphi(\bar{y})} \widehat{\partial}\langle y^*, f\rangle(\bar{x}) \tag{5.9}$$

nghiệm đúng.

Chứng minh. Đặt $\varphi(x, y) := \varphi(y)$ và $G(x) := \{f(x)\}$. Áp dụng Định lý 4.5.1 và công thức (2.11) ta thu được (5.9). □

Bây giờ chúng ta dẫn ra *nguyên lý biến phân cho dưới vi phân trên*[62]. Mệnh đề này được chứng minh nhờ nguyên lý biến phân Ekeland (xem Định lý 2.1.1 trong Chương 2) và Hệ quả 4.5.1.

Định lý 4.5.3. *Giả sử $\varphi: X \to (-\infty, \infty]$ là hàm số nửa liên tục dưới, bị chặn dưới ở trong không gian Banach X. Khi đó, với mọi $\varepsilon > 0$, $\lambda > 0$, và $x_0 \in X$ thỏa mãn*

$$\varphi(x_0) < \inf_{x \in X} \varphi(x) + \varepsilon,$$

tồn tại $\bar{x} \in X$ sao cho

(a) $\|\bar{x} - x_0\| < \lambda$,

(b) $\varphi(\bar{x}) < \inf_{x \in X} \varphi(x) + \varepsilon$,

(c) $\|x^*\| \leqslant \varepsilon/\lambda$ *với mọi* $x^* \in \widehat{\partial}^+\varphi(\bar{x})$.

Chứng minh. Theo nguyên lý biến phân Ekeland, từ các giả thiết của định lý suy ra rằng tồn tại $\bar{x} \in X$ thỏa mãn

$$\|x_0 - \bar{x}\| < \lambda, \quad \varphi(\bar{x}) < \inf_{x \in X} \varphi(x) + \varepsilon,$$

và $\varphi(\bar{x}) \leqslant \varphi(x) + (\varepsilon/\lambda)\|x - \bar{x}\|$ với mọi $x \in X$. Điều đó chứng tỏ rằng hàm số

$$\psi(x) := \varphi(x) + (\varepsilon/\lambda)\|x - \bar{x}\|, \quad x \in X, \tag{5.10}$$

đạt cực tiểu toàn cục tại $\bar{x}$. Do định nghĩa dưới gradient Fréchet, từ đó ta có $0 \in \widehat{\partial}\psi(\bar{x})$. Để ý rằng khẳng định (c) là tầm thường nếu $\widehat{\partial}^+\varphi(\bar{x}) = \emptyset$. Vậy chỉ phải chứng minh (c) dưới giả thiết $\widehat{\partial}^+\varphi(\bar{x}) \neq \emptyset$. Trong trường hợp đó, áp dụng Hệ quả 4.5.1 cho hàm tổng trong (5.10), từ bao hàm thức $0 \in \widehat{\partial}\psi(\bar{x})$ ta nhận được

$$0 \in \bigcap_{x^* \in \widehat{\partial}^+\varphi(\bar{x})} \Big[x^* + (\varepsilon/\lambda)\widehat{\partial}\| \cdot - \bar{x}\|(\bar{x})\Big] \subset \bigcap_{x^* \in \widehat{\partial}^+\varphi(\bar{x})} \Big[x^* + (\varepsilon/\lambda)\bar{B}_{X^*}\Big],$$

[62] TNTA: uper subdifferential variational principle.

ở đó $\bar{B}_{X^*}$ ký hiệu hình cầu đơn vị đóng trong X^*. Vì vậy $\|x^*\| \leqslant \varepsilon/\lambda$ với mọi $x^* \in \widehat{\partial}^+\varphi(\bar{x})$. $\square$

Tiếp theo chúng ta sẽ áp dụng các định lý 4.5.1 và 4.5.2 cho các bài toán quy hoạch toán học ở đó ánh xạ mô tả ràng buộc là ánh xạ nghiệm của hệ đẳng thức/bất đẳng thức phụ thuộc tham số, hoặc là ánh xạ nghiệm của bài toán cân bằng phụ thuộc tham số.

Trước hết ta xét bài toán quy hoạch toán học trong không gian Banach với các ràng buộc đẳng thức và bất đẳng thức. Đó là một dạng đặt biệt của bài toán (3.2) với ánh xạ $G: X \rightrightarrows Y$ được cho bởi công thức

(5.11)
$$G(x) := \Big\{ y \in Y : \quad \varphi_i(x,y) \leqslant 0, \quad i = 1, \ldots, m, \\ \varphi_i(x,y) = 0, \quad i = m+1, \ldots, m+r \Big\},$$

ở đó $\varphi_i: X \times Y \to I\!R$ $(i = 1, \ldots, m+r)$ là các hàm số thực cho trước. Định lý đầu tiên của chúng ta liên quan đến các bài toán quy hoạch với dữ liệu là các hàm số *khả vi Fréchet* (chúng không nhất thiết phải là trơn hay khả vi chặt tại các điểm được xét). Đánh giá trên cho dưới vi phân Fréchet của hàm giá trị tối ưu $\mu(\cdot)$ sẽ được thiết lập bằng cách sử dụng các *nhân tử Lagrange*[63] cổ điển. Để phát biểu định lý này, chúng ta nhắc lại khái niệm *hàm Lagrange*[64]

(5.12)
$$L(x,y,\lambda) = \varphi(x,y) + \lambda_1\varphi_1(x,y) + \ldots + \lambda_{m+r}\varphi_{m+r}(x,y),$$

của bài toán quy phi tuyến (3.2) với ràng buộc (5.11), ở đó

$$\lambda := (\lambda_1, \ldots, \lambda_{m+r}) \in I\!R^{m+r}$$

là một bộ các nhân tử Lagrange. (Người ta cũng thường gọi véctơ λ là nhân tử Lagrange.) Cho trước một điểm $(\bar{x},\bar{y}) \in \operatorname{gph} M$ trên đồ thị của ánh xạ nghiệm (3.3) và véctơ $y^* \in Y^*$, ta xét các tập nhân tử Lagrange sau đây:

(5.13)
$$\Lambda(\bar{x},\bar{y}) := \Big\{ \lambda \in I\!R^{m+r} : \quad \varphi'_y(\bar{x},\bar{y}) + \sum_{i=1}^{m+r} \lambda_i (\varphi_i)'_y(\bar{x},\bar{y}) = 0, \\ \lambda_i \geqslant 0,\ \lambda_i\varphi_i(\bar{x},\bar{y}) = 0 \ \text{ với } \ i = 1, \ldots, m \Big\},$$

và

(5.14)
$$\Lambda(\bar{x},\bar{y},y^*) := \Big\{ \lambda \in I\!R^{m+r} : \quad y^* + \sum_{i=1}^{m+r} \lambda_i (\varphi_i)'_y(\bar{x},\bar{y}) = 0, \\ \lambda_i \geqslant 0,\ \lambda_i\varphi_i(\bar{x},\bar{y}) = 0 \ \text{ với } \ i = 1, \ldots, m \Big\}.$$

[63]TNTA: Lagrange multiplier.

[64]TNTA: Lagrangian.

Ở đây $\varphi'_y(\bar{x},\bar{y}) = \dfrac{\partial\varphi(\bar{x},\bar{y})}{\partial y}$, $(\varphi_i)'_y(\bar{x},\bar{y}) = \dfrac{\partial\varphi_i(\bar{x},\bar{y})}{\partial y}$ là các đạo hàm riêng của φ và φ_i theo biến y tại điểm $(\bar{x},\bar{y})$. Ta có thể viết lại đẳng thức đầu tiên trong (5.13) thông qua đạo hàm riêng của hàm Lagrange (5.12) theo biến y như sau:

$$L'_y(\bar{x},\bar{y},\lambda) = 0.$$

Đối với các tập nhân tử Lagrange (5.13) và (5.14), ta để ý rằng

$$\Lambda(\bar{x},\bar{y},\varphi'_y(\bar{x},\bar{y})) = \Lambda(\bar{x},\bar{y}).$$

Định lý 4.5.4 (Dưới vi phân Fréchet của hàm giá trị tối ưu của các bài toán quy hoạch toán học khả vi trong không gian Banach). *Giả sử* $\mu(\cdot)$ *được xác định bởi* (3.1) *với* $G(\cdot)$ *được cho bởi* (5.11) *và ánh xạ* $M(\cdot)$ *tương ứng được cho bởi* (3.3), *và* $\operatorname{dom} M \neq \emptyset$. *Lấy* $\bar{x} \in \operatorname{dom} M$ *và* $\bar{y} \in M(\bar{x})$ *thỏa mãn* $\widehat{\partial}^+\varphi(\bar{x},\bar{y}) \neq \emptyset$ *và giả sử rằng các hàm* φ_i, $i = 1,\dots,m+r$, *là khả vi Fréchet tại* $(\bar{x},\bar{y})$ *và liên tục trong lân cận của điểm đó, và*

$$\text{(5.15)} \qquad \varphi'_1(\bar{x},\bar{y}),\dots,\varphi'_{m+r}(\bar{x},\bar{y}) \ \text{ là độc lập tuyến tính.}$$

Khi đó bao hàm thức sau nghiệm đúng:

$$\text{(5.16)} \qquad \widehat{\partial}\mu(\bar{x}) \subset \bigcap_{(x^*,y^*)\in\widehat{\partial}^+\varphi(\bar{x},\bar{y})} \ \bigcup_{\lambda\in\Lambda(\bar{x},\bar{y},y^*)} \left[x^* + \sum_{i=1}^{m+r}\lambda_i(\varphi_i)'_x(\bar{x},\bar{y})\right].$$

Ngoài ra, nếu hàm φ *cũng khả vi Fréchet tại* $(\bar{x},\bar{y})$ *và ánh xạ nghiệm* $M\colon \operatorname{dom} G \rightrightarrows Y$ *có lát cắt Lipschitz trên địa phương tại* $(\bar{x},\bar{y})$, *thì* (5.16) *trở thành đẳng thức:*

$$\text{(5.17)} \qquad \widehat{\partial}\mu(\bar{x}) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda(\bar{x},\bar{y})} \left[\varphi'_x(\bar{x},\bar{y}) + \sum_{i=1}^{m+r}\lambda_i(\varphi_i)'_x(\bar{x},\bar{y})\right].$$

Chứng minh. Trước hết, chúng ta thiết lập công thức

(5.18)

$$\widehat{D}^*G(\bar{x},\bar{y})(v^*) = \Big\{u^* \in X^* : \quad (u^*,-v^*) = \sum_{i=1}^{m+r}\lambda_i\varphi'_i(\bar{x},\bar{y}) \ \text{ với một } \lambda \in I\!R^{m+r} \text{ thỏa mãn } \lambda_i \geqslant 0,\ \lambda_i\varphi_i(\bar{x},\bar{y}) = 0 \text{ ở đó } i = 1,\dots,m\Big\}$$

cho đối đạo hàm của ánh xạ $G(\cdot)$ trong (5.11) dưới giả thiết rằng các hàm φ_i $(i = 1,\dots,m+r)$ là khả vi Fréchet tại $(\bar{x},\bar{y})$ và điều kiện chuẩn hoá ràng buộc (5.15) được thỏa mãn.

Để chứng minh (5.18), chúng ta nhận xét rằng đồ thị của ánh xạ $G(\cdot)$ được xét có thể biểu diễn dưới dạng *ảnh ngược*

(5.19) $$\operatorname{gph} G = f^{-1}(K) := \{(x,y) \in X \times Y \ : \ f(x,y) \in K\}$$

của hình nón lồi đóng $K \subset I\!R^{m+r}$ xác định bởi

(5.20)
$$K := \Big\{(\alpha_1, \ldots, \alpha_{m+r}) \in I\!R^{m+r} \ : \ \begin{array}{l} \alpha_i \leqslant 0 \ \text{ với } \ i = 1, \ldots, m, \\ \alpha_i = 0 \ \text{ với } \ i = m+1, \ldots, m+r \end{array}\Big\}$$

qua ánh xạ $f \colon X \times Y \to I\!R^{m+r}$ được cho bởi

(5.21) $$f(x,y) := (\varphi_1(x,y), \ldots \varphi_{m+r}(x,y)).$$

Do (5.21), f là khả vi Fréchet tại $(\bar{x}, \bar{y})$ khi và chỉ khi tất cả các hàm φ_i $(i = 1, \ldots, m+r)$ là khả vi Fréchet tại $(\bar{x}, \bar{y})$. Ngoài ra, toán tử đạo hàm

$$f'(\bar{x}, \bar{y}) \colon X \times Y \to I\!R^{m+r}$$

là *tràn* khi và chỉ khi điều kiện (5.15) được thỏa mãn. Sử dụng quy tắc tính toán trong Mordukhovich (2006a), Hệ quả 1.15, để tính nón pháp tuyến Fréchet của ảnh ngược của các tập hợp trong không gian hữu hạn chiều qua ánh xạ khả vi Fréchet với đạo hàm tràn, ta có

(5.22) $$\widehat{N}((\bar{x}, \bar{y}); f^{-1}(K)) = (f'(\bar{x}))^* \Big(\widehat{N}(f(\bar{x}, \bar{y}); K)\Big).$$

Từ đó, do định nghĩa đối đạo hàm, do biểu diễn (5.19), do các cấu trúc đặc biệt của K trong (5.20) và f trong (5.21), ta thu được (5.18).

Để chứng minh (5.16), ta cố định một phần tử $\widehat{x}^* \in \widehat{\partial}\mu(\bar{x})$ và lấy tùy ý một phần tử $(x^*, y^*) \in \widehat{\partial}^+\varphi(\bar{x}, \bar{y})$. Theo Định lý 4.5.1,

$$\widehat{x}^* - x^* \in \widehat{D}^* G(\bar{x}, \bar{y})(y^*).$$

Do (5.18), tồn tại $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{m+r}) \in I\!R^{m+r}$ với

$$\lambda_i \geq 0 \ \text{ và } \ \lambda_i \varphi_i(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \ \text{ với mọi } \ i = 1, \ldots, m$$

sao cho

$$(\widehat{x}^* - x^*, -y^*) = \sum_{i=1}^{m+r} \lambda_i \varphi_i'(\bar{x}, \bar{y}).$$

Lưu ý đến (5.14), ta có

$$\widehat{x}^* - x^* \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda(\bar{x}, \bar{y}, y^*)} \left[\sum_{i=1}^{m+r} \lambda_i (\varphi_i)'_x(\bar{x}, \bar{y})\right].$$

Điều đó chứng tỏ rằng (5.16) nghiệm đúng.

Bây giờ ta giả sử rằng hàm φ là khả vi Fréchet tại $(\bar{x}, \bar{y})$ và ánh xạ nghiệm $M(\cdot)$ có lát cắt Lipschitz trên địa phương tại $(\bar{x}, \bar{y})$. Khi đó, theo Định lý 4.5.2, (5.5) nghiệm đúng. Sử dụng (5.18), từ đó ta thu được (5.17). □

Sau đây chúng ta xét trường hợp các hàm ràng buộc trong (5.11) không nhất thiết là khả vi tại $(\bar{x}, \bar{y})$.

Định lý 4.5.5 (Dưới vi phân Fréchet của hàm giá trị tối ưu của các bài toán quy hoạch toán học không khả vi trong không gian Asplund). *Giả sử* $\mu(\cdot)$ *được xác định bởi* (3.1) *với* $G\colon X \rightrightarrows Y$ *được cho bởi* (4.11), *ở đó* X *và* Y *là các không gian Asplund. Giả sử rằng* $\operatorname{dom} M \neq \emptyset$ *và tồn tại* $\bar{x} \in \operatorname{dom} M$, $\bar{y} \in M(\bar{x})$, *sao cho* $\widehat{\partial}^+\varphi(\bar{x}, \bar{y}) \neq \emptyset$, *với* $M(\cdot)$ *là ánh xạ được cho bởi* (3.3). *Giả thiết thêm rằng các hàm số* φ_i $(i = 1, \ldots, m+r)$ *là Lipschitz địa phương tại* $(\bar{x}, \bar{y})$ *và điều kiện chuẩn hoá ràng buộc (điều kiện chính quy) sau được thỏa mãn: Chỉ có* $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{m+r}) = 0 \in I\!R^{m+r}$ *là véctơ thỏa mãn các tính chất*

$$\begin{aligned} &0 \in \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \partial\varphi_i(\bar{x}, \bar{y}) + \sum_{i=m+1}^{m+r} \lambda_i\big(\partial\varphi_i(\bar{x}, \bar{y}) \cup \partial(-\varphi_i)(\bar{x}, \bar{y})\big), \\ &(\lambda_1, \ldots, \lambda_{m+r}) \in I\!R_+^{m+r},\ \lambda_i\varphi_i(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \ \text{ với }\ i = 1, \ldots, m. \end{aligned} \tag{5.23}$$

Khi đó,

$$\begin{aligned} \widehat{\partial}\mu(\bar{x}) \subset \bigcap_{(x^*, y^*) \in \widehat{\partial}^+\varphi(\bar{x}, \bar{y})} \Big[\ & u^* \in X^* : (u^*, 0) \in (x^*, y^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \partial\varphi_i(\bar{x}, \bar{y}) \\ & + \sum_{i=m+1}^{m+r} \lambda_i\big(\partial\varphi_i(\bar{x}, \bar{y}) \cup \partial(-\varphi_i)(\bar{x}, \bar{y})\big) \\ & \text{với } (\lambda_1, \ldots, \lambda_{m+r}) \in I\!R_+^{m+r} \\ & \text{thỏa mãn } \lambda_i\varphi_i(\bar{x}, \bar{y}) = 0,\ i = 1, \ldots, m \Big]. \end{aligned} \tag{5.24}$$

Ngoài ra, (5.24) *trở thành đẳng thức nếu ta giả sử thêm rằng hàm* φ *là khả vi Fréchet tại* $(\bar{x}, \bar{y})$, *tất cả các hàm ràng buộc* φ_i *là khả vi chặt tại điểm đó, và ánh xạ nghiệm* $M\colon \operatorname{dom} G \rightrightarrows Y$ *có lát cắt Lipschitz trên địa phương tại* $(\bar{x}, \bar{y})$.

Chứng minh. Để thu được (5.24), ta sử dụng bao hàm thức (5.2) và để ý rằng

$$\widehat{D}^*G(\bar{x}, \bar{y})(v^*) \subset D^*G(\bar{x}, \bar{y})(v^*), \quad v^* \in Y^* \tag{5.25}$$

Áp dụng Hệ quả 4.36 trong Mordukhovich (2006a), ta có đánh giá trên

$$
\begin{aligned}
D^*G(\bar{x},\bar{y})(v^*) \subset \Big\{ \quad & u^* \in X^* \,:\, (u^*, -v^*) \in \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \partial\varphi_i(\bar{x},\bar{y}) \\
& + \sum_{i=m+1}^{m+r} \lambda_i (\partial\varphi_i(\bar{x},\bar{y}) \cup \partial(-\varphi_i)(\bar{x},\bar{y})) \\
& \text{với } (\lambda_1,\ldots,\lambda_{m+r}) \in I\!R_+^{m+r} \\
& \text{thỏa mãn } \lambda_i\varphi_i(\bar{x},\bar{y}) = 0,\ i = 1,\ldots,m \Big\}
\end{aligned}
\tag{5.26}
$$

cho đối đạo hàm $D^*G(\bar{x},\bar{y})$ của ánh xạ $G(\cdot)$ cho bởi (5.11) dưới điều kiện các hàm φ_i $(i = 1,\ldots,m+r)$ là Lipschitz địa phương tại $(\bar{x},\bar{y})$ và điều kiện chuẩn hoá ràng buộc:

$$
(5.23) \implies (\lambda_1,\ldots,\lambda_{m+r}) = (0,\ldots,0). \tag{5.27}
$$

Lập luận tương tự như trong chứng minh Định lý 4.5.4, ta thu được đánh giá (5.24).

Để thiết lập đẳng thức trong (5.24) dưới các điều kiện nói ở khẳng định thứ hai của định lý, ta sử dụng Định lý 4.5.2. Chỉ còn phải chứng tỏ rằng đánh giá (5.26) có dấu bằng dưới điều kiện chính quy (5.27) và giả thiết về tính khả vi chặt tại $(\bar{x},\bar{y})$ của các hàm φ_i. Điều đó suy ra từ chứng minh của Hệ quả 4.36 trong Mordukhovich (2006a) bằng cách áp dụng khẳng định (iii) của Định lý 3.13 (Quy tắc hàm hợp cho đối đạo hàm) trong Mordukhovich (2006a). □

Dựa trên Định lý 4.5.5 chúng ta có thể đưa ra đánh giá trên cho dưới vi phân Fréchet của hàm giá trị tối ưu trong bài toán quy hoạch toán học phụ thuộc tham số với dữ liệu khả vi, ở đó thay cho (5.15) ta sử dụng *điều kiện chính quy Mangasarian-Fromovitz* - một điều kiện yếu hơn (5.15). Tuy thế, ta phải giả thiết rằng X và Y là các không gian Asplund và các hàm ràng buộc trong (5.11) là khả vi chặt $(\bar{x},\bar{y})$.

Hệ quả 4.5.3. *Dưới các giả thiết nói trong khẳng định thứ nhất của Định lý 4.5.5, giả sử rằng X và Y là các không gian Asplund, các hàm ràng buộc φ_i là khả vi chặt*[65] *tại $(\bar{x},\bar{y})$, và điều kiện* (5.15) *được thay bằng điều kiện sau:*

(5.28)

$\varphi'_{m+1}(\bar{x},\bar{y}),\ldots,\varphi'_{m+r}(\bar{x},\bar{y})$ *là độc lập tuyến tính;*
tồn tại $w \in X \times Y$ *sao cho* $\langle \varphi'_i(\bar{x},\bar{y}), w\rangle = 0$ *nếu* $i = m+1,\ldots,m+r$,
$\langle \varphi'_i(\bar{x},\bar{y}), w\rangle < 0$ *nếu* $i = 1,\ldots,m$ *với* $\varphi_i(\bar{x},\bar{y}) = 0$.

Khi đó ta có (5.16), *và bao hàm thức đó trở thành đẳng thức* (5.17) *khi φ và $M(\cdot)$ thỏa mãn các giả thiết nói trong khẳng định thứ hai của Định lý 4.5.5.*

Chứng minh. Các khẳng định trong hệ quả này suy ra từ các khẳng định tương ứng trong Định lý 4.5.5. □

[65]Xem định nghĩa trong chú thích ở Mệnh đề 4.2.1.

Bài tập 4.5.3. Cho $X = Y = I\!R$, $\varphi(x, y) = x|y|$ và

$$G(x) = \{y : x + |y| \leqslant 0,\ x - y = 1\}.$$

Áp dụng Định lý 4.5.5 để tính (hoặc đánh giá) dưới vi phân $\widehat{\partial}\mu(\bar{x})$ của hàm μ xác định bởi (3.1) tại $\bar{x} = 0$.

Mục đích của hai bài tập sau là tìm hiểu mối liên hệ giữa Định lý 4.5.5 và Định lý 4.5.4.

Bài tập 4.5.4. Chứng minh rằng điều kiện chuẩn hoá ràng buộc trong khẳng định thứ nhất của Định lý 4.5.5 trở thành điều kiện (5.28) khi các hàm φ_i là khả vi chặt tại $(\bar{x}, \bar{y})$.

Bài tập 4.5.5. Chứng minh rằng nếu các hàm φ và φ_i $(i = 1, \ldots, m + r)$ là khả vi chặt tại $(\bar{x}, \bar{y})$, thì (5.17) nghiệm đúng nếu như bao hàm thức (5.24) có dấu bằng.

Bây giờ ta xét bài toán (3.2) trong trường hợp $G(x)$ là tập nghiệm của *hệ biến phân có tham số*[66] (còn được gọi là *ràng buộc cân bằng có tham số*[67], hay *phương trình suy rộng phụ thuộc tham số*[68]):

$$G(x) := \{y \in Y :\ 0 \in f(x, y) + Q(x, y)\}, \qquad (5.29)$$

ở đó $f\colon X \times Y \to Z$ là ánh xạ đơn trị, $Q\colon X \times Y \rightrightarrows Z$ là ánh xạ đa trị giữa các không gian Banach. Quan hệ

$$0 \in f(x, y) + Q(x, y)$$

là một *phương trình suy rộng* (phụ thuộc tham số) theo nghĩa Robinson (1979). Ở đây, y là ẩn số, còn x là tham số của phương trình suy rộng. Bài toán tối ưu (3.2) với $G(x)$ được cho bởi (5.29) thường được gọi là *bài toán quy hoạch toán học có ràng buộc cân bằng*[69] phụ thuộc tham số. Đây là một mô hình có nhiều ứng dụng (xem Luo, Pang và Ralph (1996), Outrata, Kocvara và Zowe (1998)).

Định lý sau đây đưa ra các đánh giá trên cho dưới vi phân Fréchet của hàm giá trị tối ưu trong bài toán quy hoạch toán học có ràng buộc cân bằng phụ thuộc tham số trong không gian vô hạn chiều.

Định lý 4.5.6 (Dưới vi phân Fréchet của hàm giá trị tối ưu của các bài toán quy hoạch toán học có ràng buộc cân bằng). *Xét hàm giá trị tối ưu $\mu(\cdot)$ được cho bởi* (3.1) *với $G(\cdot)$ được xác định bởi* (5.29). *Lấy $\bar{x} \in \mathrm{dom}\, M$ và cố định một phần*

[66] TNTA: parametric variational system.
[67] TNTA: parametric equilibrium constraint.
[68] TNTA: parametric generalized equation.
[69] TNTA: mathematical programming problem with an equilibrium constraint.

tử $\bar{y} \in M(\bar{x})$, *ở đó* $M(\cdot)$ *được xác định bởi* (3.3). *Giả sử rằng* $\widehat{\partial}^+\varphi(\bar{x},\bar{y}) \neq \emptyset$. *Đặt* $\bar{z} := -f(\bar{x},\bar{y}) \in Q(\bar{x},\bar{y})$. *Các khẳng định sau nghiệm đúng:*

(i) *Nếu* $f\colon X \times Y \to X = Z$ *là khả vi chặt tại* $(\bar{x},\bar{y})$ *với đạo hàm*

$$f'(\bar{x},\bar{y}) : X \times Y \to Z$$

là ánh xạ tràn và nếu $Q(x,y) = Q(y)$ *là ánh xạ không phụ thuộc vào biến* x, *thì*

(5.30)

$$\widehat{\partial}\mu(\bar{x}) \subset \bigcap_{(x^*,y^*)\in\widehat{\partial}^+\varphi(\bar{x},\bar{y})} \Big\{ x^* + (f'_x(\bar{x},\bar{y}))^*(z^*) \ :\ \exists z^* \in Z^* \ \text{thỏa mãn}\ -y^* \in (f'_y(\bar{x},\bar{y}))^*(z^*) + D^*Q(\bar{y},\bar{z})(z^*)\Big\}.$$

Ở đây $f'_x(\bar{x},\bar{y})$ *và* $f'_y(\bar{x},\bar{y})$ *ký hiệu các đạo hàm riêng của* f *tại* $(\bar{x},\bar{y})$ *tương ứng theo các biến* x *và* y.

(ii) *Giả sử rằng* X, Y, Z *là các không gian Asplund,* $f\colon X \times Y \to Z$ *là liên tục trong lân cận của* $(\bar{x},\bar{y})$, *và nếu* $Q\colon X \times Y \rightrightarrows Z$ *có đồ thị đóng trong lân cận của* $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ *(tức là tồn tại một lân cận đóng của* $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ *có giao với* gph Q *là một tập đóng). Khi đó*

$$\widehat{\partial}\mu(\bar{x}) \subset \bigcap_{(x^*,y^*)\in\widehat{\partial}^+\varphi(\bar{x},\bar{y})} \Big\{ u^* \in X^* \ :\ \exists z^* \in Z^* \ \text{với}\ (u^*,0) \in (x^*,y^*) + D^*f(\bar{x},\bar{y})(z^*) + D^*Q(\bar{x},\bar{y},\bar{z})(z^*)\Big\}, \tag{5.31}$$

nếu như $(x^*,y^*,z^*) = (0,0,0)$ *là bộ ba duy nhất thỏa mãn*

$$(x^*,y^*) \in D^*f(\bar{x},\bar{y})(z^*) \cap (\,-D^*Q(\bar{x},\bar{y},\bar{z})(z^*))$$

và hoặc Q *là SNC tại* $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$, *hoặc* f *là Lipschitz địa phương tại* $(\bar{x},\bar{y})$ *và* Z *là không gian hữu hạn chiều.*

Chứng minh. Để chứng minh cả hai khẳng định của định lý, ta sẽ áp dụng Định lý 4.5.1 và bao hàm thức (5.25). Để đánh giá tập hợp ở vế phải của (5.25) ta có thể sử dụng các công thức tính toán trong Mordukhovich (2006a; tiểu mục 4.4.1).

Dưới các giả thiết đưa ra trong khẳng định (i), theo Định lý 4.4.4(i) trong Mordukhovich (2006a) ta có

$$D^*G(\bar{x},\bar{y})(v^*) = \Big\{u^* \in X^* :\ \ \exists z^* \in Z^* \ \text{với}\ u^* = (f'_x(\bar{x},\bar{y}))^*(z^*)\ \ -v^* \in (f'_y(\bar{x},\bar{y}))^*(z^*) + D^*Q(\bar{y},\bar{z})(z^*)\Big\},$$

Kết hợp đẳng thức này với (5.25) và (5.2) ta thu được (5.30).

Tương tự, đánh giá (5.31) được suy ra từ (5.2) và bao hàm thức

$$D^*G(\bar{x},\bar{y})(v^*) \subset \Big\{ \quad u^* \in X^* \,:\, \exists z^* \in Z^* \;\text{ với } (u^*,-v^*) \in D^*f(\bar{x},\bar{y})(z^*) + D^*Q(\bar{x},\bar{y},\bar{z})(z^*)\Big\}.$$

Lưu ý rằng bao hàm thức cuối nghiệm đúng do Định lý 4.46 trong Mordukhovich (2006a) và các giả thiết đã nêu trong khẳng định (ii). □

Các công thức tính toán hoặc ước lượng các tập giá trị của ánh xạ đối đạo hàm $D^*G(\bar{x},\bar{y})$ của ánh xạ nghiệm của hệ biến phân trong (5.29) đã thu được trong Mordukhovich (2006a, tiểu mục 4.4.1) cho phép ta đưa ra nhiều đánh giá khác cho dưới vi phân Fréchet của hàm giá trị tối ưu trong các bài toán tối ưu có ràng buộc cân bằng ở dạng tổng quát hoặc ở các dạng đặc biệt (khi ràng buộc cân bằng có dạng một bất đẳng thức biến phân, một bài toán bù, v.v...). Dưới các giả thiết phụ hợp lý, ta có thể đưa ra các công thức tính chính xác dưới vi phân Fréchet của hàm giá trị tối ưu trong các bài toán có ràng buộc cân bằng. Các công thức như thế thường nghiệm đúng khi đối đạo hàm Fréchet của G trùng với đối đạo hàm Mordukhovich của nó (điều đó xảy ra, chẳng hạn như, khi Q là ánh xạ đa trị lồi và f thỏa mãn một vài điều kiện phụ).

Bài tập 4.5.6. Cho $X = Y = Z = I\!R$, $\varphi(x,y) = |y|$, $f(x,y) = xy$, $Q(x,y) = N_{K(x)}(y)$, ở đó

$$K(x) = \{y \,:\, y^2 \leqslant x\}$$

và $N_{K(x)}(y)$ là nón pháp tuyến của tập lồi $K(x)$ tại y. Sử dụng Định lý 4.5.6 để tính (hoặc đánh giá) dưới vi phân $\widehat{\partial}\mu(\bar{x})$ của hàm μ xác định bởi (3.1), ở đó $G(x)$ được cho bởi (5.29), tại điểm $\bar{x} = 0$.

4.6 Dưới vi phân Mordukhovich của hàm giá trị tối ưu

Trong mục này chúng ta sẽ đưa ra các công thức đánh giá dưới vi phân Mordukhovich của hàm giá trị tối ưu (3.1). Vì dưới vi phân Mordukhovich là dưới vi phân qua giới hạn (nói chính xác, đó là giới hạn trên theo dãy theo nghĩa Painlevé-Kuratowski của một họ $\varepsilon-$dưới vi phân Fréchet; xem công thức (2.5)), nên các kết quả ở mục này phức tạp hơn các kết quả tương ứng ở Mục 4.5. Sự phức tạp đó thể hiện ở chỗ

- giả thiết của các định lý sẽ cồng kềnh hơn,
- điều kiện để các đánh giá dạng bao hàm thức đạt được dấu bằng sẽ ngặt nghèo hơn.

Các dưới vi phân suy biến đưa ra trong Mục 4.2 sẽ đóng vai trò quan trọng trong mục này. Điều kiện chính quy (điều kiện chuẩn hoá ràng buộc) trong các định lý thường được phát biểu thông qua dưới vi phân suy biến.

Nếu không nói gì thêm, thì các không gian X và Y xét trong mục này được giả thiết là *các không gian Asplund*. Chúng ta cũng giả sử rằng hàm giá φ trong (3.1) là *nửa liên tục dưới* và ánh xạ đa trị mô tả ràng buộc G là ánh xạ *có đồ thị đóng* trong lân cận của điểm được xét (tức là giao của tập $\operatorname{gph} G$ với một hình cầu đóng, có bán kính dương, chứa điểm được xét là tập đóng trong $X \times Y$).

Cấu trúc của các công thức đánh giá dưới vi phân Mordukhovich $\partial\mu(\bar{x})$ và dưới vi phân suy biến $\partial^\infty\mu(\bar{x})$ của hàm giá trị tối ưu (3.1) là *khác* với các công thức đã đưa ra trong Mục 4.5 (mặc dù vẫn có nhiều điểm tương đồng). Cái khác cơ bản là ta sẽ không giả thiết $\widehat{\partial}^+\varphi(\bar{x},\bar{y}) \neq \emptyset$ và, thay vì sử dụng *giao* của một họ tập theo tham số $(x^*, y^*) \in \widehat{\partial}^+\varphi(\bar{x},\bar{y})$ như trong Định lý 4.5.1, ta sẽ sử dụng *hợp* của họ tập theo các tham số $(x^*, y^*) \in \partial\varphi(\bar{x},\bar{y})$ hoặc $(x^*, y^*) \in \partial^\infty\varphi(\bar{x},\bar{y})$ để đánh giá các dưới vi phân $\partial\mu(\bar{x})$ và $\partial^\infty\mu(\bar{x})$. Mặt khác, chúng ta sẽ cần tới những giả thiết phụ về tính compắc pháp tuyến theo dãy của ánh xạ G và tính epi-compắc pháp tuyến theo dãy của hàm số φ.

Nhận xét rằng các đánh giá trên cho $\partial\mu(\bar{x})$ và $\partial^\infty\mu(\bar{x})$, trái ngược với các đánh giá cho $\widehat{\partial}\mu(\bar{x})$, có quan hệ chặt chẽ với các điều kiện đủ cho tính Lipschitz địa phương của $\mu(\cdot)$ và với điều kiện cần cực trị của bài toán tối ưu tương ứng.

Chúng ta sẽ so sánh các kết quả thu được ở đây với các kết quả đã thu được bằng những cách tiếp cận khác.

Giả sử $\bar{x} \in \operatorname{dom} M$ và $\bar{y} \in M(\bar{x})$, ở đó $M(\cdot)$ được cho bởi (3.3).

Định nghĩa 4.6.1. Ta nói rằng ánh xạ nghiệm $M(\cdot)$ là *μ-nửa liên tục dưới nội bộ*[70] tại $(\bar{x},\bar{y})$ nếu với mỗi dãy $x_k \xrightarrow{\mu} \bar{x}$ tồn tại dãy $y_k \in M(x_k)$ sao cho $\{y_k\}$ có một dãy con hội tụ đến $\bar{y}$.

Định nghĩa 4.6.2. Ánh xạ nghiệm $M(\cdot)$ được gọi là *μ-bán-compắc nội bộ*[71] tại $\bar{x}$ nếu với mỗi dãy $x_k \xrightarrow{\mu} \bar{x}$ tồn tại dãy $y_k \in M(x_k)$ sao cho $\{y_k\}$ có một dãy con hội tụ.

Các tính chất nói trong hai định nghĩa trên là sự mở rộng của các tính chất *nửa liên tục dưới nội bộ* và *bán-compắc nội bộ* - được định nghĩa cho các ánh xạ đa trị tổng quát; xem Mordukhovich (2006a), Định nghĩa 1.63. Điều khác biệt là ở chỗ điều kiện $x_k \to \bar{x}$ trong Mordukhovich (2006a) bây giờ được thay bằng một điều kiện yếu hơn: $x_k \xrightarrow{\mu} \bar{x}$. Lưu ý là hai định nghĩa vừa nêu chỉ áp dụng được cho ánh xạ nghiệm có dạng (3.3).

Có thể tìm thấy các điều kiện đủ cho tính chất μ-nửa liên tục dưới nội bộ và tính chất μ-bán-compắc nội bộ của ánh xạ nghiệm trong Clarke (1983), Gauvin và Dubeau (1982), Gollan (1984), Mordukhovich (1992), Mordukhovich và Shao (1996a), Rockafellar (1982). Nói riêng ra, tính chất μ-bán-compắc nội bộ của

[70]TNTA: μ-inner semicontinuous.

