GV: NGUYỄN QUỐC BẢO

Zalo: 039.373.2038

Gmail:Tailieumontoan.com@Gmail.com

Website: Tailieumontoan.com

Facebook:www.facebook.com/baotoanthcs

HỆ PHƯƠNG TRÌNH ĐẠI SỐ

Chuyên đề

HỆ PHƯƠNG TRÌNH ĐẠI SỐ

LƯU HÀNH NỘI BỘ

NGUYỄN QUỐC BẢO

CÁC DẠNG TOÁN & PHƯƠNG PHÁP GIẢI

HỆ PHƯƠNG TRÌNH

- **Dùng bồi dưỡng học sinh giỏi các lớp 8,9**
- **Giúp ôn thi vào lớp 10 chuyên toán**

Lời giới thiệu

Các em học sinh và thầy giáo, cô giáo thân mến !

Cuốn sách *Các dạng toán & phương pháp giải hệ phương trình* được các tác giả biên soạn nhằm giúp các em học sinh học tập tốt môn Toán ở THCS hiện nay và THPT sau này.

Các tác giả cố gắng lựa chọn những bài tập thuộc các dạng điển hình, sắp xếp thành một hệ thống để bồi dưỡng học sinh khá giỏi các lớp THCS. Sách được viết theo các chủ đề tương ứng với các vấn đề quan trọng thường được ra trong các đề thi học sinh giỏi toán THCS, cũng như vào lớp 10 chuyên môn toán trên cả nước. Mỗi chủ đề được viết theo cấu trúc lý thuyết cần nhớ, các dạng toán thường gặp, bài tập rèn luyện và hướng dẫn giải giúp các em học sinh nắm vững kiến thức đồng thời rèn luyện được các kiến thức đã học.

Mỗi chủ đề có ba phần:

A. ***Kiến thức cần nhớ:*** Phần này tóm tắt những kiến thức cơ bản, những kiên thức bổ sung cần thiết để làm cơ sở giải các bài tập thuộc các dạng của chuyên đề.

B. ***Một số ví dụ:*** Phần này đưa ra những ví dụ chọn lọc, tiêu biểu chứa đựng những kĩ năng và phương pháp luận mà chương trình đòi hỏi.

Mỗi ví dụ thường có: Lời giải kèm theo những nhận xét, lưu ý, bình luận và phương pháp giải, về những sai lầm thường mắc nhầm giúp học sinh tích lũy thêm kinh nghiệm giải toán, học toán.

C. ***Bài tập vận dụng***: Phần này, các tác giả đưa ra một hệ thống các bài tập được phân loại theo các dạng toán, tăng dần độ khó cho học sinh khá giỏi. Có những bài tập được trích từ các đề thi học sinh giỏi Toán và đề vào lớp 10 chuyên Toán. Các em hãy cố gắng tự giải. Nếu gặp khó khăn có thể xem hướng dẫn hoặc lời giải ở cuối sách.

Các tác giả hi vong cuốn sách này là một tài liệu có ích giúp các em học sinh nâng cao trình độ và năng lực giải toán, góp phần đào tạo, bồi dưỡng học sinh giỏi ở cấp THCS.

Mặc dù đã có nhiều cố gắng trong biên soạn song cuốn sách này vẫn khó tránh khỏi những sai sót. Chúng tôi mong nhận được những ý kiến đóng góp của bạn đọc.

MỌI Ý KIẾN THẮC MẮC XIN VUI LÒNG GỬI VỀ ĐỊA CHỈ

NGUYỄN QUỐC BẢO

Zalo: 039.373.2038

Tailieumontoan.com@gmail.com

Facebook: www.facebook.com/baotoanthcs

Xin chân thành cảm ơn!

CHỦ ĐỀ

1 MỘT SỐ HỆ PHƯƠNG TRÌNH THƯỜNG GẶP

PHẦN 1. HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Hệ phương trình bậc nhất hai ẩn có dạng: $(I)\ \begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$

Trong đó a và b cũng như a′ và b′ không đồng thời bằng 0.

* Hệ (I) có nghiệm duy nhất khi $\frac{a}{a'}\ne\frac{b}{b'}$

* Hệ (I) vô nghiệm khi $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\ne\frac{c}{c'}$.

* Hệ (I) có vô số nghiệm khi $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng toán 1. Giải phương trình $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$.

PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Để giải hệ phương trình bậc nhất hai ẩn chúng ta thường sử dụng *phương pháp thế* hoặc *phương pháp cộng đại số.*

Cách 1: *Phương pháp thế:*

Bước 1: Từ một phương trình của hệ, biểu thị một ẩn chẳng hạn ẩn x theo ẩn kia

Bước 2: Thế biểu thức của x vào phương trình còn lại rồi thu gọn, ta tìm được giá trị của y.

Bước 3: Thế giá trị của y vào biểu thức của x ta tìm được giá trị của x.

Cách 2: *Phương cộng đại số:*

Bước 1: Nhân các vế của hai phương trình với một số thích hợp (nếu cần) sao cho các hệ số của một ẩn bằng nhau hoặc đối nhau.

Bước 2: Sử dụng quy tắc cộng đại số để được hệ phương trình mới trong đó có một phương trình một ẩn.

Bước 3: Giải hệ phương trình vừa thu được

Chú ý: Nếu hệ phương trình có một ẩn mà hệ số bằng ± 1 thì nên giải hệ này theo phương pháp thế.

📖 **Lưu ý: Khi trong hệ có chứa các biểu thức giống nhau, ta kết hợp phương pháp đặt ẩn phụ để đưa hệ về một hệ mới đơn giản hơn. Sau đó sử dụng phương pháp cộng hoặc thế để tìm ra nghiệm của hệ phương trình.Các bước khi giải hệ bằng phương pháp đặt ẩn phụ:*

Bước 1: Đặt điều kiện để hệ có nghĩa (*nếu cần*).

Bước 2: Đặt ẩn phụ và điều kiện của ẩn phụ *(nếu có).*

Bước 3: Giải hệ theo các ẩn phụ đã đặt.

Bước 4: Trở lại ẩn đã cho để tìm nghiệm của hệ số (*lưu ý với điều kiện lúc đặt ẩn phụ*).

★**Thí dụ 1.** Giải hệ phương trình:

a) $\begin{cases} 3x-2y=11 \\ x+2y=1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=1 \\ \dfrac{3}{x}+\dfrac{4}{y}=5 \end{cases}$

Hướng dẫn giải

a) + *Giải theo phương pháp thế:*

$$\begin{cases} 3x-2y=11 \\ x+2y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2y=11 \\ x=1-2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(1-2y)-2y=11 \\ x=1-2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3-6y-2y=11 \\ x=1-2y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3-8y=11 \\ x=1-2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3-11=8y \\ x=1-2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8y=-8 \\ x=1-2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-1 \\ x=1-2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-1 \\ x=1-2.(-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-1 \\ x=3 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất (x;y) = (3;-1).

+ *Giải theo phương pháp cộng đại số:*

$$\begin{cases} 3x-2y=11 \\ x+2y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x=12 \\ x+2y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ 3+2y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ 2y=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-1 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất (x;y) = (3;-1).

b) + *Giải hệ bằng phương pháp đặt ẩn phụ.*

Điều kiện: $x \neq 0;\ y \neq 0$

Đặt $\frac{1}{x}=a;\frac{1}{y}=b$ (*). Hệ phương trình đã cho tương đương với $\begin{cases}a-b=1\\3a+4b=5\end{cases}$

Ta có: $\begin{cases}a-b=1\\3a+4b=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3a-3b=3\\3a+4b=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}7b=2\\a-b=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=\frac{2}{7}\\a=1+b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=\frac{2}{7}\\a=\frac{9}{7}\end{cases}$

Thay $\begin{cases}b=\frac{2}{7}\\a=\frac{9}{7}\end{cases}$ vào (*) ta có $\begin{cases}\frac{1}{y}=\frac{2}{7}\\\frac{1}{x}=\frac{9}{7}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=\frac{7}{2}\\x=\frac{7}{9}\end{cases}$ (thỏa mãn)

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x;\ y)=\left(\frac{7}{9};\ \frac{7}{2}\right)$

★**Thí dụ 2.** Giải hệ phương trình

a) $\begin{cases}3(x+1)+2(x+2y)=4\\4(x+1)-(x+2y)=9\end{cases}$

b) $\begin{cases}\frac{2}{x}+y=3\\\frac{1}{x}-2y=4\end{cases}$

c) $\begin{cases}x+\frac{1}{y}=\frac{-1}{2}\\2x-\frac{3}{y}=\frac{-7}{2}\end{cases}$

d) $\begin{cases}\frac{3x}{x-1}-\frac{2}{y+2}=4\\\frac{2x}{x-1}+\frac{1}{y+2}=5\end{cases}$

e) $\begin{cases}\frac{4}{x+y}+\frac{1}{y-1}=5\\\frac{1}{x+y}-\frac{2}{y-1}=-1\end{cases}$

f) $\begin{cases}4\sqrt{x}-3\sqrt{y}=4\\2\sqrt{x}+\sqrt{y}=2\end{cases}$

Hướng dẫn giải

a)

$$\begin{cases}3(x+1)+2(x+2y)=4\\4(x+1)-(x+2y)=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x+3+2x+4y=4\\4x+4-x-2y=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5x+4y=1\\3x-2y=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5x+4y=1\\6x-4y=10\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}11x=11\\6x-4y=10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=-1\end{cases}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất $(x;y)=(1;-1)$.

b) Điều kiện $x\neq 0$

$$\begin{cases}\frac{2}{x}+y=3\\ \frac{1}{x}-2y=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{4}{x}+2y=6\\ \frac{1}{x}-2y=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{5}{x}=10\\ \frac{1}{x}-2y=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{1}{2}\\ \frac{2}{x}+y=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{1}{2}\\ y=-1\end{cases}\text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=\left(\frac{1}{2};-1\right)$.

c) Điều kiện $y\neq 0$. Đặt $t=\frac{1}{y}$, hệ phương trình đã cho trở thành

$$\begin{cases}x+t=\frac{-1}{2}\\ 2x-3t=\frac{-7}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=\frac{-1}{2}-x\\ 2x-3\left(\frac{-1}{2}-x\right)=\frac{-7}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=\frac{-1}{2}-x\\ 5x=-5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1\\ t=\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-1\\ y=2\end{cases}\text{(thỏa mãn)}$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất là $(x;y)=(-1;2)$.

d) $(I)\begin{cases}\frac{3x}{x-1}-\frac{2}{y+2}=4\\ \frac{2x}{x-1}+\frac{1}{y+2}=5\end{cases}$ ĐK $x\neq 1; y\neq -2$