[71]TNTA: inner semicompact.

$M(\cdot)$ tại $\bar{x}$ là hệ quả của *tính thuần*[72] của $M(\cdot)$ tại $\bar{x}$ – một tính chất được Rockafellar (1982) đưa ra cho trường hợp không gian hữu hạn chiều và được Gollan (1984) mở rộng sang trường hợp không gian vô hạn chiều.

Ví dụ 4.6.1. Đặt $X = Y = I\!R$, $\varphi(x,y) = xy$, $G(x) = [-1,1]$ với mọi $x \in X$, $\bar{x} = 0$. Xét hàm $\mu(\cdot)$ cho bởi (3.1) và ánh xạ đa trị $M(\cdot)$ cho bởi (3.3). Khi đó,

$$\mu(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x = 0, \\ -x & \text{nếu } x > 0 \\ x & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$$

và

$$M(x) = \begin{cases} [-1,1] & \text{nếu } x = 0 \\ \{-1\} & \text{nếu } x > 0 \\ \{1\} & \text{nếu } x < 0. \end{cases}$$

Vì vậy, $x_k \to 0$ khi và chỉ khi $x_k \xrightarrow{\mu} 0$. Từ các công thức xác định μ và M ở trên, ta suy ra rằng M là μ-bán-compắc nội bộ (và cũng là bán-compắc nội bộ) tại $\bar{x}$, nhưng không là μ-nửa liên tục dưới nội bộ tại $(\bar{x}, \bar{y})$, với bất cứ điểm $\bar{y} \in M(\bar{x}) = [-1,1]$ nào.

Ví dụ 4.6.2. Đặt $X = Y = I\!R$, $\varphi(x,y) = y$,

$$G(x) = \{y \in [-1,1] \, : \, xy \leqslant 0\}.$$

Ta có

$$G(x) = \begin{cases} [-1,1] & \text{nếu } x = 0 \\ [-1,0] & \text{nếu } x > 0, \\ [0,1] & \text{nếu } x < 0. \end{cases}$$

Từ đó ta tính được

$$\mu(x) = \begin{cases} -1 & \text{nếu } x \geqslant 0, \\ 0 & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$$

và

$$M(x) = \begin{cases} \{-1\} & \text{nếu } x \geqslant 0, \\ \{0\} & \text{nếu } x < 0. \end{cases}$$

Lấy $(\bar{x}, \bar{y}) = (0, -1) \in \operatorname{gph} M$. Do công thức của μ, ta thấy rằng điều kiện $x_k \xrightarrow{\mu} \bar{x}$ có nghĩa là $x_k \to 0$ và $x_k \geqslant 0$ với k đủ lớn. Từ đó suy ra M là μ-nửa liên tục dưới nội bộ tại $(\bar{x}, \bar{y})$. Tuy thế, M không là nửa liên tục dưới nội bộ tại $(\bar{x}, \bar{y})$. Thật vậy, đối với dãy $x_k := -\frac{1}{k} \to 0 = \bar{x}$ ta không thể tìm được dãy $y_k \in M(x_k)$ nào để có $y_k \to \bar{y} = -1$. Đối với tính chất bán-compắc nội bộ, dễ thấy rằng M là bán-compắc nội bộ tại $\bar{x}$ (do đó nó là μ-bán-compắc nội bộ tại $\bar{x}$).

[72]TNTA: tameness.

Kết quả đầu tiên của chúng ta trong mục này là Định lý 4.6.1 dưới đây. Hai khẳng định đầu tiên của định lý (chúng có quan hệ tương hỗ, nhưng là độc lập với nhau) được lấy từ Mordukhovich (2006a), Định lý 3.38, ở đó tính chất μ-nửa liên tục dưới nội bộ và tính chất μ-bán-compắc nội bộ của $M(\cdot)$ được thay tương ứng bởi nửa liên tục dưới nội bộ và bán-compắc nội bộ. Có thể thấy rằng các chứng minh trong Mordukhovich (1992), Mordukhovich và Shao (1996a) không phải thay đổi gì khi chúng ta sử dụng các tính chất yếu hơn như vừa trình bày. Tính chất thứ ba mới được thiết lập trong Mordukhovich, Nam và Yen (2007); nó được chứng minh nhờ tính chất (i) và Định lý 4.5.2.

Định lý 4.6.1. *Giả sử $M(\cdot)$ là ánh xạ nghiệm được cho bởi công thức* (3.3) *và giả sử $\bar{x} \in \operatorname{dom} M$. Các khẳng định sau nghiệm đúng:*

(i) *Giả sử rằng M là μ-nửa liên tục dưới nội bộ tại $(\bar{x}, \bar{y}) \in \operatorname{gph} M$, φ là SNEC tại $(\bar{x}, \bar{y})$ hoặc G là SNC tại $(\bar{x}, \bar{y})$, và điều kiện chính quy*

$$\partial^{\infty}\varphi(\bar{x}, \bar{y}) \cap (- N_{\operatorname{gph} G}(\bar{x}, \bar{y})) = \{0\} \tag{6.1}$$

được thỏa mãn (các điều kiện đó tự động thỏa mãn nếu φ là Lipschitz địa phương tại $(\bar{x}, \bar{y})$). Khi đó ta có các bao hàm thức

$$\partial\mu(\bar{x}) \subset \bigcup \Big\{ x^* + D^*G(\bar{x}, \bar{y})(y^*) \, : \, (x^*, y^*) \in \partial\varphi(\bar{x}, \bar{y}) \Big\}, \tag{6.2}$$

$$\partial^{\infty}\mu(\bar{x}) \subset \bigcup \Big\{ x^* + D^*G(\bar{x}, \bar{y})(y^*) \, : \, (x^*, y^*) \in \partial^{\infty}\varphi(\bar{x}, \bar{y}) \Big\}. \tag{6.3}$$

(ii) *Giả sử rằng M là μ-bán-compắc nội bộ tại $\bar{x}$ và các giả thiết khác của* (i) *được thỏa mãn tại mọi điểm $(\bar{x}, \bar{y}) \in \operatorname{gph} M$. Khi đó ta có các bao hàm thức*

$$\partial\mu(\bar{x}) \subset \bigcup \Big\{ x^* + D^*G(\bar{x}, \bar{y})(y^*) \, : \, (x^*, y^*) \in \partial\varphi(\bar{x}, \bar{y}), \bar{y} \in M(\bar{x}) \Big\}, \tag{6.4}$$

$$\partial^{\infty}\mu(\bar{x}) \subset \bigcup \Big\{ x^* + D^*G(\bar{x}, \bar{y})(y^*) \, : \, (x^*, y^*) \in \partial^{\infty}\varphi(\bar{x}, \bar{y}), \bar{y} \in M(\bar{x}) \Big\}. \tag{6.5}$$

(iii) *Ngoài các giả thiết của* (i), *giả sử thêm rằng φ là khả vi chặt tại $(\bar{x}, \bar{y})$, ánh xạ đa trị $M\colon \operatorname{dom} G \rightrightarrows Y$ có lát cắt Lipschitz trên địa phương tại $(\bar{x}, \bar{y})$, và G là chính quy pháp tuyến tại $(\bar{x}, \bar{y})$. Khi đó, hàm giá trị tối ưu μ là chính quy dưới tại $\bar{x}$ và* (6.2) *nghiệm đúng dưới dạng đẳng thức, nghĩa là*

$$\partial\mu(\bar{x}) = \varphi'_x(\bar{x}, \bar{y}) + D^*G(\bar{x}, \bar{y})(\varphi'_y(\bar{x}, \bar{y})). \tag{6.6}$$

Chứng minh. Chỉ cần kiểm tra (iii). Do điều kiện φ là khả vi chặt tại $(\bar{x}, \bar{y})$, (6.3) trở thành bao hàm thức

$$\partial\mu(\bar{x}) \subset \varphi'_x(\bar{x}, \bar{y}) + D^*G(\bar{x}, \bar{y})(\varphi'_y(\bar{x}, \bar{y})).$$

Mặt khác, Định lý 4.5.2 và tính chính quy pháp tuyến của G tại $(\bar{x}, \bar{y})$, cùng với các giả thiết khác của (iii), đảm bảo rằng đẳng thức

$$\widehat{\partial}\mu(\bar{x}) = \varphi'_x(\bar{x}, \bar{y}) + D^*G(\bar{x}, \bar{y})(\varphi'_y(\bar{x}, \bar{y}))$$

nghiệm đúng đối với dưới vi phân Fréchet của μ. Vì rằng ta luôn có $\widehat{\partial}\mu(\bar{x}) \subset \partial\mu(\bar{x})$, từ đó suy ra (6.6) và tính chính quy dưới của μ tại $\bar{x}$. □

Bài tập 4.6.1. Sử dụng Định lý 4.6.1 để tính (hoặc đánh giá) các dưới vi phân $\partial\mu(\bar{x})$ và $\partial^\infty\mu(\bar{x})$ của hàm μ trong Ví dụ 4.6.1 tại điểm $\bar{x} = 1$. Ngoài ra, hãy tính $\widehat{\partial}\mu(\bar{x})$ bằng cách sử dụng các kết quả ở Mục 4.5.

Bài tập 4.6.2. Sử dụng Định lý 4.6.1 để tính (hoặc đánh giá) các dưới vi phân $\partial\mu(\bar{x})$ và $\partial^\infty\mu(\bar{x})$ của hàm μ trong Ví dụ 4.6.2 tại $\bar{x} = 0$. Ngoài ra, hãy tính $\widehat{\partial}\mu(\bar{x})$ bằng cách sử dụng các kết quả ở Mục 4.5.

Từ Định lý 4.6.1 và một vài tính chất cơ sở của dưới vi phân Mordukhovich và dưới vi phân suy biến của các hàm số nhận giá trị trong tập số thực suy rộng, chúng ta rút ra các *điều kiện cần cực trị* cho các bài toán tối ưu với ràng buộc đa trị và cả các điều kiện để có *tính ổn định Lipschitz* của các bài toán đó.

Hệ quả 4.6.1. *Giả sử* $\bar{x} \in \operatorname{dom} M$, *ở đó* M *được cho bởi* (3.3), *và giả sử* $\bar{y}$ *là một nghiệm của bài toán tối ưu phụ thuộc tham số:*

$$\text{Tìm cực tiểu hàm số } \varphi(\bar{x}, y) \text{ với ràng buộc } y \in G(\bar{x}).$$

Giả sử rằng ánh xạ nghiệm $M(\cdot)$ *là* μ*-nửa liên tục dưới nội bộ tại* $(\bar{x}, \bar{y}) \in \operatorname{gph} M$, *hàm giá trị tối ưu* (3.1) *là nửa liên tục dưới trong một lân cận của* $\bar{x}$, *hàm mục tiêu* φ *là Lipschitz địa phương, và ánh xạ mô tả ràng buộc* G *là giả-Lipschitz (liên tục Aubin) tại* $(\bar{x}, \bar{y})$. *Khi đó, tồn tại* $u^* \in X^*$ *sao cho*

$$(u^*, 0) \in \partial\varphi(\bar{x}, \bar{y}) + N_{\operatorname{gph} G}(\bar{x}, \bar{y}). \tag{6.7}$$

Chứng minh. Do các giả thiết, ta có $\bar{y} \in M(\bar{x})$, điều kiện chính quy (6.1) thỏa mãn, và φ là SNEC tại $(\bar{x}, \bar{y})$ (do tính chất Lipschitz của φ). Vì thế (6.2) và (6.3) nghiệm đúng. Theo Định lý 5.2 trong bài báo của Mordukhovich và Nam (2005a), hàm giá trị tối ưu (3.1) là Lipschitz địa phương tại $\bar{x}$. Sử dụng Hệ quả 2.25 trong cuốn sách Mordukhovich (2006a), chúng ta kết luận rằng $\partial\mu(\bar{x}) \neq \emptyset$, nghĩa là vế phải của (6.2) cũng khác rỗng. Từ đó suy ra điều kiện cần cực trị (6.7). □

Lưu ý rằng ta có thể đặc trưng trọn vẹn tính chất giả-Lipschitz (liên tục Aubin) của ánh xạ đa trị dạng tổng quát $G\colon X \rightrightarrows Y$ bằng công cụ đối đạo hàm; xem Chương 4 trong Mordukhovich (2006a). Trong không gian hữu hạn chiều các đặc trưng đó trở thành

$$D^*G(\bar{x}, \bar{y})(0) = \{0\}.$$

Do (6.3), từ đó ta có $\partial^\infty \mu(\bar{x}) = \{0\}$ khi φ là Lipschitz địa phương tại $(\bar{x}, \bar{y})$. Vì vậy, hàm giá trị tối ưu trong (3.1) là Lipschitz địa phương và điều kiện cần cực trị (6.7) trong Hệ quả 4.6.1 nghiệm đúng.

Bây giờ ta xét một số ứng dụng của các kết quả nói trong Định lý 4.6.1 và Hệ quả 4.6.1 cho bài toán quy hoạch toán học ở đó các dữ liệu có thể là các hàm không khả vi. Giả sử rằng ánh xạ đa trị $G(\cdot)$ trong (3.2) là ánh xạ nghiệm của hệ đẳng thức và bất đẳng thức

$$
G(x) := \Big\{ y \in Y : \quad \varphi_i(x,y) \leqslant 0, \quad i = 1, \ldots, m, \\ \varphi_i(x,y) = 0, \quad i = m+1, \ldots, m+r \Big\}. \tag{6.8}
$$

Để cho gọn, chúng ta sẽ chỉ phát biểu các kết quả tương ứng với các khẳng định (i) và (ii) trong Định lý 4.6.1, ở đó ta giả sử M là μ-nửa liên tục dưới nội bộ tại $(\bar{x}, \bar{y}) \in \operatorname{gph} M$. Trường hợp M là μ-bán-compắc nội bộ tại $\bar{x}$ được xét tương tự. Khẳng định thứ nhất của định lý sau cho ta các đánh giá cho dưới vi phân Mordukhovich và dưới vi phân suy biến của hàm $\mu(\cdot)$, còn khẳng định thứ hai là quy tắc nhân tử Lagrange cho bài toán quy hoạch toán học có tham số. Ta lưu ý là trong khẳng định thứ hai dưới vi phân của các hàm φ và φ_i $(i = 1, \ldots, m+r)$ được lấy theo cặp biến (x, y), ở đó y là biến quy hoạch của bài toán, còn x là tham số.

Định lý 4.6.2. *Giả sử $M(\cdot)$ là ánh xạ nghiệm* (1.3), *ở đó ánh xạ G được cho bởi công thức* (6.8). *Giả sử rằng M là μ-nửa liên tục dưới nội bộ tại $(\bar{x}, \bar{y}) \in \operatorname{gph} M$, φ và tất cả các hàm φ_i là Lipschitz địa phương tại $(\bar{x}, \bar{y})$, và $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{m+r}) = 0 \in I\!R^{m+r}$ là véc tơ duy nhất thỏa hệ điều kiện*

$$
\begin{gathered}
0 \in \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \partial \varphi_i(\bar{x}, \bar{y}) + \sum_{i=m+1}^{m+r} \lambda_i \big(\partial \varphi_i(\bar{x}, \bar{y}) \cup \partial(-\varphi_i)(\bar{x}, \bar{y})\big), \\
(\lambda_1, \ldots, \lambda_{m+r}) \in I\!R_+^{m+r}, \ \lambda_i \varphi_i(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \ \text{ với } \ i = 1, \ldots, m
\end{gathered} \tag{6.9}
$$

(được gọi là điều kiện chính quy, hay điều kiện chuẩn hoá ràng buộc). Khi đó ta có các bao hàm thức

(6.10)

$$
\begin{aligned}
\partial \mu(\bar{x}) \subset \ & \Big\{ u^* \in X^* : (u^*, 0) \in \partial \varphi(\bar{x}, \bar{y}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \partial \varphi_i(\bar{x}, \bar{y}) \\
& + \sum_{i=m+1}^{m+r} \lambda_i \big(\partial \varphi_i(\bar{x}, \bar{y}) \cup \partial(-\varphi_i)(\bar{x}, \bar{y})\big) \ \text{ với} \\
& (\lambda_1, \ldots, \lambda_{m+r}) \in I\!R_+^{m+r} \ \text{ và } \lambda_i \varphi_i(\bar{x}, \bar{y}) = 0, \ i = 1, \ldots, m \Big\},
\end{aligned}
$$

(6.11)

$$\begin{aligned}\partial^\infty\mu(\bar{x}) \subset \quad & \Big\{u^* \in X^* : (u^*, 0) \in \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \partial\varphi_i(\bar{x}, \bar{y}) \\ & + \sum_{i=m+1}^{m+r} \lambda_i(\partial\varphi_i(\bar{x}, \bar{y}) \cup \partial(-\varphi_i)(\bar{x}, \bar{y})) \ \text{ với} \\ & (\lambda_1, \ldots, \lambda_{m+r}) \in I\!R^{m+r}_+ \ \text{ và } \lambda_i\varphi_i(\bar{x}, \bar{y}) = 0, \ i = 1, \ldots, m\Big\}.\end{aligned}$$

Ngoài ra, (6.10) *trở thành đẳng thức và μ là chính quy dưới tại $\bar{x}$ nếu như tất cả các hàm số φ và φ_i là khả vi chặt tại $(\bar{x}, \bar{y})$ và $M\colon \mathrm{dom}\, G \rightrightarrows Y$ có lát cắt Lipschitz trên địa phương tại $(\bar{x}, \bar{y})$.*

(ii) *Ngoài các giả thiết chung của định lý, giả sử thêm rằng quan hệ*

$$(x^*, 0) \in \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \partial\varphi_i(\bar{x}, \bar{y}) + \sum_{i=m+1}^{m+r} \lambda_i(\partial\varphi_i(\bar{x}, \bar{y}) \cup \partial(-\varphi_i)(\bar{x}, \bar{y}))$$

với $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{m+r}) \in I\!R^{m+r}_+$ thỏa mãn $\lambda_i\varphi_i(\bar{x}, \bar{y}) = 0$, $i = 1, \ldots, m$, chỉ xảy ra đối với $x^* = 0$. Khi đó tồn tại $u^* \in X^*$ và các nhân tử $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{m+r}) \in I\!R^{m+r}_+$ sao cho $\lambda_i\varphi_i(\bar{x}, \bar{y}) = 0$ với $i = 1, \ldots, m$ và

(6.12)

$$(u^*, 0) \in \partial\varphi(\bar{x}, \bar{y}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \partial\varphi_i(\bar{x}, \bar{y}) + \sum_{i=m+1}^{m+r} \lambda_i(\partial\varphi_i(\bar{x}, \bar{y}) \cup \partial(-\varphi_i)(\bar{x}, \bar{y})).$$

Chứng minh. (i) Để thu được các bao hàm thức (6.10) và (6.11), ta sử dụng các bao hàm thức (6.2) và (6.3) trong Định lý 4.6.1, ở đó đối đạo hàm $D^*G(\bar{x}, \bar{y})$ được tính cho ánh xạ G cho bởi công thức (6.8). Ta nhận xét rằng điều kiện chính quy (6.1) và tính chất SNEC của hàm giá φ tự động nghiệm đúng, vì φ được giả thiết là Lipschitz địa phương.

Do có giả thiết chính quy (6.9) và do các hàm φ_i $(i = 1, \ldots, m + r)$ là Lipschitz địa phương tại $(\bar{x}, \bar{y})$, áp dụng Hệ quả 4.36 trong Mordukhovich (2006a) ta có đánh giá

$$\begin{aligned}& D^*G(\bar{x}, \bar{y})(v^*) \\ & \subset \Big\{u^* \in X^* : (u^*, -v^*) \in \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \partial\varphi_i(\bar{x}, \bar{y}) \\ & + \sum_{i=m+1}^{m+r} \lambda_i(\partial\varphi_i(\bar{x}, \bar{y}) \cup \partial(-\varphi_i)(\bar{x}, \bar{y})) \ \text{ với} \\ & (\lambda_1, \ldots, \lambda_{m+r}) \in I\!R^{m+r}_+ \ \text{ và } \lambda_i\varphi_i(\bar{x}, \bar{y}) = 0, \ i = 1, \ldots, m\Big\}\end{aligned} \tag{6.13}$$

cho đối đạo hàm $D^*G(\bar{x}, \bar{y})$ của ánh xạ đa trị G cho bởi hệ ràng buộc (6.8).

Lấy tùy ý $u^* \in \partial\mu(\bar{x})$. Do (6.2), tồn tại $(x^*, y^*) \in \partial\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ sao cho

$$u^* - x^* \in D^*G(\bar{x}, \bar{y})(y^*).$$

Theo (6.13), tồn tại $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{m+r}) \in I\!R^{m+r}$ với

$$\lambda_i \geqslant 0 \text{ và } \lambda_i\varphi_i(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \text{ với mọi } i = 1, \ldots, m$$

sao cho

$$\begin{aligned}(u^* - x^*, -y^*) \ &\in \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \partial\varphi_i(\bar{x}, \bar{y}) \\ &+ \sum_{i=m+1}^{m+r} \lambda_i(\partial\varphi_i(\bar{x}, \bar{y}) \cup \partial(-\varphi_i)(\bar{x}, \bar{y})).\end{aligned}$$

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned}(u^*, 0) \ &\in (x^*, y^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \partial\varphi_i(\bar{x}, \bar{y}) \\ &+ \sum_{i=m+1}^{m+r} \lambda_i(\partial\varphi_i(\bar{x}, \bar{y}) \cup \partial(-\varphi_i)(\bar{x}, \bar{y})),\end{aligned}$$

và ta đi đến kết luận u^* là một phần tử thuộc tập hợp ở vế phải của bao hàm thức (6.10). Ta đã chứng minh rằng $\partial\mu(\bar{x})$ là tập con của tập hợp đó.

Vì φ là Lipschitz địa phương tại $(\bar{x}, \bar{y})$, nên $\partial^\infty\varphi(\bar{x}, \bar{y}) = \{0\}$. Do đó, kết hợp (6.3) với (6.13) theo cách vừa rồi, ta thu được (6.11).

Đẳng thức trong (6.10) suy ra từ khẳng định (iii) trong Định lý 4.6.1 và sự kiện nói rằng ánh xạ đa trị G cho bởi (6.8) là chính quy tiếp tuyến tại $(\bar{x}, \bar{y})$ dưới giả thiết các hàm φ_i là khả vi chặt (xem Mordukhovich (2006a), Hệ quả 4.35).

(ii) Để thu được điều kiện cần cực trị (6.12), ta sẽ áp dụng Hệ quả 4.6.1 và công thức (6.13). Ta lưu ý rằng, do định nghĩa, $x^* \in D^*G(\bar{x}, \bar{y})(y^*)$ khi và chỉ khi $(x^*, -y^*) \in N_{\text{gph}\, G}(\bar{x}, \bar{y})$. Như vậy, công thức (6.13) cho ta một đánh giá trên (đánh giá ngoài) cho hình nón pháp tuyến $N_{\text{gph}\, G}(\bar{x}, \bar{y})$. Với những lưu ý đơn giản đó, từ (6.7) và (6.13) ta sẽ thu được (6.12). Ta còn phải kiểm tra tính giả-Lipschitz (tính liên tục Aubin) của G - một giả thiết của Hệ quả 4.6.1. Để làm việc đó, ta chỉ cần để ý rằng Hệ quả 4.43 trong Mordukhovich (2006a) khẳng định rằng ánh xạ G cho bởi (6.8) là giả-Lipschitz tại $(\bar{x}, \bar{y})$ dưới giả thiết chính quy nói trong khẳng định thứ hai của định lý. $\square$

Các kết quả trong Định lý 4.6.2 mở rộng các kết quả của Rockafellar (1985), ở đó tác giả đưa ra các đánh giá cho dưới vi phân Clarke của hàm giá trị tối ưu và sử dụng các dưới vi phân Clarke cho các biểu thức bên vế phải của (6.10)–(6.12). Lưu ý rằng công thức mô tả quan hệ giữa dưới vi phân Clarke với dưới vi phân Mordukhovich và dưới vi phân suy biến

$$\partial^{\mathrm{Cl}}\mu(\bar{x}) = \mathrm{cl}^{*}\mathrm{co}\,[\partial\mu(\bar{x}) + \partial^{\infty}\mu(\bar{x})], \tag{6.14}$$

ở đó cl^* ký hiệu phép lấy bao đóng trong tôpô yếu* của X^*, nghiệm đúng cho trường hợp không gian Asplund (xem Mordukhovich (2006a), Định lý 3.57). Sử dụng (6.14), từ Định lý 4.6.2 ta rút ra các đánh giá trên cho dưới vi phân Clarke của hàm giá trị tối ưu trong bài toán quy hoạch toán học không trơn phụ thuộc tham số; xem Clarke (1983) và Rockafellar (1982). Nhận xét rằng, đối với dưới vi phân Clarke ta có đẳng thức

$$\partial^{\mathrm{Cl}}(-\varphi)(\bar{x}) = -\partial^{\mathrm{Cl}}\varphi(\bar{x})$$

(xem Clarke (1983)). Do đó, các biểu thức tương tự trong trường hợp dưới vi phân Clarke của các biểu thức

$$\lambda_i\Big(\partial\varphi_i(\bar{x},\bar{y}) \cup \partial(-\varphi_i)(\bar{x},\bar{y})\Big) \ \text{ với } \ \lambda_i \geqslant 0, \quad i = m+1,\ldots,m+r,$$

trong Định lý 4.6.2 sẽ là $\lambda_i\partial^{\mathrm{Cl}}\varphi_i(\bar{x},\bar{y})$ với $\lambda_i \in I\!R$; hoàn toàn giống như trong các đánh giá vi phân đã được thiết lập bởi Clarke (1983) và Rockafellar (1982, 1985).

Từ Định lý 4.6.2 ta có thể rút ra các kết quả tương ứng cho các bài toán quy hoạch toán học với hàm mục tiêu và các hàm ràng buộc là khả vi chặt. Trước khi làm việc đó, chúng ta đưa ra một vài định nghĩa và ký hiệu.

Định nghĩa 4.6.3. Hàm số

$$L(x,y,\lambda) = \varphi(x,y) + \lambda_1\varphi_1(x,y) + \ldots + \lambda_{m+r}\varphi_{m+r}(x,y)$$

được gọi là *hàm Lagrange* của bài toán (3.2) với $G(x)$ được cho bởi (6.8). Bộ số $\lambda := (\lambda_1,\ldots,\lambda_{m+r}) \in I\!R^{m+r}$ được gọi là các *nhân tử Lagrange*. Với mỗi cặp $(\bar{x},\bar{y}) \in \mathrm{gph}\,M$, ta xét *tập nhân tử Lagrange*

$$\begin{aligned}\Lambda(\bar{x},\bar{y}) := \Big\{\lambda \in I\!R^{m+r} \ :\ \ & \varphi'_y(\bar{x},\bar{y}) + \sum_{i=1}^{m+r}\lambda_i(\varphi_i)'_y(\bar{x},\bar{y}) = 0,\\ & \lambda_i \geqslant 0,\ \lambda_i\varphi_i(\bar{x},\bar{y}) = 0 \ \text{ với mọi } \ i = 1,\ldots,m\Big\}\end{aligned} \tag{6.15}$$

và "tập nhân tử Lagrange suy biến"

$$\begin{aligned}\Lambda^{\infty}(\bar{x},\bar{y}) := \Big\{\lambda \in I\!R^{m+r} \ :\ \ & \sum_{i=1}^{m+r}\lambda_i(\varphi_i)'_y(\bar{x},\bar{y}) = 0,\ \ \lambda_i \geqslant 0,\\ & \lambda_i\varphi_i(\bar{x},\bar{y}) = 0 \ \text{ với } \ i = 1,\ldots,m\Big\}.\end{aligned} \tag{6.16}$$

Giống như trong Chương 2, ta nói điều kiện chính quy Mangasarian-Fromovitz (hay điều kiện chuẩn hoá ràng buộc Mangasarian-Fromovitz) thỏa mãn tại $(\bar{x}, \bar{y}) \in \operatorname{gph} M$ nếu các gradient

$$\varphi'_{m+1}(\bar{x}, \bar{y}), \ldots, \varphi'_{m+r}(\bar{x}, \bar{y})$$

là độc lập tuyến tính và tồn tại $w \in X \times Y$ sao cho $\langle \varphi'_i(\bar{x}, \bar{y}), w \rangle = 0$ với mọi $i = m+1, \ldots, m+r$ và $\langle \varphi'_i(\bar{x}, \bar{y}), w \rangle < 0$ với mọi $i = 1, \ldots, m$ mà $\varphi_i(\bar{x}, \bar{y}) = 0$.

Hệ quả 4.6.2. *Trong ký hiệu của Định lý 4.6.2, giả sử rằng các hàm φ và φ_i là khả vi chặt tại $(\bar{x}, \bar{y})$, và giả sử rằng điều kiện chính quy Mangasarian-Fromovitz thỏa mãn tại $(\bar{x}, \bar{y})$. Khi đó ta có các bao hàm thức*

$$\partial \mu(\bar{x}) \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda(\bar{x}, \bar{y})} \Big[\varphi'_x(\bar{x}, \bar{y}) + \sum_{i=1}^{m+r} \lambda_i (\varphi_i)'_x(\bar{x}, \bar{y}) \Big], \tag{6.18}$$

$$\partial^\infty \mu(\bar{x}) \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda^\infty(\bar{x}, \bar{y})} \Big[\sum_{i=1}^{m+r} \lambda_i (\varphi_i)'_x(\bar{x}, \bar{y}) \Big], \tag{6.19}$$

ở đó tập các nhân tử Lagrange $\Lambda(\bar{x}, \bar{y})$ và $\Lambda^\infty(\bar{x}, \bar{y})$ tương ứng được cho bởi (6.15) *và* (6.16). *Ngoài ra,* (6.18) *nghiệm đúng dưới dạng đẳng thức nếu ánh xạ nghiệm $M\colon \operatorname{dom} G \rightrightarrows Y$ có lát cắt Lipschitz trên địa phương tại $(\bar{x}, \bar{y})$.*

Chứng minh. Các kết luận của hệ quả này suy ra trực tiếp từ Định lý 4.6.2(i) vì rằng $\partial \phi(\bar{x}) = \{\phi'(\bar{x})\}$ với mọi hàm ϕ khả vi chặt tại $\bar{x}$. □

Do (6.19), $\partial^\infty \mu(\bar{x}) = \{0\}$ nếu φ_i thỏa mãn điều kiện chính quy Mangasarian-Fromovitz chỉ đối với y, tức là khi các gradient $\varphi'_i(\bar{x}, \bar{y})$ trong Định nghĩa 4.6.4 được thay bởi $(\varphi_i)'_y(\bar{x}, \bar{y})$. Do biểu diễn (6.14), từ các kết quả thu được trong Hệ quả 4.6.2 ta suy ra ngay các đánh giá trên tương ứng cho dưới vi phân Clarke của hàm giá trị tối ưu trong quy hoạch trơn. Kết quả này mở rộng một kết quả quen biết, đó là Định lý 5.3 trong Gauvin và Dubeau (1982). Lưu ý rằng kết quả của Gauvin và Dubeau được chứng minh cho trường hợp không gian hữu hạn chiều.

Chúng ta nhận xét rằng các kết quả của Định lý 4.6.2 và Hệ quả 4.6.2, ở đó đưa ra các đánh giá cho dưới vi phân của hàm giá trị tối ưu trong quy hoạch toán học *thông qua tập nhân tử Lagrange*, đòi hỏi những *điều kiện chính quy* kiểu Mangasarian-Fromovitz trên hệ ràng buộc. Đối với Định lý 4.6.1 và Hệ quả 4.6.1 của nó, ở đó đưa ra các đánh giá cho dưới vi phân của hàm giá trị tối ưu tổng quát thông qua đối đạo hàm của ánh xạ đa trị mô tả ràng buộc, ta không cần đến những điều kiện chính quy mạnh như thế. Thay vào đó, ta chỉ cần sử dụng một điều kiện chính quy khá nhẹ, đó là điều kiện (6.1). Như đã nói ở trên, điều kiện (6.1) luôn thỏa mãn khi hàm giá là Lipschitz địa phương.

Bây giờ chúng ta sẽ trình bày một ví dụ cụ thể để chứng tỏ rằng Định lý 4.6.1 cho phép chúng ta tính toán trọn vẹn dưới vi phân Mordukhovich và dưới vi phân suy biến của hàm giá trị tối ưu (với *dấu bằng* xảy ra trong tất cả các đánh giá dạng bao hàm thức trong Định lý 4.6.1) đối với bài toán quy hoạch trơn và không lồi, trong khi điều kiện chính quy nói trong Hệ quả 4.6.2 không được thỏa mãn (do đó Hệ quả 4.6.2 không áp dụng được). Những quan sát tương tự cũng đúng với hầu hết 'các ví dụ bệnh tật' (pathological examples) trong Gauvin và Dubeau (1984).

Ví dụ 4.6.3. Xét bài toán quy hoạch toán học không lồi (3.2) với các dữ liệu trơn được cho bởi

$$\varphi(x,y) := -y^2x \quad \text{và} \quad G(x) := \{y \in I\!R \,:\, y^2 - x \leqslant 0\}, \quad x \in I\!R.$$

Dễ thấy rằng

$$M(x) = G(x) = \begin{cases} [-\sqrt{x}, \sqrt{x}] & \text{nếu } \ x \geqslant 0, \\ \emptyset & \text{nếu } \ x < 0; \end{cases}$$

$$\mu(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{nếu } \ x \geqslant 0, \\ \infty & \text{nếu } x < 0. \end{cases}$$

Vậy ánh xạ nghiệm M vừa là μ-nửa liên tục dưới nội bộ tại $(\bar{x}, \bar{y}) = (0,0)$, vừa là μ-bán-compắc nội bộ tại $\bar{x} = 0$. Ngoài ra, các giả thiết khác của Định lý 4.6.1 cũng được thỏa mãn. Từ định nghĩa suy ra rằng

$$\partial\mu(\bar{x}) = \begin{cases} \{-2\bar{x}\} & \text{nếu } \ \bar{x} > 0, \\ (-\infty, 0] & \text{nếu } \ \bar{x} = 0; \end{cases} \qquad \partial^\infty\mu(\bar{x}) = \begin{cases} \{0\} & \text{nếu } \ \bar{x} > 0, \\ (-\infty, 0] & \text{nếu } \ \bar{x} = 0. \end{cases}$$

Hơn nữa, chúng ta tính được nón pháp tuyến của đồ thị của ánh xạ đa trị G tại những điểm đáng quan tâm như sau:

$$\begin{aligned} N_{\text{gph}\, G}((0,0)) &= (-\infty, 0] \times \{0\}, \\ N_{\text{gph}\, G}((\bar{x}, \sqrt{\bar{x}})) &= \{-\lambda(1, -2\sqrt{\bar{x}}) \,:\, \lambda \geq 0\}, \\ N_{\text{gph}\, G}((\bar{x}, -\sqrt{\bar{x}})) &= \{-\lambda(1, 2\sqrt{\bar{x}}) \,:\, \lambda \geqslant 0\}. \end{aligned}$$

Kết hợp tất cả những điều đó, chúng ta kết luận rằng các bao hàm thức (6.2) và (6.3) nghiệm đúng dưới dạng các đẳng thức tại mọi điểm $(\bar{x}, \bar{y}) \in \text{gph}\, M$ và các bao hàm thức (6.4) và (6.5) nghiệm đúng dưới dạng các *đẳng thức* tại mọi điểm $\bar{x} \in \text{dom}\, M$. Nhận xét rằng điều kiện chính quy Mangasarian-Fromovitz có tham số (xem Định nghĩa 4.6.4) *không thỏa mãn* tại $(\bar{x}, \bar{y}) = (0,0)$, nghĩa là Hệ quả 4.6.2 không áp dụng được cho ví dụ này.

Chúng ta sẽ kết thúc mục này bằng một vài công thức đánh giá dưới vi phân của hàm giá trị tối ưu trong bài toán tối ưu hai cấp với ràng buộc cân bằng. Để cho đơn giản, chúng ta sẽ chỉ phát biểu kết quả dưới giả thiết nói rằng ánh xạ nghiệm là μ-nửa liên tục dưới nội bộ. Một số kết quả theo hướng này đã được Lucet và Ye (2001) thiết lập cho trường hợp không gian hữu hạn chiều.

Xét lớp bài toán (3.2) dưới dạng bài toán tối ưu có ràng buộc cân bằng, với $G(x)$ là tập nghiệm của hệ biến phân có tham số (còn gọi là ràng buộc cân bằng có tham số, hay phương trình suy rộng phụ thuộc tham số) dạng (5.29).