Đặt $\begin{cases}\frac{x}{x-1}=a\\ \frac{1}{y+2}=b\end{cases}$. Khi đó hệ phương trình (I) trở thành:

$$\begin{cases}3a-2b=4\\ 2a+b=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3a-2b=4\\ 4a+2b=10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}7a=14\\ 2a+b=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\ b=1\end{cases}$$

Khi đó ta có: $\begin{cases}\frac{x}{x-1}=2\\ \frac{1}{y+2}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\ y=-1\end{cases}$

Vậy hệ phương trình có 1 nghiệm duy nhất $(x;y)=(2;-1)$.

e) $\begin{cases}\frac{4}{x+y}+\frac{1}{y-1}=5\\ \frac{1}{x+y}-\frac{2}{y-1}=-1\end{cases}$. Điều kiện: $x\neq -y; y\neq 1$

Đặt $u=\frac{1}{x+y}$ và $v=\frac{1}{y-1}$. Hệ phương trình thành :

$$\begin{cases}4u+v=5\\u-2v=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}8u+2v=10\\u-2v=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}9u=9\\2v=u+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u=1\\v=1\end{cases}$$

Thay vào hệ đã cho ta có :

$$\begin{cases}\dfrac{1}{x+y}=1\\\dfrac{1}{y-1}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=1\\y-1=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1\\y=2\end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có 1 nghiệm duy nhất $(x;y)=(-1;2)$.

f) Điều kiện: $x\geq 0; y\geq 0$

$$\begin{cases}4\sqrt{x}-3\sqrt{y}=4\\2\sqrt{x}+\sqrt{y}=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4\sqrt{x}-3\sqrt{y}=4\\4\sqrt{x}+2\sqrt{y}=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5\sqrt{y}=0\\2\sqrt{x}+\sqrt{y}=2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{y}=0\\2\sqrt{x}=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=0\\x=1\end{cases}\text{ (Thỏa mãn)}$$

Vậy hệ phương trình có 1 nghiệm duy nhất $(x;y)=(1;0)$.

Dạng toán 2. Tìm điều kiện của tham số để hệ phương trình thỏa mãn điều kiện cho trước.

PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1: Giải hệ phương trình theo tham số m cho trước.

Phương pháp:

Bước 1: Thay giá trị của m vào hệ phương trình.

Bước 2: Giải hệ phương trình mới.

Bước 3: Kết luận.

Dạng 2: Tìm m để hệ phương trình có nghiệm $(x;y)$ thỏa điều kiện cho trước.

Phương pháp:

Bước 1: Giải hệ phương trình tìm nghiệm (x,y) theo tham số m;

Bước 2: Thế nghiệm x,y vào biểu thức điều kiện cho trước, giải tìm m;

Bước 3: Kết luận.

Dạng 3: Tìm mối liên hệ giữa x,y không phụ thuộc vào tham số m.

Phương pháp:

Bước 1: Giải hệ phương trình tìm nghiệm (x, y) theo tham số m;

Bước 2: Dùng phương pháp cộng đại số hoặc phương pháp thế làm mất tham số m;

Bước 3: Kết luận.

★**Thí dụ 1.** Cho hệ phương trình: $\begin{cases}(a+1)x-y=a+1 & (1)\\ x+(a-1)y=2 & (2)\end{cases}$ (a là tham số)

a) Giải hệ phương trình khi $a=2$.

b) Giải và biện luận hệ phương trình.

c) Tìm các số nguyên a để hệ phương trình có nghiệm nguyên

d) Tìm a để nghiệm của hệ phương trình thỏa mãn $x+y$ đạt GTNN.

Hướng dẫn giải

a) Khi $a=2$ hệ phương trình có dạng: $\begin{cases}3x-y=3\\ x+y=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4x=5\\ y=2-x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{5}{4}\\ y=\dfrac{3}{4}\end{cases}$

Vậy với $a=2$ hệ phương trình có nghiệm $(x;y)=\left(\dfrac{5}{4};\dfrac{3}{4}\right)$

b) Giải và biện luận:

Từ PT (1) ta có: $y=(a+1)x-(a-1)$ (3) thế vào PT (2) ta được:

$x+(a+1)\left[(a+1)x-(a-1)\right]=2 \Leftrightarrow x+(a^2-1)x-(a^2-1)=2 \Leftrightarrow a^2x=a^2+1$ (4)

TH1: $a\neq 0$, phương trình (4) có nghiệm duy nhất $x=\dfrac{a^2+1}{a^2}$. Thay vào (3) ta có:

$$y=(a+1)\frac{a^2+1}{a^2}-(a+1)=\frac{(a+1)(a^2+1)-a^2(a+1)}{a^2}=\frac{a^3+a+a^2+1-a^3-a^2}{a^2}=\frac{a+1}{a^2}$$

Suy ra hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x;y)=\left(\dfrac{a^2+1}{a^2};\dfrac{a+1}{a^2}\right)$

TH2: Nếu $a=0$, phương trình (4) vô nghiệm. Suy ra hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

KL: $a\neq 0$ hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x;y)=\left(\dfrac{a^2+1}{a^2};\dfrac{a+1}{a^2}\right)$

$a=0$ hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

Với $a \neq 0$ thì hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x;y)=\left(\dfrac{a^2+1}{a^2};\dfrac{a+1}{a^2}\right)$

c) Hệ phương trình có nghiệm nguyên: $\begin{cases} x \in \mathbb{Z} \\ y \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{a^2+1}{a^2} \in \mathbb{Z} \\ \dfrac{a+1}{a^2} \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad (a \in \mathbb{Z})$

Điều kiện cần: $x=\dfrac{a^2+1}{a^2}=1+\dfrac{1}{a^2} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \dfrac{1}{a^2} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow a^2=1 \Leftrightarrow a=\pm 1$

Điều kiện đủ:

$a=-1 \Rightarrow y=0 \in \mathbb{Z}$ (nhận)

$a=1 \Rightarrow y=2 \in \mathbb{Z}$ (nhận)

Vậy $a=\pm 1$ hệ phương trình đã cho có nghiệm nguyên.

Với $a \neq 0$ thì hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x;y)=\left(\dfrac{a^2+1}{a^2};\dfrac{a+1}{a^2}\right)$

d) Ta có $x+y=\dfrac{a^2+1}{a^2}+\dfrac{a+1}{a^2}=\dfrac{a^2+a+2}{a^2}=1+\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{a^2}$.

Đặt $t=\dfrac{1}{a}$ ta được:

$$x+y=2t^2+t+1=2\left(t^2+\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}\right)=2\left[\left(t+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{7}{16}\right]=2\left(t+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{7}{8} \geq \frac{7}{8}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $t=-\dfrac{1}{4}$, khi đó $a=-4$

Vậy $a=-4$ thì hệ phương trình có nghiệm thỏa mãn $x+y$ đạt GTNN bằng $\dfrac{7}{8}$

★**Thí dụ 2.** Tìm a, b biết hệ phương trình: $\begin{cases} 2x+by=a \\ bx+ay=5 \end{cases}$ có nghiệm $x=1;\ y=3$.

Hướng dẫn giải

Thay $x=1;\ y=3$ vào hệ ta có:

$$\begin{cases} 2.1+b.3=a \\ b.1+a.3=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-3b=2 \\ 3a+b=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a-9b=6 \\ 3a+b=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10b=-1 \\ 3a+b=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=\dfrac{-1}{10} \\ a=\dfrac{17}{10} \end{cases}.$$

Vậy $a=\frac{-1}{10}$; $y=\frac{17}{10}$ thì hệ phương trình có nghiệm $x=1$; $y=3$.

★**Thí dụ 3.** Cho hệ phương trình $\begin{cases}x+2y=m+3\\2x-3y=m\end{cases}(I)$ (m là tham số).

a) Giải hệ phương trình (I) khi $m=1$.

b) Tìm m để hệ (I) có nghiệm duy nhất $(x;y)$ thỏa mãn $x+y=-3$.

Hướng dẫn giải

a) Với $m=1$, hệ phương trình (I) có dạng:

$$\begin{cases}x+2y=4\\2x-3y=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+4y=8\\2x-3y=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x,y)=(2;1)$.

b) $$\begin{cases}x+2y=m+3\\2x-3y=m\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+4y=2m+6\\2x-3y=m\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+2y=m+3\\7y=m+6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{5m+9}{7}\\y=\dfrac{m+6}{7}\end{cases}$$

Hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=\left(\frac{5m+9}{7};\frac{m+6}{7}\right)$.

Lại có $x+y=-3$ hay $\frac{5m+9}{7}+\frac{m+6}{7}=-3\Leftrightarrow 5m+9+m+6=-21\Leftrightarrow 6m=-36\Leftrightarrow m=-6$

Vậy với $m=-6$ thì hệ phương trình (I) có nghiệm duy nhất (x,y) thỏa mãn $x+y=-3$.

★**Thí dụ 4.** Cho hệ phương trình: $\begin{cases}2x+y=5m-1\\x-2y=2\end{cases}$.

Tìm m để hệ phương trình có nghiệm thỏa mãn: $x^2-2y^2=-2$

Hướng dẫn giải

$$\begin{cases}2x+y=5m-1\\x-2y=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=5m-1-2x\\x-2(5m-1-2x)=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=5m-1-2x\\5x=10m\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2m\\y=m-1\end{cases}$$

Thay vào ta có

$$x^2-2y^2=-2\Leftrightarrow(2m)^2-2(m-1)^2=-2\Leftrightarrow 2m^2+4m=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\\m=-2\end{array}\right.$$ Vậy $m\in\{-2;0\}$.

★**Thí dụ 5.** Cho hệ phương trình: $\begin{cases}(m-1)x+y=2\\ mx+y=m+1\end{cases}$ (m là tham số)

a) Giải hệ phương trình khi $m=2$;

b) Chứng minh rằng với mọi giá trị của m thì hệ phương trình luôn có nghiệm duy nhất $(x;y)$ thỏa mãn: $2x+y\le 3$.

Hướng dẫn giải

a) Giải hệ phương trình khi $m=2$.

Ta có: $\begin{cases}x+y=2\\ 2x+y=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=2\\ x=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ y=1\end{cases}$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(1;1)$.

b) Ta có $y=2-(m-1)x$ thế vào phương trình còn lại ta được phương trình:

$mx+2-(m-1)x=m+1\Leftrightarrow x=m-1$ suy ra $y=2-(m-1)^2$ với mọi m

Vậy hệ phương trình luôn có nghiệm duy nhất $(x;y)=\left(m-1;2-(m-1)^2\right)$

$2x+\ y=2(m-1)+2-(m-1)^2=-m^2+4m-1=3-(m-2)^2\le 3$ với mọi m.

★**Thí dụ 6.** Cho hệ phương trình : $\begin{cases}2x+ay=-4\\ ax-3y=5\end{cases}$

a) Giải hệ phương trình với $a=1$

b) Tìm a để hệ phương trình có nghiệm duy nhất.

Hướng dẫn giải

a) Với $a=1$, ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases}2x+y=-4\\ x-3y=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}6x+3y=-12\\ x-3y=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}7x=-7\\ x-3y=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1\\ -1-3y=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1\\ y=-2\end{cases}$$

Vậy với $a=1$, hệ phương trình có nghiệm duy nhất là: $(x;y)=(-1;-2)$.

b) Ta xét 2 trường hợp:

+ Nếu $a=0$, hệ có dạng: $\begin{cases}2x=-4\\ -3y=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-2\\ y=-\dfrac{5}{3}\end{cases}$. Vậy hệ có nghiệm duy nhất

+ Nếu $a \neq 0$, hệ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi: $\frac{2}{a} \neq \frac{a}{-3} \Leftrightarrow a^2 \neq -6$ (luôn đúng, vì $a^2 \geq 0$ với mọi a)

Do đó, với $a \neq 0$, hệ luôn có nghiệm duy nhất.

Tóm lại hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất với mọi a.

★Thí dụ 7. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x + my = m + 1 \\ mx + y = 2m \end{cases}$ (m là tham số)

a) Giải hệ phương trình khi $m = 2$.

b) Tìm m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y)$ thỏa mãn $\begin{cases} x \geq 2 \\ y \geq 1 \end{cases}$

Hướng dẫn giải

a) Thay $m = 1$ ta có hệ phương trình $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 3 \\ 4x + 2y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 5 \\ 2x + y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{3} \\ y = \frac{2}{3} \end{cases}$

b) Xét hệ $\begin{cases} x + my = m + 1 & (1) \\ mx + y = 2m & (2) \end{cases}$

Từ $(2) \Rightarrow y = 2m - mx$ thay vào (1) ta được

$x + m(2m - mx) = m + 1 \Leftrightarrow 2m^2 - m^2x + x = m + 1$

$\Leftrightarrow (1 - m^2)x = -2m^2 + m + 1 \Leftrightarrow (m^2 - 1)x = 2m^2 - m - 1 \qquad (3)$

Hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow (3)$ có nghiệm duy nhất

$m^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 1 \quad (*)$

Khi đó hệ đã cho có nghiệm duy nhất $\begin{cases} x = \frac{2m+1}{m+1} \\ y = \frac{m}{m+1} \end{cases}$

Ta có $\begin{cases} x \geq 2 \\ y \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2m+1}{m+1} \geq 2 \\ \frac{m}{m+1} \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-1}{m+1} \geq 0 \\ \frac{-1}{m+1} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m + 1 < 0 \Leftrightarrow m < -1$

Kết hợp với $(*)$ ta được giá trị m cần tìm là $m < -1$.

★**Thí dụ 8.** Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x-2y=5 & (1) \\ mx-y=4 & (2) \end{cases}$

a) Giải hệ phương trình với $m=2$.

b) Tìm m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất (x,y) trong đó x,y trái dấu.

c) Tìm m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)$ thỏa mãn $x=|y|$.

Hướng dẫn giải

a) Với $m=2$ ta có hệ phương trình: $\begin{cases} x-2y=5 \\ 2x-y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2y+5 \\ 2(2y+5)-y=4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2y+5 \\ 3y=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases}$. Vậy $m=2$ hệ có nghiệm duy nhất $(x;y)=(1;-2)$

b) Từ phương trình (1) ta có $x=2y+5$. Thay $x=2y+5$ vào phương trình (2) ta được:
$m(2y+5)-y=4 \Leftrightarrow (2m-1).y=4-5m \quad (3)$

Hệ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi (3) có nghiệm duy nhất. Điều này tương đương với:
$2m-1\neq 0 \Leftrightarrow m\neq \frac{1}{2}$.

Từ đó ta được: $y=\frac{4-5m}{2m-1}$; $\quad x=5+2y=\frac{3}{2m-1}$.

Ta có: $x.y=\frac{3(4-5m)}{(2m-1)^2}$. Do đó $x.y<0 \Leftrightarrow 4-5m<0 \Leftrightarrow m>\frac{4}{5}$ (thỏa mãn điều kiện)

c) Ta có: $x=|y| \Leftrightarrow \frac{3}{2m-1}=\left|\frac{4-5m}{2m-1}\right| \quad (4)$

Từ (4) suy ra $2m-1>0 \Leftrightarrow m>\frac{1}{2}$. Với điều kiện $m>\frac{1}{2}$ ta có:

$(4) \Leftrightarrow |4-5m|=3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4-5m=3 \\ 4-5m=-3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=\frac{1}{5}(l) \\ m=\frac{7}{5} \end{array}\right.$. Vậy $m=\frac{7}{5}$.

★**Thí dụ 9.** Cho hệ phương trình: $\begin{cases} mx+(m+1)y=1 \\ (m+1)x-my=8m+3 \end{cases}$.

Chứng minh hệ luôn có nghiệm duy nhất $(x;y)$

Hướng dẫn giải

Xét hai đường thẳng $(d_1): mx+(m+1)y-1=0; (d_2): (m+1)x-my-8m+3=0$.

+ Nếu $m=0$ thì $(d_1): y-1=0$ và $(d_2): x-5=0$ suy ra (d_1) luôn vuông góc với (d_2).

+ Nếu $m=-1$ thì $(d_1): x+1=0$ và $(d_2): y+11=0$ suy ra (d_1) luôn vuông góc với (d_2).

+ Nếu $m \neq \{0;1\}$ thì đường thẳng $(d_1),(d_2)$ lần lượt có hệ số góc là: $a_1=-\frac{m}{m+1}, a_2=\frac{m+1}{m}$ suy ra $a_1.a_2=-1$ do đó $(d_1)\perp(d_2)$.

Tóm lại với mọi m thì hai đường thẳng (d_1) luôn vuông góc với (d_2). Nên hai đường thẳng luôn vuông góc với nhau.

Xét hai đường thẳng $(d_1): mx+(m+1)y-1=0; (d_2): (m+1)x-my-8m+3=0$ luôn vuông góc với nhau nên nó cắt nhau, suy ra hệ có nghiệm duy nhất

B. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài tập 1. Giải các hệ phương trình:

a) $\begin{cases} 2x+y=5 \\ x-y=1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x+5y=-3 \\ 3x-y=4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x-y=1 \\ 3x+2y=3 \end{cases}$

Bài tập 2. Giải các hệ phương trình:

1. $\begin{cases} x-2y=1 \\ 2x+y=7 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 7x-2y=1 \\ 3x+y=6 \end{cases}$ 3. $\begin{cases} x+y=3 \\ x-2y=0 \end{cases}$ 4. $\begin{cases} \frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y=3 \\ 4x-3y=7 \end{cases}$

Bài tập 3. Giải các hệ phương trình:

4. $\begin{cases} \dfrac{2x+3}{y-1}=\dfrac{4x+1}{2y+1} \\ \dfrac{x+2}{y-1}=\dfrac{x-4}{y+2} \end{cases}$ 5. $\begin{cases} \dfrac{x-y}{2}+\dfrac{x-3y}{4}=0 \\ \dfrac{3x-5y+1}{2}-1=0 \end{cases}$ 6. $\begin{cases} \frac{1}{2}(x+2)(y+3)=\frac{1}{2}xy+50 \\ \frac{1}{2}(x-2)(y-2)=\frac{1}{2}xy-32 \end{cases}$

Bài tập 4. Giải các hệ phương trình:

1) $\begin{cases} \dfrac{1}{x+y}-\dfrac{2}{x-y}=2 \\ \dfrac{5}{x+y}-\dfrac{4}{x-y}=3 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{3}{2x-y}+\dfrac{5}{2x+y}=2 \\ \dfrac{1}{2x-y}+\dfrac{1}{2x+y}=\dfrac{2}{15} \end{cases}$ 3) $\begin{cases} \dfrac{2}{x}+\dfrac{5}{x+y}=2 \\ \dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x+y}=1{,}7 \end{cases}$

Bài tập 5. Giải các hệ phương trình:

1) $\begin{cases}\sqrt{x}+2\sqrt{y-1}=5\\ 4\sqrt{x}-\sqrt{y-1}=2\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\sqrt{3x-1}-\sqrt{2y+1}=1\\ 2\sqrt{3x-1}+3\sqrt{2y+1}=12\end{cases}$ 3) $\begin{cases}\dfrac{7}{\sqrt{x-7}}-\dfrac{4}{\sqrt{y+6}}=\dfrac{5}{3}\\ \dfrac{5}{\sqrt{x-7}}+\dfrac{3}{\sqrt{y+6}}=2\dfrac{1}{6}\end{cases}$

Bài tập 6. Cho hệ phương trình: $\begin{cases}mx+4y=20 & (1)\\ x+my=10 & (2)\end{cases}$ (m là tham số)

Với giá trị nào của m hệ đã cho:

a) Vô nghiệm
b) Có nghiệm duy nhất
c) Vô số nghiệm

Bài tập 7. Cho hệ phương trình: $\begin{cases}mx+y=-1\\ x+y=-m.\end{cases}$

Tìm m để phương trình có nghiệm duy nhất (x, y) thỏa mãn: $y=x^2$

Bài tập 8. Tìm nghiệm nguyên a để hệ phương trình $\begin{cases}2x-3y=2-a\\ x+2y=3a+1\end{cases}$

Có nghiệm (x; y) sao cho T = $\dfrac{y}{x}$ là số nguyên.

(Trích đề tuyển sinh lớp 10 Chuyên Tây Ninh năm 2014-2015)

Bài tập 9. Định m nguyên để hệ có nghiệm duy nhất là nghiệm nguyên $\begin{cases}mx+2y=m+1\\ 2x+my=2m-1\end{cases}$

Bài tập 10. Cho hệ phương trình: $\begin{cases}mx-y=2\\ 3x+my=5\end{cases}$

a) Giải hệ phương trình khi $m=\sqrt{2}$.

b) Tìm giá trị của m để hệ phương trình đã cho có nghiệm (x; y) thỏa mãn hệ thức $x+y=1-\dfrac{m^2}{m^2+3}$.

(Trích đề vào lớp 10 Chuyên Quảng Nam năm 2008-2009)

PHẦN 2. HỆ GỒM MỘT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI VÀ MỘT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng toán 1. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 & (1) \\ Ax + By + c = 0 & (2) \end{cases}$$

PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Ta sử dụng phương pháp thế:

Bước 1: Từ phương trình (2) rút x hoặc y rồi thế vào phương trình (1). Khi đó ta được phương trình bậc hai theo x hoặc y, giả sử: $f(x) = 0 \quad (3)$

Bước 2: Phương trình (3) là phương trình bậc hai ẩn x (hoặc y) chúng ra dễ dàng giải, ta có được x rồi suy ra y.

Bước 3: Kết luận nghiệm.