Định lý 4.6.3. *Xét hàm giá trị tối ưu $\mu(\cdot)$ cho bởi* (3.1) *với ánh xạ mô tả ràng buộc cho bởi* (5.29), *ở đó X và Y là các không gian Asplund, Z là một không gian Banach bất kỳ. Giả sử rằng ánh xạ nghiệm $M\colon \operatorname{dom} G \rightrightarrows Y$ là μ-nửa liên tục dưới nội bộ tại một điểm $(\bar{x},\bar{y}) \in \operatorname{gph} M$ và hàm giá φ là Lipschitz địa phương tại $(\bar{x},\bar{y})$. Ký hiệu $\bar{z} := -f(\bar{x},\bar{y}) \in Q(\bar{x},\bar{y})$. Khi đó, các khẳng định sau nghiệm đúng:*

(i) *Giả sử $f\colon X \times Y \to X = Z$ là khả vi chặt tại $(\bar{x},\bar{y})$ với đạo hàm*

$$f'(\bar{x},\bar{y}) : X \times Y \to Z$$

là ánh xạ tràn, và giả sử trong (5.29) *ta có $Q = Q(y)$. Khi đó*

$$\begin{aligned}\partial\mu(\bar{x}) \subset \bigcup_{(x^*,y^*)\in\partial\varphi(\bar{x},\bar{y})}\ \bigcup_{z^*\in Z^*}\Big\{\ & x^* + \Big(f'_x(\bar{x},\bar{y})\Big)^*(z^*)\ : \\ & -y^* \in \Big(f'_y(\bar{x},\bar{y})\Big)^*(z^*) + D^*Q(\bar{y},\bar{z})(z^*)\Big\},\end{aligned}$$

$$\partial^\infty\mu(\bar{x}) \subset \bigcup_{z^*\in Z^*}\Big\{(f'_x(\bar{x},\bar{y}))^*(z^*)\ :\ -y^* \in (f'_y(\bar{x},\bar{y}))^*(z^*) + D^*Q(\bar{y},\bar{z})(z^*)\Big\}.$$

(ii) *Giả sử Z cũng là không gian Asplund, $f\colon X \times Y \to Z$ là liên tục trong một lân cận của $(\bar{x},\bar{y})$, và $Q\colon X \times Y \rightrightarrows Z$ có đồ thị đóng trong lân cận của $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$. Khi đó*

$$\begin{aligned}\partial\mu(\bar{x}) \subset \Big\{\ & u^* \in X^*\ :\ \exists z^* \in Z^*\ \text{ với } \\ & (u^*,0) \in \partial\varphi(\bar{x},\bar{y}) + D^*f(\bar{x},\bar{y})(z^*) + D^*Q(\bar{x},\bar{y},\bar{z})(z^*)\Big\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\partial^\infty\mu(\bar{x}) \subset \Big\{u^* \in X^*\ :\ \ \exists z^* \in Z^*\ \text{ với }\ (u^*,0) \in D^*f(\bar{x},\bar{y})(z^*) \\ + D^*Q(\bar{x},\bar{y},\bar{z})(z^*)\Big\},\end{aligned}$$

nếu như $(x^*,y^*,z^*) = (0,0,0)$ là bộ ba duy nhất thỏa mãn điều kiện

$$(x^*,y^*) \in D^*f(\bar{x},\bar{y})(z^*) \cap \big(-D^*Q(\bar{x},\bar{y},\bar{z})(z^*)\big)$$

và hoặc là Q là SNC tại $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, hoặc là f là Lipschitz địa phương tại $(\bar{x}, \bar{y})$ và không gian Z là hữu hạn chiều.

Chứng minh. Dựa vào khẳng định (i) của Định lý 4.6.2 ta có các kết luận của định lý này bằng cách sử dụng các đánh giá trên cho đối đạo hàm $D^*G(\bar{x}, \bar{y})$ cho tương ứng bởi Định lý 4.44(i) và Định lý 4.46 trong Mordukhovich (2006a), với lưu ý rằng các đánh giá đó nghiệm đúng dưới các giả thiết phát biểu trong các khẳng định (i) và (ii). □

Bạn đọc có thể xem thêm tiểu mục 4.4.1 trong Mordukhovich (2006a) để biết các đánh giá chi tiết cho đối đạo hàm của ánh xạ đa trị G mô tả ràng buộc cân bằng trong các dạng cụ thể. Các đánh giá chi tiết này cho phép chúng ta đặc biệt hoá các kết luận của Định lý 4.6.3 cho bài toán tối ưu có ràng buộc cân bằng với cấu trúc đặc thù. Trong Chương 5 của cuốn sách Mordukhovich (2006b) bạn đọc có thể tìm thấy các điều kiện cần cực trị cho bài toán tối ưu có ràng buộc cân bằng và các vấn đề có liên quan đến bài toán tối ưu phân cấp (hierarchical) trong không gian hữu hạn chiều và vô hạn chiều.

Bài tập 4.6.3. Cho X, Y, Z, φ, f, Q, G, μ và $\bar{x}$ như ở Bài tập 4.5.6. Áp dụng Định lý 4.6.3 để tính (hoặc đánh giá) các dưới vi phân $\partial\mu(\bar{x})$ $\partial^{\infty}\mu(\bar{x})$ của hàm μ tại điểm $\bar{x}$.

4.7 Dưới vi phân Mordukhovich của phiếm hàm tích phân

Các kết quả trong mục này thuộc về Nguyễn Huy Chiêu (xem Chieu (2006c)).

1. Định lý sau đây cho ta công thức để tính tích phân Aumann của ánh xạ dưới vi phân Fréchet của hàm số thực Lipschitz.

Định lý 4.7.1. *Giả sử $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ là hàm số Lipschitz. Khi đó,*

$$\int_a^b \widehat{\partial} f(t)dt = \{f(b) - f(a)\}.$$

Công thức tính tích phân Aumann của ánh xạ dưới vi phân Mordukhovich hoàn toàn tương tự như trường hợp ánh xạ dưới vi phân Clarke. Định lý sau đây được chứng minh nhờ vào Định lý 3.2.1, công thức (6.14), và Định lý 3.4.1.

Định lý 4.7.2. *Giả sử $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ là hàm số Lipschitz. Khi đó,*

$$\int_a^b \partial f(t)dt = \Big[-\int_a^b f^0(t; -1)dt, \int_a^b f^0(t; 1)dt \Big].$$

2. Sau đây là các công thức tính dưới vi phân Fréchet và dưới vi phân Mordukhovich của phiếm hàm tích phân, ở đó hàm số dưới dấu tích phân liên tục tại mọi điểm trong một lân cận thủng của điểm được xét (nhưng có thể gián đoạn tại chính điểm đó)[73].

Định lý 4.7.4. *Cho $f : [a,b] \to I\!R$ là hàm số thực khả tích Lebesgue trên $[a,b]$. Xét phiếm hàm tích phân $F(x) := \int\limits_a^x f(t)\,d\mu$, ở đó $x \in [a,b]$. Giả sử rằng f liên tục tại mọi điểm trong một lân cận thủng của điểm $\bar{x} \in (a,b)$ và tồn tại các giới hạn hữu hạn $\alpha := \lim\limits_{x\to\bar{x}-0} f(t)$, $\beta := \lim\limits_{x\to\bar{x}+0} f(t)$. Khi đó,*

$$\widehat{\partial}F(\bar{x}) = \begin{cases} [\alpha,\beta\,] & \text{nếu } \alpha \leqslant \beta \\ \emptyset & \text{nếu } \beta < \alpha, \end{cases} \tag{7.1}$$

và

$$\partial F(\bar{x}) = \begin{cases} [\alpha,\beta] & \text{nếu } \alpha \leqslant \beta \\ \{\,\alpha,\beta\,\} & \text{nếu } \beta < \alpha. \end{cases} \tag{7.2}$$

Bài tập 4.7.1. Xét hàm số

$$f(t) = \begin{cases} -1 & \text{nếu } t \in [-1,0) \\ 1 & \text{nếu } t \in [0,1] \end{cases}$$

và phiếm hàm tích phân $F(x) := \int\limits_{-1}^x f(t)\,d\mu$. Hãy tính các dưới vi phân $\widehat{\partial}F(0)$ và $\partial F(0)$ theo hai cách:

a) Bằng các công thức (7.1) và (7.2);

b) Bằng định nghĩa (sau khi xác định được công thức hiển của hàm F).

Bài tập 4.7.2. Xét hàm số

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } t \in [-1,0) \\ -1 & \text{nếu } t \in [0,1] \end{cases}$$

và phiếm hàm tích phân $F(x) := \int\limits_{-1}^x f(t)\,d\mu$. Hãy tính các dưới vi phân $\widehat{\partial}F(0)$ và $\partial F(0)$ theo hai cách:

---

[73]Lưu ý rằng công thức tính dưới vi phân Clarke của phiếm tích phân dạng $F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,d\mu$ đã có trong Clarke (1983), tr. 34.

a) Bằng các công thức (7.1) và (7.2);

b) Bằng định nghĩa (sau khi xác định được công thức hiển của hàm F).

Bài tập 4.7.3*. Sử dụng các định nghĩa trong Mục 4.2 và Định lý giá trị trung bình đối với tích phân Riemann, hãy đưa ra chứng minh cho Định lý 4.7.4.

Câu hỏi đặt ra là: Liệu có thể đưa ra các công thức tương tự như (7.1) và (7.2) cho trường hợp f có *vô số* điểm gián đoạn trong một lân cận thủng tùy ý của điểm $\bar{x} \in (a, b)$ hay không. Nếu f là hàm hằng ở khoảng giữa bất kỳ hai điểm gián đoạn kế tiếp nhau nào, thì ta có kết quả sau.

Định lý 4.7.5. *Giả sử $\{t_k\}, \{\tau_k\}, \{\alpha_k\}$, và $\{\beta_k\}$ là các dãy số thực sao cho $a = t_0 < t_1 < ... < t_k < t_{k+1} < ... < \bar{x} < ... < \tau_{k+1} < \tau_k < ... < \tau_1 < \tau_0 = b$, $\lim\limits_{k\to\infty} t_k = \lim\limits_{k\to\infty} \tau_k = \bar{x}$. Giả sử hai chuỗi $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k(t_k - t_{k-1})$ và $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \beta_k(\tau_{k-1} - \tau_k)$ là hội tụ tuyệt đối. Xét phiếm hàm tích phân $F(x) := \int\limits_a^x f(t)dt$, ở đó*

$$f(t) = \begin{cases} \alpha_i & \text{nếu } t_{i-1} \leqslant t < t_i, \quad i = 1, 2, ... \\ \alpha_0 & \text{nếu } t = \bar{x} \\ \beta_j & \text{nếu } \tau_j \leqslant t < \tau_{j-1}, \quad j = 1, 2, ... \end{cases}$$

Đặt

$$\alpha := -\liminf_{k\to\infty} \frac{\sum\limits_{i=k+1}^{\infty} \alpha_i(t_i - t_{i-1})}{t_k - \bar{x}}, \quad \beta := \liminf_{k\to\infty} \frac{\sum\limits_{i=k+1}^{\infty} \beta_i(\tau_{i-1} - \tau_i)}{\tau_k - \bar{x}},$$

và

$$\Omega := \{\lim_{i_k\to\infty} \alpha_{i_k}\} \cup \{\lim_{j_k\to\infty} \beta_{j_k}\} \cup \limsup_{i \overset{N_1}{\to} \infty} [\alpha_i, \alpha_{i+1}] \cup \limsup_{j \overset{N_2}{\to} \infty} [\beta_{j+1}, \beta_j],$$

ở đó $N_1 := \{i \in I\!N : \alpha_i \leqslant \alpha_{i+1}\}$, $N_2 := \{j \in I\!N : \beta_{j+1} \leqslant \beta_j\}$, $\{\lim\limits_{i_k\to\infty} \alpha_{i_k}\}$ và $\{\lim\limits_{j_k\to\infty} \beta_{j_k}\}$ tương ứng là tập hợp tất cả các điểm tụ của các dãy $\{\alpha_k\}$ và $\{\beta_k\}$. Khi đó các khẳng định sau nghiệm đúng:

(i) *Nếu $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, thì $\widehat{\partial} F(\bar{x}) = [\alpha, \beta]$ và $\partial F(\bar{x}) = \Omega \cup [\alpha, \beta]$.*

(ii) *Nếu $\alpha = +\infty$ hoặc $\beta = -\infty$, thì $\widehat{\partial} F(\bar{x}) = \emptyset$ và $\partial F(\bar{x}) = \Omega$.*

(iii) *Nếu $\alpha = -\infty$ và $\beta = +\infty$, thì $\widehat{\partial} F(\bar{x}) = \partial F(\bar{x}) = \mathbb{R}$.*

(iv) *Nếu $\alpha = -\infty$ và $\beta \in \mathbb{R}$, thì $\widehat{\partial} F(\bar{x}) = (-\infty, \beta]$ và $\partial F(\bar{x}) = \Omega \cup (-\infty, \beta]$.*

(v) *Nếu* $\alpha \in \mathbb{R}$ *và* $\beta = +\infty$*, thì* $\widehat{\partial}F(\bar{x}) = [\alpha, +\infty)$ *và* $\partial F(\bar{x}) = \Omega \cup [\alpha, +\infty)$.

Sau đây là 5 ví dụ ứng với 5 khả năng được mô tả trong định lý nói trên. *Trong các ví dụ này ta luôn lấy* $a = 0,\ b = 1,\ \bar{x} = \frac{1}{2}$.

Ví dụ 4.7.1. Đặt $t_k = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^k}, \tau_k = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^k}, \beta_k = 7$ với mọi $k \in I\!N$, và

$$\alpha_k = \begin{cases} 3 + \frac{1}{2^k} & \text{nếu } k = 2i \\ 4 + \frac{1}{2^k} & \text{nếu } k = 2i+1 \end{cases}$$

ở đó $i = 0, 1, ...$ Bằng tính toán trực tiếp, ta có $\Omega = [3, 4] \cup \{7\},\ \alpha = \frac{11}{3}$, $\widehat{\partial}F(\bar{x}) = [\frac{11}{3}, 7]$ và $\partial F(\bar{x}) = [3, 4] \cup [\frac{11}{3}, 7]$.

Ví dụ 4.7.2. Đặt $t_k = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^k}, \tau_k = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^k}, \beta_k = \beta \in \mathbb{R}$, và $\alpha_k = \left(\frac{3}{2}\right)^k$ với mọi $k \in \mathbb{N}$. Ta tính được $\Omega = \{\beta\}$ và $\alpha = +\infty$. Theo Định lý 4.7.5, $\widehat{\partial}F(\bar{x}) = \emptyset$ và $\partial F(\bar{x}) = \{\beta\}$.

Ví dụ 4.7.3. Đặt $t_k = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^k}, \tau_k = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^k}, \beta_k = \left(\frac{3}{2}\right)^k$ và $\alpha_k = -\left(\frac{3}{2}\right)^k$ với mọi $k \in I\!N$. Ta có $\Omega = \emptyset$, $\alpha = -\infty$, và $\beta = +\infty$. Vì vậy, theo Định lý 4.7.5, $\widehat{\partial}F(\bar{x}) = \partial F(\bar{x}) = \mathbb{R}$.

Ví dụ 4.7.4. Đặt $t_k = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^k}, \tau_k = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^k}, \beta_k = \beta \in \mathbb{R}$, và $\alpha_k = -\left(\frac{3}{2}\right)^k$ với mọi $k \in I\!N$. Ta thấy ngay rằng $\Omega = \{\beta\}$ và $\alpha = -\infty$. Vì vậy, $\widehat{\partial}F(\bar{x}) = (-\infty, \beta]$ và $\partial F(\bar{x}) = (-\infty, \beta]$.

Ví dụ 4.7.5. Đặt $t_k = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^k}, \tau_k = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^k}, \beta_k = \left(\frac{3}{2}\right)^k$ và $\alpha_k = \alpha \in \mathbb{R}$ với mọi $k \in I\!N$. Ta có $\Omega = \{\alpha\}$ và $\beta = +\infty$. Từ Định lý 4.7.5 suy ra rằng $\widehat{\partial}F(\bar{x}) = [\alpha, +\infty)$ và $\partial F(\bar{x}) = [\alpha, +\infty)$.

Chương 5

Hệ bất đẳng thức suy rộng

Mưa vẫn hay mưa trên hàng lá nhỏ
Buổi chiều ngồi ngóng những chuyến mưa qua...
(Trịnh Công Sơn, "Diễm xưa")

Trong chương này chúng ta sẽ khảo sát một số tính chất của một loại ánh xạ đa trị đặc biệt, đó là ánh xạ nghiệm của hệ bất đẳng thức suy rộng cho bởi hàm véctơ liên tục. Kết quả thu được là các định lý hàm ẩn cho ánh xạ đa trị. Nguyên lý biến phân Ekeland trình bày trong Chương 2 là công cụ không thể thiếu được cho các chứng minh ở đây. Áp dụng các định lý về tính nửa liên tục dưới và tính giả-Lipschitz của ánh xạ nghiệm của hệ bất đẳng thức cho bài toán quy hoạch toán học phụ thuộc tham số, chúng ta sẽ thu được các điều kiện đủ cho tính liên tục hoặc tính Lipschitz địa phương của hàm giá trị tối ưu. Ngoài ra, chúng ta cũng sẽ so sánh dưới vi phân Mordukhovich (dưới vi phân qua giới hạn) và dưới vi phân theo nghĩa V. Jeyakumar và Đinh Thế Lục[1] (thường được gọi tắt là dưới vi phân J-L), đối đạo hàm theo nghĩa Mordukhovich và Jacobian xấp xỉ theo nghĩa V. Jeyakumar và Đ. T. Lục. Việc so sánh này cho thấy mối liên hệ giữa các khái niệm vi phân được xét ở đây và những khái niệm đã được xét trong Chương 4.

Chương này được viết trên cơ sở các bài báo của Jeyakumar và Yen (2004), Nam và Yen (2007), Yen (1997).

[1]Giáo sư Đinh Thế Lục đồng thời là cán bộ nghiên cứu thuộc Viện Toán học (Hà Nội) và giáo sư giảng dạy tại Khoa Toán, Đại học Tổng hợp Avignon (Pháp). Ông là một trong những chuyên gia hàng đầu của Việt Nam về tối ưu véctơ, giải tích không trơn, và giải tích đa trị.

5.1 Giới thiệu chung

Xét hệ bất đẳng thức suy rộng

$$0 \in f(x) + K, \quad x \in C, \tag{1.1}$$

ở đó $C \subset I\!R^n$ và $K \subset I\!R^m$ là các tập lồi đóng, khác rỗng, và $f : I\!R^n \to I\!R^m$ là hàm véctơ liên tục. *Nhiễu*[2] của (1.1) là một hệ bất đẳng thức suy rộng có tham số dạng

$$0 \in f(x, p) + K, \quad x \in C, \tag{1.2}$$

ở đó p là tham số biến thiên trong tập $P \subset I\!R^r$, $f : I\!R^n \times P \to I\!R^m$ là hàm véctơ cho trước. Chúng ta giả sử rằng với mỗi $p \in P$ hàm số $f(\cdot, p)$ là liên tục và tồn tại $p_0 \in P$ sao cho

$$f(x, p_0) = f(x) \quad \forall x \in I\!R^n. \tag{1.3}$$

Nhiễu (1.2) được ký hiệu bởi $\{f(x,p), P, p_0\}$. Với mỗi $p \in P$, đặt

$$G(p) = \{x \in C : 0 \in f(x,p) + K\}.$$

Ta có $G(p)$ là tập nghiệm của (1.2). Vậy $G(\cdot)$ là *hàm ẩn* xác định bởi hệ bất đẳng thức có tham số (1.2). Nhận xét rằng nếu

$$\begin{aligned} K &= I\!R^s_+ \times \{0\}_{m-s} \\ &:= \{y = (y_1, \ldots, y_m) \in I\!R^m : y_1 \geqslant 0, \ldots, y_s \geqslant 0, \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad y_{s+1} = \ldots = y_m = 0\} \end{aligned}$$

thì (1.1) (tương ứng, (1.2)) là một hệ thống gồm s bất phương trình và $m - s$ phương trình với tập ràng buộc C. Ta nói (1.1) là hệ bất đẳng thức *trơn* (t.ư., *Lipschitz địa phương, liên tục*) nếu f hàm thuộc lớp $C^1(I\!R^n, I\!R^m)$ (t.ư., một hàm Lipschitz địa phương, một hàm liên tục).

Robinson (1976b) đã thiết lập một định lý cơ bản về tính ổn định nghiệm của hệ bất đẳng thức trơn. Định lý đó nói rằng nếu hệ bất đẳng thức đã cho là chính quy tại một nghiệm nào đó thì nghiệm đó là ổn định khi hệ biến động dưới tác động của nhiễu nhỏ. Kết quả của Robinson đã được mở rộng sang cho các hệ bao gồm những hàm không trơn (xem, ví dụ như, Borwein (1986), Dien và Yen (1991), Yen (1987, 1997)) và cho các hệ bao gồm các toán tử nón pháp tuyến (xem Mordukhovich (1994c,d), Rockafellar và Wets (1998)).

Đích chính của chúng ta trong chương này là thiết lập *các điều kiện tổng quát cho tính ổn định nghiệm* của các bất đẳng thức suy rộng liên tục, không

[2]TNTA: perturbation.

trơn (và cũng không nhất thiết là Lipschitz địa phương) có dạng (1.1) và áp dụng các kết quả đó để thu được các định lý hàm ngược, định lý ánh xạ mở, quy tắc nhân tử Lagrange cho bài toán tối ưu có hệ ràng buộc là hệ bất đẳng thức suy rộng (gọi tắt là bài toán tối ưu có ràng buộc nón[3], nếu K là hình nón). Chúng ta đạt được đích đó nhờ sử dụng lý thuyết Jacobian xấp xỉ đề xuất bởi các tác giả V. Jeyakumar và Đinh Thế Lục (xem Jeyakumar và Luc (1998, 1999, 2002a,b)) và sử dụng một dạng mở rộng mới của điều kiện chính quy Robinson cho các hàm véctơ liên tục.

Chúng ta sẽ thấy rằng Jacobian xấp xỉ theo nghĩa Jeyakumar-Luc là một công cụ hữu hiệu để xử lý các vấn đề liên quan đến các hàm liên tục, không nhất thiết Lipschitz địa phương. Jacobian xấp xỉ tuân theo một hệ thống khá đầy đủ các quy tắc tính toán. Các quy tắc này thường uyển chuyển hơn, sắc nét hơn các quy tắc tính toán cho Jacobian suy rộng Clarke (xem Clarke (1983)). Đó là vì Jacobian suy rộng Clarke luôn là tập lồi, và phép lấy bao lồi là không thể tránh khỏi khi ta tiến hành tính toán với đối tượng này. Chẳng những Jacobian suy rộng Clarke là một kiểu Jacobian xấp xỉ, mà nhiều loại đạo hàm của hàm véctơ (như *tiền đạo hàm theo nghĩa Ioffe*[4], *'thùng đạo hàm' không giới nội theo nghĩa Warga*[5]) cũng là những ví dụ về Jacobian xấp xỉ.

Trong Mục 5.8 ở cuối chương này, chúng ta sẽ chứng tỏ rằng đối đạo hàm theo nghĩa Mordukhovich (xem Mordukhovich (1994b), Rockafellar và Wets (1998), và Mục 4.2 trong Chương 4) và Jacobian xấp xỉ là những khái niệm rất khác nhau. Đó là lý do chính giải thích tại sao từ các định lý hàm ẩn sử dụng đối đạo hàm trong Mordukhovich (1994a,c), Rockafellar và Wets (1998),..., ta không thể rút ra các kết quả tương ứng trong chương này. Trong Mục 5.3 chúng ta sẽ so sánh chi tiết hơn sự khác biệt giữa các định lý hàm ẩn thu được ở đây và các kết quả của Mordukhovich (1994a,c).

Các định lý hàm ẩn, các điều kiện đủ cho tính liên tục và tính Lipschitz địa phương của hàm giá trị tối ưu trong chương này mở rộng các định lý tương ứng trong Yen (1997), nếu như tập ràng buộc cố định C là khác rỗng, đóng và lồi. (Trong Yen (1997) chỉ cần giả sử C là khác rỗng và đóng.)

5.2 Các định nghĩa và kết quả bổ trợ

Mục này trình bày một vài sự kiện cơ bản về Jacobian xấp xỉ và các định nghĩa tính chính quy, nhiễu chấp nhận được, và tính ổn định của hệ bất đẳng thức suy rộng liên tục dạng (1.1).

[3]TNTA: cone-constrained optimization problem.
[4]TNTA: Ioffe prederivative.
[5]TNTA: Warga unbounded derivative container.

Đối với một không gian Euclide Z, ký hiệu S_Z được dùng để chỉ mặt cầu đơn vị trong Z. Bao đóng của hình nón sinh ra bởi tập $M \subset Z$ sẽ được ký hiệu bởi $\overline{\text{cone}}M$. Nón đối ngẫu âm của tập M được ký hiệu bởi M^*, nghĩa là

$$M^* = \{w \in Z : \langle w, z\rangle \leqslant 0 \ \forall z \in M\}.$$

Nón lùi xa[6] (xem Jeyakumar và Luc (2002a,b), Rockafellar và Wets (1998)) M_∞ của tập $M \subset Z$ là tập hợp tất cả những véctơ $w \in Z$ sao cho tồn tại dãy $\{t_k\}$ các số dương hội tụ đến 0 và dãy $\{z_k\} \subset M$ để $w = \lim\limits_{k\to\infty} t_k z_k$. Đối với một hình nón $M \subset Z$ và một số $\varepsilon \in (0,1)$, lân cận $\varepsilon-$nón M^ε của M (xem Jeyakumar và Luc (2002a,b)) được xác định bởi công thức

$$M^\varepsilon = \{z + \varepsilon\|z\|\bar{B}_Z : z \in M\}.$$

Để cho đơn giản, ta sẽ viết M_∞^ε thay cho $(M_\infty)^\varepsilon$.

Sau đây là một vài khái niệm và kết quả về Jacobian xấp xỉ đã được đưa ra trong Jeyakumar và Luc (1998, 1999, 2002a,b).

Định nghĩa 5.2.1 (*Jacobian xấp xỉ*). Cho $f : I\!R^n \to I\!R^m$ là ánh xạ liên tục. Tập con đóng $Jf(x)$ của không gian $L(I\!R^n, I\!R^m)$ các toán tử tuyến tính từ $I\!R^n$ vào $I\!R^m$ (được đồng nhất với tập các ma trận cấp $m \times n$) được gọi là một *Jacobian xấp xỉ* của f tại $\bar{x} \in I\!R^n$ nếu, với mọi $u = (u_1, \ldots, u_n) \in I\!R^n$ và $v = (v_1, \ldots, v_m) \in I\!R^m$, ta có

$$(v \circ f)^+(\bar{x}; u) \leqslant \sup_{A \in Jf(\bar{x})} \langle v, Au\rangle, \tag{2.1}$$

ở đó $(v \circ f)(x) = v_1 f_1(x) + \cdots + v_m f_m(x)$ là hàm hợp của v và f, và

$$(v \circ f)^+(\bar{x}; u) = \limsup_{t \downarrow 0} \frac{(v \circ f)(\bar{x} + tu) - (v \circ f)(\bar{x})}{t} \tag{2.2}$$

là *đạo hàm theo hướng Dini trên*[7] của $v \circ f$ tại $\bar{x}$ theo hướng u. Nếu $m = 1$ thì ta thường viết $\partial^{\mathrm{JL}} f(\bar{x})$ thay cho $Jf(\bar{x})$ và gọi $\partial^{\mathrm{JL}} f(\bar{x})$ là *dưới vi phân J-L* của f tại $\bar{x}$.

Bài tập 5.2.1. Chứng minh rằng nếu f là khả vi Fréchet tại $\bar{x}$ với đạo hàm Fréchet $f'(\bar{x})$, thì $Jf(\bar{x}) = \{f'(\bar{x})\}$ là một Jacobian xấp xỉ của f tại $\bar{x}$.

Bài tập 5.2.2. Chứng minh rằng nếu (2.1) nghiệm đúng với mọi $u \in I\!R^n \setminus \{0\}$ và $v \in S_{I\!R^n}$, thì $Jf(\bar{x})$ là Jacobian xấp xỉ của f tại $\bar{x}$.

[6] TNTA: recession cone.

[7] TNTA: upper Dini directional derivative.

Nếu f là hàm véctơ Lipschitz địa phương tại $\bar{x}$, nghĩa là tồn tại $\ell > 0$ sao cho $\|f(x') - f(x)\| \leqslant \ell\|x' - x\|$ với mọi x, x' trong một lân cận của $\bar{x}$, thì Jacobian suy rộng theo nghĩa Clarke (1983)

$$(2.3) \qquad J^{\mathrm{Cl}}f(\bar{x}) := \mathrm{co}\left\{\lim_{k\to\infty} f'(x_k) : \{x_k\} \subset \Omega_f,\ \ x_k \to \bar{x}\right\}$$

là một Jacobian xấp xỉ lồi, compắc của f tại $\bar{x}$. Ở đây

$$\Omega_f = \{x \in I\!\!R^n : \exists\,\text{đạo hàm Fréchet } f'(x) \text{ của } f \text{ tại } x\}.$$

Sự kiện này là hệ quả của các tính chất của Jacobian suy rộng Clarke (xem Clarke (1983)) và Định nghĩa 5.2.1. Nếu f là Lipschitz địa phương tại $\bar{x}$ và $m = 1$, thì tập hợp $J^{\mathrm{Cl}}f(\bar{x})$ trùng với *dưới vi phân suy rộng Clarke* $\partial^{\mathrm{Cl}}f(\bar{x})$ của f tại $\bar{x}$ (xem Clarke (1983) và Mục 3.4 trong Chương 3).

Bài tập 5.2.3. Cho $\varphi(x) = |x|,\ x \in I\!\!R$. Hãy chứng tỏ rằng tập hợp

$$\partial^{\mathrm{JL}}\varphi(0) := \{-1, 1\} \subset \partial^{\mathrm{Cl}}\varphi(0)$$

là một dưới vi phân J-L của φ tại 0.

Bài tập 5.2.4. Xét ánh xạ $f : I\!\!R \to I\!\!R^2$ được cho bởi công thức $f(x) = (|x|, -x)$ với mọi $x \in I\!\!R$. Hãy chứng minh rằng $Jf(0) := [-1, 1] \times \{-1\}$ và $Jf(0) := \{-1, 1\} \times \{-1\}$ là các Jacobian xấp xỉ[8] của f tại 0. Hãy sử dụng (2.3) để chứng tỏ rằng tập hợp thứ nhất $\partial f(0) := [-1, 1] \times \{-1\}$ chính là Jacobian suy rộng Clarke của f tại 0.

Chúng ta hãy xét ví dụ minh họa đơn giản sau[9] về Jacobian xấp xỉ của một hàm liên tục, nhưng không là Lipschitz địa phương ở điểm được xét. Nhiều ví dụ khác nữa có trong Jeyakumar và Luc (1998, 2002a).

Ví dụ 5.2.1. Giả sử $f(x) = x^{1/3},\ x \in I\!\!R$. Với $\bar{x} = 0$, dễ thấy rằng $Jf(\bar{x}) = [\alpha, +\infty)$, ở đó $\alpha \in I\!\!R$ là một số thực tùy ý, là một Jacobian xấp xỉ của f tại $\bar{x}$. Với $\bar{x} \neq 0$, tập $Jf(\bar{x}) = \{\frac{1}{3}\bar{x}^{-2/3}\}$ là một Jacobian xấp xỉ của f tại $\bar{x}$. Rõ ràng ánh xạ Jacobian xấp xỉ $x \mapsto Jf(x)$ là nửa liên tục trên tại $\bar{x} = 0$.

Bài tập 5.2.5. Cho $f(x) = -x^{1/3} + x,\ x \in I\!\!R$. Hãy chứng tỏ rằng

$$\begin{cases} f^+(0; u) = -\infty & \text{nếu } u > 0 \\ f^+(0; u) = +\infty & \text{nếu } u < 0. \end{cases}$$

và

$$\begin{cases} (-f)^+(0; u) = \infty & \text{nếu } u > 0 \\ (-f)^+(0; u) = -\infty & \text{nếu } u < 0. \end{cases}$$

Từ đó hãy suy ra rằng $Jf(0) := (-\infty, \alpha]$ với $\alpha < 0$ được chọn tùy ý là Jacobian xấp xỉ của f tại 0. Tính nón lùi xa $\big(Jf(0)\big)_\infty$.

[8] Ở đây, với mọi $A = (\alpha, \beta) \in Jf(0)$ và với mọi $u \in I\!\!R$, ta đặt $Au = (\alpha u, \beta u)$.

[9] Xem Jeyakumar và Luc (2002a).

Bài tập 5.2.6*. Cho $\varphi(x) = \sqrt{|x|},\ x \in I\!R$. Tồn tại hay không một dưới vi phân J-L không chứa 0 của φ tại 0? Nếu tồn tại, hãy viết công thức của một dưới vi phân như vậy và tính nón lùi xa của tập hợp đó.

Quy tắc hàm hợp sau đây đóng vai trò quan trọng trong việc chứng minh các kết quả ở mục sau. Để việc trình bày được trọn vẹn, trong Mục 5.6 ta sẽ đưa ra chứng minh chi tiết cho mệnh đề này.

Mệnh đề 5.2.1 (Quy tắc hàm hợp; xem Jeyakumar và Luc (2002a), Hệ quả 4.2). *Cho $f : I\!R^n \to I\!R^m$ là ánh xạ liên tục, $g : I\!R^m \to I\!R$ là hàm số thực liên tục. Giả sử rằng*

(i) *f có một ánh xạ Jacobian xấp xỉ Jf nửa liên tục trên tại $\bar{x} \in I\!R^n$;*

(ii) *g là khả vi Fréchet trong lân cận của $f(\bar{x})$ và ánh xạ gradient $g'(\cdot)$ là liên tục tại $f(\bar{x})$ với $g'(f(\bar{x})) \neq 0$.*

Khi đó, với mỗi $\varepsilon > 0$, bao đóng của tập hợp

$$g'(f(\bar{x})) \circ [Jf(\bar{x}) + (Jf(\bar{x}))^{\varepsilon}_{\infty}]$$

là một Jacobian xấp xỉ của $g \circ f$ tại $\bar{x}$.

Định nghĩa 5.2.2 (*Tính tràn*). Toán tử $A \in L(I\!R^n, I\!R^m)$ được gọi là *tràn* trên tập lồi đóng khác rỗng $C \subset I\!R^n$ tại $x_0 \in C$ đối với tập đóng khác rỗng $K_0 \subset I\!R^m$ với $0 \in K_0$ nếu

$$0 \in \text{int}(A[T_C(x_0)] + K_0), \tag{2.4}$$

ở đó $T_C(x_0) = \overline{\text{cone}}(C - x_0))$ là nón tiếp tuyến của C tại x_0 theo nghĩa giải tích lồi.

Trong trường hợp $K_0 = \{0\}$, dễ chứng tỏ rằng (2.1) là tương đương với điều kiện $0 \in \text{int}(A[C - x_0])$. Vì thế, Định nghĩa 5.2.2 mở rộng khái niệm đã đưa ra trong Jeyakumar và Luc (2002b)[10].

Điều kiện cần cực trị sau đây suy ra ngay từ định nghĩa dưới vi phân J-L.

Mệnh đề 5.2.2 (xem Jeyakumar và Luc (2002b), Mệnh đề 2.1). *Giả sử $C \subset I\!R^n$ là tập lồi và giả sử $\varphi : I\!R^n \to I\!R$ là hàm số liên tục. Nếu $\bar{x} \in C$ là điểm cực tiểu địa phương của φ trên C và nếu $\partial^{\text{JL}} f(\bar{x})$ là dưới vi phân J-L của φ tại $\bar{x}$, thì*

$$\sup_{\eta \in \partial^{\text{JL}} f(\bar{x})} \langle \eta, u \rangle \geqslant 0 \quad \forall u \in T_C(\bar{x}).$$

Bây giờ chúng ta quay lại xét hệ bất đẳng thức suy rộng (1.1). Giả sử x_0 là một nghiệm của hệ đó.

[10]Ta lưu ý rằng trong Jeyakumar và Luc (2002b) tập C có thể không đóng, và thay cho $x_0 \in C$ các tác giả sử dụng điều kiện $x_0 \in \overline{C}$.

Dưới đây là dạng mở rộng của khái niệm chính quy theo Robinson (1976b) cho hệ này.

Định nghĩa 5.2.3 (*Điều kiện chính quy*). Đối với hệ (1.1), giả thiết rằng f có ánh xạ Jacobian xấp xỉ Jf. Khi đó, hệ được gọi là *chính quy* tại x_0 nếu

(2.5)
$$0 \in \text{int}\,(A[T_C(x_0)] + f(x_0) + K) \quad \forall A \in \overline{\text{co}}Jf(x_0) \cup \text{co}((Jf(x_0))_\infty \setminus \{0\}).$$

Trong mục sau ta sẽ chứng minh (xem Bổ đề 5.3.1) rằng điều kiện chính quy đó kéo theo tính mở đều của các toán tử $A \in Jf(x)$, ở đó x thuộc một lân cận của x_0.

So sánh (2.5) với (2.4) ta thấy rằng (1.1) là chính quy tại x_0 khi và chỉ khi mỗi toán tử A của tập $\overline{\text{co}}Jf(x_0) \cup \text{co}((Jf(x_0))_\infty \setminus \{0\})$ là tràn trên C tại x_0 đối với $K_0 := f(x_0) + K$.