★**Thí dụ 1.** Giải hệ phương trình:

a) $\begin{cases} 9x^2 + 4y^2 = 36 & (1) \\ 2x + y = 5 & (2) \end{cases} \quad (I)$ b) $\begin{cases} x + y = 9 \\ x^2 + y^2 = 41 \end{cases}$

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $(I) \Rightarrow 25x^2 - 40x + 64 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{8}{5} \Rightarrow y = \frac{9}{5}$

Vậy hệ có nghiệm $(x, y) = \left(\frac{8}{5}; \frac{9}{5}\right)$.

b) Ta có: $\begin{cases} x + y = 9 & (1) \\ x^2 + y^2 = 41 & (2) \end{cases}$

Từ (1) $\Rightarrow y = 9 - x \Rightarrow (2) \Leftrightarrow x^2 + (9 - x)^2 = 41$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 18x + 40 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{lll} x = 4 & \Rightarrow & y = 5 \\ x = 5 & \Rightarrow & y = 4 \end{array}\right.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm (4,5); (5,4)

★**Thí dụ 2.** Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 + 2x + y = 6 & (1) \\ 2x + y = 3 & (2) \end{cases}$ (I)

Hướng dẫn giải

Từ (2) ta được: $y = 3 - 2x$

Thế vào (1) ta được:

$$x^2 + x(3-2x) + (3-2x)^2 + 2x + (3-2x) = 6 \Leftrightarrow 3x^2 - 9x + 6 = 0 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 2$$

Với x = 1 thì y = 1

Với x = 2 thì y = -1.

Vậy hệ có nghiệm $(x, y) = (1;1), (2;-1)$.

Chú ý: Ngoài phương pháp thế tùy vào từng bài toán ta còn có thể giải bằng phương pháp đưa phương trình có bậc 2 của hệ về dạng tích.

★**Thí dụ 3.** Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2(xy + 2) \\ x + y = 6 \end{cases}$

Hướng dẫn giải

Vế trái của phương trình thứ hai phân tích được thành nhân tử, nên phương trình trở thành $(x - y - 2)(x - y + 2) = 0$. Hệ phương trình đã cho tương đương với hai hệ phương trình sau:

❖ $\begin{cases} x - y + 2 = 0 \\ x + y = 6 \end{cases}$

❖ $\begin{cases} x - y - 2 = 0 \\ x + y = 6 \end{cases}$

Giải từng hệ trên bằng phép thế, ta tìm được các nghiệm của hệ phương trình đã cho: (-1;1); (1;-1).

Dạng toán 2. Tìm điều kiện của tham số để hệ thỏa mãn điều kiện cho trước.

$$\begin{cases} ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 & (1) \\ Ax + By + c = 0 & (2) \end{cases}$$

PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Ta ta thực hiện các bước sau:

Bước 1: Từ phương trình (2) rút x hoặc y rồi thế vào phương trình (1). Khi đó ta được phương trình bậc hai theo x hoặc y, giả sử: $f(x,m)=0 \quad (3)$

Bước 2: Giải và biện luận hệ theo tham số ta sẽ đi giải và biện luận (3).

- Tìm điều kiện của tham số để hệ có nghiệm ta sẽ đi tìm điều kiện để (3) có nghiệm.
- Tìm điều kiện của tham số để hệ có nghiệm duy nhất ta sẽ đi tìm điều kiện để 93) có nghiệm duy nhất.
- Tìm điều kiện của tham số để hệ có 2 nghiệm phân biệt ta sẽ đi tìm điều kiện để (3) có 2 nghiệm phân biệt.

Bước 3: Kết luận giá trị tham số cần tìm.

★Thí dụ 1. Cho $\begin{cases} 9x^2-16y^2=144 & (1) \\ x-y=m & (2) \end{cases}$

Tìm m để hệ có nghiệm duy nhất.

Hướng dẫn giải

Ta có: $(I) \Rightarrow 9x^2-16(x-m)^2=144 \Leftrightarrow 7x^2-32mx+16m^2+144=0. \quad (3)$

Hệ có nghiệm duy nhất khi (3) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \Delta'=0 \Leftrightarrow m^2=7 \Leftrightarrow m=\pm\sqrt{7}$.

Vậy với $m=\pm\sqrt{7}$ thỏa mãn điều kiện đầu bài.

★Thí dụ 2. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x+y=2m+1 \\ x^2y+y^2x=2m^2-m-1 \end{cases}$, với *m* là tham số.

Chứng minh rằng hệ luôn có nghiệm với mọi *m*.

(Trích đề Chuyên Phú Yên năm 2012-2013)

Hướng dẫn giải

Chứng minh rằng hệ luôn có nghiệm với mọi *m*

Hệ đã cho viết lại là: $\begin{cases} x+y=2m+1 \\ xy(x+y)=(2m+1)(m-1) \end{cases}$

(1) Nếu $m=-\dfrac{1}{2}$ thì hệ trở thành: $\begin{cases} x+y=0 \\ xy(x+y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow x+y=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x\in R \\ y=-x \end{cases}$.

Hệ có vô số nghiệm.

(2) Nếu $m\neq-\dfrac{1}{2}$ thì hệ trở thành: $\begin{cases} x+y=2m+1 \\ xy=m-1 \end{cases}$

Nên *x,y* là nghiệm phương trình: $X^2-(2m+1)X+m-1=0$ (*).

P/t (*) có $\Delta=(2m+1)^2-4(m-1)=4m^2+5>0, \forall m$ nên luôn có nghiệm.

Vậy hệ phương trình luôn có nghiệm với mọi m.

★**Thí dụ 3.** Cho $\begin{cases} a\left(x^2+y^2\right)+x+y=b & (1) \\ y-x \qquad\qquad\quad =b & (2) \end{cases}$

Chứng minh rằng: a= 0 có nghiệm với $\forall b$

Hướng dẫn giải

Từ (2):

$\Rightarrow y=b+x$

$\Rightarrow (1) \Leftrightarrow a[x^2+(b+x)^2]+x+b+x=b$

$\Leftrightarrow 2ax^2+2(ab+1)x+ab^2=0$

i) a = 0: Phương trình $\Leftrightarrow x=0$ có nghiệm với $\forall b$

2i) a $\neq$ 0 Ta có: $\Delta'=(ab+1)^2-2a^2b^2$

$=-a^2b^2+2ab+1$

Chọn b = $-\dfrac{2}{a} \Rightarrow \Delta'=-4-4+1=-7<0$

Hay phương trình không có nghiệm với $\forall b$

Vậy a= 0.

★**Thí dụ 4.** Với giá trị nào của m, hệ phương trình:

$\begin{cases} x^2+y^2=25 & (1) \\ mx-y=3m-4 & (2) \end{cases}$ có nghiệm kép?

Hướng dẫn giải

Từ (2) $y=mx+4-3m$ thế vào phương trình (1) ta có:

$$\left(m^2+1\right)x^2+2m(4-3m)x+\left(9m^2-24m-9\right)=0 \qquad (3)$$

Hệ có nghiệm kép khi và chỉ khi phương trình (3) có nghiệm kép

$\Leftrightarrow \Delta'=(4m+3)^2=0$

$\Leftrightarrow m=-\dfrac{3}{4}$

★**Thí dụ 5.** Biết cặp số (x,y) là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x+y=m \\ x^2+y^2=-m^2+6 \end{cases}$$

Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của $P = xy + 2(x+y)$

Hướng dẫn giải

Đặt $u = x+y; v = xy$ ta có: $\begin{cases} u = m \\ u^2 - 2v = -m^2 + 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = m \\ v = m^2 - 3 \end{cases}$

Như vậy x, y là nghiệm của phương trình:

$$t^2 - mt + m^2 - 3 = 0(*)$$

Để x, y tồn tại $\Leftrightarrow$ (*) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta = -3m^2 + 12 \geq 0$

$$\Leftrightarrow -2 \leq m \leq 2$$

Khi đó: $P = xy + 2(x+y) = m^2 + 2m - 3 = (m+1)^2 - 4 \geq 0$ với mọi m

Do đó P đạt giá trị nhỏ nhất là 4 khi m = -1.

★**Thí dụ 6.** Biết cặp số (x, y) là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y = 2a - 1 \\ x^2 + y^2 = a^2 + 2a - 3 \end{cases}$$

Xác định tham số của a để hệ thoả mãn tích xy nhỏ nhất.

Hướng dẫn giải

Rút y từ phương trình đầu $y = 2a - 1 - x$, thế vào phương trình sau ta được:

$$2x^2 - (2a-1)x + 3a^2 - 6a + 4 = 0(*)$$

Để x, y tồn tại $\Leftrightarrow$ (*) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' \geq 0$

$$\Leftrightarrow -2a^2 + 8a - 7 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 2 - \frac{\sqrt{2}}{2} \leq a \leq 2 + \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (1)$$

Với a thoả mãn (1) hệ phương trình có nghiệm. Phương trình được viết lại như sau:

$$(x+y)^2 - 2xy = a^2 + 2a - 3$$

$$\Leftrightarrow (2a-1)^2 - 2xy = a^2 + 2a - 3$$

$$\Leftrightarrow xy = \frac{3a^2 - 6a + 4}{2}$$

Từ đó suy ra xy nhỏ nhất khi $a = 2 - \frac{\sqrt{2}}{2}$, khi đó suy ra giá trị tương ứng của xy.

B. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài tập 1. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 9 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$.

Bài tập 2. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + 3y^2 = 13 \\ 3x + 5y = 13 \end{cases}$.

Bài tập 3. Tìm m để hệ sau có nghiệm duy nhất $\begin{cases} x - y = m(1 + xy) \\ 2 + x + y + xy = 0 \end{cases}$.

Bài tập 4: Cho hệ phương trình $\begin{cases} x + my - m = 0 \\ x^2 + y^2 - x = 0 \end{cases}$

Tìm m để hệ phương trình có 2 nghiệm phân biệt $(x_1; y_1)$;$(x_2; y_2)$sao cho:

A= $(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$ đạt giá trị lớn nhất.

Bài tập 5. Giải biện luận hệ phương trình sau: $\begin{cases} x^2 - y^2 + 2x = 2 \\ x + y = m \end{cases}$.

PHẦN 3. HỆ PHƯƠNG TRÌNH ĐỐI XỨNG LOẠI I

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Hệ đối xứng loại I là hệ có dạng: $\begin{cases} f(x,y)=0 \\ g(x,y)=0 \end{cases}$

Trong đó f(x, y) và g(x, y) là các đa thức đối xứng.