Ví dụ 5.2.2. Hệ (1.1) ở đó $n = m = 1$, $C = I\!R$, $K = \{0\}$ và $f(x) = x^{1/3}$, là chính quy tại nghiệm $x_0 = 0$. Lưu ý rằng ánh xạ Jacobian xấp xỉ Jf đã được xác định trong Ví dụ 5.2.1.

Định nghĩa 5.2.4 (*Nhiễu chấp nhận được*). Nhiễu $\{f(x,p), P, p_0\}$ của (1.1) được gọi là *nhiễu chấp nhận được* của hệ tại x_0 nếu

(i) hàm $f(x,p)$ là liên tục tại (x_0, p_0),

(ii) với mỗi $x \in I\!R^n$ hàm số $f(x,\cdot)$ là liên tục trên P,

(iii) với mỗi $p \in P$ hàm số $f(\cdot,p)$ có một ánh xạ Jacobian xấp xỉ được ký hiệu bởi $J_1 f(\cdot,p)$,

(iv) tồn tại lân cận U_* của $p_0 \in P$ và một số $\delta_* > 0$ sao cho, với mỗi $p \in U_*$, $J_1 f(\cdot,p)$ là nửa liên tục trên ở trong $\bar{B}(x_0, \delta_*)$,

(v) ánh xạ đa trị $(x,p) \mapsto J_1 f(x,p)$ là nửa liên tục trên tại (x_0, p_0).

Định nghĩa 5.2.5 (*Tính ổn định nghiệm*). Ta nói rằng nghiệm x_0 của (1.1) là *ổn định* dưới nhiễu chấp nhận được nếu với mỗi $\varepsilon > 0$ và với mỗi nhiễu chấp nhận được $\{f(x,p), P, p_0\}$ của (1.1) tại x_0, tồn tại lân cận U của p_0 sao cho

$$G(p) \cap \bar{B}(x_0, \varepsilon) \neq \emptyset \quad \forall p \in U,$$

ở đó $G(p)$ là nghiệm của (1.2).

Trong ví dụ sau, chúng ta xét một dạng đặc biệt của nhiễu chấp nhận được của hệ bất đẳng thức liên tục.

Ví dụ 5.2.3. Giả sử rằng $f : I\!R^n \to I\!R^m$ là hàm liên tục, $C \subset I\!R^n$ là tập lồi đóng. Ta đặt $P = I\!R^m$, $p_0 = 0$, và xét hàm véctơ $f : I\!R^n \times P \to I\!R^m$ được cho bởi công thức $f(x,p) = f(x) - p$ với mọi $(x,p) \in I\!R^n \times I\!R^m$. Rõ ràng rằng $\{f(x,p), P, p_0\}$ là một nhiễu của (1.1). Nếu, thêm vào đó, hàm $f : I\!R^n \to I\!R^m$ có một ánh xạ Jacobian xấp xỉ Jf là nửa liên tục trên tại mọi $x \in I\!R^n$, thì $\{f(x,p), P, p_0\}$ là một nhiễu chấp nhận được của (1.1). Thật vậy, để kiểm tra điều đó ta chỉ cần lưu ý rằng, với mỗi $p \in P$, công thức $J_1 f(x,p) = Jf(x)$ ($x \in I\!R^n$) xác định một ánh xạ Jacobian xấp xỉ của hàm $f(\cdot,p)$. Dễ thấy rằng ánh xạ đa trị $(x,p) \mapsto J_1 f(x,p)$ là nửa liên tục trên tại (x_0,p_0). Để có một ví dụ cụ thể, ta xác định ánh xạ $f : I\!R^2 \to I\!R^2$ bằng cách đặt $f(x_1,x_2) = (x_1^{2/3}, x_2)$ với mọi $(x_1,x_2) \in I\!R^2$. Khi đó các công thức

$$J_1 f(x,p) = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{3}x^{-2/3} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \quad (\forall x \neq 0) \quad \text{và} \quad J_1 f(0,p) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\},$$

ở đó $\alpha > 0$, xác định một Jacobian xấp xỉ của $f(\cdot,p)$, ở đó $f(x,p) = f(x) - p$ ($p \in I\!R^2$).

5.3 Tính ổn định

Mục này đưa ra các điều kiện đủ cho ánh xạ đa trị $p \mapsto G(p) \cap V$, ở đó $G(p)$ là nghiệm của (1.2) và V là một lân cận của x_0, là nửa liên tục dưới ở trong một lân cận của p_0, cho tính chính quy mêtric của $G(\cdot)$ tại (p_0,x_0), và tính chất giả-Lipschitz của $G(\cdot)$ tại (p_0,x_0). Chúng ta cũng sẽ xét hai ví dụ chứng tỏ rằng, không giống như trong trường hợp hàm ngược đa trị, đối với hàm ẩn đa trị thì tính chính quy mêtric và cho tính giả-Lipschitz là hai khái niệm khác nhau.

Trong mục này có ba định lý chính:

- Định lý 5.3.1 đưa ra điều kiện đủ để ánh xạ đa trị 'bị cắt gọn' (truncated) $p \mapsto G(p) \cap V$, ở đó V là một lân cận của x_0, là nửa liên tục dưới ở trong một lân cận của p_0;
- Định lý 5.3.2 bàn về tính chính quy mêtric của $G(\cdot)$ tại (p_0,x_0);
- Định lý 5.3.3 đề cập đến tính giả-Lipschitz của hàm ẩn $G(\cdot)$ tại (p_0,x_0).

Trong suốt mục này chúng ta giả thiết rằng $x_0 \in C$ là một nghiệm của (1.1) và $\{f(x,p), P, p_0\}$ là một nhiễu chấp nhận được của (1.1) tại x_0.

Bổ đề sau đây về tính mở đều của một họ toán tử tuyến tính là một kết quả bổ trợ then chốt để thu được các kết quả trong mục này. Nó là dạng mở rộng của Bổ đề 3.1 trong Jeyakumar và Luc (2002b) ở đó, trong các ký hiệu của chúng ta, các tác giả xét trường hợp $K = \{0\}$ và $P = \{p_0\}$.

Bổ đề 5.3.1. *Nếu* (1.1) *là chính quy tại* x_0*, thì tồn tại* $\gamma > 0$ *và* $\delta > 0$ *sao cho*

$$\bar{B}_{I\!R^m} \subset \gamma \left(A \left[T_C(x) \cap \bar{B}_{I\!R^n} \right] + \left[\overline{\text{cone}}(K + f(x,p)) \cap \bar{B}_{I\!R^m} \right] \right) \tag{3.1}$$

với mọi $x \in \bar{B}(x_0,\delta) \cap C$, $p \in B(p_0,\delta) \cap P$, *và*

$$A \in \bigcup_{x' \in \bar{B}(x_0,\delta),\ p' \in B(p_0,\delta) \cap P} \overline{\text{co}} \left(J_1 f(x',p') + (J_1 f(x',p'))_\infty^\delta \right). \tag{3.2}$$

Chứng minh. Chúng ta sẽ đi theo lược đồ chứng minh Bổ đề 3.1 trong Jeyakumar và Luc (2002b). Giả sử rằng kết luận của bổ đề là sai. Khi đó, với mỗi $k \geqslant 1$ và $\delta = k^{-1}$ ta tìm được $v_k \in \bar{B}_{I\!R^m}$, $x_k, x'_k \in \bar{B}(x_0, k^{-1}) \cap C$, $p_k, p'_k \in B(p_0, k^{-1}) \cap P$ và

$$A_k \in \overline{\text{co}}\left(J_1 f(x'_k, p'_k) + (J_1 f(x'_k, p'_k))^{1/k}_\infty\right)$$

sao cho

$$\text{(3.3)} \qquad v_k \notin k\left(A_k\left[T_C(x_k) \cap \bar{B}_{I\!R^n}\right] + \left[\overline{\text{cone}}(f(x_k, p_k) + K) \cap \bar{B}_{I\!R^m}\right]\right).$$

Không giảm tổng quát, ta có thể giả sử rằng

$$\lim_{k \to \infty} v_k = v_0 \in \bar{B}_{I\!R^m}.$$

Chúng ta khẳng định rằng, bằng cách lấy dãy con (nếu cần thiết), hoặc

$$\text{(3.4)} \qquad \lim_{k \to \infty} A_k = A_0 \in \overline{\text{co}} J_1 f(x_0, p_0)$$

hoặc

$$\text{(3.5)} \qquad \lim_{k \to \infty} t_k A_k = A_* \in \text{co}\left((J_1 f(x_0, p_0))_\infty \setminus \{0\}\right)$$

ở đó $\{t_k\}$ là một dãy số dương hội tụ đến 0.

Trước tiên chúng ta hãy chứng tỏ rằng (3.4) và (3.5) dẫn đến điều mâu thuẫn.

Nếu (3.4) nghiệm đúng, thì do (1.3) và điều kiện chính quy (2.5) ta có

$$0 \in \text{int}\left(A_0[T_C(x_0)] + f(x_0, p_0) + K\right).$$

Vì $f(x_0, p_0) + K \subset \overline{\text{cone}}(f(x_0, p_0) + K)$, từ bao hàm thức cuối ta suy ra rằng

$$\text{(3.6)} \qquad I\!R^m = A_0[T_C(x_0)] + \overline{\text{cone}}(f(x_0, p_0) + K).$$

Rõ ràng

$$\Omega := A_0[T_C(x_0) \cap \bar{B}_{I\!R^n}] + [\overline{\text{cone}}(f(x_0, p_0) + K) \cap \bar{B}_{I\!R^m}]$$

là tập lồi compắc, và $0 \in \Omega$. Nếu $0 \notin \text{int}\,\Omega$ thì, theo định lý tách các tập lồi (xem Rudin (1991), Định lý 3.4), tồn tại $\eta \in S_{I\!R^m}$ sao cho

$$\Omega \subset \{y \in I\!R^m : \langle \eta, y \rangle \geqslant 0\}.$$

Với mỗi $v \in I\!R^m$, do (3.6) tồn tại $u \in T_C(x_0)$ và $v \in \overline{\text{cone}}(f(x_0, p_0) + K)$ sao cho $v = A_0 u + w$. Nếu ta chọn $t > 0$ đủ nhỏ sao cho $tu \in \bar{B}_{I\!R^n}$ và $tw \in \bar{B}_{I\!R^m}$, thì $tv = A_0(tu) + tw \in \Omega$. Suy ra $\langle \eta, tv \rangle \geqslant 0$, và do vậy $\langle \eta, v \rangle \geqslant 0$. Vì bất đẳng cuối đúng với mọi $v \in I\!R^m$, ta có điều mâu thuẫn. Vậy $0 \in \operatorname{int}\Omega$. Từ đó suy ra rằng có thể tìm được $\varepsilon > 0$ và $k_0 > 1$ sao cho

(3.7)
$$\bar{B}(v_0,\varepsilon) \subset k_0\left(A_0\left[T_C(x_0)\cap \bar{B}_{I\!R^n}\right] + \left[\overline{\text{cone}}(f(x_0,p_0)+K)\cap \bar{B}_{I\!R^m}\right]\right).$$

Do $A_k \to A_0$, tồn tại $k_1 \geqslant k_0$ sao cho

(3.8) $$\|A_k - A_0\| < \varepsilon/4 \quad \text{với mọi } k \geqslant k_1.$$

Bây giờ ta sẽ chỉ ra rằng tồn tại $k_2 \geqslant k_1$ sao cho

(3.9) $$\bar{B}(v_0,\frac{\varepsilon}{2}) \subset k_0\left(A_0\left[T_C(x_k)\cap \bar{B}_{I\!R^n}\right] + \left[\overline{\text{cone}}(f(x_k,p_k)+K)\cap \bar{B}_{I\!R^m}\right]\right)$$

với mọi $k \geqslant k_2$. Thật vậy, nếu điều đó không đúng, thì ta có thể giả sử rằng với mỗi k tồn tại phần tử $u_k \in \bar{B}(v_0,\varepsilon/2)$ thỏa mãn

$$u_k \notin k_0\left(A_0\left[T_C(x_k)\cap \bar{B}_{I\!R^n}\right] + \left[\overline{\text{cone}}(f(x_k,p_k)+K)\cap \bar{B}_{I\!R^m}\right)\right).$$

Theo định lý tách các tập lồi, tồn tại $\xi_k \in S_{I\!R^m}$ sao cho

(3.10) $$\langle \xi_k, u_k\rangle \geqslant \langle \xi_k, k_0(A_0 z + w)\rangle$$

với mỗi $z \in T_C(x_k)\cap \bar{B}_{I\!R^n}$ and $w \in \overline{\text{cone}}(f(x_k,p_k)+K)\cap \bar{B}_{I\!R^m}$. Bằng cách sử dụng các dãy con (nếu cần), ta có thể giả sử rằng

$$\lim_{k\to\infty} u_k = u_0 \in \bar{B}(v_0,\frac{\varepsilon}{2}),\quad \lim_{k\to\infty}\xi_k = \xi_0 \ \text{ ở đó } \|\xi_0\| = 1.$$

Từ (3.10) suy ra

(3.11) $$\langle \xi_0, u_0\rangle \geqslant \langle \xi_0, k_0(A_0 z + w)\rangle$$

với mọi $z \in T_C(x_0)\cap \bar{B}_{I\!R^n}$ và $w \in \overline{\text{cone}}(f(x_0,p_0)+K)\cap \bar{B}_{I\!R^m}$. Thật vậy,để chứng minh khẳng định đó ta chỉ cần chứng tỏ rằng (3.11) nghiệm đúng với mọi $z \in \text{cone}(C - x_0)\cap \bar{B}_{I\!R^n}$ và $w \in \text{cone}(f(x_0,p_0)+K)\cap \bar{B}_{I\!R^m}$. Giả sử (z,w) là một cặp thỏa mãn hai bao hàm thức sau cùng. Giả sử rằng

$$z = t(c - x_0),\quad w = \tau(f(x_0,p_0)+v)$$

với $c \in C$, $t,\tau \in [0,+\infty)$ và $v \in K$. Với mỗi k, ta đặt

$$z_k = t(c - x_k),\quad w_k = \tau(f(x_k,p_k)+v).$$

Khi đó $z_k \in T_C(x_k)$, $w_k \in \overline{\text{cone}}(f(x_k,p_k)+K)$, $z_k \to z$ và $w_k \to w$ khi $k \to \infty$. Nếu $z_k \in \bar{B}_{I\!R^n}$ thì ta đặt $z'_k = z_k$. Nếu $z_k \notin \bar{B}_{I\!R^n}$ thì ta đặt $z'_k = (\|z\|/\|z_k\|)z_k$. Tương tự, nếu $w_k \in \bar{B}_{I\!R^m}$ thì ta đặt $w'_k = w_k$. Nếu

$w_k \notin \bar{B}_{I\!R^m}$ thì ta đặt $w'_k = (\|w\|/\|w_k\|)w_k$. Rõ ràng rằng $z'_k \in T_C(x_k) \cap \bar{B}_{I\!R^n}$ và $w'_k \in \overline{\text{cone}}(f(x_k,p_k)+K) \cap \bar{B}_{I\!R^m}$ với mỗi k. Để ý rằng $z'_k \to z$ và $w'_k \to w$ khi $k \to \infty$. Do (3.10), ta có

$$\langle \xi_k, u_k\rangle \geqslant \langle \xi_k, k_0(A_0 z'_k + w'_k)\rangle \quad \text{với mọi } k.$$

Cho $k \to \infty$ ta thu được (3.11). Vì $u_0 \in B(v_0, \varepsilon/2)$, kết hợp (3.11) với (3.7) ta đi đến

$$\begin{aligned}\langle \xi_0, v_0\rangle + \tfrac{\varepsilon}{2} \geqslant \langle \xi_0, u_0\rangle \quad &\geqslant \sup\{\langle \xi_0, k_0(A_0 z + w)\rangle : z \in T_C(x_0) \cap \bar{B}_{I\!R^n},\\ &\qquad\qquad w \in \overline{\text{cone}}(f(x_0,p_0)+K) \cap \bar{B}_{I\!R^m}\}\\ &\geqslant \sup\{\langle \xi_0, v\rangle : v \in B(v_0,\varepsilon)\}\\ &= \langle \xi_0, v_0\rangle + \varepsilon;\end{aligned}$$

đó là điều mâu thuẫn. Ta đã chứng tỏ rằng tồn tại $k_2 \geqslant k_1$ sao cho (3.9) đúng với mọi $k \geqslant k_2$. Sử dụng (3.8) và (3.9) ta có

$$\begin{aligned}B(v_0, \tfrac{\varepsilon}{2}) \;&\subset k_0\left(A_0\left[T_C(x_k) \cap \bar{B}_{I\!R^n}\right] + \left[\overline{\text{cone}}(f(x_k,p_k)+K) \cap \bar{B}_{I\!R^m}\right]\right)\\ &\subset k_0(A_k\left[T_C(x_k) \cap \bar{B}_{I\!R^n}\right] + (A_0 - A_k)\left[T_C(x_k) \cap \bar{B}_{I\!R^m}\right]\\ &\qquad + \left[\overline{\text{cone}}(f(x_k,p_k)+K) \cap \bar{B}_{I\!R^m}\right])\\ &\subset k_0(A_k\left[T_C(x_k) \cap \bar{B}_{I\!R^n}\right] + B(0, \tfrac{\varepsilon}{4})\\ &\qquad + \left[\overline{\text{cone}}(f(x_k,p_k)+K) \cap \bar{B}_{I\!R^m}\right]).\end{aligned}$$

Điều đó kéo theo

(3.12)

$$\bar{B}(v_0, \frac{\varepsilon}{4}) \subset k_0\left(A_k\left[T_C(x_k) \cap \bar{B}_{I\!R^n}\right] + \left[\overline{\text{cone}}(f(x_k,p_k)+K) \cap \bar{B}_{I\!R^m}\right]\right).$$

Chọn $k \geqslant k_2$ đủ lớn, ta có $v_k \in \bar{B}(v_0, \varepsilon/4)$. Khi đó (3.12) kéo theo

$$\text{(3.13)} \qquad v_k \in k\left(A_k\left[T_C(x_k) \cap \bar{B}_{I\!R^n}\right] + \left[\overline{\text{cone}}(f(x_k,p_k)+K) \cap \bar{B}_{I\!R^m}\right]\right),$$

mâu thuẫn với (3.3).

Bây giờ ta giả sử rằng (3.5) nghiệm đúng. Do điều kiện chính quy, ta có (3.6) ở đó A_0 được thay bởi A_*. Vì vậy tồn tại $\varepsilon > 0$ và $k_0 > 1$ sao cho (3.7), ở đó A_0 được thay bởi A_*, nghiệm đúng. Các tính chất (3.8)–(3.10) vẫn đúng nếu như A_0 được thay bởi A_*, và A_k được thay bởi $t_k A_k$. Khi đó tính chất (3.12) có dạng

$$\bar{B}(v_0, \frac{\varepsilon}{2}) \subset k_0\left(t_k A_k\left[T_C(x_k) \cap \bar{B}_{I\!R^n}\right] + \left[\overline{\text{cone}}(f(x_k,p_k)+K) \cap \bar{B}_{I\!R^m}\right]\right)$$

với mọi $k \geqslant k_2$. Bằng cách chọn $k \geqslant k_2$ đủ lớn sao cho $v_k \in \bar{B}(v_0, \varepsilon/4)$ và $0 < t_k \leqslant 1$ ta nhận được (3.13), điều mâu thuẫn với (3.3).

Chứng minh của bổ đề sẽ kết thúc nếu ta có thể chỉ ra rằng hoặc (3.4) hoặc là (3.5) nghiệm đúng[11].

Vì $J_1 f(\cdot)$ là nửa liên tục trên tại (x_0, p_0), tồn tại $k_0 \geqslant 1$ sao cho

$$(J_1 f(x'_k, p'_k))_\infty \subset (J_1 f(x_0, p_0))_\infty \quad \forall k \geqslant k_0.$$

Ta có thể giả sử rằng kết luận đó là đúng với mọi $k \geqslant 1$. Vì vậy, với mỗi $k \geqslant 1$, tồn tại $M_{kj} \in J_1 f(x'_k, p'_k),\ N_{kj} \in (J_1 f(x_0, p_0))_\infty,\ P_{kj}$ và P_k với

$$\|P_k\| \leqslant 1, \quad \|P_{kj}\| \leqslant 1, \quad \lambda_{kj} \in [0,1], \quad j = 1, \ldots, nm+1$$

sao cho $\sum_{j=1}^{nm+1} \lambda_{kj} = 1$ và

$$A_k = \sum_{j=1}^{nm+1} \lambda_{kj}(M_{kj} + N_{kj} + \frac{1}{k}\|N_{kj}\|P_{kj}) + \frac{1}{k}P_k.$$

Nếu các dãy $\{\lambda_{kj}M_{kj}\}_{k\geqslant 1}$, $\{\lambda_{kj}N_{kj}\}_{k\geqslant 1}$, $j = 1, \ldots, nm+1$, đều giới nội, thì dãy $\{A_k\}$ cũng giới nội. Bằng cách chuyển sang xét các dãy con, ta có thể giả sử rằng

$$\lim_{k\to\infty} A_k = A_0, \quad \lim_{k\to\infty} \lambda_{kj} = \lambda_{0j},$$
$$\lim_{k\to\infty} \lambda_{kj}N_{kj} = N_{0j}, \quad \lim_{k\to\infty} \lambda_{kj}M_{kj} = M_{0j}$$

với mỗi $j = 1, \ldots, nm+1$. Vì $(J_1 f(x_0, p_0))_\infty$ là hình nón đóng, ta có

$$N_{0j} \in (J_1 f(x_0, p_0))_\infty, \quad \sum_{j=1}^{nm+1} N_{0j} \in \text{co}(J_1 f(x_0, p_0))_\infty.$$

Ngoài ra, ta cũng có $\sum_{j=1}^{nm+1} \lambda_{0j} = 1$. Chúng ta phân chia tổng $\sum_{j=1}^{nm+1} \lambda_{kj}M_{kj}$ thành hai tổng: Tổng thứ nhất $\sum_1$ bao gồm những số hạng với dãy $\{M_{kj}\}_{k\geqslant 1}$ giới nội, và tổng $\sum_2$ bao gồm những số hạng với dãy $\{M_{kj}\}_{k\geqslant 1}$ không giới nội. Khi đó, các giới hạn λ_{0j} với j lấy trong tập chỉ số của tổng thứ hai đều bằng 0 và các giới hạn M_{0j} tương ứng là các hướng lùi xa của tập $J_1 f(x_0, p_0)$. Vì vậy, $\sum_1 \lambda_{0j} = 1$ và, do tính nửa liên tục trên của $J_1 f$ tại (x_0, p_0),

$$\lim_{k\to\infty} \sum_1 \lambda_{kj}M_{kj} = \sum_1 M_{0j} \in \text{co}\, J_1 f(x_0, p_0),$$
$$\lim_{k\to\infty} \sum_2 \lambda_{kj}M_{kj} = \sum_2 M_{0j} \in \text{co}\,(J_1 f(x_0, p_0))_\infty.$$

[11]Phần chứng minh này lặp lại hoàn toàn phần hai của chứng minh Bổ đề 3.1 trong Jeyakumar và Luc (2002b) ở đó M_k được thay bởi A_k, y_k bởi (x'_k, p'_k), $F(y_k)$ bởi $J_1 f(x'_k, p'_k)$, và $F(0)$ bởi $J_1 f(x_0, p_0)$. Tính nửa liên tục trên của $F(\cdot)$ tại 0 giờ đây được thay bởi tính nửa liên tục trên của $J_1 f$ tại (x_0, p_0). Để tiện cho sự tra cứu của bạn đọc, khác với cách trình bày rút gọn trong Jeyakumar và Yen (2004), ở đây chúng tôi trình bày toàn bộ các lập luận chi tiết.

Do đó

$$A_0 \in \text{co}\, J_1 f(x_0, p_0) + \text{co}\,(J_1 f(x_0, p_0))_\infty \subset \overline{\text{co}}\,(J_1 f(x_0, p_0)),$$

tức là (3.4) nghiệm đúng.

Nếu trong số các dãy $\{\lambda_{kj} M_{kj}\}_{k\geqslant 1}$, $\{\lambda_{kj} N_{kj}\}_{k\geqslant 1}$, $j = 1, \ldots, nm+1$, có những dãy không giới nội thì, lại bằng cách lấy các dãy con, ta có thể giả sử rằng một trong các dãy đó, chẳng hạn như $\{\lambda_{kj_0} M_{kj_0}\}_{k\geqslant 1}$ với $j_0 \in \{1, \ldots, nm+1\}$, có phần tử $\lambda_{kj_0} M_{kj_0}$ ($k \geqslant 1$) là véctơ đạt chuẩn lớn nhất trong số các véctơ

$$\lambda_{k1} M_{k1}, \ldots, \lambda_{k,nm+1} M_{k,nm+1},\ \lambda_{k1} N_{k1}, \ldots, \lambda_{k,nm+1} N_{k,nm+1}.$$

(Nếu dãy được chọn là $\{\lambda_{kj_0} N_{kj_0}\}_{k\geqslant 1}$, thì ta cũng lập luận tương tự.) Xét dãy $\{A_k / \|\lambda_{kj_0} M_{kj_0}\|\}_{k\geqslant 1}$. Hiển nhiên dãy này là giới nội, và do đó ta có thể giả sử nó hội tụ đến đến một ma trận A_* nào đó. Khi đó ta có $A_* \in \text{co}\,(J_1 f(x_0, p_0))_\infty$. Nhận xét rằng $\text{co}\,(J_1 f(x_0, p_0))_\infty$ là nón nhọn, vì nếu không phải như vậy thì $\text{co}\,[(J_1 f(x_0, p_0))_\infty \setminus \{0\}]$ chứa ma trận 0 - hiển nhiên không tương ứng với toán tử tràn, trái với giả thiết. Vì

$$\frac{A_k}{\|\lambda_{kj_0} M_{kj_0}\|} = \sum_{j=1}^{nm+1} \left[\lambda_{kj} (M_{kj} + N_{kj} + \frac{1}{k} \|N_{kj}\| P_{kj}) + \frac{1}{k} P_k \right] / \|\lambda_{kj_0} M_{kj_0}\|$$

và vì ta có thể giả sử rằng mỗi số hạng ở tổng bên phải là một dãy giới nội, A_* là tổng hữu hạn của các phần tử thuộc $\text{co}\,(J_1 f(x_0, p_0))_\infty$. Vì có ít nhất một trong các số hạng của tổng đó là khác 0 (có một số hạng tương ứng với chỉ số j_0 có chuẩn bằng 1), và $\text{co}\,(J_1 f(x_0, p_0))_\infty$ là nón nhọn, ta suy ra A_* là ma trận khác 0; vậy (3.5) nghiệm đúng. Bổ đề đã được chứng minh. $\square$

Định lý sau sẽ được chứng minh bằng lược đồ chứng minh Định lý 3.1 trong Yen (1997). Không giống như Jacobian suy rộng Clarke, Jacobian xấp xỉ có thể là những tập không lồi, không compắc của các ánh xạ tuyến tính. Vì thế chúng ta phải đưa vào một số cải tiến trong kỹ thuật chứng minh. Định lý minimax 'lệch cạnh' (the lopsided minimax theorem) sẽ là một trong những công cụ chính của chúng ta.

Định lý 5.3.1 (Tính ổn định nghiệm). *Nếu (1.1) là chính quy tại x_0 và $\{f(x,p), P, p_0\}$ là một nhiễu chấp nhận được của hệ tại x_0, thì tồn tại các lân cận U của p_0 và V của x_0 sao cho $G(p) \cap V$ khác rỗng với mọi $p \in U$, và ánh xạ đa trị $\widetilde{G}(\cdot) := G(\cdot) \cap V$ là nửa liên tục dưới ở trong U.*

Chứng minh. Vì (1.1) là chính quy tại x_0 và $\{f(x,p), P, p_0\}$ là một nhiễu chấp nhận được của (1.1) tại x_0, theo Bổ đề 5.3.1, tồn tại $\gamma > 0$ và $\delta \in (0, \delta_*)$ sao cho (3.1) đúng với mọi $x \in \bar{B}(x_0, \delta) \cap C$, $p \in B(p_0, \delta) \cap P$, và A thỏa (3.2). Ở đây và cả về sau nữa, $\delta_* > 0$ và U_* là số thực và lân cận được mô tả trong yêu cầu

(iv) của Định nghĩa 5.2.3.Cố định một số $\lambda \in (0, \gamma^{-1})$. Vì $0 \in f(x_0, p_0) + K$ và vì ánh xạ đa trị $p \mapsto f(x_0, p) + K$ là nửa liên tục dưới tại p_0, tồn tại $\delta_1 \in (0, \delta)$ sao cho

$$\forall p \in B(p_0, \delta_1) \cap P \;\; \exists y_p \in f(x_0, p) + K \;\; \text{thỏa mãn} \;\; \|y_p\| < \lambda\delta.$$

Đặt $U = B(p_0, \delta_1) \cap U_*$. Với mỗi $p \in U$ ta xét phần hạn chế của hàm số

$$\nu_p(x) := d(0, f(x, p) + K) = \inf\{\|f(x, p) + v\| \, : \, v \in K\}$$

trên tập compắc $\bar{B}(x_0, \delta) \cap C$. Dễ thấy rằng $v_p(\cdot)$ là hàm số liên tục. Ta có

$$\nu_p(x_0) = d(0, f(x_0, p)) \leqslant \|y_p\| \leqslant \lambda\delta'$$

với một số $\delta' \in (0, \delta)$ nào đó. Theo nguyên lý biến phân Ekeland (xem Ekeland (1974), hoặc Định lý 2.1.1 trong Chương 2), tồn tại $\bar{x} \in \bar{B}(x_0, \delta) \cap C$ sao cho

$$\nu_p(\bar{x}) \leqslant \nu_p(x_0), \quad \|\bar{x} - x_0\| \leqslant \delta', \tag{3.14}$$

$$\nu_p(\bar{x}) \leqslant \nu_p(x) + \lambda\|x - \bar{x}\| \quad \forall x \in \bar{B}(x_0, \delta) \cap C. \tag{3.15}$$

Từ (3.14) suy ra rằng $\bar{x} \in \bar{B}(x_0, \delta)$. Ta có $0 \in f(\bar{x}, p) + K$, nghĩa là $\nu_p(\bar{x}) = 0$. Thật vậy, giả sử phản chứng rằng $\nu_p(\bar{x}) \neq 0$. Vì $f(\bar{x}, p) + K$ là tập lồi đóng khác rỗng, tồn tại duy nhất một phần tử $\overline{y} \in f(\bar{x}, p) + K$ sao cho

$$\|\overline{y}\| = d(0, f(\bar{x}, p) + K) = \inf\{\|f(x, p) + v\| \, : \, v \in K\}, \quad \overline{y} \neq 0.$$

Sử dụng điều kiện tối ưu trong quy hoạch lồi (xem Ví dụ 1.1.6 trong Chương 1) ta có

$$\|\overline{y}\|^{-1}\overline{y} \in -(f(\bar{x}, p) + K)^*.$$

Đặt $\overline{\eta} = \|\overline{y}\|^{-1}\overline{y}$ và $\overline{w} = \overline{y} - f(\bar{x}, p)$. Vì $\overline{w} \in K$, nên $\nu_p(x) \leqslant \|f(x, p) + \overline{w}\|$ với mọi $x \in I\!\!R^n$. Đặt

$$\psi(x) = \|f(x, p) + \overline{w}\| \quad \text{và} \quad \varphi(x) = \psi(x) + \lambda\|x - \bar{x}\|$$

với mọi $x \in I\!\!R^n$. Từ (3.15) suy ra rằng

$$\varphi(\bar{x}) \leqslant \varphi(x) \quad \forall x \in \bar{B}(x_0, \delta) \cap C.$$

Do $\bar{x} \in B(x_0, \delta)$, tính chất cuối chứng tỏ rằng $\bar{x}$ là nghiệm địa phương của φ ở trên C. Theo Mệnh đề 5.2.2,

$$\sup_{\eta \in \partial^{\mathrm{JL}} f(\bar{x})} \langle \eta, u \rangle \geqslant 0 \quad \forall u \in T_C(\bar{x}), \tag{3.16}$$

ở đó $\partial^{\mathrm{JL}}\varphi(\bar{x})$ là dưới vi phân J-L của φ tại $\bar{x}$. Theo quy tắc hàm hợp phát biểu trong Mệnh đề 5.2.1, với mọi $\varepsilon \in (0, \delta)$, bao đóng của tập hợp

$$\overline{\eta} \circ [J_1 f(\bar{x}, p) + (J_1 f(\bar{x}, p))^{\varepsilon}_{\infty}]$$

là dưới vi phân J-L của ψ tại $\bar{x}$. Sử dụng công thức tính dưới vi phân J-L của tổng hai hàm số (xem Jeyakumar và Wang (1999), Mệnh đề 2.2) ta suy ra rằng bao đóng của tập hợp

$$\left\{\overline{\eta} \circ A + \lambda\xi \, : \, A \in J_1 f(\bar{x}, p) + (J_1 f(\bar{x}, p))^{\varepsilon}_{\infty}, \; \xi \in \bar{B}_{I\!R^n}\right\}$$

là dưới vi phân J-L của φ tại $\bar{x}$. Khi đó tập hợp lớn hơn

(3.17)
$$\partial^{\mathrm{JL}}\varphi(\bar{x}) := \left\{\overline{\eta} \circ A + \lambda\xi \, : \, A \in \overline{\mathrm{co}}\left(J_1 f(\bar{x}, p) + (J_1 f(\bar{x}, p))^{\varepsilon}_{\infty}\right), \; \xi \in \bar{B}_{I\!R^n}\right\},$$

một tập lồi đóng, cũng là dưới vi phân J-L của φ tại $\bar{x}$. Đặt

$$Q = \overline{\mathrm{co}}\left(J_1 f(\bar{x}, p) + (J_1 f(\bar{x}, p))^{\varepsilon}_{\infty}\right), \quad D = T_C(\bar{x}) \cap \bar{B}_{I\!R^n}.$$

Ta có

$$-\gamma^{-1} \geqslant \sup_{A \in Q} \inf_{v \in D} \langle \overline{\eta}, Av \rangle. \tag{3.18}$$

Thật vậy, với mỗi $A \in Q$ ta để ý rằng A thỏa (3.2) bởi vì $(J_1 f(\bar{x}, p))^{\varepsilon}_{\infty} \subset (J_1 f(\bar{x}, p))^{\delta}_{\infty}$, $\bar{x} \in B(x_0, \delta)$ và $p \in B(p_0, \delta) \cap P$. Do (3.1), tồn tại $v \in T_C(\bar{x}) \cap \bar{B}_{I\!R^n}$ và $w \in \overline{\mathrm{cone}}(f(\bar{x}, p) + K) \cap \bar{B}_{I\!R^m}$ sao cho

$$-\overline{\eta} = \gamma(Av + w).$$

Khi đó

$$-1 = -\langle \overline{\eta}, \overline{\eta} \rangle = \gamma \langle \overline{\eta}, Av + w \rangle.$$

Vì $\langle \overline{\eta}, w \rangle \geqslant 0$, ta suy ra rằng $-\gamma^{-1} \geqslant \langle \overline{\eta}, Av \rangle$. Vậy ta đã chứng tỏ rằng $-\gamma^{-1} \geqslant \inf_{v \in D} \langle \overline{\eta}, Av \rangle$. Vì bất đẳng thức cuối nghiệm đúng với mỗi $A \in Q$, ta kết luận rằng (3.18) nghiệm đúng. Tiếp theo, ta có

$$\inf_{v \in D} \sup_{A \in Q} \langle \overline{\eta}, Av \rangle \geqslant -\lambda. \tag{3.19}$$

Thật vậy, giả sử $v \in D$ được cho tùy ý. Với mọi $\varepsilon_1 > 0$, do (3.16) và (3.17) tồn tại $A \in Q$ và $\xi \in \bar{B}_{I\!R^n}$ sao cho

$$(\overline{\eta} \circ A)(v) + \lambda \langle \xi, v \rangle \geqslant -\varepsilon_1.$$

Vì thế

$$\langle \overline{\eta}, Av \rangle \geqslant -\lambda \langle \xi, v \rangle - \varepsilon_1 \geqslant -\lambda - \varepsilon_1.$$

Do đó $\sup_{A\in Q}\langle\overline{\eta}, Av\rangle \geq -\lambda - \varepsilon_1$. Vì $\varepsilon_1 > 0$ có thể lấy bé tùy ý, ta kết luận rằng $\sup_{A\in Q}\langle\overline{\eta}, Av\rangle \geq -\lambda$; vậy (3.19) nghiệm đúng. Theo định lý minimax 'lệch cạnh' (the lopsided minimax theorem; xem Aubin và Ekeland (1984), tr. 319), ta có

$$\sup_{v\in D}\inf_{A\in Q}\langle\overline{\eta}, -Av\rangle = \inf_{A\in Q}\sup_{v\in D}\langle\overline{\eta}, -Av\rangle.$$

Vì vậy

$$\inf_{v\in D}\sup_{A\in Q}\langle\overline{\eta}, Av\rangle = \sup_{A\in Q}\inf_{v\in D}\langle\overline{\eta}, Av\rangle.$$

Kết hợp điều đó với (3.18) và (3.19) ta thu được bất đẳng thức $-\gamma^{-1} \geqslant -\lambda$, mâu thuẫn với bao hàm thức $\lambda \in (0, \gamma^{-1})$. Như vậy ta đã chứng minh rằng $0 \in f(\bar{x}, p) + K$. Do đó $\bar{x} \in G(p)$.

Ta đặt $V = B(x_0, \delta)$ và $\widetilde{G}(p) = G(p) \cap V$. Từ những điều đã được chứng minh ta có thể kết luận rằng

$$\widetilde{G}(p) \neq \emptyset \quad \forall p \in U.$$

Bây giờ ta đi chứng minh rằng ánh xạ đa trị $\widetilde{G}(\cdot)$ là nửa liên tục dưới ở trong U. Giả sử $p \in U$ và $x \in \widetilde{G}(p)$ được cho tùy ý. Với mỗi $\varepsilon > 0$ ta chọn $\tau \in (0, \varepsilon)$ sao cho $\bar{B}(x, \tau) \subset V$. Lặp lại phần chứng minh trên với (x, p) thay chỗ cho (x_0, p_0), ta tìm được lân cận U' của p trong P sao cho

$$\forall p' \in U' \;\; \exists x' \in \bar{B}(x, \tau) \quad \text{thỏa } 0 \in f(x', p') + K.$$

Bao hàm thức sau cùng chứng tỏ rằng $x' \in G(p')$. Vì $\bar{B}(x, \tau) \subset V \cap \bar{B}(x, \varepsilon)$, ta có $x' \in \widetilde{G}(p') \cap \bar{B}(x, \varepsilon)$. Từ đó suy ra rằng $\widetilde{G}(\cdot)$ là nửa liên tục dưới tại p. $\square$

Nhận xét rằng Định lý 5.3.1 chứng tỏ rằng *nếu hệ bất đẳng thức là chính quy tại một nghiệm nào đó thì nghiệm đó ổn định dưới tác động của nhiễu chấp nhận được*. Kết luận kiểu đó là quen thuộc trong hầu hết các nghiên cứu về tính ổn định và độ nhậy nghiệm của các bài toán tối ưu và các bất đẳng thức biến phân. Từ các kết luận của Định lý 5.3.2 và Định lý 5.3.3 dưới đây cũng suy ra rằng nghiệm x_0 là ổn định dưới tác động của nhiễu chấp nhận được.

Bổ đề 5.3.1 và thủ tục chứng minh rằng điểm $\bar{x}$ tìm được bằng nguyên lý biến phân Ekeland thỏa mãn bao hàm thức $0 \in f(\bar{x}, p) + K$ trong chứng minh trên còn cho phép chúng ta thu được tính chính quy mêtric và tính giả-Lipschitz của $G(\cdot)$. Các phương pháp chứng minh ở đây cũng giống như các phương pháp chứng minh Định lý 3.2 và Định lý 3.3 trong Yen (1997). Kỹ thuật lấy giới hạn trong biểu thức thu được bởi khẳng định thứ nhất trong nguyên lý biến phân Ekeland bắt nguồn từ công trình của Aubin và Frankowska (1987). Dien và Yen (1991), Yen (1987, 1997) đã chứng tỏ rằng kỹ thuật đó chẳng những có thể giúp thiết lập tính giả-Lipschitz, mà còn hữu ích cho việc chứng minh tính chính quy mêtric của hàm ẩn đa trị.

Định nghĩa 5.3.2 (xem Borwein (1986)). Hàm ẩn đa trị $G(\cdot)$ xác định bởi hệ bất đẳng thức suy rộng có tham số (1.2) được gọi là *chính quy mêtric* tại (p_0, x_0) nếu tồn tại hằng số $\mu > 0$ và các lân cận U_1 của p_0 và V_1 của x_0 sao cho

$$d(x, G(p)) \leqslant \mu d(0, f(x,p) + K) \quad \forall p \in U_1,\ \forall x \in V_1 \cap C. \tag{3.20}$$

Tính chính quy mêtric của hàm ngược đa trị (xem Mục 5.4 dưới đây) là một trường hợp riêng của khái niệm vừa nêu trong Định nghĩa 5.3.2.

Định lý 5.3.2 (Tính chính quy mêtric). *Nếu (1.1) là chính quy tại x_0 và $\{f(x,p), P, p_0\}$ là một nhiễu chấp nhận được của hệ tại x_0, thì $G(\cdot)$ là chính quy mêtric tại (p_0, x_0).*

Chứng minh. Xác định các hằng số γ, δ và các lân cận U của p_0, V của x_0 như trong chứng minh của Định lý 5.3.1. Vì ánh xạ đa trị $(x,p) \mapsto f(x,p) + K$ là nửa liên tục dưới tại (x_0, p_0) và vì $0 \in f(x_0, p_0) + K$, tồn tại các lân cận U_1 của p_0 và V_1 của x_0 sao cho

$$U_1 \subset U, \quad V_1 \subset \bar{B}(x_0, \frac{\delta}{2})$$

và

$$d(0, f(x,p) + K) < \frac{\delta}{2\gamma} \quad \forall p \in U_1,\ \forall x \in V_1. \tag{3.21}$$

Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức trong (3.20) cho $\mu := \gamma$. Lấy tùy ý $x \in V_1 \cap C$ và $p \in U_1$. Ta đặt $\alpha = d(0, f(x,p) + K)$. Do (3.21),

$$\alpha < 2^{-1}\gamma^{-1}\delta.$$

Vì vậy khoảng số $(2\delta^{-1}\alpha, \gamma^{-1})$ là khác rỗng. Lấy $\tau \in (2\delta^{-1}\alpha, \gamma^{-1})$. Xét hàm số

$$\nu_p(z) = d(0, f(z,p) + K) \quad (z \in I\!R^n).$$

Lấy cố định một giá trị $\tau' \in (\tau, \gamma^{-1})$. Ta có

$$\nu_p(x) = \alpha < \tau^{-1}\alpha\tau'.$$

Theo nguyên lý biến phân Ekeland, tồn tại $\bar{x} \in \bar{B}(x_0, \delta) \cap C$ sao cho

$$\|\bar{x} - x\| \leqslant \tau^{-1}\alpha,$$

$$\nu_p(\bar{x}) \leqslant \nu_p(z) + \tau'\|z - \bar{x}\| \quad \forall z \in \bar{B}(x_0, \delta) \cap C.$$

Khi đó,

$$\|\bar{x} - x_0\| \leqslant \|\bar{x} - x\| + \|x - x_0\| < \tau^{-1}\alpha + 2^{-1}\delta < \delta.$$

Vì $0 < \tau' < \gamma^{-1}$, các lập luận trong phần thứ nhất của chứng minh Định lý 5.3.1 chứng tỏ rằng $0 \in f(\bar{x}, p) + K$. Do vậy, $\bar{x} \in G(p)$. Ta có

$$d(x, G(p)) \leqslant \|x - \bar{x}\| \leqslant \tau^{-1}\alpha.$$

Cho $\tau \to \gamma^{-1}$ ta thu được đánh giá $d(x, G(p) \leqslant \gamma\alpha$, tức là

$$d(x, G(p)) \leqslant \gamma d(0, f(x, p) + K).$$

Chứng minh kết thúc. $\square$

Định lý 5.3.3 (Tính giả-Lipschitz). *Thêm vào các giả thiết của Định lý 5.3.1, giả sử rằng tồn tại $k > 0$ và các lân cận U_0 của p_0 trong P và V_0 của x_0 sao cho*

$$\|f(x, p') - f(x, p)\| \leqslant k\|p' - p\| \quad \forall p, p' \in U_0,\ \forall x \in V_0. \tag{3.22}$$

Khi đó ánh xạ đa trị $G(\cdot)$ là giả-Lipschitz tại (p_0, x_0).

Chứng minh. Xác định $\gamma, \delta,$ U và V như trong chứng minh Định lý 5.5.1. Ta chọn $\theta > 0$ đủ nhỏ sao cho

$$\bar{B}(x_0, \theta k) \subset V \cap V_0, \quad B(p_0, \gamma^{-1}\theta) \cap P \subset U \cap U_0.$$

Đặt

$$\ell = 2\gamma k, \quad \widetilde{U} = B(p_0, 8^{-1}\gamma^{-1}\theta) \cap P, \quad \widetilde{V} = B(x_0, 2^{-1}\theta k).$$

Ta khẳng định rằng

$$G(p) \cap \widetilde{V} \subset G(p') + \ell\|p - p'\|\bar{B}_{I\!R^n} \quad \forall p, p' \in \widetilde{U}.$$

Để chứng minh điều đó, chỉ cần chứng tỏ rằng với mọi $p, p' \in \widetilde{U}$ và $x \in G(p) \cap \widetilde{V}$ ta có

$$d(x, G(p')) \leqslant \ell\|p - p'\|. \tag{3.23}$$

Vì $\|p - p'\| < 4^{-1}\gamma^{-1}\theta$, tồn tại ε thỏa điều kiện

$$2\theta^{-1}\|p - p'\| < \varepsilon < 2^{-1}\gamma^{-1}. \tag{3.24}$$

Đặt

$$\varphi(z) = \nu_{p'}(z) + \varepsilon\|z - x\| \quad \forall z \in I\!R^n,$$

ở đó $\nu_{p'}(z) = d(0, f(z,p') + K)$. Do (3.22), $\|f(x,p') - f(x,p)\| \leqslant k\|p' - p\|$. Vì vậy, nếu $w \in K$ thỏa điều kiện $\nu_p(x) = \|f(x,p) + w\| = 0$ thì

$$\begin{aligned}\varphi(x) = \nu_{p'}(x) \quad &= \nu_{p'}(x) - \nu_p(x)\\ &\leqslant \|f(x,p') + w\| - \|f(x,p) + w\|\\ &\leqslant k\|p - p'\|.\end{aligned}$$

Kết hợp điều đó với (3.24) ta có

$$\varphi(x) \leqslant 2^{-1}k\varepsilon\theta.$$

Áp dụng nguyên lý biến phân Ekeland ta tìm được $\bar{x} \in \bar{B}(x_0, \theta k) \cap C$ sao cho

$$\varphi(\bar{x}) \leqslant \varphi(x), \quad \|\bar{x} - x\| \leqslant 2^{-1}\theta k$$

và

$$\varphi(\bar{x}) \leqslant \varphi(z) + \varepsilon\|z - \bar{x}\| \quad \forall z \in \bar{B}(x_0, \theta k) \cap C.$$

Vì thế,

$$\nu_{p'}(\bar{x}) + \varepsilon\|\bar{x} - x\| \leqslant \nu_{p'}(x), \tag{3.25}$$

$$\|\bar{x} - x\| \leqslant 2^{-1}\theta k, \tag{3.26}$$

$$\nu_{p'}(\bar{x}) \leqslant \nu_{p'}(z) + 2\varepsilon\|z - \bar{x}\| \quad \forall z \in \bar{B}(x_0, \theta k) \cap C. \tag{3.27}$$

Do $x \in B(x_0, 2^{-1}\theta k)$, (3.26) kéo theo $\bar{x} \in B(x_0, \theta k)$. Vì $0 < \varepsilon < 2^{-1}\gamma^{-1}$, ta có $2\varepsilon \in (0, \gamma^{-1})$. Bằng một thủ tục tương tự như trong chứng minh Định lý 5.3.1, từ (3.27) ta nhận được $0 \in f(\bar{x}, p') + K$; vì vậy $\bar{x} \in G(p')$. Bất đẳng thức (3.25) chứng tỏ rằng

$$\|\bar{x} - x\| \leqslant \varepsilon^{-1}\nu_{p'}(x) \leqslant \varepsilon^{-1}k\|p - p'\|.$$

Vì thế,

$$d(x, G(p')) \leqslant \varepsilon^{-1}k\|p - p'\|.$$

Do (3.24), cho $\varepsilon \to 2^{-1}\gamma^{-1}$, từ bất đẳng thức cuối ta thu được (3.23). Chứng minh kết thúc. □

Nếu f và $f(\cdot, p)$ ($p \in P$) là hàm Lipschitz địa phương, thì ta chọn Jacobian theo nghĩa Clarke $J^{\mathrm{Cl}}f(x)$ và $J_1^{\mathrm{Cl}}f(x,p)$, tương ứng, làm Jacobian xấp xỉ của $f(\cdot)$và $f(\cdot, p)$ tại x. Vì vậy, các định lý 3.1–3.3 trong Yen (1997) suy ra từ các định lý hàm ẩn nói trên, nếu như chúng ta giả thiết rằng C là tập lồi đóng[12].

[12]Trong Yen (1997) chỉ giả sử rằng C là tập con đóng của $I\!R^n$. Trong trường hợp đó, $T_C(x)$ ký hiệu nón tiếp tuyến Clarke.

Ví dụ đơn giản sau đây chứng tỏ rằng, nói chung, từ tính chính quy mêtric của hàm ẩn đa trị không suy ra tính giả-Lipschitz.

Ví dụ 5.3.1. Lấy $n = m = r = 1$, $C = I\!R$, $K = \{0\}$, $f(x,p) = x(p+1) - p^{1/3}$ với mọi $x, p \in I\!R$, $p_0 = 0$, $x_0 = 0$. Khi đó ánh xạ $p \mapsto G(p)$, ở đó $G(p) = \{x \in C : 0 \in f(x,p) + K\}$, là chính quy mêtric tại (p_0, x_0), nhưng nó không là giả-Lipschitz tại (p_0, x_0). Dễ thấy rằng các giả thiết của Định lý 5.3.2 thỏa mãn trong khi các giả thiết của Định lý 5.3.3 không được thỏa mãn.

Dưới đây là một ví dụ đơn giản nữa. Nó chứng tỏ rằng, đối với hàm ẩn đa trị, tính giả-Lipschitz (tính liên tục Aubin) không kéo theo tính chính quy mêtric.

Ví dụ 5.3.2. Lấy $n = m = r = 1$, $C = \mathbb{R}$, $K = \{0\}$, $f(x,p) = x^3 - p^3$, $p_0 = 0$, $x_0 = 0$. Vì $G(p) = \{x \in C : 0 \in f(x,p) + K\} = \{p\}$ với mọi p, $G(\cdot)$ là giả-Lipschitz tại (p_0, x_0). Mặc dù thế, không tồn tại $\mu > 0$ nào để

$$d(x, G(p)) \leqslant \mu d(0, f(x,p) + K)$$

với mọi (x, p) thuộc một lân cận của (x_0, p_0). Thật vậy, vì

$$d(x, G(p)) = |x - p| \text{ và } d(0, f(x,p) + K) = |x^3 - p^3|,$$

nên hằng số μ như vậy không thể tồn tại.

Như vậy, *đối với hàm ẩn đa trị, cả hai khẳng định "tính chính quy mêtric kéo theo tính giả-Lipschitz" và "tính giả-Lipschitz kéo theo tính chính quy mêtric" nói chung đều không đúng*. Mặc dù thế, đối với hàm ngược đa trị, đã từ lâu người ta biết rằng tính Lipschitz chính quy tương đương với tính giả-Lipschitz (xem Borwein và Zhuang (1988), Mordukhovich (1993), Penot (1989)).

Những điều kiện đủ cho tính giả-Lipschitz của hàm ẩn đa trị trong ngôn ngữ đối đạo hàm đã được đưa ra trong Mordukhovich (1994a, Định lý 4.1 và Định lý 5.1) và Mordukhovich (1994c; các định lý 5.1, 5.8 và 6.1). Nhận xét nêu trên chứng tỏ rằng các điều kiện đó có thể không đảm bảo tính chính quy mêtric của hàm ẩn đa trị. Dưới những điều kiện khá ngặt (xem Mordukhovich (1994a, Định lý 4.9)), tính chính quy mêtric của hàm ẩn đa trị tương đương với tính giả-Lipschitz.

Quan hệ giữa các khái niệm Jacobian xấp xỉ và đối đạo hàm đã được khảo sát trong Nam và Yen (2007); xem các mục 5.7 và 5.8 trong chương này. Nói riêng ra, có thể chứng minh rằng nếu $f : I\!R^n \to I\!R^m$ là hàm véctơ liên tục và $Jf(\bar{x})$ là một *đại diện* (representative) của ánh xạ đối đạo hàm $D^*f(\bar{x})(\cdot) : I\!R^n \rightrightarrows I\!R^m$, nghĩa là $Jf(\bar{x})$ là một tập đóng khác rỗng của $L(I\!R^n, I\!R^m)$ và

$$\sup_{x^* \in D^*f(\bar{x})(y^*)} \langle x^*, u \rangle = \sup_{A \in Jf(\bar{x})} \langle A^* y^*, u \rangle \quad \forall u \in I\!R^n, \ \forall y^* \in I\!R^m,$$

thì f là Lipschitz địa phương tại $\bar{x}$ và $Jf(\bar{x})$ là Jacobian xấp xỉ của f tại $\bar{x}$. Ví dụ 3.5 trong Nam và Yen (2007) chứng tỏ rằng, đối với các hàm số thực liên tục, dưới vi phân Mordukhovich, ngay cả khi nó khác rỗng, có thể không phải là Jacobian xấp xỉ. Ngược lại, tồn tại nhiều ví dụ chứng tỏ rằng tồn tại các dưới vi phân J-L không tầm thường, nhưng dưới vi phân Mordukhovich là tập rỗng. Vì thế, ta có thể kết luận rằng, đối với các hàm véctơ liên tục, đối đạo hàm và Jacobian xấp xỉ là những khái niệm không so sánh được.

Sau đây là một ví dụ đơn giản ở đó, theo hiểu biết của chúng tôi, các định lý vừa được nhắc tới của Mordukhovich (1994a,c) không áp dụng được, trong khi các định lý 5.3.1–5.3.3 lại áp dụng được.

Ví dụ 5.3.3. Lấy $f(x) = x^{1/3}$ với mọi $x \in I\!R$ và $f(x,p) = (p+1)x^{1/3} - p$ với mọi $(x,p) \in I\!R \times I\!R$. Giả sử $P = I\!R$, $C = I\!R$, $K = \{0\}$, $p_0 = 0$, và $x_0 = 0$. Với mỗi $p \in (-1,1)$, tập nghiệm $G(p)$ của (1.2) được cho bởi công thức $G(p) = \{p^3/(p+1)^3\}$. Rõ ràng rằng

$$J_1 f(x,p) = \begin{cases} [\alpha, +\infty) & \text{nếu } x = 0 \\ \{\frac{1}{3}(p+1)\bar{x}^{-2/3}\} & \text{nếu } x \neq 0, \end{cases}$$

ở đó $\alpha > 0$ được chọn tùy ý, là Jacobian xấp xỉ của $f(\cdot,p)$. Ta có $\{f(x,p), P, p_0\}$ là một nhiễu chấp nhận được của hệ (1.1) tại x_0 theo Định nghĩa 5.2.4. Nhận xét rằng (1.1) là chính quy tại x_0 theo Định nghĩa 5.2.3. Vì các giả thiết của Định lý 5.3.1 được thỏa mãn, tồn tại các lân cận U của p_0 và V của p_0 sao cho $G(p) \cap V$ khác rỗng với mọi $p \in U$, và ánh xạ đa trị $\widetilde{G}(\cdot) := G(\cdot) \cap V$ là nửa liên tục dưới ở trong U. Theo Định lý 5.3.2, $G(\cdot)$ là chính quy mêtric tại (p_0, x_0), nghĩa là tồn tại hằng số $\mu > 0$ và các lân cận U_1 của p_0 và V_1 của x_0 sao cho (3.20) thỏa mãn. Vì (3.22) được thỏa mãn với $k = 2$, $U_0 = I\!R$, và $V_0 = (-1,1)$, Định lý 5.3.3 khẳng định rằng ánh xạ đa trị $G(\cdot)$ là giả-Lipschitz tại (p_0, x_0).

Bài tập 5.3.1. Kiểm tra chi tiết tính đúng đắn của những kết luận đã nêu trong các ví dụ 5.3.1-5.3.3.

Bài tập 5.3.2. Xét hệ bất đẳng thức suy rộng

$$x_1^2 + x_2^2 \leqslant 2, \quad x_2 = x_1^3, \quad x = (x_1, x_2) \in I\!R^2$$

và hệ bất đẳng thức suy rộng phụ thuộc tham số

$$x_1^2 + px_2^2 \leqslant 2p^2, \quad x_2 = px_1^3, \quad x = (x_1, x_2) \in I\!R^2,$$

ở đó $p \in I\!R$ là tham số. Ký hiệu tập nghiệm của hệ bất đẳng thức thứ hai bởi $G(p)$. Cho $p_0 = 1$. Hãy chứng tỏ rằng hệ bất đẳng thứ hai là nhiễu chấp nhận được của hệ thứ nhất tại nghiệm $x_0 := (1,1)$. Khảo sát tính chính quy mêtric và tính giả-Lipschitz của ánh xạ đa trị $G(\cdot)$ tại (p_0, x_0). (Gợi ý: Đặt $f(x) = (x_1^2 + px_2^2 - 2, x_2 - x_1^3)$, $K = (-I\!R_+) \times \{0\}$, $f(x,p) = (x_1^2 + px_2^2 - 2p^2, x_2 = px_1^3)$, rồi áp dụng các định lý 5.3.2 và 5.3.3.)

5.4 Quy tắc nhân tử Lagrange

Từ các định lý hàm ẩn đã thu được trong mục trước, chúng ta sẽ dẫn ra định lý ánh xạ mở, định lý hàm ngược, quy tắc nhân tử Lagrange cho bài toán quy hoạch toán học ở đó tập ràng buộc là tập nghiệm của một hệ bất đẳng thức suy rộng.

Định lý 5.4.1 (Định lý ánh xạ mở đa trị). *Cho $C \subset I\!R^n$ và $K \subset I\!R^m$ là những tập lồi đóng khác rỗng, $f : I\!R^n \to I\!R^m$ là hàm véctơ liên tục. Cho $x_0 \in C$. Giả sử rằng f có ánh xạ Jacobian xấp xỉ Jf nửa liên tục trên ở trong một lân cận của x_0, và mỗi toán tử $A \in \overline{\mathrm{co}}Jf(x_0) \cup \mathrm{co}((Jf(x_0))_\infty \setminus \{0\})$ là tràn trên C tại x_0 đối với $f(x_0) + K$. Khi đó*

$$0 \in \mathrm{int}(f(C) + K). \tag{4.1}$$

Chứng minh. Đặt $P = I\!R^m$, $p_0 = 0$, $f(x,p) = f(x) - p$ $(x \in I\!R^n)$. Rõ ràng x_0 là nghiệm của hệ bất đẳng thức suy rộng

$$0 \in f(x) + K, \quad x \in C, \tag{4.2}$$

và $\{f(x,p), P, p_0\}$ là một nhiễu của (4.2) tại x_0. Vì $Jf(\cdot,p) := Jf(\cdot)$ là ánh xạ Jacobian xấp xỉ của $f(\cdot,p)$ với mỗi $p \in P$, từ giả thiết của định lý suy ra rằng $\{f(x,p), P, p_0\}$ là nhiễu chấp nhận được của (4.2) tại x_0 và (4.2) là chính quy tại x_0. Rõ ràng rằng, với mỗi $x \in I\!R^n$, $f(x,\cdot)$ là hàm liên tục trên P. Hơn thế,

$$\|f(x,p') - f(x,p)\| \leqslant \|p' - p\| \quad \forall p, p' \in P.$$

Áp dụng Định lý 5.3.1 cho hệ (4.2) ta tìm được lân cận U của $p_0 = 0$ và lân cận V của x_0 sao cho $G(p) := \{x \in C : p \in f(x) + K\} \cap V$ khác rỗng với mọi $p \in U$. Điều đó kéo theo $U \subset f(C \cap V) + K$, vì thế (4.1) nghiệm đúng. □

Định lý 5.4.2 (Định lý hàm ngược đa trị). *Dưới các giả thiết của Định lý 5.4.1, ánh xạ đa trị $p \mapsto G(p)$, ở đó $G(p) := \{x \in C : p \in f(x)+K\}$, là giả-Lipschitz tại $(0, x_0)$, và tồn tại $\mu > 0$ cùng với các lân cận U của $0 \in I\!R^m$ và V của x_0 sao cho*

$$d(x, G(p)) \leqslant \mu d(p, f(x) + K) \quad \text{với mọi } p \in U \text{ và } x \in V,$$

nghĩa là hàm ngược đa trị $G(\cdot)$ là chính quy mêtric tại $(0, x_0)$.

Chứng minh. Lấy $P = I\!R^m$, p_0, $f(x,p)$ như trong chứng minh trên. Áp dụng Định lý 5.3.2 và Định lý 5.3.3 cho hệ (4.2) với nhiễu chấp nhận được $\{f(x,p), P, p_0\}$ ta nhận được các kết luận mong muốn. □

Nếu $K = \{0\}$, thì Định lý 5.4.1 là trùng với định lý ánh xạ mở trong Jeyakumar và Luc (2002b). Ở đây ta phải giả thiết thêm rằng C là đóng. Nhận xét rằng trong phát biểu của Định lý 3.3 trong Jeyakumar và Luc (2002b) phải giả thiết rằng ánh xạ Jacobian xấp xỉ $Jf(\cdot)$ là nửa liên tục trên ở trong một lân cận của x_0, vì trong chứng minh của định lý đó có sử dụng quy tắc hàm hợp cho một điểm bất kỳ trong một lân cận của x_0. Jeyakumar và Luc (2002a) đã thu được một định lý ánh xạ mở dưới các giả thiết $C = I\!\!R^n$, $K = \{0\}$, và *mỗi phần tử* $A \in \overline{\text{co}}Jf(x_0) \cup \text{co}((Jf(x_0))_\infty \setminus \{0\})$ *là một toán tử khả nghịch.*

Định lý 5.4.2 mô tả một vài tính chất địa phương của hàm ngược đa trị của ánh xạ $x \mapsto f(x) + K$ đối với tập ràng buộc C. Trong trường hợp $K = \{0\}$, dưới giả thiết nói rằng mỗi phần tử $A \in \overline{\text{co}}Jf(x_0) \cup \text{co}((Jf(x_0))_\infty \setminus \{0\})$ là tràn trên C tại x_0, hàm ngược đa trị là chính quy mêtric tại $(0, x_0)$ và giả-Lipschitz tại $(f(x_0), x_0)$. Như đã nói ở cuối mục trước, đối với hàm ngược đa trị, hai tính chất đó là tương đương. Tính chính quy mêtric của hàm ngược đa trị đã được xét bởi Borwein and Zhuang (1988), Ioffe (2000), Journani (2000), Mordukhovich (1993, 1994d), Penot (1989), và nhiều tác giả khác (xem các tài liệu được trích dẫn trong Journani (2000) và Mordukhovich (1994d)).

Sử dụng Định lý 5.3.1 và định lý tách các tập lồi chúng ta dễ dàng thu được các điều kiện cần cực trị cho bài toán tối ưu

(4.3) Tìm cực tiểu $\varphi(x)$ với ràng buộc $x \in C,\ 0 \in f(x) + K,$

ở đó $\varphi : I\!\!R^n \to I\!\!R$ và $f : I\!\!R^n \to I\!\!R^m$ là các hàm liên tục, $C \subset I\!\!R^n$ và $K \subset I\!\!R^m$ là các tập lồi đóng khác rỗng. Giả sử rằng φ có ánh xạ dưới vi phân J-L $\partial^{\text{JL}}\varphi(\cdot)$, f có ánh xạ Jacobian xấp xỉ $Jf(\cdot)$. Trong trường hợp $K = I\!\!R^m$, nếu $x_0 \in C$ là nghiệm địa phương của (4.3) thì từ Mệnh đề 5.2.2 và định lý tách (xem Rudin (1991), Định lý 3.4) suy ra rằng

$$0 \in \overline{\text{co}}\partial^{\text{JL}}\varphi(x_0) + N_C(x_0).$$

Bay giờ ta xét trường hợp $K \neq I\!\!R^m$.

Định lý 5.4.3 (Điều kiện Fritz-John suy rộng). *Giả sử* $x_0 \in C$ *là nghiệm địa phương của* (4.3). *Giả sử các ánh xạ đa trị* $\partial^{\text{JL}}\varphi(\cdot)$ *và* $Jf(\cdot)$ *là nửa liên tục trên ở trong một lân cận của* x_0. *Khi đó tồn tại véctơ khác không* $(\lambda_0, \lambda) \in I\!\!R_+ \times (-(f(x_0) + K)^*)$, *véctơ* $x^* \in \overline{\text{co}}\partial^{\text{JL}}\varphi(x_0) \cup \text{co}((\partial^{\text{JL}}\varphi(x_0))_\infty \setminus \{0\})$, *và toán tử* $A \in \overline{\text{co}}Jf(x_0) \cup \text{co}((Jf(x_0))_\infty \setminus \{0\})$ *sao cho*

$$0 \in \lambda_0 x^* + A^*(\lambda) + N_C(x_0). \tag{4.4}$$

Nếu K *là hình nón, thì* $\lambda \in -K^*$ *và* $\langle \lambda, f(x_0) \rangle = 0$.

Chứng minh. Giả sử $x_0 \in C$ là một nghiệm địa phương của (4.3). Đặt $\widetilde{f}(x) = (\varphi(x) - \varphi(x_0), f(x))$ với mọi $x \in I\!\!R^n$. Dễ thấy rằng công thức

$J\widetilde{f}(x) = \partial^{\rm JL}\varphi(x) \times Jf(x)$ $(x \in I\!R^n)$ xác định một ánh xạ Jacobian xấp xỉ của $\widetilde{f}$. Chúng ta khẳng định rằng tồn tại $\widetilde{A} \in \overline{\rm co}J\widetilde{f}(x_0) \cup {\rm co}((J\widetilde{f}(x_0))_\infty \setminus \{0\})$ sao cho

$$0 \notin {\rm int}\left\{\widetilde{A}(T_C(x_0)) + \widetilde{f}(x_0) + \widetilde{K}\right\}, \tag{4.5}$$

ở đó $\widetilde{K} := R_+ \times K$. Thật vậy, ta có

$$0 \in \widetilde{f}(x_0) + \widetilde{K}, \quad x_0 \in C.$$

Vì x_0 là nghiệm địa phương của (4.3), nên không tồn tại dãy $\{x_k\} \subset C$ nào thỏa mãn điều kiện

$$0 \in \widetilde{f}(x_k) - q_k + \widetilde{K} \quad (\forall k),$$

ở đó $q_k := (-1/k, 0) \in I\!R \times I\!R^m$. Từ đó suy ra rằng, với mọi lân cận V của x_0, ánh xạ đa trị $q \mapsto \widetilde{G}(q) \cap V$ ở đó

$$\widetilde{G}(q) = \{x \in C : 0 \in \widetilde{f}(x) - q + K\} \quad (\forall q = (\alpha, p) \in I\!R \times I\!R^m),$$

không là nửa liên tục dưới tại $q_0 := (0, 0)$. Theo Định lý 5.3.1, hệ bất đẳng thức

$$0 \in \widetilde{f}(x) + \widetilde{K}, \quad x \in C$$

không thể chính quy tại x_0. Vì thế phải tồn tại

$$\widetilde{A} \in \overline{\rm co}J\widetilde{f}(x_0) \cup {\rm co}((J\widetilde{f}(x_0))_\infty \setminus \{0\})$$

thỏa (4.5). Do định lý tách các tập lồi, từ (4.5) suy ra sự tồn tại véctơ khác không $(\lambda_0, \lambda) \in I\!R \times I\!R^m$ thỏa

$$\langle(\lambda_0, \lambda), w\rangle \geqslant 0 \quad \forall w \in \widetilde{A}(T_C(x_0)) + \widetilde{f}(x_0) + \widetilde{K}. \tag{4.6}$$

Đặt $\widetilde{A} = (x^*, A)$, ở đó $x^* \in \overline{\rm co}\partial^{\rm JL}\varphi(x_0) \cup {\rm co}((\partial^{\rm JL}\varphi(x_0))_\infty \setminus \{0\})$, và $A \in \overline{\rm co}Jf(x_0) \cup {\rm co}((Jf(x_0))_\infty \setminus \{0\})$. Từ (4.6) suy ra rằng $\lambda_0\alpha \geqslant 0$ với mọi $\alpha \geqslant 0$ và $\langle\lambda, w\rangle \geqslant 0$ với mọi $w \in f(x_0)+K$. Do đó $(\lambda_0, \lambda) \in I\!R_+ \times (-(f(x_0)+K)^*)$. Vì $0 \in \widetilde{f}(x_0) + \widetilde{K}$, (4.6) cũng kéo theo

$$\langle(\lambda_0, \lambda), w\rangle \geqslant 0 \quad \forall w \in \widetilde{A}(T_C(x_0)),$$

vậy (4.4) nghiệm đúng. Nếu K là hình nón, thì bao hàm thức $\lambda \in -(f(x_0)+K)^*$ kéo theo $\lambda \in -K^*$ và $\langle\lambda, f(x_0)\rangle = 0$. Định lý đã được chứng minh. □

Nếu $C = I\!R^n$ và $K = I\!R^s_+ \times \{0\}_{m-s}$, ở đó $0 \leqslant s \leqslant m$, thì Định lý 5.4.3 mô tả quy tắc nhân tử trong Jeyakumar và Luc (2002b; Định lý 5.1). Các quy tắc nhân tử Lagrange khác, có sử dụng khái niệm Jacobian suy rộng, đã được thiết lập bởi Luc (2003), Wang và Jeyakumar (2000).

Định lý 5.4.4 (Điều kiện Kuhn-Tucker suy rộng). *Giả sử $x_0 \in C$ là nghiệm địa phương của* (4.3). *Giả sử rằng các ánh xạ đa trị $\partial^{\mathrm{JL}}\varphi(\cdot)$ và $Jf(\cdot)$ là nửa liên tục trên ở trong một lân cận của x_0. Nếu điều kiện chính quy* (2.5) *được thỏa mãn, thì tồn tại $\lambda \in -(f(x_0)+K)^*$, $x^* \in \overline{\mathrm{co}}\partial^{\mathrm{JL}}\varphi(x_0) \cup \mathrm{co}((\partial^{\mathrm{JL}}\varphi(x_0))_\infty \setminus \{0\})$, và $A \in \overline{\mathrm{co}}Jf(x_0) \cup \mathrm{co}((Jf(x_0))_\infty \setminus \{0\})$ sao cho*

$$0 \in x^* + A^*(\lambda) + N_C(x_0). \tag{4.7}$$

Nếu K là hình nón, thì $\lambda \in -K^*$ và $\langle \lambda, f(x_0) \rangle = 0$.

Chứng minh. Giả sử $x_0 \in C$ là nghiệm địa phương của (4.3). Theo Định lý 5.4.3, tồn tại véctơ khác không $(\lambda_0, \lambda) \in \mathbb{R}_+ \times (-(f(x_0)+K)^*)$, $x^* \in \overline{\mathrm{co}}\partial\varphi(x_0) \cup \mathrm{co}((\partial\varphi(x_0))_\infty \setminus \{0\})$, và $A \in \overline{\mathrm{co}}Jf(x_0) \cup \mathrm{co}((Jf(x_0))_\infty \setminus \{0\})$ sao cho (4.4) nghiệm đúng. Nếu $\lambda_0 = 0$ thì (4.4) và bao hàm thức $\lambda \in -(f(x_0)+K)^*$ kéo theo

$$\langle \lambda, Au + v \rangle \geqslant 0 \quad \forall (u,v) \in T_C(x_0) \times (f(x_0)+K).$$

Khi đó (2.5) không thể nghiệm đúng, vì rằng $\lambda \neq 0$. Vậy $\lambda_0 > 0$. Chia cả hai vế của (4.4) cho λ_0 và thay λ bởi $\lambda_0^{-1}\lambda$ nếu cần thiết, ta đi đến kết luận rằng (4.7) nghiệm đúng với $\lambda \in -(f(x_0)+K)^*$ nào đó. □

Nếu φ và f là các hàm Lipschitz địa phương, thì ta có thể chọn dưới vi phân suy rộng Clarke $\partial^{\mathrm{Cl}}\varphi(x)$ của φ tại x và Jacobian suy rộng Clarke $J^{\mathrm{Cl}}f(x)$ của f tại x tương ứng làm các tập $\partial^{\mathrm{JL}}\varphi(x)$ và $Jf(x)$. Trong trường hợp đó, quy tắc nhân tử Lagrange nói trên được phát biểu lại như sau.

Hệ quả 5.4.1. *Giả sử $x_0 \in C$ là nghiệm địa phương của* (4.3). *Giả sử φ và f là các hàm Lipschitz địa phương. Nếu điều kiện chính quy*

$$0 \in \mathrm{int}\,(A[T_C(x_0)] + f(x_0) + K) \quad \forall A \in \partial^{\mathrm{Cl}} f(x_0)$$

được thỏa mãn, thì tồn tại $\lambda \in -(f(x_0)+K)^*$, $x^* \in \partial^{\mathrm{Cl}}\varphi(x)$ và $A \in \partial^{\mathrm{Cl}} f(x_0)$ sao cho (4.7) *nghiệm đúng. Nếu K là nón, thì $\lambda \in -K^*$ và $\langle \lambda, f(x_0) \rangle = 0$.*

Chúng ta lưu ý rằng phương pháp chứng minh điều kiện Kuhn-Tucker cho bài toán tối ưu trơn có ràng buộc nón nhờ vào định lý về tính ổn định dựa trên khái niệm chính quy của Robinson đã được đề xuất bởi Craven (Craven (1978), tr. 60).