Nghĩa là: f(x, y) = f(y, x) và g(x, y) = g(y,x)

Hay hệ phương trình đối xứng loại I là hệ phương trình có vai trò x, y hoàn toàn như nhau trong mỗi phương trình, nếu ta hoán đổi vị trí x và y trong hệ thì hệ phương trình không thay đổi. Ví dụ: $\begin{cases} x+y+2xy=21 \\ 2x^2+2y^2-xy=7 \end{cases}$

Tính chất: Nếu hệ có nghiệm $(x_0;y_0)$ thì do tính đối xứng, hệ cũng có nghiệm là $(y_0;x_0)$.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng toán 1. Giải hệ phương trình đối xứng loại I: $\begin{cases} f(x,y)=0 \\ g(x,y)=0 \end{cases}$

Trong đó f(x, y) và g(x, y) là các đa thức đối xứng.

PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

1) Biến đổi các phương trình của hệ đưa về ẩn *S* và *P* mà: $S = x + y$, $P = x.y$. Giải được *S* và *P* . Khi đó *x, y* là nghiệm của phương trình: $X^2 - S.X + P = 0$

2) Đôi khi ta phải đặt ẩn phụ u = u(x), v = v(x) và S = u + v, P = uv.

3) Có những hệ phương trình trở thành đối xứng I sau khi đặt ẩn phụ.

Một số hằng đẳng thức hay được được sử dụng:

$$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=S^2-2P$$

$$x^2-xy+y^2=(x+y)^2-3xy=S^2-3P$$

$$x^2+xy+y^2=(x+y)^2-xy=S^2-P$$

$$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=S^3-3PS$$

$$x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2=\left[(x+y)^2-2xy\right]^2-2x^2y^2=(S^2-2P)^2-2P^2$$

$$x^4+x^2y^2+y^4=(x^2+y^2-xy)(x^2+y^2+xy)=(S^2-2P)^2-P^2$$

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{x+y}{xy}=\frac{S}{P};$$

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{x^2+y^2}{x^2y^2}=\frac{S^2-2P}{P^2};$$

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{x^2+y^2}{xy}=\frac{S^2-2P}{P}$$

★**Thí dụ 1.** Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x+y+xy=-1 \\ x^2+y^2-xy=7 \end{cases}$

Hướng dẫn giải

Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)+xy=-1 \\ (x+y)^2-3xy=7 \end{cases}$

Đặt $\begin{cases} x+y=S \\ xy=P \end{cases}$ $\left(\exists x,\ y \Leftrightarrow S^2 \geq 4P\right)$ ta được $\begin{cases} S+P=-1 \\ S^2-3P=7 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} S=1,\ P=-2 \\ S=-4,\ P=3 \end{array}\right.$

TH 1. $\begin{cases} S=1 \\ P=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ xy=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1,\ y=2 \\ x=2,\ y=-1 \end{array}\right.$

TH 2. $\begin{cases} S=-4 \\ P=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=-4 \\ xy=3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1,\ y=-3 \\ x=-3,\ y=-1 \end{array}\right.$.

★**Thí dụ 2.** Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3+x^3y^3+y^3=17 \\ x+xy+y=5 \end{cases}$

Hướng dẫn giải

$$\begin{cases} x^3+x^3y^3+y^3=17 \\ x+xy+y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^3+x^3y^3-3xy(x+y)=17 \\ (x+y)+xy=5 \end{cases}$$

Đặt $x+y=a;\ xy=b$. Hệ đã cho trở thành:

$$\begin{cases} a^3+b^3-3ab=17 \\ a+b=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=5-b \\ b^2-5b+6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=5-b \\ (b-2)(b-3)=0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a=2 \\ b=3 \end{cases}$

Với $\begin{cases} a=3 \\ b=2 \end{cases}$ ta có hệ phương trình $\begin{cases} x+y=3 \\ xy=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3-y \\ y^2-3y+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3-y \\ (y-1)(y-2)=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$

Với $\begin{cases} a=2 \\ b=3 \end{cases}$ ta có hệ phương trình $\begin{cases} x+y=2 \\ xy=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2-y \\ y^2-2y+3=0 \end{cases}$ (vô nghiệm)

Vậy nghiệm của hệ đã cho là: $(x;y) = (1;2);\ (2;1)$

★**Thí dụ 3.** Giải hệ phương trình: $\begin{cases} xy(x+y)=2 \\ x^3+y^3+x^3y^3+7(x+1)(y+1)=31 \end{cases}$

(Trích đề Chuyên KHTN Hà Nội năm 2018-2019)

Hướng dẫn giải

Ta có hệ phương trình:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy(x+y)=2 \\ (x+y)(x^2-xy+y^2)+(xy)^3+7(x+y+xy+1)=31 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy(x+y)=2 \\ (x+y)\left[(x+y)^2-3xy\right]+(xy)^3+7\left[(x+y)+xy+1\right]=31 \end{cases}$$

Đặt $a=x+y; b=xy$ thì hệ trên trở thành: $\begin{cases} ab=2 \\ a(a^2-3b)+b^3+7(a+b+1)=31 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ab=2 \\ a^3-3ab+b^3+7(a+b+1)=31 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (a+b)\left[(a+b)^2-3ab\right]-3ab+7(a+b+1)=31$$

$$\Leftrightarrow (a+b)^3-3ab(a+b)-3ab+7(a+b)-24=0$$

$$\Rightarrow (a+b)^3-6(a+b)-3.2+7(a+b)-24=0$$

$$\Leftrightarrow (a+b)^3+(a+b)-30=0$$

$$\Leftrightarrow (a+b)^3-27+(a+b)=3$$

$$\Leftrightarrow (a+b-3)\left[(a+b)^2+3(a+b)+10\right]=0$$

$$\Rightarrow a+b=3\left(\text{do} \quad (a+b)^2+3(a+b)+10>0\right)$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} a+b=3 \\ ab=2 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases} \ (\text{do } a^2=(x+y)^2 \geq 4xy=4b)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y=2 \\ xy=1 \end{cases} \Rightarrow x=y=1$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(x;y)=(1;1)$

★**Thí dụ 4.** Giải hệ phương trình $\begin{cases} x-y-xy=3 \\ x^2+y^2+2x-2y=6 \end{cases}$

Hướng dẫn giải

Đây không phải là phương trình đối xứng loại một nhưng bằng một phép đặt ẩn phụ t = -y ta được hệ: $\begin{cases} x+t+tx=3 \\ x^2+y^2+2x+2t=6 \end{cases}$ là hệ đối xứng loại I

Đặt: $\begin{cases} x+y=S \\ xy=P \end{cases}$ $\left(\exists x,\ y \Leftrightarrow S^2 \ge 4P\right)$ ta được:

$$\begin{cases} S+P=3 \\ S^2-2P+2S-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P=3-S & (1) \\ S^2-2(3-S)+2S-6=0 & (2) \end{cases}$$

Giải (2): $\Leftrightarrow S^2+4S-12=0$

$\Leftrightarrow S^2-2S+6S-12=0$

$\Leftrightarrow (S-2)(S+6)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} S=2 \Rightarrow P=1 \\ S=-6 \Rightarrow P=9 \end{array}\right.$

Khi đó:

i) $\begin{cases} S=2 \\ P=1 \end{cases}$ ta có x, t là nghiệm của hệ phương trình

X^2 - 2X +1 =0 $\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ t=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$

2i) $\begin{cases} S=-6 \\ P=9 \end{cases}$ ta có x, t là nghiệm của hệ phương trình

X^2 + 6X + 9 =0 $\Leftrightarrow \begin{cases} x=-3 \\ t=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=3 \end{cases}$

Dạng toán 2. Tìm giá trị của tham số m để hệ phương trình đối xứng loại I có nghiệm thỏa mãn điều kiện nào đó.

PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Bước 1: Đặt điều kiện (nếu có).

Bước 2: Đặt S = x + y, P = xy với điều kiện của S, P và $S^2 \ge 4P$ (*).

Bước 3: Thay x, y bởi S, P vào hệ phương trình. Giải hệ tìm S, P theo m rồi từ điều kiện (*) và điều kiện bài toán để tìm m.

Chú ý: Khi ta đặt ẩn phụ u = u(x), v = v(x) và S = u + v, P = uv thì nhớ tìm chính xác điều kiện u,v.

★**Thí dụ 1.** Tìm m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất: $\begin{cases} x+y+xy=m+2 \\ x^2y+xy^2=m+1 \end{cases}$

Hướng dẫn giải

Hệ phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+xy=m+2 \\ xy(x+y)=m+1 \end{cases}$

Đặt $\begin{cases} u = x + y \\ v = xy \end{cases}$ Điều kiện: $u^2 \geq 4v$

Hệ phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} u + v = m + 2 \\ uv = m + 1 \end{cases} \Rightarrow$ u, v là nghiệm của phương trình:

$$X^2 - (m+2)X + m + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} X = m+1 \\ X = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \begin{cases} u = 1 \\ v = m+1 \end{cases} & (1) \\ \begin{cases} u = m+1 \\ v = 1 \end{cases} & (2) \end{array}\right.$$

Để hệ phương trình có nghiệm duy nhất: $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} (1) \quad có \quad nghiệm \quad duy \quad nhất \\ (2) VN \end{cases} \\ \begin{cases} (2) \quad có \quad nghiệm \quad duy \quad nhất \\ (1) VN \end{cases} \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 1 = 4(m+1) \\ (m+1)^2 < 4 \end{cases} \\ \begin{cases} 1 < 4(m+1) \\ (m+1)^2 = 4 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = \dfrac{-3}{4} \\ \begin{cases} m > \dfrac{-3}{4} \\ \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -3 \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = \dfrac{-3}{4} \\ m = 1 \end{array}\right.$$

Vậy $m = -\dfrac{3}{4}$ và $m = 1$ là giá trị cần tìm.

★**Thí dụ 2.** Tìm m để hệ phương trình. $\begin{cases} x + y + xy = m + 1 \\ x^2 y + xy^2 = m \end{cases}$

Có nghiệm (x, y) sao cho $x > 0$, $y > 0$.

Hướng dẫn giải

Hệ phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + xy = m + 1 \\ xy(x + y) = m \end{cases}$

Đặt $\begin{cases} u = x + y \\ v = xy \end{cases}$ Điều kiện: $u^2 \geq 4v$

Hệ phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} u + v = m + 1 \\ uv = m \end{cases}$

$\Rightarrow$ u, v là nghiệm của phương trình: $X^2 - (m+1)X + m = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} X = m \\ X = 1 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u = 1 \\ v = m \end{cases} \\ \begin{cases} u = m \\ v = 1 \end{cases} \end{array}\right.$$

Để hệ phương trình có nghiệm $(x, y): x > 0,\ y > 0$

$$\begin{cases} u^2 \geq 4v \\ u > 0 \\ v > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 1 > 4m \\ m > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} m^2 \geq 4 \\ m > 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \frac{1}{4} \geq m \\ m > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m \geq 2 \\ m \leq -2 \end{array}\right. \\ m > 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 \leq m \leq \frac{1}{4} \\ m \geq 2 \end{array}\right.$$

Vậy $0 \leq m \leq \frac{1}{4}$ và $m \geq 2$ là giá trị cần tìm.