Bài tập 5.4.1. Hãy xây dựng một vài ví đơn giản minh họa cho các định lý 5.4.1-5.4.4 và Hệ quả 5.4.1. (*Gợi ý*: Có thể xét các bài toán tối ưu có tập ràng buộc là tập nghiệm của hệ đẳng thức/bất đẳng thức ở các mục 4.5 và 4.6; cho x đóng vai trò tham số p và y đóng vai trò biến x.)

5.5 Tính liên tục và tính Lipschitz của hàm giá trị tối ưu

Từ các Định lý 5.3.1 và 5.3.3 chúng ta có thể dẫn ra các điều kiện đủ cho tính liên tục và tính Lipschitz địa phương của hàm giá trị tối ưu trong bài toán tối ưu có tham số.

Giả sử C, K, P được cho như ở Mục 5.4. Giả sử $f : I\!R^n \times P \to I\!R^m$ và $\varphi : I\!R^n \times P \to I\!R$ là các hàm liên tục. Giả sử rằng với mỗi $p \in P$, hàm $f(\cdot, p)$ có ánh xạ Jacobian xấp xỉ $J_1 f(\cdot, p)$ nửa liên tục trên ở trong $I\!R^n$. Xét bài toán tối ưu phụ thuộc tham số $p \in P$:

(5.1) Tìm cực tiểu $\varphi(x, p)$ với ràng buộc $x \in C, \;\; 0 \in f(x, p) + K.$

Ký hiệu tập ràng buộc, giá trị tối ưu, và tập nghiệm của (5.1) tương ứng bởi $G(p), \; \nu(p)$, và $Q(p)$.

Định lý 5.5.1 (Tính liên tục của hàm giá trị tối ưu). *Giả sử rằng*

(a) *tồn tại tập compắc $\Sigma \subset I\!R^n$ sao cho $Q(p) \cap \Sigma \neq \emptyset$ với mọi p trong một lân cận của p_0;*

(b) *tồn tại $x_0 \in Q(p_0) \cap \Sigma$ sao cho ánh xạ $(x, p) \mapsto J_1 f(x, p)$ là nửa liên tục trên tại (x_0, p_0) và*

$$\begin{aligned} &0 \in \mathrm{int}\{A[T_C(x_0)] + f(x_0, p_0) + K\} \\ &\quad \forall A \in \overline{\mathrm{co}} J_1 f(x_0, p_0) \cup \mathrm{co}((J_1(f(x_0, p_0))_\infty \setminus \{0\})). \end{aligned} \tag{5.2}$$

Khi đó, ν là liên tục tại p_0.

Chứng minh. Đầu tiên ta chứng minh rằng ν là nửa liên tục dưới tại p_0. Giả sử phản chứng rằng tồn tại $\varepsilon > 0$ và dãy $p_i \to p_0$ sao cho

$$\nu(p_i) \leqslant \nu(p_0) - \varepsilon. \tag{5.3}$$

Do điều kiện (a), với i đủ lớn ta chọn được

$$x_i \in Q(p_i) \cap \Sigma.$$

Vì Σ là compắc và ánh xạ $G(\cdot)$ là đóng, ta có thể giả sử rằng

$$x_i \to \bar{x} \in G(p_0) \cap \Sigma.$$

Từ (5.3) suy ra rằng

$$\varphi(x_i, p_i) = \nu(p_i) \leqslant \nu(p_0) - \varepsilon.$$

Cho $i \to \infty$, từ đó ta có

$$\varphi(\bar{x}, p_0) \leqslant \nu(p_0) - \varepsilon,$$

mâu thuẫn với việc $\nu(p_0)$ là giá trị tối ưu của (5.1) ứng với giá trị tham số $p = p_0$.

Bây giờ ta đi chứng minh rằng ν là nửa liên tục trên tại p_0. Do tính liên tục của φ, tồn tại lân cận V_ε của x_0 và lân cận U_ε của p_0 sao cho

$$|\varphi(x,p) - \varphi(x_0, p_0)| \leqslant \varepsilon, \tag{5.4}$$

với mọi $(x,p) \in V_\varepsilon \times U_\varepsilon$. Sử dụng (b) ta có thể áp dụng Định lý 5.3.1 để chỉ ra một lân cận U của p_0 sao cho $U \subset U_\varepsilon$ và, với mỗi $p \in U$, tồn tại véctơ $x(p) \in G(p) \cap V_\varepsilon$. Để ý đến (5.4), ta có

$$\nu(p) \leqslant \varphi(x(p), p) \leqslant \varphi(x_0, p_0) + \varepsilon, \quad \forall p \in U.$$

Vì vậy,

$$\limsup_{p \to p_0} \nu(p) \leqslant \varphi(x_0, p_0) + \varepsilon.$$

Vì $\varepsilon > 0$ có thể chọn nhỏ tùy ý, ta có

$$\limsup_{p \to p_0} \nu(p) \leqslant \varphi(x_0, p_0) = \nu(p_0).$$

Chứng minh kết thúc. □

Định lý 5.5.2 (Tính Lipschitz địa phương của hàm giá trị tối ưu). *Giả sử φ là Lipschitz địa phương ở trên $\mathbb{R}^n \times P$. Giả sử rằng điều kiện* (a) *và điều kiện sau được thỏa mãn:*

(c) *với mỗi $x_0 \in Q(p_0) \cap \Sigma$, ánh xạ đa trị $(x,p) \mapsto J_1 f(x,p)$ là nửa liên tục trên tại (x_0, p_0), tồn tại $k > 0$ và các lân cận U_0 của p_0 và V_0 của x_0 sao cho* (3.22) *nghiệm đúng.*

Khi đó, ν là Lipschitz địa phương tại p_0.

Chứng minh. Đặt

$$\Sigma_1 := (Q(p_0) \cap \Sigma) \times \{p_0\}.$$

Vì $Q(p)$ là đóng với mọi p, nên Σ_1 là tập compắc. Ta đi chứng minh rằng tồn tại $\ell > 0$ và tập mở Ω chứa Σ_1 sao cho

$$|\varphi(x', p') - \varphi(x, p)| \leqslant \ell(\|x' - x\| + \|p' - p\|) \tag{5.5}$$

với mọi (x,p) và (x', p') thuộc Ω. Nhận xét rằng tập

$$E := \mathrm{co}\,(Q(p_0) \cap \Sigma)$$

là lồi, compắc. Với mỗi $\bar{x} \in E$, tồn tại $\ell_{\bar{x}} > 0$, lân cận $V_{\bar{x}}$ của $\bar{x}$ và lân cận $U_{\bar{x}}$ thỏa mãn

$$(5.6)\quad |\varphi(x',p')-\varphi(x,p)| \leqslant \ell_{\bar{x}}(\|x'-x\|+\|p'-p\|), \quad \forall x, x' \in V_{\bar{x}},\ p, p' \in U_{\bar{x}}.$$

Vì E là compắc, tồn tại $x_1, \ldots, x_q \in E$ sao cho

$$E \subset \bigcup \{V_{x_i} \,:\, i = 1, \ldots, q\}.$$

Chọn $\rho > 0$ sao cho

$$\tilde{V} := E + B(0,\rho) \subset \bigcup \{V_{x_i} \,:\, i = 1, \ldots, q\}.$$

Đặt

$$\tilde{U} := \bigcap \{U_{x_i} \,:\, i = 1, \ldots, q\}, \quad \Omega := \tilde{V} \times \tilde{U},$$
$$\ell := \max \{\ell_{x_i}\ i = 1, \ldots, q\}.$$

Rõ ràng Ω là tập mở chứa Σ_1. Giả sử $(x,p), (x',p') \in \Omega$. Vì $\tilde{V}$ là lồi, nên $[x,x'] \subset \tilde{V}$. Do đó,

$$[x,x'] \subset \bigcup \{V_{x_i} \,:\, i = 1, \ldots, q\}$$

và tồn tại dãy điểm $a_0 := x, a_1, a_2, \ldots, a_s := x'$ thuộc đoạn thẳng $[x,x']$ sao cho với mỗi $j \in \{0, 1, \ldots, s-1\}$ tồn tại $i \in \{1, \ldots, q\}$ thỏa mãn điều kiện $[a_j, a_{j+1}] \subset V_{x_i}$. Từ (5.6) ta suy ra rằng

$$\begin{aligned}
&|\varphi(x,p) - \varphi(x',p')| \\
&\leqslant |\varphi(a_0,p) - \varphi(a_1,p)| \\
&\quad + |\varphi(a_1,p) - \varphi(a_2,p)| + \cdots + |\varphi(a_{s-1},p) - \varphi(a_s,p')| \\
&\leqslant \ell(\|a_0 - a_1\| + \|a_1 - a_2\| + \cdots + \|a_{s-1} - a_s\| + \|p - p'\|) \\
&= \ell(\|x - x'\| + \|p - p'\|).
\end{aligned}$$

Như vậy, ta đã thu được (5.5). Tiếp theo, để ý rằng ánh xạ đa trị $p \mapsto Q(p) \cap \Sigma$ là nửa liên tục trên tại p_0. Thật vậy, trước hết ta chứng minh rằng $p_i \to p_0$, $x_i \to \bar{x}$ và

$$x_i \in Q(p_i) \cap \Sigma, \quad \forall i \in I\!N,$$

thì $\bar{x} \in Q(p_0) \cap \Sigma$. Vì $\nu(p_i) = \varphi(x_i, p_i)$ và ν liên tục tại p_0 theo Định lý 5.5.1, nên $v(p_0) = \varphi(\bar{x}, p_0)$. Ngoài ra, tính đóng của $G(\cdot)$ kéo theo $\bar{x} \in G(p_0)$. Vì vậy, $\bar{x} \in Q(p_0) \cap \Sigma$. Từ tính chất vừa được chứng minh suy ra rằng ánh xạ $p \mapsto Q(p) \cap \Sigma$ là nửa liên tục trên tại p_0. Thật vậy, giả sử phản chứng: tồn tại tập mở $W \subset I\!R^n$, $Q(p_0) \cap \Sigma \subset W$, và tồn tại dãy $p_i \to p_0$ sao cho

$$(G(p_i) \cap \Sigma) \cap (I\!R^n \setminus W) \neq \emptyset.$$

Khi đó, với mỗi $i \in I\!N$ lấy một điểm $x_i \in (G(p_i) \cap \Sigma) \cap (I\!R^n \setminus W)$. Do Σ là compắc và $I\!R^n \setminus W$ là tập đóng, bằng cách xét dãy con (nếu cần), ta có thể giả sử rằng $x_i \to \bar{x} \in I\!R^n \setminus W$. Vậy $\bar{x} \notin W$. Điều đó mâu thuẫn với tính chất $\bar{x} \in Q(p_0) \cap \Sigma$ đã được chứng minh ở trên.

Với mỗi $z \in Q(p_0) \cap \Sigma$, do giả thiết (c) và do Định lý 5.3.3, tồn tại $k_z > 0$, $\delta_z > 0$, các lân cận V_z của z và U_z của p_0 sao cho $(V_z + \delta_z B) \times U_z \subset \Omega$ và

$$G(p) \cap V_z \subset G(p') + k_z \|p - p'\| \bar{B}_{I\!R^n}, \quad \forall p, p' \in U_z. \tag{5.7}$$

Do $Q(p_0) \cap \Sigma$ là compắc, tồn tại $z_1, \ldots, z_q \in Q(p_0) \cap \Sigma$ sao cho

$$Q(p_0) \cap \Sigma \subset \bigcup \{V_{z_i} \,:\, i = 1, \ldots, q\}.$$

Đặt

$$\begin{aligned}
&\bar{k} := \max\left\{k_{z_1}, \ldots, k_{z_q}\right\}, \quad \delta := \{\delta_{z_i} \,:\, i = 1, \ldots, q\}, \\
&V := \bigcup \{V_{z_i} \,:\, i = 1, \ldots, q\}, \\
&U := \bigcap \{U_{z_i} \,:\, i = 1, \ldots, q\}.
\end{aligned}$$

Do (a), ta có thể giả sử rằng

$$Q(p) \cap \Sigma \neq \emptyset, \quad \forall p \in U.$$

Rõ ràng $V \times U \subset \Omega$.

Như ta đã chỉ ra ở trên, ánh xạ $p \mapsto Q(p) \cap \Sigma$ là nửa liên tục trên tại p_0; vì vậy tồn tại lân cận $U_1 \subset U$ của p_0 sao cho

$$Q(p) \cap \Sigma \subset V, \quad \forall p \in U_1. \tag{5.8}$$

Hơn thế, ta có thể giả sử rằng

$$\bar{k}\|p - p'\| \leqslant \delta, \quad \forall p, p' \in U_1. \tag{5.9}$$

Bây giờ lấy tùy ý $p, p' \in U_1$. Nếu $\bar{x} \in Q(p) \cap \Sigma$, thì ta có $\nu(p) = \varphi(\bar{x}, p)$. Từ (5.8) suy ra rằng có thể chọn được $i \in \{1, \ldots, q\}$ sao cho

$$\bar{x} \in (Q(p) \cap \Sigma) \cap V_{z_i}.$$

Vì thế, do (5.7), tồn tại $x' \in G(p')$ sao cho

$$\|\bar{x} - x'\| \leqslant \bar{k}\|p - p'\|. \tag{5.10}$$

Sử dụng (5.9) ta thu được

$$x' \in \bar{x} + \delta \bar{B}_{I\!R^n} \subset V_{z_i} + \delta_{z_i} \bar{B}_{I\!R^n}.$$

Do đó $(x', p') \in \Omega$. Sử dụng (5.5) và (5.10) ta có

$$\begin{aligned}\nu(p') - \nu(p) &\leqslant \varphi(x', p') - \varphi(\bar{x}, p)\\ &\leqslant \ell(\|x' - \bar{x}\| + \|p' - p\|)\\ &\leqslant \ell(\bar{k}\|p' - p\| + \|p' - p\|)\\ &= \ell(\bar{k} + 1)\|p' - p\|.\end{aligned}$$

Tương tự,

$$\nu(p) - \nu(p') \leqslant \ell(\bar{k} + 1)\|p' - p\|.$$

Vậy $\nu(\cdot)$ là Lipschitz địa phương tại p_0. □

Mệnh đề sau mô tả một tình huống thường gặp, ở đó điều kiện (a) được thỏa mãn.

Mệnh đề 5.5.1. *Giả sử rằng*

(d) *tồn tại* $x_0 \in Q(p_0)$ *sao cho ánh xạ đa trị* $(x, p) \mapsto J_1 f(x, p)$ *là nửa liên tục trên tại* (x_0, p_0) *và điều kiện* (5.2) *nghiệm đúng.*

Nếu

(5.11) $$\liminf_{\|x\| \to +\infty;\ p \to p_0} \varphi(x, p) > \varphi(x_0, p_0),$$

hoặc là

(5.12) $$\lim_{\|x\| \to +\infty;\ p \to p_0} \varphi(x, p) = +\infty,$$

thì điều kiện (a) *được thỏa mãn.*

Chứng minh.

Rõ ràng (5.12) kéo theo (5.11). Nếu (5.11) thỏa mãn, thì tồn tại $\rho > 0,\ \lambda > 0$ và lân cận U_0 của p_0 sao cho

(5.13) $$\varphi(x, p) \geqslant \varphi(x_0, p_0) + \rho$$

với mọi (x, p) thỏa mãn $\|x\| > \lambda,\ p \in U_0$. Do điều kiện (d), Định lý 5.3.1 áp dụng được. Vì thế, với mỗi lân cận V của x_0, tồn tại lân cận $U \subset U_0$ của p_0 sao cho

$$G(p) \cap V \neq \emptyset \quad \forall p \in U.$$

Ngoài ra, có thể chọn V và U sao cho

(5.14) $$\varphi(x, p) < \varphi(x_0, p_0) + \rho \quad \forall (x, p) \in V \times U.$$

Đặt

$$\Sigma := \{x \in \mathbb{R}^n \, : \, \|x\| \leqslant \lambda\}.$$

Vì với mỗi $p \in U$ tồn tại $x(p) \in G(p) \cap V$, nên (5.14) kéo theo

$$\varphi(x(p), p) < \varphi(x_0, p_0) + \rho.$$

Kết hợp điều này với (5.13), ta thu được

$$Q(p) \subset \Sigma \quad \forall p \in U.$$

Thêm vào đó, vì $G(p)$ là đóng và φ là liên tục, nên giá trị tối ưu

$$\nu(p) := \inf\{\varphi(x, p) \,:\, x \in G(p) \cap \Sigma\}$$

đạt được tại một điểm $x \in G(p) \cap \Sigma$ nào đó. Điều đó chứng tỏ rằng $Q(p)$ khác rỗng với mọi $p \in U$. Tính chất (a) đã được thiết lập. $\square$

Nhận xét 5.5.1. Điều kiện (5.11) có thể được xem là dấu hiệu ổn định cơ bản của hàm mục tiêu. Nếu nó nghiệm đúng, thì hầu như ta có thể tin rằng hàm giá trị tối ưu $\nu(p)$ là liên tục tại p_0. Nếu nó bị vi phạm, thì ta phải tìm một dấu hiệu ổn định khác ở tập ràng buộc. Cụ thể là, nếu tồn tại tập compắc $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ sao cho $G(p) \subset \Sigma$ với mọi p trong một lân cận của p_0 và nếu điều kiện (b) được thỏa mãn, thì ν là liên tục tại p_0 theo Định lý 5.5.1. Đặc biệt, ta có thể lấy $\Sigma = C$, nếu C là tập lồi compắc.

Nhận xét 5.5.2. Bằng cách sử dụng các lược đồ đề xuất bởi Borwein (1986), từ các định lý 5.3.1–5.3.3 ta có thể dẫn ra các công thức tính nón tiếp tuyến của các tập đóng và tính đạo hàm theo hướng của hàm giá trị tối ưu.

Bài tập 5.5.1. Hãy xây dựng một vài ví dụ đơn giản minh họa cho Định lý 5.5.1, Định lý 5.5.2 và Mệnh đề 5.5.1. (*Gợi ý*: Có thể xét các bài toán tối ưu có tập ràng buộc là tập nghiệm của hệ đẳng thức/bất đẳng thức ở các mục 4.5 và 4.6; cho x đóng vai trò tham số p và y đóng vai trò biến x.)

5.6 Chứng minh Mệnh đề 5.2.1

Mục này trình bày chứng minh Mệnh đề 5.2.1. Chúng ta sẽ sử dụng bổ đề sau.

***Bổ đề* 5.6.1** (xem Jeyakumar và Luc (2002a)). *Cho $F : I\!\!R^n \rightrightarrows I\!\!R^s$ là ánh xạ đa trị nửa liên tục trên tại $x_0 \in I\!\!R^n$. Giả sử $t_i > 0$ hội tụ đến 0, $q_i \in \overline{\text{co}}F(x_0 + t_i\bar{B}_{I\!\!R^n})$ với $\lim_{i\to\infty} \|q_i\| = \infty$ và $\lim_{i\to\infty} q_i/\|q_i\| = q_*$ với $q_* \in I\!\!R^s$. Khi đó $q_* \in (\text{co}\, F(x_0))_\infty$. Ngoài ra, nếu $\text{co}(F(x_0))_\infty$ là nón nhọn*[13]*, thì $q_* \in \text{co}(F(x_0))_\infty = (\text{co}F(x_0))_\infty$.*

[13]Hình nón M được gọi là *nón nhọn* nếu $M \cap (-M) = \{0\}$.

Chứng minh. Do tính nửa liên tục trên của F tại x_0, với mỗi $\varepsilon > 0$, tồn tại i_0 đủ lớn sao cho

$$F(x_0 + t_i \bar{B}_{I\!R^n}) \subset F(x_0) + \varepsilon \bar{B}_{I\!R^s} \quad \text{với mọi} \quad i \geqslant i_0.$$

Vì vậy,

$$q_i \in \overline{\text{co}}(F(x_0) + \varepsilon \bar{B}_{I\!R^s}) \subset \text{co}(F(x_0) + \varepsilon \bar{B}_{I\!R^s}) + \varepsilon \bar{B}_{I\!R^s} \quad \text{với mọi} \quad i \geqslant i_0.$$

Suy ra

$$\begin{aligned} q_* \in [\text{co}(F(x_0) + \varepsilon \bar{B}_{I\!R^s}) + \varepsilon B(0,1)]_\infty &\subset [\text{co}(F(x_0) + \varepsilon \bar{B}_{I\!R^s})]_\infty \\ &\subset (\text{co}F(x_0))_\infty. \end{aligned}$$

Bao hàm thức $\text{co}(F(x_0))_\infty \subset (\text{co}F(x_0))_\infty$ luôn nghiệm đúng vì $F(x_0) \subset \text{co}F(x_0)$ và $(\text{co}F(x_0))_\infty$ là nón lồi đóng. Bây giờ chúng ta chứng minh bao hàm thức ngược lại. Giả sử $p \in (\text{co}F(x_0))_\infty$, $p \neq 0$. Theo định lý Caratheodory (xem Rockafellar (1970)), tồn tại các tổ hợp lồi $p_i = \sum_{j=1}^{s+1} \lambda_{ij} p_{ij}$ với $\lambda_{ij} \geqslant 0$, $p_{ij} \in F(x_0)$ và $\sum_{j=1}^{s+1} \lambda_{ij} = 1$ sao cho

$$p/\|p\| = \lim_{i\to\infty} p_i/\|p_i\| \quad \text{và} \quad \lim_{i\to\infty} \|p_i\| = \infty.$$

Không giảm tổng quát ta có thể giả sử rằng $\lim\limits_{i\to\infty} \lambda_{ij} = \lambda_j \geqslant 0$ với $j = 1, \ldots, s+1$ và $\sum\limits_{j=1}^{s+1} \lambda_j = 1$. Với mỗi j, xét dãy $\{\lambda_{ij} p_{ij}/\|p_i\|\}_{i\geqslant 1}$. Chúng ta khẳng định rằng dãy này là giới nội, vì thế có thể giả sử rằng nó hội tụ đến một phần tử $p_{0j} \in (F(x_0))_\infty$. Nếu điều đó đúng với mỗi chỉ số j, thì ta có $p = \sum\limits_{j=1}^{s+1} p_{0j} \in \text{co}(F(x_0))_\infty$, đó là điều phải chứng minh. Để chứng minh khẳng định nói trên, ta giả sử phản chứng rằng $\{\lambda_{ij} p_{ij}/\|p_i\|\}_{i\geqslant 1}$ là không giới nội. Đặt $a_{ij} = \lambda_{ij} p_{ij}/\|p_i\|$. Bằng cách lấy dãy con (nếu cần thiết), chúng ta có thể giả sử rằng

$$\|a_{ij_0}\| = \max\{\|a_{ij}\| : j = 1, \ldots, s+1\}$$

với mỗi i. Vì vậy, $\lim_{i\to\infty} \|a_{ij_0}\| = \infty$. Do $p_i/\|p_i\| = \sum_{j=1}^{s+1} a_{ij}$, ta có

$$0 = \lim_{i\to\infty} p_i/(\|p_i\|.\|a_{ij_0}\|) = \lim_{i\to\infty} \sum_{j=1}^{s+1} a_{ij}/\|a_{ij_0}\|.$$

Chúng ta lại có thể giả sử rằng $\{a_{ij}/\|a_{ij_0}\|\}_{i\geqslant 0}$ hội tụ đến một phần tử $a_{0j} \in (F(x_0))_\infty$ với $j = 1, \ldots, s+1$ vì rằng các dãy là giới nội. Vì $a_{0j_0} \neq 0$, đẳng thức $0 = \sum_{j=1}^{s+1} a_{0j}$ chứng tỏ rằng $\mathrm{co}(F(x_0))_\infty$ không phải là nón nhọn, mâu thuẫn. $\square$

Sử dụng Bổ đề 5.6.1, bây giờ ta sẽ chứng minh Mệnh đề 5.2.1 - một trường hợp riêng của Định lý 4.1 trong Jeyakumar và Luc (2002a).

Chứng minh Mệnh đề 5.2.1:

Chúng ta muốn chỉ ra rằng với mọi $u \in I\!R^n$ và $\alpha \in I\!R$,

$$(\alpha g \circ f)^+(\bar{x}, u) \leqslant \sup_{q \in Q} (\alpha p_0 q u), \tag{6.1}$$

ở đó $p_0 = g'(f(\bar{x}))$ và $Q := Jf(\bar{x}) + (Jf(\bar{x}))^{\varepsilon}_{\infty}$. Vì (6.1) là hiển nhiên trong trường hợp $u = 0$ hay $\alpha = 0$, ta giả sử rằng $u \neq 0$ và $\alpha \neq 0$. Giả sử $t_i > 0$ là dãy số hội tụ tới 0 sao cho

$$(\alpha g \circ f)^+(\bar{x}, u) = \lim_{i \to \infty} \frac{\alpha(g(f(\bar{x} + t_i u)) - g(f(\bar{x}))}{t_i}. \tag{6.2}$$

Từ định lý giá trị trung bình (xem Jeyakumar và Luc (1999), Hệ quả 5.1) suy ra rằng, với mỗi t_i, tồn tại $p_i \in \overline{\mathrm{co}}\, g'([f(\bar{x}), f(\bar{x}+t_i u)])$ và $q_i \in \overline{\mathrm{co}}\, Jf([\bar{x}, \bar{x}+t_i u])$ sao cho

$$\begin{cases} f(\bar{x} + t_i u) - f(\bar{x}) = t_i q_i u, \\ g(f(\bar{x} + t_i u)) - g(f(\bar{x})) = p_i(f(\bar{x} + t_i u) - f(\bar{x})). \end{cases} \tag{6.3}$$

Do giả thiết của chúng ta, $\lim\limits_{i \to \infty} p_i = p_0$. Bằng cách xét một dãy con (nếu cần thiết), ta chỉ phải khảo sát hai trường hợp sau:

(a) $\{q_i\}$ hội tụ đến một véctơ q_0 nào đó;

(b) $\lim_{i \to \infty} \|q_i\| = \infty$ với $\{q_i / \|q_i\|\}$ hội tụ đến một q_* nào đó.

Từ (6.2) và (6.3) suy ra rằng

$$(\alpha g \circ f)^+(\bar{x}, u) = \lim_{i \to \infty} (\alpha p_i q_i u).$$

Trong trường hợp (a), do tính nửa liên tục trên của Jf tại $\bar{x}$, ta có $q_0 \in \overline{\mathrm{co}} Jf(\bar{x})$. Vì vậy,

$$(\alpha g \circ f)^+(\bar{x}, u) = \alpha p_0 q_0 u \leqslant \sup_{q \in Q} (\alpha p_0 q u).$$

Xét trường hợp (b). Do Bổ đề 5.6.1, $q_* \in (\mathrm{co} Jf(\bar{x}))_\infty$. Nếu $\mathrm{co}(Jf\bar{x}))_\infty$ là không nhọn, thì dễ thấy rằng $\mathrm{co}(J(f(\bar{x}))^{\varepsilon}_{\infty}$ trùng với toàn không gian $L(I\!R^n, I\!R^m)$. Vì $u \neq 0$, tính chất đó và giả thiết $p_0 \neq 0$ kéo theo

$$\sup_{q \in Q} (\alpha p_0 q u) \geqslant \sup_{q \in L(I\!R^n, I\!R^m)} (\alpha p_0 q u) = +\infty,$$

vì thế (6.1) nghiệm đúng. Nếu hình nón $\text{co}(Jf(\bar{x}))_\infty$ là nhọn, thì theo Bổ đề 5.6.1 nó chứa q_*. Đặt $\beta := \alpha p_0 q_* u$. Nếu $\beta > 0$, thì từ sự kiện $\lambda q_* \in \text{co}(Jf(\bar{x}))_\infty$ với mọi $\lambda \geqslant 0$ ta rút ra quan hệ sau:

$$\sup_{q\in Q}(\alpha p_0 qu) \geq \sup_{q\in q_r+\text{co}(Jf(\bar{x}))^\varepsilon_\infty}(\alpha p_0 qu) \geqslant \limsup_{\lambda\to\infty}(\alpha p_0(q_r+\lambda q_*)u) \geqslant +\infty,$$

ở đó q_r là một phần tử tùy ý của $Jf(\bar{x})$. Quan hệ đó kéo theo (6.1).

Nếu $\beta < 0$ thì với i đủ lớn, ta có

$$\alpha p_i \frac{q_i}{\|q_i\|} u < \frac{\beta}{2} < 0.$$

Do đó,

$$(\alpha g \circ f)^+(\bar{x}, u) = \lim_{i\to\infty}(\alpha p_i q_i u) \leqslant \lim_{i\to\infty} \|q_i\|.\frac{\beta}{2} = -\infty.$$

Điều đó chứng tỏ rằng (6.1) nghiệm đúng.

Bây giờ ta giả sử rằng $\beta = 0$. Từ bao hàm thức $q_* \in \text{co}(Jf(\bar{x}))_\infty$ và từ định nghĩa của tập hợp $\text{co}(Jf(\bar{x}))^\varepsilon_\infty = (\text{co}(Jf(\bar{x}))_\infty)^\varepsilon$ suy ra rằng

$$q_* \in \text{int}(\text{co}(Jf(\bar{x}))^\varepsilon_\infty).$$

Chúng ta khẳng định rằng tồn tại $q_1 \in \text{co}(Jf(\bar{x}))^\varepsilon_\infty$ sao cho

$$\alpha p_0 q_1 u > 0. \tag{6.4}$$

Thật vậy, xét phiếm hàm tuyến tính $\phi : L(I\!R^n, I\!R^m) \to I\!R$ được xác định bằng cách đặt $\phi(q) = \alpha p_0 qu$ với mọi $q \in L(I\!R^n, I\!R^m)$. Nếu khẳng định của chúng ta không đúng, thì $\phi(q) \leqslant 0$ với mọi $q \in \text{co}(Jf(\bar{x}))^\varepsilon_\infty$. Vì $\phi(q_*) = \beta = 0$ và $q_* \in \text{int}(\text{co}(Jf(\bar{x}))^\varepsilon_\infty)$, ta kết luận rằng $\phi = 0$. Vì $u \neq 0$ và $p_0 \neq 0$, tồn tại $\overline{q} \in L(I\!R^n, I\!R^m)$ sao cho $\overline{q}u$ không thuộc vào nhân của phiếm hàm p_0. Khi đó ta có $\alpha p_0 \overline{q} u \neq 0$. Điều đó không thể xảy ra bởi vì $\phi = 0$. Khẳng định của chúng ta đã được chứng minh. Cố định một phần tử $q_r \in Jf(\bar{x})$. Từ (6.4) ta suy ra rằng

$$\sup_{q\in Q}(\alpha p_0 qu) \geqslant \sup_{q\in q_r+\text{co}(Jf(\bar{x}))^\varepsilon_\infty}(\alpha p_0 qu) \geqslant \lim_{\lambda\to\infty}(\alpha p_0(q_r+\lambda q_1)u) \geqslant +\infty;$$

vì vậy (6.1) nghiệm đúng. □

5.7 Dưới vi phân Mordukhovich và dưới vi phân J-L

Quan hệ giữa khái niệm Jacobian xấp xỉ theo nghĩa Jeyakumar-Luc của hàm véctơ trong không gian Euclide hữu hạn chiều và khái niệm đối đạo hàm theo nghĩa Mordukhovich sẽ được xét trong mục sau. Mục này đưa ra một số khái niệm và kết quả bổ trợ, đồng thời khảo sát mối quan hệ giữa khái niệm dưới vi phân J-L (một trường hợp đặc biệt của Jacobian xấp xỉ) và dưới vi phân Mordukhovich (là giá trị của đối đạo hàm theo nghĩa Mordukhovich của *ánh xạ đa trị trên-đồ-thị* của hàm số đã cho tại điểm $y^* = 1$).

Kết quả khảo sát ở mục này và mục sau chứng tỏ một cách rõ ràng là đối đạo hàm và Jacobian xấp xỉ là những khái niệm rất khác nhau. Chúng có rất ít điểm chung. Từ những bài báo được trích dẫn ở danh mục tài liệu tham khảo ở cuối sách này có thể thấy rằng những khái niệm đó đòi hỏi những phương pháp khác nhau và chúng cho kết quả dưới dạng rất khác nhau. Tóm lại, hai khái niệm đó dẫn đến hai lý thuyết vi phân rất khác nhau.

Vai trò quan trọng của *đạo hàm đa trị* của các hàm số và ánh xạ đa trị đã được công nhận rộng rãi (xem Aubin và Ekeland (1984), Aubin và Frankowska (1990), Mordukhovich (1994c), Rockafellar và Wets (1998)). Các loại đạo hàm xây dựng qua nón tiếp tuyến đã xét ở Chương 2 đều là đạo hàm đa trị.

Đối đạo hàm theo nghĩa Mordukhovich là một loại đạo hàm đa trị được mô tả bằng các biến đối ngẫu[14]. Những kết quả nghiên cứu của B. S. Mordukhovich và các tác giả khác đã chứng tỏ rằng khái niệm này rất hữu ích cho sự phát triển của giải tích không trơn và các ứng dụng khác nhau (xem Mordukhovich (2006a,b) và các tài liệu dẫn trong đó[15]). Đối đạo hàm cho phép ta đặc trưng tính mở, tính chính quy mêtric, và các tính chất Lipschitz của ánh xạ đa trị (xem Mordukhovich (1993)). Các ứng dụng của đối đạo hàm trong lý thuyết ổn định và độ nhậy nghiệm của các bài toán tối ưu có thể xem trong Mordukhovich (1994a,c,d). Để định nghĩa Mordukhovich đối đạo hàm, ta sử dụng nón pháp tuyến (không lồi) của đồ thị của ánh xạ đa trị được xét (xem Mục 4.2 trong Chương 4). Nếu không gian được xét là hữu hạn chiều, thì nón pháp tuyến còn có thể định nghĩa theo một cách khác, sử dụng *phép chiếu mêtric lên các tập không lồi*. Cách định nghĩa này mang tính hình học rõ rệt. Nó sẽ được nhắc lại ở dưới đây cùng với các quy tắc tính toán có liên quan, nhằm bổ sung cho những điều đã trình bày trong Mục 4.2 theo cách tiếp cận thuần tuý giải tích[16].

Jacobian xấp xỉ (xem Mục 5.2) cũng là một loại đạo hàm đa trị. Nó được đưa ra trong Jeyakumar và Luc (1998, 1999) như một sự mở rộng của khái niệm Jacobian suy rộng Clarke - vốn dĩ chỉ được định nghĩa cho các hàm véctơ Lipschitz địa phương. Sử dụng Jacobian xấp xỉ và dưới vi phân J-L ta có thể thu được các định lý ánh xạ mở (xem Jeyakumar và Luc (2002a,b) và Mục 5.4), quy tắc nhân tử Lagrange (xem Wang và Jeyakumar (2000) và Mục 5.4), các điều kiện đủ cho tính chính quy mêtric và tính giả-Lipschitz của hàm ẩn đa trị

[14]TNTA: dual variables.

[15]Xem thêm cả các mục 4.5 và 4.6 trong Chương 4.

[16]Thông qua dưới vi phân Fréchet và giới hạn Painlevé-Kuratowski.

(xem Mục 5.3). Các kết quả đó áp dụng được cho các bài toán mô tả bởi các hàm liên tục, không nhất thiết là Lipschitz địa phương.

Việc nghiên cứu các mối quan hệ giữa Jacobian xấp xỉ và đối đạo hàm là một công việc đáng làm. Một số nhận xét về mối quan hệ giữa dưới vi phân Mordukhovich và dưới vi phân J-L đã được đưa ra trong luận án của Wang (2000) và trong bài báo của Wang và Jeyakumar (2000). Chúng ta sẽ nghiên cứu vấn đề đó trong một phạm vi rộng hơn.

Trước tiên, chúng ta nhắc lại một số sự kiện trong Mordukhovich (1994b) và Clarke (1983).