★**Thí dụ 3.** Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2(1+m) \\ (x+y)^2 = 4 \end{cases}$

Xác định m để hệ có đúng hai nghiệm.

Hướng dẫn giải

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2(1+m) \\ (x+y)^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 - 2xy = 2(1+m) \\ (x+y)^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 = 4 \\ xy = 7 - m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = \pm 2 \\ xy = 7 - m \end{cases}.$$

Khi đó hệ phương trình tương đương với:

$\begin{cases} x + y = 2 \\ xy = 7 - m \end{cases}$ là nghiệm của phương trình $t^2 - 2t + 7 - m = 0 \quad (1)$

Hoặc

$\begin{cases} x + y = -2 \\ xy = 7 - m \end{cases}$ là nghiệm của phương trình $t^2 + 2t + 7 - m = 0 \quad (2)$

Nhận xét: $\Delta'_{(1)} = \Delta'_{(2)} = m - 6$

Do đó để hệ có đúng 2 nghiệm thì phương trình (1) và (2) có nghiệm kép:

$\Leftrightarrow \Delta'_{(1)} = \Delta'_{(2)} = 0 \Leftrightarrow m - 6 = 0 \Leftrightarrow m = 6.$

C. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài tập 1: Giải hệ phương trình:

a) $\begin{cases} x + xy + y = 11 \\ x^2y + xy^2 = 30 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x^2y + xy^2 = 30 \\ x^3 + y^3 = 35 \end{cases}$

Bài tập 2: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x - y - xy = 3 \\ x^2 + y^2 + 2x - 2y = 6 \end{cases}$

Bài tập 3: Giải hệ phương trình.

a) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + xy = \dfrac{1}{2} \\ x + y = \dfrac{3}{2}xy \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 7 \\ x^4 + y^4 + x^2y^2 = 21 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x - \dfrac{1}{x} = y - \dfrac{1}{y} \\ 2x^2 - xy - 1 = 0 \end{cases}$

Bài tập 4: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 - 2(x + y) = -31 \\ x + xy + y = 11 \end{cases}$

Bài tập 5: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + xy = \dfrac{7}{2} \\ 2(x + y) = 3xy \end{cases}$

Bài tập 6: Tìm m để hệ có nghiệm

a) $\begin{cases} x + y + xy = m \\ x^2y + xy^2 = 3m - 9 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 + y^2 + 4x + 4y = 10 \\ xy(x + 4)(y + 4) = m \end{cases}$

Bài tập 7: Tìm m để hệ có nghiệm: $\begin{cases} x + y - xy = 1 - m \\ 5(x + y) - 4xy = 4 \end{cases}$

Bài tập 8: Chứng tỏ với mọi m phương trình sau luôn có nghiệm: $\begin{cases} x + y + xy = 2m + 1 \\ xy(x + y) = m^2 + m \end{cases}$

Xác định m để hệ có nghiệm duy nhất.

PHẦN 3. HỆ PHƯƠNG TRÌNH ĐỐI XỨNG LOẠI II

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Hệ đối xứng loại II là hệ có dạng: $\begin{cases} f(x,y)=0 \\ f(y,x)=0 \end{cases}$

Trong đó: f(x, y) là đa thức không đối xứng.

Hay hệ đối xứng kiểu hai là hệ đối xứng giữa hai phương trình của hệ, nếu ta hoán đổi vị trí của x và y trong phương trình thứ nhất sẽ được phương trình thứ hai của hệ. Ví dụ: $\begin{cases} x^2-2y=1 & (1) \\ y^2-2x=1 & (2) \end{cases}$ khi thay hoán đổi vị trí của x và y ở phương trình (1) ta được $y^2-2x=1$ đây chính là phương trình (2)

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng toán 1. Giải hệ phương trình đối xứng loại II: $\begin{cases} f(x,y)=0 \\ f(y,x)=0 \end{cases}$

Trong đó f(x, y) là đa thức không đối xứng.

PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Cách 1:

Bước 1: Đặt điều kiện nếu có

Bước 2: Trừ từng vế hai phương trình của hệ ta được nhân tử chung (x – y) nhóm lại và đưa về phương tích và sau đó xét hai trường hợp:

$$(x-y).A(x,y)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y \\ A(x,y)=0 \end{array}\right.$$

Bước 3: Thay vào 1 trong 2 phương trình trên để giải ra nghiệm.

Việc trừ theo vế thường phải sử dụng hằng đẳng thức hoặc liên hợp nếu chứa căn:

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$$
$$a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)$$
$$\sqrt{a}-\sqrt{b}=\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$
$$\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}=\frac{a\pm b}{\sqrt[3]{a^2}\mp\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}$$

Cách 2: (Cách 2 dùng khi cách giải 1 không dùng được).

Cộng và trừ lần lượt hai phương trình đưa về hệ phương trình mới tương đương gồm hai phương trình tích (thông thường tương đương với 4 hệ phương trình mới).

<u>Chú ý:</u>

Do tính đối xứng, cho nên nếu $(x_0;y_0)$ là nghiệm của hệ thì $(y_0;x_0)$ cũng là nghiệm của hệ. Vì vậy nếu hệ có nghiệm duy nhất thì $x_0 = y_0$.

★**Thí dụ 1.** Giải hệ phương trình:

a) $\begin{cases} 3y = \dfrac{y^2+2}{x^2} \\ 3x = \dfrac{x^2+2}{y^2} \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 2x + \dfrac{1}{y} = \dfrac{3}{x} \\ 2y + \dfrac{1}{x} = \dfrac{3}{y} \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x = y^2 - 4y + 5 \\ 2y = x^2 - 4x + 5 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} x^3 = 2x + y \\ y^3 = 2y + x \end{cases}$

Hướng dẫn giải

a) $\begin{cases} 3y = \dfrac{y^2+2}{x^2} \\ 3x = \dfrac{x^2+2}{y^2} \end{cases}$ Điều kiện: $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$

Hệ phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2y = y^2 + 2 & (1) \\ 3y^2x = x^2 + 2 & (2) \end{cases}$

Lấy (1) - (2) vế theo vế:

$$3xy(x-y) = y^2 - x^2$$

$$\Leftrightarrow 3xy(x-y) + x^2 - y^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)(3xy + x + y) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - y = 0 \\ 3xy + x + y = 0 \quad (VN) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow x = y$$

Khi đó: Hệ phương trình $\Rightarrow 3x^3 = x^2 + 2$

$$\Leftrightarrow 3x^3 - x^2 - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(3x^2 + 2x + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 1 = 0 \\ 3x^2 + 2x + 2 = 0 \quad (VN) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow x=1 \Rightarrow y=1$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là: (1,1)

b) $\begin{cases} 2x = y^2 - 4y + 5 & (1) \\ 2y = x^2 - 4x + 5 & (2) \end{cases}$

Lấy (1) - (2) vế theo vế:

$$x^2 - y^2 - 2x + 2y = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)(x+y-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x - y = 0 & \\ x + y - 2 = 0 & (VN) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow x = y$$

Khi $x = y$ Hệ phương trình $\Rightarrow 2x = x^2 - 4x + 5$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x-5) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 1 = 0 \\ x - 5 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \Rightarrow y = 1 \\ x = 5 \Rightarrow y = 5 \end{array}\right.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là: (1,1); (5;5).

c) $\begin{cases} 2x + \dfrac{1}{y} = \dfrac{3}{x} \\ 2y + \dfrac{1}{x} = \dfrac{3}{y} \end{cases}$

Điều kiện: $\begin{cases} x \neq 0 \\ y \neq 0 \end{cases}$

Hệ phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2y + x = 3y & (1) \\ 2xy^2 + y = 3x & (2) \end{cases}$

Lấy (1) - (2) vế theo vế:

$$2xy(x-y) + (x-y) = 3(y-x)$$

$$\Leftrightarrow 2xy(x-y) + 4(x-y) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)(2xy+4) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-y=0 \\ 2xy+4=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y \\ xy=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y \\ y=\dfrac{-2}{x} \end{array}\right.$$

Khi đó:

i) $x=y$

Hệ phương trình: $\Leftrightarrow 2x^3+x=3x$

$\Leftrightarrow 2x^3-2x=0$

$\Leftrightarrow 2x\left(x^2-1\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \quad loại \\ x=\pm 1 \end{array}\right.$

Hay (1,1); (-1,-1)

2i) $y=\dfrac{-2}{x}$

Hệ phương trình $\Leftrightarrow 2x^2\left(\dfrac{-2}{x}\right)+x=3\left(\dfrac{-2}{x}\right)$

$\Leftrightarrow -4x+x=\dfrac{-6}{x}$

$\Leftrightarrow x^2=2$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\sqrt{2} \quad \Rightarrow y=-\sqrt{2} \\ x=-\sqrt{2} \quad \Rightarrow y=\sqrt{2} \end{array}\right.$

Hay: $\left(\sqrt{2};-\sqrt{2}\right),\left(-\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là: (1,1); (-1,-1); $\left(\sqrt{2};-\sqrt{2}\right),\left(-\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$

d) $\begin{cases} x^3=2x+y & (1) \\ y^3=2y+x & (2) \end{cases}$

Trừ với cộng (1) với (2) ta được: $\begin{cases} x^3-y^3=2x-2y+y-x \\ x^3+y^3=2x+2y+y+x \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)\left(x^2+xy+y^2\right)=2(x-y)-(x-y) \\ (x+y)\left(x^2-xy+y^2\right)=2(x+y)+(x+y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)\left(x^2+xy+y^2-1\right)=0 \\ (x+y)\left(x^2-xy+y^2-3\right)=0 \end{cases}$$

Hệ đã cho tương đương với bốn hệ phương trình:

(I) $\begin{cases} x+y=0 \\ x-y=0 \end{cases}$ hay (II) $\begin{cases} x+y=0 \\ x^2+xy+y^2-1=0 \end{cases}$

Hay (III) $\begin{cases} x-y=0 \\ x^2-xy+y^2-3=0 \end{cases}$ hay (IV) $\begin{cases} x^2+xy+y^2-1=0 \\ x^2-xy+y^2-3=0 \end{cases}$

(I) $\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ x-y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$

(II) $\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ x^2+xy+y^2-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x \\ x^2-x^2+x^2-1=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y=-x \\ x^2-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x \\ x^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x \\ x=\pm 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases} \end{array}\right.$

(III) $\Leftrightarrow \begin{cases} x-y=0 \\ x^2-xy+y^2-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=0 \\ x^2-xy+y^2-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x \\ x^2-x^2+x^2-3=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y=x \\ x^2-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x \\ x^2=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x \\ x=\pm\sqrt{3} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=-\sqrt{3} \\ y=-\sqrt{3} \end{cases} \\ \begin{cases} x=\sqrt{3} \\ y=\sqrt{3} \end{cases} \end{array}\right.$

(IV) $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+xy+y^2-1=0 \\ x^2-xy+y^2-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2-xy=1 \\ (x+y)^2-3xy=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy=-1 \\ x+y=0 \end{cases}$

$\Rightarrow x, y$ là nghiệm của phương trình: $X^2-1=0 \Leftrightarrow X^2=1 \Leftrightarrow X=\pm 1$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases} \end{array}\right.$

Vậy hệ phương trình có 5 nghiệm: (0;0); (1;-1); (-1;1); $(\sqrt{3};\sqrt{3})$; $(-\sqrt{3};-\sqrt{3})$.