Cho $F : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^m$ là một ánh xạ đa trị . Như ở công thức (2.1) trong Chương 4, giới hạn trên theo dãy theo nghĩa Painlevé-Kuratowski của F khi $x \to \bar{x}$ là tập con của $\mathbb{R}^m$ được định nghĩa bởi

$$\begin{aligned}\operatorname*{Lim\,sup}_{x\to\bar{x}} F(x) \ &= \{y \in \mathbb{R}^m : \exists \text{ các dãy } x_k \to \bar{x},\ y_k \to y, \\ &\qquad \text{với } y_k \in F(x_k)\ \forall k = 1, 2, \ldots\}.\end{aligned}$$

Có hai điểm khác biệt giữa công thức này và công thức (2.1) trong Chương 4: giới hạn theo tôpô w^* được thay bằng giới hạn theo tôpô của chuẩn và F có thể nhận giá trị không phải trong $X^* = (I\!R^n)^* = I\!R^n$, mà trong $I\!R^m$. Giả sử $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Ký hiệu

$$P(x, \Omega) = \{\omega \in \overline{\Omega} : \|x - \omega\| = d(x, \Omega)\}.$$

Nón pháp tuyến Mordukhovich của Ω tại $\bar{x} \in \overline{\Omega}$ được xác định bởi công thức

$$N_\Omega(\bar{x}) = \limsup_{x\to\bar{x}} [\text{cone}(x - P(x, \Omega))]. \tag{7.1}$$

Nếu $\bar{x} \notin \overline{\Omega}$, khi đó ta đặt $N_\Omega(\bar{x}) = \emptyset$. Nói chung, $N_\Omega(\bar{x})$ là hình nón không lồi. (Vì vậy nó không thể là nón đối ngẫu của bất cứ hình nón tiếp tuyến nào của Ω.) Nón pháp tuyến này trùng với hình nón định nghĩa bởi công thức (2.8) trong Chương 4. Như ở Chương 2, *nón tiếp tuyến Clarke* $C_\Omega(\bar{x})$ của Ω tại $\bar{x} \in \overline{\Omega}$ được định nghĩa bởi công thức

$$\begin{aligned}C_\Omega(\bar{x}) = \{u \in \mathbb{R}^n \ &: \ \forall x_k (\in \Omega) \to \bar{x},\ \ \forall t_k \downarrow 0,\ \exists u_k \to u \ \text{ such that} \\ &\qquad x_k + t_k u_k \in \Omega \ \text{ for all } k\}.\end{aligned}$$

Tập hợp $N_\Omega^{\mathrm{Cl}}(\bar{x}) := (C_\Omega(\bar{x}))^*$ là *nón pháp tuyến Clarke* của Ω tại $\bar{x}$. Quan hệ giữa nón pháp tuyến Clarke và nón pháp tuyến Mordukhovich (xem Clarke (1983), Mệnh đề 2.5.7) như sau:

$$N_\Omega^{\mathrm{Cl}}(\bar{x}) = \overline{\text{co}} N_\Omega(\bar{x}). \tag{7.2}$$

Như ở Mệnh đề 2.2.1 trong Chương 2, *nón tiếp tuyến Bouligand* của Ω tại $x \in \overline{\Omega}$ được cho bởi công thức

$$T_\Omega(x) = \{u \in \mathbb{R}^n \quad : \exists u_k \to u,\ \exists t_k \downarrow 0 \text{ sao cho } x + t_k u_k \in \Omega \text{ với mọi } k\}.$$

Nón đối ngẫu âm của $T_\Omega(x)$ được ký hiệu bởi $\widehat{N}_\Omega(x)$. Nếu $x \notin \overline{\Omega}$ thì ta đặt $\widehat{N}_\Omega(x) = \emptyset$. Người ta đã biết rằng (xem Mordukhovich (1994b), tr. 254):

$$\widehat{N}_\Omega(x) = \{x^* \in \mathbb{R}^n \ : \ \limsup_{y \xrightarrow{\Omega} x} \frac{\langle x^*, y - x\rangle}{\|y - x\|} \leqslant 0\}.$$

Điều đó chứng tỏ nón $\widehat{N}_\Omega(x)$ định nghĩa như ở đây trùng với nón pháp tuyến Fréchet định nghĩa bằng công thức (2.7) trong Chương 4.

Mệnh đề 5.1.1 (xem Kruger và Mordukhovich (1980)). *Với mọi* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *và với mọi* $\bar{x} \in \overline{\Omega}$, *ta có*

$$N_\Omega(\bar{x}) = \operatorname*{Lim\,sup}_{x \to \bar{x}} \widehat{N}_\Omega(x). \tag{7.3}$$

Như ở Chương 4, đối đạo hàm Mordukhovich $D^*F(\bar{x}, \bar{y}) : \mathbb{R}^m \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ của F tại $(\bar{x}, \bar{y}) \in \text{gph}\, F$ được cho bởi công thức

$$D^*F(\bar{x}, \bar{y})(y^*) = \{x^* \in \mathbb{R}^n \ : \ (x^*, -y^*) \in N_{\text{gph}F}(\bar{x}, \bar{y})\}.$$

Đối đạo hàm Clarke của F tại $(\bar{x}, \bar{y}) \in \text{gph}\, F$ được cho bởi công thức

$$D^*_C F(\bar{x}, \bar{y})(y^*) = \{x^* \in \mathbb{R}^n \ : \ (x^*, -y^*) \in N^{\text{Cl}}_{\text{gph}F)}(\bar{x}, \bar{y}), \}.$$

Đồ thị của $D^*_C F(\bar{x}, \bar{y})(\cdot)$ là hình nón lồi đóng trong không gian tích $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$. Nếu F có đồ thị lồi, thì đối đạo hàm Clarke và đối đạo hàm Mordukhovich trùng nhau, tức là

$$D^*F(\bar{x}, \bar{y})(y^*) = D^*_C F(\bar{x}, \bar{y})(y^*) \quad \forall (\bar{x}, \bar{y}) \in \text{gph}F,\ \forall y^* \in \mathbb{R}^m.$$

Nếu F là hàm véctơ khả vi chặt, thì hai đối đạo hàm đó cũng trùng nhau. Cụ thể là nếu $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ là khả vi chặt tại $\bar{x}$, thì

$$D^*f(\bar{x})(y^*) = D^*_C f(\bar{x})(y^*) = \Big\{ (f'(\bar{x}))^*(y^*) \Big\} \quad \forall y^* \in \mathbb{R}^m.$$

Ngoài hai trường hợp kể trên, đồ thị của đối đạo hàm Mordukhovich thường là tập con thực sự của đối đạo hàm Clarke.

Cho hàm số $\varphi : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ với miền hữu hiệu

$$\text{dom}\varphi = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ -\infty < \varphi(x) < +\infty\}.$$

Công thức

$$F(x) = E_\varphi(x) := \{\mu \in \mathbb{R} \,:\, \mu \geqslant \varphi(x)\}$$

xác định *ánh xạ đa trị trên-đồ-thị* của φ. Rõ ràng là

$$\mathrm{gph}\, F = \mathrm{epi}\, \varphi := \{(x, \mu) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \,:\, \mu \geqslant \varphi(x)\}.$$

Cho $\bar{x} \in \mathrm{dom}\varphi$. Tập hợp

$$\begin{aligned} \partial\varphi(\bar{x}) \;&:= D^*E_\varphi(\bar{x}, \varphi(\bar{x}))(1) \\ &= \Big\{x^* \in \mathbb{R}^n \,:\, (x^*, -1) \in N_{\mathrm{epi}\,\varphi}(\bar{x}, \varphi(\bar{x}))\Big\} \end{aligned}$$

được gọi là *dưới vi phân Mordukhovich* của φ tại $\bar{x}$, còn tập hợp

$$\begin{aligned} \partial^\infty\varphi(\bar{x}) \;&:= D^*E_\varphi(\bar{x}, \varphi(\bar{x}))(0) \\ &= \Big\{x^* \in \mathbb{R}^n \,:\, (x^*, 0) \in N_{\mathrm{epi}_\varphi}(\bar{x}, \varphi(\bar{x}))\Big\} \end{aligned}$$

được gọi là *dưới vi phân suy biến* của φ tại $\bar{x}$. Nếu $\bar{x} \notin \mathrm{dom}\varphi$ thì ta đặt $\partial\varphi(\bar{x}) = \partial^\infty\varphi(\bar{x}) = \emptyset$. Dưới vi phân Clarke $\partial^{\mathrm{Cl}}\varphi(\bar{x})$ và dưới vi phân suy biến Clarke $\partial^{\mathrm{Cl},\infty}\varphi(\bar{x})$ được định nghĩa tương tự; thay cho D^* (t.ư., $N_{\mathrm{gph}\,F}(\cdot)$) ta xét D^*_C (t.ư., $N^{\mathrm{Cl}}_{\mathrm{gph}\,F}(\cdot)$). Có thể chứng minh rằng dưới vi phân Mordukhovich và dưới vi phân suy biến định nghĩa như ở đây là trùng với các tập hợp định nghĩa bởi các công thức (2.5) và (2.6) trong Chương 4.

Nếu φ là khả vi chặt tại $\bar{x}$, thì $\partial^{\mathrm{Cl}}\varphi(\bar{x}) = \partial\varphi(\bar{x}) = \{\varphi'(\bar{x})\}$. Với mỗi hàm số nửa liên tục dưới φ và với mỗi điểm $\bar{x} \in \mathrm{dom}\varphi$, từ (7.2) suy ra rằng

$$\partial^{\mathrm{Cl}}\varphi(\bar{x}) = \overline{\mathrm{co}}[\partial\varphi(\bar{x}) + \partial^\infty\varphi(\bar{x})]. \tag{7.4}$$

Công thức (7.4) là trường hợp riêng của công thức (6.14) trong Chương 4, ở đó ta xét hàm số xác định trên không gian Banach bất kỳ.

Dưới một số điều kiện nhẹ nhàng, ta có thể tính dưới vi phân Clarke $\partial^{\mathrm{Cl}}\varphi(\bar{x})$ thông qua đạo hàm theo hướng Clarke-Rockafellar. Nếu $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ là hàm số liên tục, thì đạo hàm theo hướng Clarke-Rockafellar $\varphi^\uparrow(\bar{x}, u)$ của φ tại $\bar{x}$ theo hướng u được định nghĩa (xem Clarke (1983), tr. 97) bằng công thức

$$\varphi^\uparrow(\bar{x}; u) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\ \limsup_{x\to\bar{x},\ t\downarrow 0}\ \inf_{u'\in u+\varepsilon\bar{B}_{\mathbb{R}^n}} \frac{\varphi(x + tu') - \varphi(x)}{t}. \tag{7.5}$$

Mệnh đề 5.7.2 (xem Clarke (1983), tr. 97). *Ta có $\partial^{\mathrm{Cl}}\varphi(\bar{x}) = \emptyset$ khi và chỉ khi $\varphi^\uparrow(\bar{x}; 0) = -\infty$. Nếu trường hợp đó không xảy ra, thì ta có*

$$\partial^{\mathrm{Cl}}\varphi(\bar{x}) = \{x^* \in \mathbb{R}^n \,:\, \varphi^\uparrow(\bar{x}, u) \geqslant \langle x^*, u\rangle \ \ \forall u \in \mathbb{R}^n\} \tag{7.6}$$

và

$$\varphi^{\uparrow}(\bar{x};u) = \sup\{\langle x^*, u\rangle \ : \ x^* \in \partial^{\mathrm{Cl}}\varphi(\bar{x})\} \quad \forall u \in \mathbb{R}^n. \tag{7.7}$$

Nếu φ là Lipschitz địa phương tại $\bar{x}$, thì

$$\varphi^{\uparrow}(\bar{x};u) = \varphi^{o}(\bar{x};u)$$

với mọi $u \in \mathbb{R}^n$, ở đó

$$\varphi^{o}(\bar{x};u) = \limsup_{x\to\bar{x},\ t\downarrow 0} \frac{\varphi(x+tu)-\varphi(x)}{t}$$

là đạo hàm theo hướng Clarke của φ tại $\bar{x}$ theo hướng u (xem Mục 3.4 trong Chương 3). Vì $\partial^{\mathrm{Cl},\infty}\varphi(\bar{x}) = \{0\}$ (xem Clarke (1983), Mệnh đề 2.9.7) và $\partial^{\infty}\varphi(\bar{x}) \subset \partial^{\mathrm{Cl},\infty}\varphi(\bar{x})$, ta suy ra rằng $\partial^{\infty}\varphi(\bar{x}) = \{0\}$.

Để tiện theo dõi, chúng ta nhắc lại khái niệm Jacobian xấp xỉ đã xét ở Mục 5.2. Giả sử $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ là hàm véctơ liên tục. Tập con đóng $Jf(\bar{x}) \subset L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ được gọi là Jacobian xấp xỉ của f tại $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ nếu

$$(y^*\circ f)^{+}(\bar{x};u) \leqslant \sup_{A\in Jf(\bar{x})} \langle y^*, Au\rangle, \quad \forall u \in \mathbb{R}^n,\ \forall y^* \in \mathbb{R}^m, \tag{7.8}$$

ở đó $(y^*\circ f)(x) = \langle y^*, f(x)\rangle$, và

$$(y^*\circ f)^{+}(\bar{x};u) = \limsup_{t\downarrow 0} \frac{(y^*\circ f)(\bar{x}+tu) - (y^*\circ f)(\bar{x})}{t}$$

là đạo hàm Dini trên của $y^*\circ f$ tại $\bar{x}$ theo hướng u. Một Jacobian xấp xỉ của f tại $\bar{x}$ được gọi là *tối thiểu* (minimal) nếu nó không chứa tập con (đóng) thực sự nào cũng là Jacobian xấp xỉ của f tại $\bar{x}$. Nếu f khả vi Fréchet tại $\bar{x}$, thì hiển nhiên $Jf(\bar{x}) = \{f'(\bar{x})\}$ là Jacobian xấp xỉ tối thiểu của f tại $\bar{x}$.

Giả sử $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ là hàm liên tục. Nếu $J\varphi(\bar{x})$ là một Jacobian của φ tại $\bar{x}$, thì ta viết $\partial^{\mathrm{JL}}\varphi(\bar{x})$ thay cho $J\varphi(\bar{x})$ và gọi $\partial^{\mathrm{JL}}\varphi(\bar{x})$ là *dưới vi phân J-L* của φ tại $\bar{x}$. Một J-L dưới vi phân J-L được gọi là *tối thiểu* (minimal) nếu nó không chứa tập con (đóng) thực sự nào cũng là dưới vi phân J-L của f tại $\bar{x}$.

Nhận xét rằng hàm φ xét trong Ví dụ 5.2.1 không có dưới vi phân J-L tối thiểu tại $\bar{x} = 0$.

Nếu $f = \varphi$, là một hàm thực, thì (7.8) tương đương với cặp điều kiện sau:

$$\limsup_{t\downarrow 0} \frac{\varphi(\bar{x}+tu)-\varphi(\bar{x})}{t} \leqslant \sup_{x^*\in\partial^{\mathrm{JL}}\varphi(\bar{x})} \langle x^*, u\rangle \quad \forall u \in \mathbb{R}^n \tag{7.9}$$

và

$$(7.10) \qquad \liminf_{t\downarrow 0} \frac{\varphi(\bar{x}+tu)-\varphi(\bar{x})}{t} \geqslant \inf_{x^*\in\partial^{\mathrm{JL}}\varphi(\bar{x})} \langle x^*, u\rangle \quad \forall u \in \mathbb{R}^n.$$

Chúng ta sẽ trả lời câu hỏi sau: *Phải chăng dưới vi phân Mordukhovich nào cũng là dưới vi phân J-L?*

Ví dụ 5.7.1 (xem Jeyakumar và Luc (2002a)). Xét hàm số $\varphi(x) = x^{1/3}$, $x \in \mathbb{R}$. Khi đó $\partial^{\mathrm{JL}}\varphi(0) = [\alpha, +\infty)$, ở đó $\alpha \in I\!R$ được lấy tùy ý, là dưới vi phân J-L của φ tại 0. Thật vậy, thế $\bar{x} = 0$, $u = 1$ và $u = -1$ vào (7.9) và (7.10) ta thấy rằng cả hai điều kiện đó đều thỏa mãn. Sử dụng (7.3) ta có

$$N_{\mathrm{epi}\,\varphi}((0,0)) = \{(x^*, 0) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^* \geqslant 0\}.$$

Vì thế $\partial\varphi(0) = \emptyset$ và $\partial^\infty\varphi(0) = [0, +\infty)$. Vậy $\partial\varphi(0)$ không phải là dưới vi phân J-L của φ tại 0.

Ví dụ trên gợi ý rằng câu hỏi đang được khảo sát cần được phát biểu lại như sau:

Câu hỏi 1: *Nếu dưới vi phân Mordukhovich khác rỗng, thì nó có là dưới vi phân J-L hay không?*

Ba ví dụ tiếp theo ủng hộ câu trả lời khẳng định cho câu hỏi trên.

Ví dụ 5.7.2 [17]**.** Đặt $\varphi(x) = |x|$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Để ý rằng φ là hàm lồi, Lipschitz ở trên $I\!R$. Sử dụng (7.1) hoặc (7.3) ta thu được

$$N_{\mathrm{epi}\,\varphi}((0,0)) = \{(x^*, y^*) \in \mathbb{R}^2 \,:\, |x^*| \leqslant -y^*\}.$$

Vì vậy, $\partial\varphi(0) = [-1, 1]$. Do $\partial^{\mathrm{JL}}\varphi(0) := \{-1, 1\}$ là dưới vi phân J-L của φ tại 0, ta kết luận rằng $\partial\varphi(0)$ là dưới vi phân J-L của φ tại 0, nhưng nó không phải là dưới vi phân J-L tối thiểu. (Lưu ý rằng $\partial^{\mathrm{JL}}\varphi(0) = \{-1, 1\}$ là dưới vi phân J-L của φ tại 0).

Ví dụ 5.7.3 [18]**.** Đặt $\varphi(x) = -|x|$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Ta có φ là hàm lõm, Lipschitz ở trên $\mathbb{R}$. Sử dụng (7.1) hoặc (7.3) ta tìm được

$$N_{\mathrm{epi}\,\varphi}((0,0)) = \{(x^*, y^*) \in \mathbb{R}^2 \,:\, |x^*| = |y^*|\} \cup \{(x^*, y^*) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^* \geqslant |y^*|\}.$$

Vì vậy $\partial\varphi(0) = \{-1, 1\}$. Dễ thấy rằng $\partial^{\mathrm{JL}}\varphi(0) := \{-1, 1\}$ là dưới vi phân J-L tối thiểu của φ tại 0. Vì vậy, dưới vi phân Mordukhovich của φ tại 0 là dưới vi phân J-L tối thiểu của φ tại 0.

[17] Xem Ví dụ 4.2.4.

[18] Xem Ví dụ 4.2.5.

Ví dụ 5.7.4. Đặt $\varphi(x) = 0$ với mọi $x \in (-\infty, 0]$ và $\varphi(x) = x^{1/2}$ với mọi $x \in (0, +\infty)$. Ta có φ là hàm số không lồi, không lõm, không Lipschitz địa phương tại 0. Sử dụng (7.3) ta tính được

$$N_{\text{epi}\varphi}((0,0)) = \{(x^*, y^*) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^* \geqslant 0,\ y^* \leqslant 0\}.$$

Vì vậy, $\partial\varphi(0) = \partial^\infty\varphi(0) = [0, +\infty)$. Bằng cách kiểm tra trực tiếp, ta thấy rằng các điều kiện (7.9) và (7.10) được thỏa mãn với $\partial^{\text{JL}}\varphi(\bar{x}) := [0, +\infty)$, ở đó $\bar{x} = 0$. Vậy $\partial\varphi(0)$ là dưới vi phân J-L của φ tại 0. Dễ thấy rằng đó không phải là dưới vi phân J-L tối thiểu.

Mệnh đề 5.7.1. *Nếu $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ là Lipschitz tại $\bar{x}$, thì $\partial\varphi(\bar{x})$ là dưới vi phân J-L của φ tại $\bar{x}$.*

Chứng minh. Do (7.4), (7.6) và (7.7) ta có

$$\begin{aligned}\limsup_{t\downarrow 0} \frac{\varphi(\bar{x}+tu) - \varphi(\bar{x})}{t} &\leqslant \varphi^o(\bar{x}; u)\\ &= \max\{\langle x^*, u\rangle \,:\, x^* \in \partial^{\text{Cl}}\varphi(\bar{x})\}\\ &= \max\{\langle x^*, u\rangle \,:\, x^* \in \partial\varphi(\bar{x})\}.\end{aligned}$$

Mặt khác,

$$\begin{aligned}\liminf_{t\downarrow 0} \frac{\varphi(\bar{x}+tu) - \varphi(\bar{x})}{t} &\geqslant \liminf_{x\to\bar{x},\ t\downarrow 0} \frac{\varphi(x+tu) - \varphi(x)}{t}\\ &= -\varphi^o(\bar{x}; -u)\\ &= -\max\{\langle x^*, -u\rangle \,:\, x^* \in \partial^{\text{Cl}}\varphi(\bar{x})\}\\ &= \min\{\langle x^*, u\rangle \,:\, x^* \in \partial\varphi(\bar{x})\}.\end{aligned}$$

Các tính chất (7.9) và (7.10) đã được thiết lập đối với $\partial^{\text{JL}}\varphi(\bar{x}) := \partial\varphi(\bar{x})$. Vậy $\partial\varphi(\bar{x})$ là dưới vi phân J-L của φ tại $\bar{x}$. $\square$

Ví dụ sau cho ta câu trả lời *phủ định* cho Câu hỏi 1.

Ví dụ 5.7.5. Đặt $\varphi(x) = x^2\sin(1/x)$ với mọi $x \in (-\infty, 0)$ và $\varphi(x) = -x^{1/3}$ với mọi $x \in [0, +\infty)$. Khi đó φ là hàm số liên tục, không Lipschitz địa phương tại 0. Chúng ta khẳng định rằng $\partial\varphi(0) \neq \emptyset$, nhưng đó không phải là dưới vi phân J-L của φ tại 0. Thật vậy, dễ thấy rằng $\widehat{N}_{\text{epi}\,\varphi}((0,0)) = \{0\}$. Vì

$$\text{epi}\varphi = \{(x,y) \,:\, y - x^2\sin(1/x) \geqslant 0,\ x < 0\} \cup \{(x,y) \,:\, y + x^{1/3} \geqslant 0,\ x \geqslant 0\},$$

do công thức tính nón tiếp tuyến Bouligand cho hệ bất đẳng thức xác định bởi các hàm khả vi (xem Aubin và Frankowska (1990), tr. 124, hoặc Mệnh đề 2.2.2 trong Chương 2) ta có

$$T_{\text{epi}\,\varphi}(x, \varphi(x)) = \{(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 \,:\, (-2x\sin(1/x) + \cos(1/x))v_1 + v_2 \geqslant 0\}$$

nếu $x < 0$,

$$T_{\text{epi}\,\varphi}(x,\varphi(x)) = \{(v_1,v_2) \in \mathbb{R}^2 \,:\, \frac{1}{3}x^{-2/3}v_1 + v_2 \geqslant 0\}$$

nếu $x > 0$. Vì vậy,

$$\widehat{N}_{\text{epi}\,\varphi}(x,\varphi(x)) = \{\lambda^*(2x\sin(1/x) - \cos(1/x), -1) \,:\, \lambda^* \geqslant 0\}$$

nếu $x < 0$, và

$$\widehat{N}_{\text{epi}\,\varphi}(x,\varphi(x)) = \{\lambda^*(-\frac{1}{3}x^{-2/3}, -1) \,:\, \lambda^* \geqslant 0\}$$

nếu $x > 0$. Áp dụng (7.3) ta thu được

$$N_{\text{epi}\,\varphi}(0,0) = \{(x^*,y^*) \in \mathbb{R}^2 \,:\, -|x^*| \geqslant y^*\} \cup (-\infty,0] \times \{0\}.$$

Do đó, $\partial\varphi(0) = [-1,1]$. Nhận xét rằng (2.10), ở đó $\bar{x} := 0$ và $\partial^{\text{JL}}\varphi(0) := [-1,1]$, không đúng với $u = 1$ vì rằng vế trái là $-\infty$, trong khi vế phải là -1. Vì thế, $\partial^{\text{JL}}\varphi(0)$ là tập lồi compắc khác rỗng, nhưng không phải là dưới vi phân J-L của φ tại 0.

Nhận xét rằng, trong các ví dụ 5.7.1 và 5.7.5, tập

$$\partial^{JL}\varphi(0) := \partial\varphi(0) \cup \partial^{\infty}_{M}\varphi(0)$$

là dưới vi phân J-L của φ tại 0 (mặc dù $\partial\varphi(0)$ không phải là dưới vi phân J-L của φ tại 0). Ta có thể nêu lên[19] câu hỏi sau:

Câu hỏi 1': *Phải chăng với mỗi hàm véctơ liên tục $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ và với mọi $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, hợp của dưới vi phân Mordukhovich và dưới vi phân suy biến*

$$\partial\varphi(\bar{x}) := \partial^{\text{JL}}\varphi(\bar{x}) \cup \partial^{\infty}\varphi(\bar{x})$$

là dưới vi phân J-L của φ tại $\bar{x}$?

Cho đến nay, Câu hỏi 1' vẫn chưa có câu trả lời.

5.8 Đối đạo hàm Mordukhovich và Jacobian xấp xỉ

Đối đạo hàm là ánh xạ đa trị thuần nhất dương. Tuy thế, đối với ánh xạ đối đạo hàm $D^*f(\bar{x})(\cdot)$ của một hàm véctơ liên tục $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tại $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ có thể không tồn tại tập đóng $\Delta \subset L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ nào để

(8.1) $$D^*f(\bar{x})(y^*) = \{A^*y^* \,:\, A \in \Delta\} \quad \forall y^* \in \mathbb{R}^m.$$

[19] Câu hỏi này do một trong hai người phản biện của bài báo Nam và Yen (2007) nêu lên.

Vì thế, không thể so sánh khái niệm đối đạo hàm với khái niệm Jacobian xấp xỉ. Để vượt qua khó khăn đó, chúng ta cần đến định nghĩa sau.

Định nghĩa 5.8.1. Một tập đóng khác rỗng $\Delta \subset L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ các toán tử tuyến tính được gọi là một *đại diện*[20] của ánh xạ đối đạo hàm $D^*f(\bar{x})(\cdot)$ nếu

$$\sup_{x^* \in D^*f(\bar{x})(y^*)} \langle x^*, u\rangle = \sup_{A \in \Delta} \langle A^* y^*, u\rangle \quad \forall u \in \mathbb{R}^n,\ \forall y^* \in \mathbb{R}^m. \tag{8.2}$$

Do định lý tách các tập lồi, (8.2) tương đương với điều kiện sau

$$\overline{\text{co}} D^*f(\bar{x})(y^*) = \overline{\text{co}}\{A^*y^* \,:\, A \in \Delta\} \quad \forall y^* \in \mathbb{R}^m. \tag{8.3}$$

Nếu f là khả vi chặt tại $\bar{x}$, thì $\Delta := \{f'(\bar{x})\}$ là một đại diện của ánh xạ đối đạo hàm $D^*f(\bar{x})(\cdot)$.

Nếu $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ là Lipschitz tại $\bar{x}$, nghĩa là tồn tại $\ell > 0$ sao cho $\|f(x') - f(x)\| \leqslant \ell\|x' - x\|$ với mọi x, x' được lấy tùy ý trong một lân cận của $\bar{x}$, khi đó tập

$$J_B f(\bar{x}) = \{\lim_{k\to\infty} f'(x_k) : \{x_k\} \subset \Omega_f, x_k \to \bar{x}\},$$

được gọi là *B-đạo hàm*, là một Jacobian xấp xỉ của f tại $\bar{x}$. Ở đây

$$\Omega_f = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists \text{ đạo hàm Fréchet } f'(x) \text{ của } f \text{ tại } x\}.$$

Nhận xét rằng tập lớn hơn

$$J^{\text{Cl}} f(\bar{x}) := \text{co}\{\lim_{k\to\infty} f'(x_k) : \{x_k\} \subset \Omega_f, x_k \to \bar{x}\}$$

(Jacobian suy rộng Clarke) của của f tại $\bar{x}$, cũng là Jacobian xấp xỉ của f tại $\bar{x}$. Trong trường hợp $m = 1$, $J^{\text{Cl}} f(\bar{x}) = \partial^{\text{Cl}} f(\bar{x})$ (xem Mục 5.2).

Mệnh đề 5.8.1. *Nếu hàm $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ là Lipschitz địa phương tại $\bar{x}$, thì tập hợp $\Delta := J_B f(\bar{x})$ là một đại diện của ánh xạ đối đạo hàm $D^*f(\bar{x})(\cdot)$.*

Chứng minh. Theo công thức (2.23) trong Mordukhovich (1994b), ta có

$$\Big\{A^*y^* \,:\, A \in J^{\text{Cl}} f(\bar{x})\Big\} = \text{co} D^*f(\bar{x})(y^*) \quad \forall y^* \in \mathbb{R}^m.$$

Vì $J^{\text{Cl}} f(\bar{x}) = \text{co} J_B f(\bar{x})$, từ đó suy ra rằng

$$\text{co} D^*f(\bar{x})(y^*) = \text{co}\{A^*y^* \,:\, A \in J_B f(\bar{x})\}.$$

[20]TNTA: representative.

Vậy (8.3) nghiệm đúng nếu ta chọn $\Delta = J_B f(\bar{x})$. Điều đó chứng tỏ rằng $\Delta = J_B f(\bar{x})$ là một đại diện của ánh xạ đối đạo hàm $D^* f(\bar{x})(\cdot)$. $\square$

Mệnh đề 5.8.2. *Nếu f là Lipschitz tại $\bar{x}$ và nếu Δ là một đại diện của ánh xạ đối đạo hàm $D^* f(\bar{x})(\cdot)$, thì $Jf(\bar{x}) := \Delta$ là Jacobian xấp xỉ của f tại $\bar{x}$.*

Chứng minh. Giả sử $y^* \in \mathbb{R}^m$ được cho tùy ý. Theo Mệnh đề 2.11 trong Mordukhovich (1994b), ta có

$$D^* f(\bar{x})(y^*) = \partial(y^* \circ f)(\bar{x}). \tag{8.4}$$

Vì $y^* \circ f$ là Lipschitz tại $\bar{x}$,

$$(y^* \circ f)^o(\bar{x}; u) = \sup\{\langle x^*, u\rangle \,:\, x^* \in \partial^{\mathrm{Cl}}(y^* \circ f)(\bar{x})\} \quad \forall u \in \mathbb{R}^n.$$

Kết hợp điều đó với (7.4) và (8.4), ta thu được

$$\begin{aligned}(y^* \circ f)^o(x; u) &= \sup\{\langle x^*, u\rangle \,:\, x^* \in D^* f(\bar{x})(y^*)\}\\ &= \sup\{\langle A^* y^*, u\rangle \,:\, A \in \Delta\}.\end{aligned}$$

Do đó,

$$(y^* \circ f)^+(\bar{x}; u) \leqslant (y^* \circ f)^o(x; u) = \sup\{\langle y^*, Au\rangle \,:\, A \in \Delta\}.$$

Vì tính chất đó đúng với mọi $y^* \in \mathbb{R}^m$ và $u \in \mathbb{R}^n$, ta kết luận rằng $Jf(\bar{x}) := \Delta$ là Jacobian xấp xỉ của f tại $\bar{x}$. $\square$

Trong mối liên hệ với Mệnh đề 5.8.2, chúng ta có câu hỏi tự nhiên sau đây.

Câu hỏi 2: *Phải chăng nếu $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ là hàm véctơ liên tục và Δ là một đại diện của ánh xạ đối đạo hàm $D^* f(\bar{x})(\cdot) : \mathbb{R}^m \rightrightarrows \mathbb{R}^n$, thì $Jf(\bar{x}) := \Delta$ là Jacobian xấp xỉ của f tại $\bar{x}$?*

Kết hợp mệnh đề sau với mệnh đề 5.8.2 ta có *câu trả lời khẳng định* cho Câu hỏi 2.

Mệnh đề 5.8.3. *Nếu ánh xạ đối đạo hàm $D^* f(\bar{x})(\cdot) : \mathbb{R}^m \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ của hàm số liên tục $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ có một đại diện $Jf(\bar{x}) \subset L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, thì f là Lipschitz địa phương tại $\bar{x}$.*

Chứng minh. Từ (8.3) suy ra rằng $\overline{\mathrm{co}} D^* f(\bar{x})(0) = \{0\}$. Vì vậy, $D^* f(\bar{x})(0) = \{0\}$. Theo Mệnh đề 2.8 trong Mordukhovich (1988), điều đó kéo theo

$$x \mapsto \{f(x)\}$$

là ánh xạ đa trị giả-Lipschitz tại $(\bar{x}, f(\bar{x}))$. Vì f là ánh xạ đơn trị, ta có f là Lipschitz địa phương tại $\bar{x}$. $\square$

Chúng ta xét thêm vài ví dụ ở đó ta sẽ tính dưới vi phân Mordukhovich và đối đạo hàm của các hàm số và ánh xạ không trơn.

Ví dụ 5.8.1. Giả sử hàm véctơ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ được xác định bởi công thức $f(x) = (|x|^{1/2}, -|x|)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Khi đó f là hàm số liên tục, không Lipschitz tại 0, và $\text{gph}\, f = \{(x, |x|^{1/2}, -|x|) : x \in \mathbb{R}\}$. Sử dụng (7.3) và công thức tính nón pháp tuyến Fréchet $\widehat{N}_\Omega(x)$ đã được nhắc lại ở Mục 5.7, ta có thể chứng tỏ rằng

$$N_{\text{gph}\, f}((0,0,0)) = \widehat{N}_{\text{gph}\, f}((0,0,0)) = \mathbb{R} \times (-\infty, 0] \times \mathbb{R}.$$

Vì vậy, với mỗi $y^* = (y_1^*, y_2^*) \in \mathbb{R}^2$,

$$D^*f(0)(y^*) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{nếu } y_1^* \geqslant 0, \\ \emptyset & \text{nếu } y_1^* < 0. \end{cases}$$

Vì f không là Lipschitz địa phương tại $\bar{x} = 0$, Mệnh đề 5.8.3 khẳng định ánh xạ đối đạo hàm $D^*f(0)(\cdot)$ không có đại diện dưới dạng một tập toán tử tuyến tính. Một tính toán trực tiếp cho thấy rằng, với mỗi $y^* = (y_1^*, y_2^*) \in \mathbb{R}^2$ và $u \in \mathbb{R}$, ta có

$$(y^* \circ f)^+(0; u) = \begin{cases} +\infty & \text{nếu } y_1^* > 0,\ u \neq 0 \\ -|u|y_2^* & \text{nếu } y_1^* = 0 \\ -\infty & \text{nếu } y_1^* < 0,\ u \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } y_1^* < 0,\ u = 0. \end{cases}$$

Nếu ta chọn $Jf(0) = (-\infty, 0] \times \mathbb{R}$, $\bar{x} = 0$, và đặt $Au = (\alpha u, \beta u)$ với mọi $A = (\alpha, \beta) \in Jf(0)$, $u \in \mathbb{R}$, thì (7.8) không được thỏa mãn vì rằng $\sup\limits_{A \in Jf(0)} \langle y^*, Au\rangle = 0$ nếu $y_1^* > 0$, $u > 0$, $y_2^* = 0$, trong khi $(y^* \circ f)^+(0; u) = +\infty$. Tương tự, nếu ta chọn $Jf(0) = [0, +\infty) \times \mathbb{R}$ và $\bar{x} = 0$, thì (7.8) không được thỏa mãn vì $\sup\limits_{A \in Jf(0)} \langle y^*, Au\rangle = 0$ nếu $y_1^* > 0$, $u < 0$, $y_2^* = 0$, trong khi $(y^* \circ f)^+(0; u) = +\infty$. Vì thế, các tập $Jf(0)$ đã chọn đều không phải là Jacobian xấp xỉ của f tại 0. Mặc dù vậy, tập hợp kiểu $Jf(0) := \{(-\infty, -1] \cup [2, +\infty)\} \times \mathbb{R}$ là một Jacobian xấp xỉ của f tại 0.

Ví dụ 5.8.2. Xét hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ cho bởi công thức $f(x) = (-|x|^{1/3}, x^{1/3})$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Ta có f là hàm số liên tục, không Lipschitz địa phương tại 0, và

$$\text{gph}\, f = \{(x, -|x|^{1/3}, x^{1/3}) : x \in \mathbb{R}\}.$$

áp dụng công thức (7.3) và công thức định nghĩa nón pháp tuyến Fréchet $\widehat{N}_\Omega(x)$ được đưa ra ngay trước đó, ta có thể chứng tỏ rằng

$$N_{\text{gph}\, f}((0,0,0)) = \widehat{N}_{\text{gph}\, f}((0,0,0)) = \mathbb{R} \times W,$$

ở đó $W = \{y^* = (y_1^*, y_2^*) \in \mathbb{R}^2 : -y_1^* \leqslant y_2^* \leqslant y_1^*\}$. Vì vậy, với mỗi $y^* = (y_1^*, y_2^*) \in \mathbb{R}^2$ ta có

$$D^*f(0)(y^*) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{nếu } y_1^* \leqslant y_2^* \leqslant -y_1^* \\ \emptyset & \text{trong trường hợp còn lại.} \end{cases}$$

Ánh xạ đối đạo hàm $D^*f(0)(\cdot)$ không có đại diện dưới dạng một tập hợp toán tử tuyến tính. Có thể chứng tỏ rằng, với mọi $y^* = (y_1^*, y_2^*) \in \mathbb{R}^2$ và $u \in \mathbb{R}$,

$$(y^* \circ f)^+(0; u) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } u = 0 \\ 0 & \text{nếu } y_2^* = y_1^* = 0,\ u \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } y_2^* - y_1^* = 0,\ u > 0 \\ +\infty & \text{nếu } y_2^* - y_1^* > 0,\ u > 0 \\ -\infty & \text{nếu } y_2^* - y_1^* < 0,\ u > 0 \\ 0 & \text{nếu } y_2^* + y_1^* = 0,\ u < 0 \\ -\infty & \text{nếu } y_2^* + y_1^* > 0,\ u < 0 \\ +\infty & \text{nếu } y_2^* + y_1^* < 0,\ u < 0. \end{cases}$$

Sử dụng (2.8) ta có thể chứng tỏ rằng tập

$$Jf(0) = \{(\alpha, -\alpha) : \alpha \leqslant 0\} \cup \{(\alpha, \alpha) : \alpha \geqslant 0\}$$

là một Jacobian xấp xỉ của f tại 0 nếu ta nhúng $Jf(0)$ vào $L(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ bằng cách đặt $Au = (\alpha u, \beta u)$ với mọi $A = (\alpha, \beta) \in Jf(0)$ và $u \in \mathbb{R}$.