★**Thí dụ 2.** Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+\sqrt{x}=2y \\ y^2+\sqrt{y}=2x \end{cases}$

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $x, y \geq 0$.

Trừ hai phương trình của hệ cho nhau ta thu được:

$$x^2+\sqrt{x}-\left(y^2+\sqrt{y}\right)=2\left(y-x\right)$$
$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\left[\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(x+y\right)+1+2\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\right]=0$$

Vì $\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(x+y\right)+1+2\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)>0$

nên phương trình đã cho tương đương với: $x=y$.

Hay $x^2-2x+\sqrt{x}=0 \Leftrightarrow x^2+\sqrt{x}=2x \Leftrightarrow \sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}-1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$

Vậy hệ có 3 cặp nghiệm: $\left(x;y\right)=\left(0;0\right),\left(1;1\right),\left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2};\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$

★**Thí dụ 3.** Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3+3x-1+\sqrt{2x+1}=y \\ y^3+3y-1+\sqrt{2y+1}=x \end{cases}$

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $x \geq -\dfrac{1}{2}; y \geq -\dfrac{1}{2}$

Để ý rằng $x=y=-\dfrac{1}{2}$ không phải là nghiệm.

Ta xét trường hợp $x+y \neq -1$

Trừ hai phương trình của hệ cho nhau ta thu được:

$$x^3+3x-1+\sqrt{2x+1}-\left(y^3+3y-1+\sqrt{2y+1}\right)=y-x$$

$$\Leftrightarrow (x-y)\left[x^2+xy+y^2\right]+4(x-y)+\frac{2\left(x-y\right)}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{2y+1}}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)\left[x^2+xy+y^2+4+\frac{2}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{2y+1}}\right]=0\Leftrightarrow x=y$$

Khi $x=y$ xét phương trình: $x^3+2x-1+\sqrt{2x+1}=0\Leftrightarrow x^3+2x+\sqrt{2x+1}-1=0$

$$x(x^2+1)+\frac{2x}{\sqrt{2x+1}+1}=0\Leftrightarrow x\left[x^2+1+\frac{2}{\sqrt{2x+1}+1}\right]=0\Leftrightarrow x=0$$

Tóm lại hệ phương trình có nghiệm duy nhất: $x=y=0$

★**Thí dụ 4.** Giải hệ phương trình $\begin{cases}\left(x-1\right)\left(y^2+6\right)=y\left(x^2+1\right)\\ \left(y-1\right)\left(x^2+6\right)=x\left(y^2+1\right)\end{cases}$

Hướng dẫn giải

Hệ đã cho $\Leftrightarrow \begin{cases}xy^2+6x-y^2-6=yx^2+y\\ yx^2+6y-x^2-6=xy^2+x\end{cases}$

Trừ vế theo vế hai phương trình của hệ ta được:

$$2xy\left(y-x\right)+7\left(x-y\right)+\left(x-y\right)\left(x+y\right)=0\Leftrightarrow\left(x-y\right)\left(x+y-2xy+7\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=y\\ x+y-2xy+7=0\end{array}\right.$$

\+ Nếu $x=y$ thay vào hệ ta có: $x^2-5x+6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=y=2\\ x=y=3\end{array}\right.$

\+ Nếu $x+y-2xy+7=0\Leftrightarrow\left(1-2x\right)\left(1-2y\right)=15$.

Mặt khác khi cộng hai phương trình của hệ đã cho ta được:

$$x^2+y^2-5x-5x+12=0\Leftrightarrow\left(2x-5\right)^2+\left(2y-5\right)^2=2.$$

Đặt $a=2x-5, b=2y-5$

Ta có: $\begin{cases} a^2+b^2=2 \\ (a+4)(b+4)=15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+b)^2-2ab=2 \\ ab+4(a+b)=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a+b=0 \\ ab=-1 \end{cases} \\ \begin{cases} a+b=-8 \\ ab=31 \end{cases} \end{array}\right.$

Trường hợp 1: $\begin{cases} a+b=0 \\ ab=-1 \end{cases} \Leftrightarrow (x;y)=(3;2),(2;3)$

Trường hợp 2: $\begin{cases} a+b=-8 \\ ab=31 \end{cases}$ vô nghiệm.

Vậy nghiệm của hệ đã cho là: $(x;y)=(2;2),(3;3),(2;3),(3;2)$

Dạng toán 2. Hệ có dạng $\begin{cases} f(x,y)=0 \\ g(x,y)=0 \end{cases}$,

Trong đó chỉ có một phương trình đối xứng

PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Đưa phương trình đối xứng về dạng tích, giải y theo x (hay x theo y) rồi thế vào phương trình còn lại.

★**Thí dụ 1.** Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x-\dfrac{1}{x}=y-\dfrac{1}{y} \quad (1) \\ 2x^2-xy-1=0 \quad (2) \end{cases}$

Hướng dẫn giải

ĐK: $x \neq 0; y \neq 0$

Ta có: (1) $\Leftrightarrow (x-y)-\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}\right)=0$

$\Leftrightarrow (x-y)xy+(x-y)=0$

$\Leftrightarrow (x-y)(xy+1)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-y=0 \\ xy+1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=x \\ xy=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=x \\ y=-\dfrac{1}{x} \end{array}\right.$

i) Khi $y=x$

$\Rightarrow (2) \Leftrightarrow 2x^2-x^2-1=0$

$\Leftrightarrow x^2=1$

$\Leftrightarrow x=\pm 1 \Rightarrow y=\pm 1$

ii) Khi $y = -\frac{1}{x}$

$$\Rightarrow (2) \Leftrightarrow 2x^2 + 1 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ (loại)}$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm phân biệt: (1;1); (-1;-1).

★**Thí dụ 2.** Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x - \frac{1}{x} = y - \frac{1}{y} \\ 2y = x^3 + 1 \end{cases}$

Hướng dẫn giải

Đặt $\begin{cases} x - \frac{1}{x} = y - \frac{1}{y} & (1) \\ 2y = x^3 + 1 & (2) \end{cases}$

Điều kiện: $x \neq 0; y \neq 0$.

Ta có: $(1) \Leftrightarrow (x - y) - \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right) = 0$

$$\Leftrightarrow (x - y)xy + (x - y) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - y)(xy + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - y = 0 \\ xy + 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = x \\ xy = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = x \\ y = -\frac{1}{x} \end{array}\right.$$

i) Khi $y = x \Rightarrow (2) \Leftrightarrow x^3 - 2x + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow (x - 1)(x^2 - x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 1 = 0 \\ x^2 + x - 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \Rightarrow y = 1 \\ x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow y = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$$

ii) Khi $y = -\frac{1}{x} \Rightarrow (2) \Leftrightarrow x^3 + 2\frac{1}{x} + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow x^4 + x + 2 = 0 \quad \text{(vô nghiệm)}$$

Vậy hệ phương trình có ba nghiệm phân biệt:

$(1;1)$; $\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2};\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2};\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)$

Dạng toán 3. Tìm giá trị của tham số m để hệ phương trình đối xứng loại II có nghiệm duy nhất.

PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Điều kiện cần: Giả sử hệ phương trình có nghiệm duy nhất, tìm các giá trị của tham số, lưu ý đến tính đối xứng.

Điều kiện đủ: Với các giá trị m vừa tìm, thử lại xem hệ phương trình có nghiệm duy nhất không.

★ **Thí dụ 1.** Tìm m để hệ có nghiệm duy nhất $\begin{cases} x = y^2 - y + m & (*) \\ y = x^2 - x + m \end{cases}$

Hướng dẫn giải

Điều kiện cần: Nhận xét rằng: nếu hệ có nghiệm (x_0, y_0) thì cũng có nghiệm (y_0, x_0), do đó có nghiệm duy nhất thì $x_0 = y_0$.

Khi đó: $(*) \Leftrightarrow x_0 = x_0^2 - x_0 + m \Leftrightarrow x_0^2 - 2x_0 + m = 0 \qquad (3)$

Do x_0 duy nhất nên phương trình (3) có nghiệm duy nhất.

$\Leftrightarrow \Delta'_{(3)} = 0 \Leftrightarrow 1 - m = 0 \Leftrightarrow m = 1.$

Đó chính là điều kiện cần để hệ có nghiệm duy nhất.

Điều kiện đủ: Với m = 1, hệ có dạng:

$$\begin{cases} x = y^2 - y + 1 \\ y = x^2 - x + 1 \end{cases} \Rightarrow x + y = y^2 - y + 1 + x^2 - x + 1$$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = 1.$

Nghiệm thỏa mãn hệ và là nghiệm duy nhất .

Vậy, với m = 1 hệ có nghiệm duy nhất.

★ **Thí dụ 2.** Tìm m để hệ có nghiệm duy nhất $\begin{cases} (x-2)^2 + y^2 = m & (1) \\ x^2 + (y-2)^2 = m & (2) \end{cases}$

Hướng dẫn giải

Điều kiện cần: Nhận xét rằng: nếu hệ có nghiệm (x_0, y_0) thì cũng có nghiệm (y_0, x_0), do đó có nghiệm duy nhất thì $x_0 = y_0$.

Khi đó: $(x_0-2)^2+x_0^2=m \Leftrightarrow 2x_0^2-4x_0+4-m=0 \qquad (3)$

Do x_0 duy nhất nên phương trình (3) có nghiệm duy nhất

$\Leftrightarrow \Delta'_{(3)}=0 \Leftrightarrow 2m-4=0 \Leftrightarrow m=2.$

Đó chính là điều kiện cần để hệ có nghiệm duy nhất.

Điều kiện đủ: Với m = 2, hệ có dạng:

$$\begin{cases}(x-2)^2+y^2=2\\ x^2+(y-2)^2=2\end{cases} \qquad (2)$$

$\Rightarrow (x-2)^2+y^2+x^2+(y-2)^2=4 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y-1)^2=0 \Leftrightarrow x=y=1.$

Nhận xét rằng x = y = 1 thỏa mãn hệ (II).

Vậy hệ có nghiệm duy nhất khi m = 2.