Ví dụ 5.8.3 (xem Mordukhovich (1988), tr. 65). Đặt $f(x) = |x_1| - |x_2|$ với mọi $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ và $\bar{x} = (0, 0)$. Hàm f không lồi, không lõm. Nó cũng không là chính quy Clarke tại $\bar{x} = (0, 0)$. Để xác định ánh xạ đối đạo hàm $D^*f(\bar{x})(\cdot) : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}^2$ ta phải tính được nón pháp tuyến $N_{\mathrm{gph}\, f}(\bar{x})$. Để ý rằng

$$\begin{aligned} \mathrm{gph} f &= \{(x_1, x_2, t) : t = f(x_1, x_2)\} \\ &= \{(x_1, x_2, t) : x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ t = x_1 - x_2\} \\ &\quad \cup \{(x_1, x_2, t) : x_1 \geqslant 0,\ x_2 \leqslant 0,\ t = x_1 + x_2\} \\ &\quad \cup \{(x_1, x_2, t) : x_1 \leqslant 0,\ x_2 \leqslant 0,\ t = -x_1 + x_2\} \\ &\quad \cup \{(x_1, x_2, t) : x_1 \leqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ t = -x_1 - x_2\}. \end{aligned}$$

Ký hiệu 4 tập lồi đa diện trong hợp ở vế phải lần lượt bởi Γ_1, Γ_2, Γ_3, và Γ_4. Giả sử $z = (x_1, x_2, t) \in \mathrm{gph} f$.

Nếu z thuộc vào phần trong tương đối của Γ_1 (tương ứng, Γ_2, Γ_3, và Γ_4), thì $\widehat{N}_{\mathrm{gph}\, f}(z) = \{\lambda(1, -1, -1) : \lambda \in \mathbb{R}\}$ (tương ứng, $\widehat{N}_{\mathrm{gph}\, f}(z) = \{\lambda(1, 1, -1) : \lambda \in \mathbb{R}\}$, $\widehat{N}_{\mathrm{gph}\, f}(z) = \{\lambda(-1, 1, -1) : \lambda \in \mathbb{R}\}$, và $\widehat{N}_{\mathrm{gph}\, f}(z) = \{\lambda(-1, -1, -1) : \lambda \in \mathbb{R}\}$).

Nếu $x_1 > 0$ và $x_2 = 0$, thì $z \in \Gamma_1 \cap \Gamma_2$. Vì

$$\widehat{T}_{\Gamma_1}(z) = \{(v_1, v_2, \alpha) \in \mathbb{R}^3 : v_2 \geqslant 0,\ 0 = v_1 - v_2 - \alpha\},$$

sử dụng Bổ đề Farkas (xem Rockafellar (1970), tr. 200) ta có

$$\widehat{N}_{\Gamma_1}(z) = \{(\eta_1, \eta_2, \theta) = -\lambda(0, 1, 0) - \mu(1, -1, -1) : \lambda \geqslant 0,\ \mu \in \mathbb{R}\}.$$

Tương tự,

$$\widehat{N}_{\Gamma_2}(z) = \{(\eta_1, \eta_2, \theta) = -\lambda'(0, -1, 0) - \mu'(1, 1, -1) \,:\, \lambda' \geqslant 0,\ \mu' \in \mathbb{R}\}.$$

Do $\widehat{N}_{\text{gph}\, f}(z) = \widehat{N}_{\Gamma_1}(z) \cap N_{\Gamma_2}(z)$, ta suy ra rằng

$$\widehat{N}_{\text{gph}\, f}(z) = \{(-\mu, \mu - \lambda, \mu) \,:\, 2\mu \geqslant \lambda \geqslant 0\}.$$

Rõ ràng rằng nón pháp tuyến Fréchet này không phụ thuộc vào vị trí của $z \neq 0$ trên nửa đường thẳng $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$.

Nếu $x_1 < 0$ và $x_2 = 0$, thì $z \in \Gamma_3 \cap \Gamma_4$. Lập luận tương tự như trên, ta thu được

$$\widehat{N}_{\text{gph}\, f}(z) = \{(\mu, \lambda - \mu, \mu) \,:\, 2\mu \geqslant \lambda \geqslant 0\}.$$

Nếu $x_1 = 0$ và $x_2 > 0$, thì $z \in \Gamma_1 \cap \Gamma_4$ và

$$\widehat{N}_{\text{gph}\, f}(z) = \{(-\lambda - \mu, \mu, \mu) \,:\, -2\mu \geqslant \lambda \geqslant 0\}.$$

Nếu $x_1 = 0$ và $x_2 < 0$, thì $z \in \Gamma_2 \cap \Gamma_3$ và

$$\widehat{N}_{\text{gph}\, f}(z) = \{(-\lambda - \mu, -\mu, \mu) \,:\, -2\mu \geqslant \lambda \geqslant 0\}.$$

Nếu $x_1 = 0$ và $x_2 = 0$, thì $z = (\bar{x}, 0) \in \Gamma_1 \cap \Gamma_2 \cap \Gamma_3 \cap \Gamma_4$. Vì

$$\widehat{T}_{\Gamma_1}(\bar{x}, 0) = \{(v_1, v_2, \alpha) \,:\, v_1 \geqslant 0,\ v_2 \geqslant 0,\ 0 = v_1 - v_2 - \alpha\},$$

do Bổ đề Farkas ta có

$$\widehat{N}_{\Gamma_1}((\bar{x}, 0)) = \{-\lambda_1(1, 0, 0) - \lambda_2(0, 1, 0) - \mu(1, -1, -1) \,:\, \lambda_1 \geqslant 0,\ \lambda_2 \geqslant 0,\ \mu \in I\!R\}.$$

Lập luận tương tự, ta tính được các nón pháp tuyến $\widehat{N}_{\Gamma_i}((\bar{x}, 0))$ $(i = 2, 3, 4)$. Khi đó, sử dụng công thức

$$\widehat{N}_{\text{gph}\, f}(\bar{x}, 0) = \bigcap_{i=1}^{4} \widehat{N}_{\Gamma_i}((\bar{x}, 0))$$

ta có thể chứng tỏ rằng $\widehat{N}_{\text{gph}\, f}(\bar{x}, 0) = \{(0, 0, 0)\}$.

Kết hợp các kết quả đã thu được với công thức (2.3), ta có

$$\begin{aligned} N_{\text{gph}\, f}((\bar{x}, 0)) &= \limsup_{z \to (\bar{x}, 0)} \widehat{N}_{\text{gph}\, f}(z) \\ &= \text{cone}\{(1, -1, -1),\ (1, 1, -1),\ (-1, 1, -1),\ (-1, -1, -1)\} \\ &\quad \cup \{(-\mu, \mu - \lambda, \mu) \,:\, 2\mu \geqslant \lambda \geqslant 0\} \\ &\quad \cup \{(\mu, \lambda - \mu, \mu) \,:\, 2\mu \geqslant \lambda \geqslant 0\} \\ &\quad \cup \{(-\lambda - \mu, \mu, \mu) \,:\, -2\mu \geqslant \lambda \geqslant 0\} \\ &\quad \cup \{(-\lambda - \mu, -\mu, \mu) \,:\, -2\mu \geqslant \lambda \geqslant 0\}. \end{aligned}$$

Từ đó suy ra

$$D^*f(\bar{x})(y^*) = \begin{cases} \{(y^*, -y^*),\ (y^*, y^*),\ (-y^*, y^*),\ (-y^*, -y^*)\} \\ \cup\{(-\lambda^* + y^*, -y^*)\ :\ 2y^* \geqslant \lambda^* \geqslant 0\} \\ \cup\{(-\lambda^* + y^*, y^*)\ :\ 2y^* \geqslant \lambda^* \geqslant 0\} \\ \qquad\qquad\qquad \text{nếu}\ \ y^* > 0, \\ \{(y^*, -y^*),\ (y^*, y^*),\ (-y^*, y^*),\ (-y^*, -y^*)\} \\ \cup\{(y^*, -y^* - \lambda^*)\ :\ -2y^* \geqslant \lambda^* \geqslant 0\} \\ \cup\{(-y^*, y^* + \lambda^*)\ :\ -2y^* \geqslant \lambda^* \geqslant 0\} \\ \qquad\qquad\qquad \text{nếu}\ \ y^* < 0, \\ \{(0,0)\} \qquad\quad \text{nếu}\ \ y^* = 0. \end{cases}$$

Như vậy, với mỗi y^*, $D^*f(0)(y^*)$ là một tập compắc khác rỗng (thường là không lồi).

Cũng bằng phương pháp trên, ta thu được

$$\begin{aligned} N_{\text{epi}\,f}((\bar{x}, 0,) &= \limsup_{z \to (\bar{x}, 0)} \widehat{N}_{\text{epi}\,f}(z) \\ &= \text{cone}\{(1, -1, -1),\ (1, 1, -1),\ (-1, 1, -1),\ (-1, -1, -1)\} \\ &\quad \cup\{(-\lambda - \mu, \mu, \mu)\ :\ -2\mu \geqslant \lambda \geqslant 0\} \\ &\quad \cup\{(-\lambda - \mu, -\mu, \mu)\ :\ -2\mu \geqslant \lambda \geqslant 0\}. \end{aligned}$$

Do đó,

$$\begin{aligned} \partial f(\bar{x}) &= \{x^* : (x^*, -1) \in N_{\text{epi}\,f}((\bar{x}, 0))\} \\ &= \{(1, -1),\ (1, 1),\ (-1, 1),\ (-1, -1)\} \\ &\quad \cup\{(-\lambda^* + 1, -1)\ :\ 2 \geqslant \lambda^* \geqslant 0\} \cup \{(-\lambda^* + 1, 1)\ :\ 2 \geqslant \lambda^* \geqslant 0\} \\ &= \{(\lambda^*, 1)\ :\ -1 \leqslant \lambda^* \leqslant 1\} \cup \{(\lambda^*, -1)\ :\ -1 \leqslant \lambda^* \leqslant 1\}. \end{aligned}$$

Vậy $\partial f(\bar{x})$ là tập compắc, không lồi. Tập hợp này là dưới vi phân J-L của f tại $\bar{x}$. Tuy vậy, đó không phải dưới vi phân J-L tối thiểu, vì rằng tập hợp

$$\partial^{\text{JL}} f(\bar{x}) := \{(1, -1),\ (-1, 1)\}$$

cũng là một dưới vi phân J-L của f tại $\bar{x}$ (xem Jeyakumar và Luc (1999)).

Phụ lục A

Đề thi hết môn giải tích đa trị ở Viện Toán học
(Ngày thi: 26/8/2002. Lớp Cao học khoá 8)

Bài 1 (3 điểm).

(a) Nêu định nghĩa ánh xạ đa trị, đồ thị của ánh xạ đa trị, miền hữu hiệu và tập ảnh của ánh xạ đa trị.

(b) Xác định các tập $\mathrm{gph}\, F$, $\mathrm{dom}\, F$, $\mathrm{rge}\, F$ với $F : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ được cho bởi công thức

$$F(x) = \mathrm{co}\{\sin x, \cos x\} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(c) Xét phương trình đại số

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0,$$

ở đó $n \geqslant 2$ là số nguyên cho trước và $a = (a_1, \ldots, a_n)$ là véctơ thực. Ký hiệu $F(a)$ là tập hợp các nghiệm phức của phương trình đã cho. Ánh xạ $F : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{C}$, $a \mapsto F(a)$, có phải là ánh xạ đa trị

- có giá trị khác rỗng?
- có giá trị compắc?
- có giá trị lồi?
- có giá trị đóng?
- tràn (tức là $\mathrm{rge}\, F = \mathbb{C}$)? (*Gợi ý*: Lần lượt chứng tỏ rằng: (i) Với $n = 2$ thì F là tràn, (ii) Với $n > 2$ thì F là tràn.)

Bài 2 (2 điểm).

(a) Phát biểu khái niệm ánh xạ đa trị nửa liên tục trên và ánh xạ đa trị nửa liên tục dưới. Cho hai ví dụ để chứng tỏ rằng đó là hai khái niệm có nội dung hoàn toàn khác nhau.

(b) Phát biểu và chứng minh định lý về sự bảo tồn tính liên thông tôpô qua ánh xạ đa trị nửa liên tục dưới.

Bài 3 (2 điểm).

(a) Phát biểu định lý điểm bất động Kakutani.

(b) Cho các ví dụ thích hợp để chứng tỏ rằng nếu trong phát biểu của định lý ta bỏ đi một trong 4 điều kiện sau (nhưng vẫn giữ nguyên 3 điều kiện kia) thì kết luận của định lý có thể không còn đúng nữa:

(i) G là ánh xạ đa trị nửa liên tục trên,

(ii) G có giá trị lồi,

(iii) G có giá trị đóng,

(iv) G có giá trị khác rỗng,

ở đó G là ánh xạ đa trị được xét.

Bài 4 (2 điểm).

(a) Phát biểu định nghĩa các nón tiếp tuyến $T_M(\bar{x}),\ T^b_M(\bar{x}),\ C_M(\bar{x})$. Nêu mối quan hệ giữa các hình nón đó và hình nón $\overline{\text{cone}(M-\bar{x})}$. Nêu 3 ví dụ (không cần trình bày các tính toán) để chứng tỏ rằng $C_M(\bar{x}) \neq T^b_M(\bar{x}),\ T^b_M(\bar{x}) \neq T_M(\bar{x})$, $T_M(\bar{x}) \neq \overline{\text{cone}(M-\bar{x})}$.

(b) Cho ánh xạ đa trị $F : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$,

$$F(x) = \{y \in \mathbb{R} : x^2 + y^2 \geqslant 1,\ x - y + 1 \leqslant 0\} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

- Hỏi F có phải là ánh xạ đa trị lồi hay không?

- Tính các tập $T_{\text{gph}\,F}(\bar{z})$ và $T_{\text{gph}\,F}(\widehat{z})$, ở đó $\bar{z} = (-1, 0)$ và $\widehat{z} = (0, 1)$.

- Viết công thức của các đạo hàm $DF_{\bar{z}},\ DF_{\widehat{z}},\ CF_{\bar{z}}$, và $CF_{\widehat{z}}$. Hỏi những đạo hàm đó có phải các quá trình lồi đóng hay không? có phải là các ánh xạ tràn hay không?

Bài 5 (1 điểm). Chọn giải một trong hai bài tập sau:

1. Cho X, Y là các không gian tôpô, $F : X \rightrightarrows Y$ là ánh xạ đa trị nửa liên tục trên ở trong X. Chứng minh rằng nếu $\text{dom}\,F$ là tập compắc và F là ánh xạ có giá trị compắc, thì $\text{rge}\,F$ là tập compắc.

2. Cho X, Y là các không gian tôpô, $F : X \rightrightarrows Y$ là ánh xạ đa trị có đồ thị đóng. Chứng minh rằng $F(x)$ là tập đóng với mọi $x \in X$.

Phụ lục B

Đề thi hết môn giải tích đa trị ở Đại học Sư phạm Tp. Hồ Chí Minh
(Ngày thi: 28/8/2003. Lớp Sinh viên chọn, ĐHSP Tp. Hồ Chí Minh)

Bài 1 (2 điểm). Cho ánh xạ đa trị $F : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R},\ F(x) = \{y \in \mathbb{R} \,:\, y \leqslant x^3\}$.
(a) Xác định các tập $\operatorname{dom} F$ và $\operatorname{rge} F$.
(b) F có phải là ánh xạ đa trị lồi hay không?
(c) F có phải là ánh xạ đa trị đóng (tức là ánh xạ có đồ thị đóng) hay không?
(d) Viết công thức tính tập $F^{-1}(y)$ với $y \in \mathbb{R}$.
(e) Xác định tập hợp $\operatorname{gph}(F^{-1} \circ F)$. Tính tập $(F^{-1} \circ F)(x)$ với $x \in \mathbb{R}$.

Bài 2 (2 điểm). Cho

$$M = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x_1 + x_2 \geqslant 2, x_2 \leqslant x_1^3\}, \quad \bar{x} = (1, 1).$$

Tính hình nón Bouligand $T_M(\bar{x})$. Gọi $G : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ là ánh xạ đa trị có đồ thị trùng với hình nón $T_M(\bar{x})$ đó. Xác định các tập $\operatorname{dom} G$ và $\operatorname{rge} G$.

Bài 3 (2 điểm). Cho X, Y là các không gian tôpô, $F : X \rightrightarrows Y$ là ánh xạ đa trị. Chứng minh rằng nếu
(i) $\operatorname{dom} F$ là tập liên thông,
(ii) $F(x)$ là tập liên thông với mọi $x \in \operatorname{dom} F$, và
(iii) F là nửa liên tục dưới ở trong X,
thì $\operatorname{rge} F$ là tập liên thông.

Bài 4 (1 điểm). Cho X, Y là các không gian tuyến tính, $A : X \to Y$ là ánh xạ tuyến tính, $K \subset Y$ là hình nón lồi. Chứng minh rằng $F : X \rightrightarrows Y$ cho bởi công thức $F(x) = Ax + K$ $(x \in X)$ là ánh xạ đa trị lồi. Chứng minh rằng F là ánh xạ đa trị thuần nhất dương, tức là

$$F(\lambda x) = \lambda F(x) \quad (\forall x \in X,\ \forall \lambda \geqslant 0).$$

Bài 5 (1 điểm). Cho X, Y là các không gian tôpô, $F : X \rightrightarrows Y$ là ánh xạ đa trị có đồ thị đóng. Chứng minh rằng $F(x)$ là đóng với mọi $x \in X$.

Bài 6 (1 điểm). Cho X, Y là các không gian tôpô, $F : X \rightrightarrows Y$ là ánh xạ đa trị nửa liên tục trên ở trong X. Chứng minh rằng nếu $\operatorname{dom} F$ là tập compắc và F là ánh xạ đa trị có giá trị compắc thì $\operatorname{rge} F$ là tập compắc.

Bài 7 (1 điểm). Cho X, Y, Z là các không gian định chuẩn, $F : X \rightrightarrows Y$ và $F : Y \rightrightarrows Z$ là các ánh xạ đa trị lồi. Chứng minh rằng $G \circ F : X \rightrightarrows Z$ là ánh xạ đa trị lồi.

Lưu ý: Nếu số người giải được các câu 5-7 không nhiều, thì điểm cho các câu này sẽ được nhân đôi.

Tài liệu tham khảo

1. J.-P. Aubin (1981), *Contingent derivatives of set-valued maps and existence of solutions to nonlinear inclusions and differential inclusions,* Advances in Mathematics, Supplementary studies (L. Nachbin, Ed.), 160–232.

2. J.-P. Aubin (1984), *Lipschitz behavior of solutions to convex minimization problems,* Mathematics of Operations Research Vol. **9**, 87–111.

3. J.-P. Aubin and A. Cellina (1984), *Differential Inclusions. Set-Valued Maps and Viability Theory*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg.

4. J.-P. Aubin and I. Ekeland (1984), *Applied Nonlinear Analysis*, John Wiley & Sons, Wiley-Interscience.

5. J.-P. Aubin and H. Frankowska (1987), *On inverse function theorem for set-valued maps*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées Vol. **66**, 71–89.

6. J.-P. Aubin and H. Frankowska (1990), *Set-Valued Analysis*, Birkhauser, Berlin.

7. A. Auslender (1979), *Differential stability in nonconvex and nondifferentiable programming*, Mathematical Programming Study Vol. **10**, 29–41.

8. A. Auslender and M. Teboulle (2003), *Asymptotic Cones and Functions in Optimization and Variational Inequalities*, Springer, New York.

9. C. Berge (1959), *Espaces topologiques: Fonctions multivoques*, Dunod, Paris.

10. J. F. Bonnans and A. Shapiro (2000), *Perturbation Analysis of Optimization Problems*, Springer, New York.

11. J. M. Borwein (1986), *Stability and regular points of inequality systems*, Journal of Optimization Theory and Applications Vol. **48**, 9–52.

12. J. M. Borwein and Q. J. Zhu (2005), *Techniques of Variational Analysis*, Springer, New York.

13. J. M. Borwein and D. M. Zhuang (1988), *Verifiable necessary and sufficient conditions for regularity of set-valued and single-valued maps*, Journal of Mathematical Analysis and Applications Vol. **134**, 441–459.

14. G. Bouligand (1930), *Sur les surfaces dépourvues de points hyperlimits*, Ann. Soc. Polon. Math. Vol. **9**, 32–41.

15. C. Castaing and M. Valadier (1977), *Convex Analysis and Measurable Functions*, Springer-Verlag.

16. Nguyễn Huy Chiêu (2004), *Sự tồn tại lát cắt đặc biệt của ánh xạ đa trị và khái niệm tích phân Aumann*, Luận văn Thạc sĩ toán học, Đại học Vinh, 2004.

17. N. H. Chieu (2006a), *A Newton-Leibniz formula for the integration of the Clarke subdifferential mapping* (bản thảo đã gửi đăng).

18. N. H. Chieu (2006b), *The contingent cone of the product of two sequential sets in the real line* (bản thảo đã gửi đăng).

19. N. H. Chieu (2006c), *Integral of subdifferential mappings and subdifferential of integral functionals* (bản thảo đã gửi đăng).

20. F. H. Clarke (1983), *Optimization and Nonsmooth Analysis*, Wiley, New York.

21. B. D. Craven (1978), *Mathematical Programming and Control Theory*, Chapman and Hall, London.

22. P. H. Dien (1982), *Locally Lipschitzian set-valued maps and generalized extremal problems,* Acta Mathematica Vietnamica Vol. **8**, 109–122.

23. P. H. Dien (1985), *On the regularity condition for the extremal problem under locally Lipschitz inclusion constraints*, Applied Mathematics and Optimization Vol. **13**, 151–161.

24. P. H. Dien and P. H. Sach (1989), *Further properties of the regularity of inclusion systems*, Nonlinear Analysis Vol. **13**, 1251–1267.

25. P. H. Dien and N. D. Yen (1991), *On implicit function theorems for set-valued maps and their applications to mathematical programming under inclusion constraints*, Applied Mathematics and Optimization Vol. **24**, 35–54.

26. A. L. Donchev and R. T. Rockafellar (1996), *Characterizations of strong regularity for variational inequalities over polyhedral convex sets*, SIAM Journal on Optimization Vol. **6**, 1087–1105.

27. I. Ekeland (1974), *On the variational principle*, Journal of Mathematical Analysis and Applications Vol. **47**, 324–353.

28. J. Gauvin (1979), *The generalized gradient of a marginal function in mathematical programming*, Mathematics of Operations Research Vol. **4**, 458–463.

29. J. Gauvin and F. Dubeau (1982), *Differential properties of the marginal function in mathematical programming*, Mathematical Programming Study Vol. **19**, 101–119.

30. J. Gauvin and F. Dubeau (1984), *Some examples and counterexamples for the stability analysis of nonlinear programming problems*, Mathematical Programming Study Vol. **21**, 69–78.

31. J. Gauvin and J. W. Tolle (1977), *Differential stability in nonlinear programming*, SIAM Journal on Control and Optimization Vol. **15**, 294–311.

32. B. Gollan (1984), *On the marginal function in nonlinear programming*, Mathematics of Operations Research Vol. **9**, 208–221.

33. V. V. Gorokhovik and P. P. Zabreiko (2005), *On Fréchet differentiability of multifunctions*, Optimization Vol. **54**, 391–409.

34. T. X. D. Ha (2005), *Lagrange multipliers for set-valued problems associated with coderivatives*, Journal of Mathematical Analysis and Applications Vol. **311**, 647–663.

35. R. B. Holmes (1974), *Geometric Functional Analysis and Its Applications*, Springer.

36. A. D. Ioffe (2000), *Codirectional compactness, metric regularity and subdifferential calculus*, Canadian Mathematical Society Conference Proceedings Vol. **27**, 123–163.

37. A. D. Ioffe and V. M. Tihomirov (1979), *Theory of Extremal Problems*, North-Holland Publishing Company.

38. V. Jeyakumar and D. T. Luc (1998), *Approximate Jacobian matrices for nonsmooth continuous maps and C^1-optimization*, SIAM Journal on Control and Optimization Vol. **36**, 1815–1832.

39. V. Jeyakumar and D. T. Luc (1999), *Nonsmooth calculus, minimality, and monotonicity of convexificators*, Journal of Optimization Theory and Applications Vol. **101**, 599–621.

40. V. Jeyakumar and D. T. Luc (2002a), *An open mapping theorem using unbounded generalized Jacobians*, Nonlinear Analysis Vol. **50**, 647–663.

41. V. Jeyakumar and D. T. Luc (2002b), *Convex interior mapping theorems for continuous nonsmooth functions and optimization*, Journal of Nonlinear and Convex Analysis Vol. **3**, 251–266.

42. V. Jeyakumar and X. Wang (1999), *Approximate Hessian matrices and second-order optimality conditions for nonlinear programming problems with C^1-data*, Journal of the Australian Mathematical Society Series B Vol. **40**, 403–420.

43. V. Jeyakumar and N. D. Yen (2004), *Solution stability of nonsmooth continuous systems with applications to cone-constrained optimization*, SIAM Journal on Optimization Vol. **14**, 1106–1127.

44. A. Jourani (2000), *Hoffman's error bound, local controllability, and sensitivity analysis*, SIAM Journal on Control and Optimization Vol. **38**, 947–970.

45. J. L. Kelley (1957), *General Topology*, D. Van Nostrand Company, New York.

46. P. K. Khanh (1986), *An induction theorem and general open mapping theorems*, Journal of Mathematical Analysis and Applications Vol. **118**, 519–534.

47. P. K. Khanh (1988), *An open mapping theorem for families of multifunctions*, Journal of Mathematical Analysis and Applications Vol. **132**, 491–498.

48. P. K. Khanh (1989), *On general open mapping theorems*, Journal of Mathematical Analysis and Applications Vol. **144**, 305–312.

49. B. T. Kien, J.-C. Yao and N. D. Yen (2007), *On the solution existence of pseudomonotone variational inequalities*, Journal of Global Optimization (đã được nhận đăng).

50. A. Ja. Kruger and B. Mordukhovich (1980), *Extremal points and the Euler equation in nonsmooth optimization problems* (in Russian), Dokl. Akad. Nauk BSSR Vol. **24**, 684–687 (tiếng Nga).

51. G. M. Lee, N. N. Tam and N. D. Yen (2005), *Quadratic Programming and Affine Variational Inequalities: A Qualitative Study*, Series: "Nonconvex Optimization and its Applications", Vol. **78**, Springer, New York.

52. D. T. Luc (1989), *Theory of Vector Optimization*, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems Vol. **319**, Springer, Berlin-Heidelberg.

53. D. T. Luc (2003), *A Multiplier rule for multiobjective programming problems with continuous data*, SIAM Journal on Optimization Vol. **13**, 168–178.

54. D. T. Luc and C. Malivert (1992), *Invex optimisation problems*, Bulletin of the Australian Mathematical Society Vol. **46**, 47–66.

55. Y. Lucet and J. J. Ye (2001, 2002), *Sensitivity analysis of the value function for optimization problems with variational inequality constraints*, SIAM Journal on Control and Optimization Vol. **40**, 699–723; Erratum. SIAM Journal on Control and Optimization Vol. **41**, 1315–1319.

56. Z. Q. Luo, J.-S. Pang and D. Ralph (1996), *Mathematical Programs with Equilibrium Constraints*, Cambridge University Press, Cambridge, UK.

57. O. L. Mangasarian and T. H. Shiau (1987), *Lipschitz continuity of solutions of linear inequalities, programs and complementarity problems*, SIAM Journal on Control and Optimization Vol. **25**, 583–595.

58. H. Maurer and J. Zowe (1979), *First and second-order necessary and sufficient optimality conditions for infinite-dimensional programming problems*, Mathematical Programming Vol. **16**, 98–110.

59. B. S. Mordukhovich (1976), *Maximum principle in the problem of time response with nonsmooth constraints*, Journal of Applied Mathematics and Mechanics Vol. **40**, 960–969.

60. B. S. Mordukhovich (1988), *Approximation Methods in Problems of Optimization and Control* (in Russian), Nauka, Moscow.

61. B. S. Mordukhovich (1992), *Sensitivity analysis in nonsmooth optimization*, in "Theoretical Aspects of Industrial Design" (D. A. Field and V. Komkov, Eds.), pp. 32–46, SIAM Publications.

62. B. S. Mordukhovich (1993), *Complete characterization of openness, metric regularity, and Lipschitzian properties of multifunctions*, Transactions of the American Mathematical Society Vol. **340**, 1–36.

63. B. S. Mordukhovich (1994a), *Lipschitzian stability of constraint systems and generalized equations*, Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications Vol. **22**, 173–206.

64. B. S. Mordukhovich (1994b), *Generalized differential calculus for nonsmooth and set-valued mappings*, Journal of Mathematical Analysis and Applications Vol. **183**, 250–288.

65. B. S. Mordukhovich (1994c), *Stability theory for parametric generalized equations and variational inequalities via nonsmooth analysis*, Transactions of the American Mathematical Society Vol. **343**, 609–658.

66. B. S. Mordukhovich (1994d), *Sensitivity analysis for constraint and variational systems by using set-valued differentiation*, Optimization Vol. **31**, 13–46.

67. B. S. Mordukhovich (2006a), *Variational Analysis and Generalized Differentiation, I: Basic Theory,* Springer.

68. B. S. Mordukhovich (2006b), *Variational Analysis and Generalized Differentiation, II: Applications*, Springer.

69. B. S. Mordukhovich and N. M. Nam (2005a), *Variational stability and marginal functions via generalized differentiation*, Mathematics of Operations Research Vol. **30**, 800–816.

70. B. S. Mordukhovich and N. M. Nam (2005b), *Subgradient of distance functions with some applications to Lipschitzian stability*, Mathematical Progrgamming Vol. **104**, 635–668.

71. B. S. Mordukhovich and N. M. Nam (2006), *Subgradients of distance functions at out-of-state points*, Taiwanese Journal of Mathematics Vol. **10**, 299–326.

72. B. S. Mordukhovich, N. M. Nam and N. D. Yen (2006), *Fréchet subdifferential calculus and optimality conditions in nondifferentiable programming*, Optimization Vol. **55**, 685–708.

73. B. S. Mordukhovich, N. M. Nam and N. D. Yen (2007), *Subgradients of marginal functions in parametric mathematical programming*, Mathematical Programming (đã được nhận đăng).

74. B. S. Mordukhovich and Y. Shao (1995), *Differential characterizations of covering, metric regularity, and Lipschitzian properties of multifunctions between Banach spaces*, Nonlinear Analysis Vol. **25**, 1401–1424.

75. B. S. Mordukhovich and Y. Shao (1996a), *Nonsmooth analysis in Asplund spaces*, Transactions of the American Mathematical Society Vol. **348**, 1230–1280.

76. B. S. Mordukhovich and Y. Shao (1996b), *Nonconvex differential calculus for infinite-dimensional multifunctions*, Set-Valued Analysis Vol. **4**, 205–236.

77. N. M. Nam and N. D. Yen (2007), *Relationships between approximate Jacobians and coderivatives,* Journal of Nonlinear and Convex Analysis (đã được nhận đăng).

78. H. V. Ngai, D. T. Luc and M. Thera (2000), *Approximate convex functions*, Journal of Nonlinear and Convex Analysis Vol. **1**, 155–176.

79. J. V. Outrata, M. Kocvara and J. Zowe (1998), *Nonsmooth Approach to Optimization Problems with Equilibrium Constraints*, Kluwer, Dordrecht, The Netherlands.

80. J.-P. Penot (1989), *Metric regularity, openness, and Lipschitzian behavior of multifunctions*, Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications Vol. **13**, 629–643.

81. R. R. Phelps (1993), *Convex Functions, Monotone Operators and Differentiability*, 2nd Edition, Springer, Berlin.

82. H. T. Phung and P. H. Dien (1991), *Solving nonsmooth inclusions in the convex case*, Z. Oper. Res. Vol. **35**, 401–424.

83. S. M. Robinson (1976a), *Regularity and stability for convex multivalued functions*, Mathematics of Operations Research Vol. **1**, 130–143.

84. S. M. Robinson (1976b), *Stability theory for systems of inequalities, Part 2: Differentiable nonlinear systems*, SIAM Journal on Numerical Analysis Vol. **13**, 497–513.

85. S. M. Robinson (1979), *Generalized equations and their solutions, Part I: Basic theory*, Mathematical Programming Study Vol. **10**, 128–141.

86. S. M. Robinson (1981), *Some continuity properties of polyhedral multifunctions*, Mathematical Programming Study Vol. **14**, 206–214.

87. R. T. Rockafellar (1970), *Convex Analysis,* Princeton University Press, Princeton, New Jersey.

88. R. T. Rockafellar (1982), *Lagrange multipliers and subderivatives of optimal value functions in nonlinear programming*, Mathematical Programming Study Vol. **17**, 28–66.

89. R. T. Rockafellar (1985), *Extensions of subgradient calculus with applications to optimization*, Nonlinear Analysis Vol. **9**, 665–698.

90. R. T. Rockafellar and R. J-B. Wets (1998), *Variational Analysis*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg.

91. W. Rudin (1976), *Principles of Mathematical Analysis*, Third Edition, McGraw-Hill.

92. W. Rudin (1987), *Real and Complex Analysis*, Third Edition, McGraw-Hill.

93. W. Rudin (1991), *Functional Analyis*, Second Edition, McGraw-Hill.

94. P. H. Sach (1988a), *Differentiability of set-valued maps in Banach spaces*, Mathematische Nachrichten Vol. **139**, 215–235.

95. P. H. Sach (1988b), *Regularity, calmness and support principle*, Optimization Vol. **19**, 13–27.

96. P. H. Sach (1996), *Sufficient conditions for generalized convex set-valued maps,* Optimization Vol. **37**, 293–304.

97. P. H. Sach and N. D. Yen (1997), *Convexity criteria for set-valued maps,* Set-Valued Analysis Vol. **5**, 37–45.

98. F. Severi (1930), *Su ancune questioni di topologia infinitesimale,* Ann. Soc. Polon. Math. Vol. **9**, 97–108.

99. Nguyễn Xuân Tấn và Nguyễn Bá Minh (2006), *Một số vấn đề trong lý thuyết tối ưu véctơ đa trị*, Nhà xuất bản Giáo dục, Hà Nội.

100. L. Thibault (1991), *On subdifferentials of optimal value functions*, SIAM Journal on Control and Optimization Vol. **29**, 1019–1036.

101. L. Thibault and D. Zagrodny (1995), *Integration of subdifferentials of lower semicontinuous functions on Banach spaces*, Journal of Mathematical Analysis and Applications Vol. **189**, 33–58.

102. Hoàng Tụy (2003), *Hàm thực và Giải tích hàm (Giải tích hiện đại)*, NXB đại học Quốc gia Hà Nội.

103. C. Ursescu (1975), *Multifunctions with convex closed graph*, Cechoslovak Mathematical Journal Vol. **25**, 438–441.

104. D. W. Walkup and R. J.-B. Wets (1969), *A Lipschitzian characterization of convex polyhedra*, Proceedings of the American Mathematical Society Vol. **23**, 167–173.

105. X. Wang (2000), *A Generalized Jacobian and Nonsmooth Optimization*, Ph. D. Thesis, University of New South Wales, Sydney.

106. X. Wang and V. Jeyakumar (2000), *A Sharp Lagrange multiplier rule for nonsmooth mathematical programming problems involving equality constraints*, SIAM Journal on Optimization Vol. **10**, 1136–1148.

107. A. R. Warburton (1983), *Quasiconcave vector maximization: Connectedness of the sets of Pareto-optimal and weak Pareto-optimal alternatives*, Journal of Optimization Theory and Applications Vol. **40**, 537–557.

108. Z. Wu and J. J. Ye (2000), *Some results on integration of subdifferentials*, Nonlinear Analyis Vol. **39**, 955–976.

109. J. J. Ye (2001), *Multiplier rules under mixed assumptions of differentiability and Lipschitz continuity*, SIAM Journal on Optimization Vol. **39**, 1441–1460.

110. N. D. Yen (1987), *Implicit function theorems for set-valued maps*, Acta Mathematica Vietnamica Vol. **12**, No. 2, 17–28.

111. N. D. Yen (1997), *Stability of the solution set of perturbed nonsmooth inequality systems and application*, Journal of Optimization Theory and Applications Vol. **93**, 199–225.

112. E. Zeidler (1986), *Nonlinear Functional Analysis and Its Applications, I. Fixed-Point Theorems*, Springer-Verlag, Berlin.

Index