★ **Thí dụ 3.** Tìm m để hệ có nghiệm duy nhất $\begin{cases}x^3=y^2+7x^2-mx\\ y^3=x^2+7y^2-my\end{cases}$

Hướng dẫn giải

- Điều kiện cần:

Hệ phương trình có nghiệm (x,y) thì cũng có nghiệm (y,x)

$\Rightarrow$Hệ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow x=y$

Khi đó hệ phương trình: $x^3=x^2+7x-mx$ có nghiệm duy nhất

$$\Leftrightarrow x^3-8x^2+mx=0$$

$$\Leftrightarrow x(x^2-8x+m)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}x^2-8x+m=0 & (VN)\\ x^2-8x+m=0 & có\quad một\quad nghiệm\quad kép\quad x=0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\Delta'=16-m<0\\ \begin{cases}\Delta'=16-m=0\\ m=0\end{cases} \quad vôlí\end{array}\right. \Leftrightarrow m>16$$

- Điều kiện đủ: m > 16

Lấy (1) - (2) vế theo vế:

$$x^3-y^3=6(x^2-y^2)-m(x-y)$$

$$\Leftrightarrow x^3-y^3-6(x^2-y^2)+m(x-y)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)\left[x^2+xy+y^2-6(x+y)+m\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-y=0 \\ x^2+(y-6)x+y^2-6y+m=0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y \\ x^2+(y-6)x+y^2-6y+m=0 \end{array}\right.$$

Khi đó:

i) $y=x$

Hệ phương trình $\Leftrightarrow x^3=x^2+7x^2-mx$

$$\Leftrightarrow x^3-8x^2+mx=0$$

$$\Leftrightarrow x\left(x^2-8x+m\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x=0 & \\ x^2-8x+m=0 & (VN) \end{array}\right.$$

$\Rightarrow$ hệ có nghiệm duy nhất (0, 0)

2i) $x^2+(y-6)x+y^2-6y+m=0$

Ta có: $\Delta x=(y-6)^2-4\left(y^2-6y+m\right)$

$$=-3y^3+12y+36-4m$$

$$\Delta y=36+3(36-4m)$$

$$=144-12m$$

$$=12(12-m)<0$$

$\Rightarrow \Delta x<0$ hay phương trình vô nghiệm ($\Delta<0$ phương trình cùng dấu với a)

Vậy m > 16

C. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài tập 1: Giải hệ phương trình:

a) $\begin{cases} x^3+2x=y \\ y^3+2y=x \end{cases}$

b) $\begin{cases} x-\dfrac{1}{x}=y-\dfrac{1}{y} \\ 2y=x^3+1 \end{cases}$

Bài tập 2: Giải hệ phương trình:

a) $\begin{cases} x^3 = 2x + y \\ y^3 = 2y + x \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + y = \dfrac{3}{x^2} \\ 2y + x = \dfrac{3}{y^2} \end{cases}$

Bài tập 3: Giải hệ phương trình:

a) $\begin{cases} 3x = \dfrac{x^2 + 2}{y^2} \\ 3y = \dfrac{y^2 + 2}{x^2} \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x^2 = y + \dfrac{1}{y} \\ 2y^2 = x + \dfrac{1}{x} \end{cases}$

Bài tập 4: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 - 3y + 2 = 0 \\ y^2 - 3x + 2 = 0 \end{cases}$

Bài tập 5: Cho hệ phương trình

a) $\begin{cases} 2x^2 = y + \dfrac{a^2}{y} \\ 2y^2 = x + \dfrac{a^2}{x} \end{cases}$ b) $\begin{cases} y^2 = x^3 - 4x^2 + ax \\ x^2 = y^3 - 4y^2 + ay \end{cases}$

Tìm a để hệ phương trình có nghiệm duy nhất

PHẦN 4. HỆ PHƯƠNG TRÌNH CÓ YẾU TỐ ĐẲNG CẤP

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

+ Là những hệ có dạng: $\begin{cases} f^k(x,y)=c_1 \\ g^k(x,y)=c_2 \end{cases}$

Trong đó f(x, y) và g(x, y) là các đa thức bậc k của x và y (k = $\frac{1}{2}$, 1, 2, 3,….) và không chứa thành phần nhỏ hơn k.

+ Hoặc các phương trình của hệ khi nhân hoặc chia cho nhau thì tạo ra phương trình đẳng cấp.

Ta thường gặp dạng hệ này ở các hình thức như:

+ $\begin{cases} ax^2+bxy+cy^2=d \\ ex^2+gxy+hy^2=k \end{cases}$,

+ $\begin{cases} ax^2+bxy+cy^2=dx+ey \\ gx^2+hxy+ky^2=lx+my \end{cases}$,

+ $\begin{cases} ax^2+bxy+cy^2=d \\ gx^3+hx^2y+kxy^2+ly^3=mx+ny \end{cases}$

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Phương pháp chung để giải hệ dạng này là: Từ các phương trình của hệ ta nhân hoặc chia cho nhau để tạo ra phương trình đẳng cấp bậc n:

$$a_1x^n+a_kx^{n-k}.y^k....+a_ny^n=0$$

Từ đó ta xét hai trường hợp:

$y=0$ thay vào để tìm x

+ $y\neq 0$ ta đặt $t=\frac{x}{y}$ thì thu được phương trình: $a_1t^n+a_kt^{n-k}....+a_n=0$

+ Giải phương trình tìm t sau đó thế vào hệ ban đầu để tìm x,y

Chú ý: (Ta cũng có thể đặt $y=tx$)

★**Thí dụ 1.** Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x^2+3xy+y^2=12 & (1) \\ x^2-xy+3y^2=11 & (2) \end{cases}$

(Trích đề thi thử Chuyên Nguyễn Huệ năm 2015-2016)

Lời giải

HPT $\Leftrightarrow \begin{cases} 22x^2+33xy+11y^2=121 \\ 12x^2-12xy+36y^2=121 \end{cases} \Leftrightarrow 10x^2+45xy-25y^2=0 \Leftrightarrow 2x^2+9xy-5y^2=0\ (3)$

-

Ta thấy $y=0$ không là nghiệm của phương trình.

Chia hai vế phương trình (3) cho y^2 ta được $2.\left(\frac{x}{y}\right)^2+9.\left(\frac{x}{y}\right)-5=0$

Đặt $t=\frac{x}{y}$ ($t>0$) Khi đó: $2t^2+9t-5=0 \Leftrightarrow (2t-1)(t+5)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\frac{1}{2} \\ t=-5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{y}{2} \\ x=-5y \end{array}\right.$

Với $x=\frac{y}{2}$ thay vào (1) ta được:

$$\frac{y^2}{2}+\frac{3}{2}y^2+y^2=12 \Leftrightarrow y^2=4 \Leftrightarrow y=\pm 2 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases};\begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \end{cases}$$

Với $x=-5y$ thay vào (1) ta được:

$$50y^2-15y^2+y^2=12 \Leftrightarrow 36y^2=12 \Leftrightarrow y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{-5\sqrt{3}}{3} \\ y=\frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases};\begin{cases} x=\frac{5\sqrt{3}}{3} \\ y=-\frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là:

$(x;y)=(1;2),(-1;-2),\left(-\frac{5\sqrt{3}}{3};\frac{\sqrt{3}}{3}\right),\left(\frac{5\sqrt{3}}{3};-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

★**Thí dụ 2.** Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2-2y^2=-1 \\ 2x^3-y^3=2y-x \end{cases}$

(Trích đề Chuyên Vũng Tàu năm 2019-2020)

Lời giải

Để ý rằng nếu nhân chéo 2 phương trình của hệ ta có: $2x^3-y^3=(x^2-2y^2)(x-2y)$ đây là phương trình đẳng cấp bậc 3: Từ đó ta có lời giải như sau:

$$\begin{cases} x^2-2y^2=-1 & (1) \\ 2x^3-y^3=2y-x & (2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2x^3-y^3=\left(x^2-2y^2\right)\left(x-2y\right)\Leftrightarrow x^3+2x^2y+2xy^2-5y^3=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x-y\right)\left(x^2+3xy+5y^2\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=y\\ x^2+3xy+5y^2=0\end{array}\right..$$

TH1: $x=y$, thay vào phương trình (1) ta được $x=y=\pm 1$.

TH2: $x^2+3xy+5y^2=0\Leftrightarrow \left(x+\frac{3}{2}y\right)^2+\frac{11}{4}y^2=0\Leftrightarrow \begin{cases}x+\frac{3}{2}y=0\\ y=0\end{cases}\Leftrightarrow x=y=0$.

Thử lại, ta thấy $x=y=0$ không phải là nghiệm của hệ phương trình đã cho.

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(1;1),(-1;-1)$.

★Thí dụ 3. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^2=\left(2-y\right)\left(2+y\right)\\ 2x^3=\left(x+y\right)\left(4-xy\right)\end{cases}$

(Trích đề Chuyên Quảng Ninh năm 2019-2020)

Lời giải

$$\begin{cases}x^2=\left(2-y\right)\left(2+y\right)\\ 2x^3=\left(x+y\right)\left(4-xy\right)\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x^2+y^2=4 & (1)\\ 2x^3=\left(x+y\right)\left(4-xy\right) & (2)\end{cases}$$

Thế $4=x^2+y^2$ từ phương trình (1) vào phương trình (2) ta được:

$$2x^3=\left(x+y\right)\left(x^2-xy+y^2\right)\Leftrightarrow x^3=y^3\Leftrightarrow x=y.$$

Thay $x=y$ vào phương trình (1) ta được: $x^2=2\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{2}$.

Hệ phương trình có nghiệm $(x;y)$ là: $\left(\sqrt{2};\sqrt{2}\right);\left(-\sqrt{2};-\sqrt{2}\right)$.

★Thí dụ 4. Giải hệ phương trình:

a) $\begin{cases}xy-\dfrac{x}{y}=\dfrac{16}{3}\\ xy-\dfrac{y}{x}=\dfrac{9}{2}\end{cases}$ **b)** $\begin{cases}x^3+y^3=1\\ x^2y+2xy^2+y^3=2\end{cases}$

Lời giải

a) $\begin{cases}xy-\dfrac{x}{y}=\dfrac{16}{3}\\ xy-\dfrac{y}{x}=\dfrac{9}{2}\end{cases}$. Điều kiện: $\begin{cases}x\neq 0\\ y\neq 0\end{cases}$. Đặt: $y=tx$

Hệ phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} tx^2 - \dfrac{1}{t} = \dfrac{16}{3} \\ tx^2 - t = \dfrac{9}{2} \end{cases}$ (*)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} tx^2 = \dfrac{16}{3} + \dfrac{1}{t} \\ tx^2 = \dfrac{9}{2} + t \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{16}{3} + \dfrac{1}{t} = \dfrac{9}{2} + t \Leftrightarrow \begin{cases} t \neq 0 \\ 6t^2 - 5t + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \neq 0 \\ \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{-2}{3} \\ t = \dfrac{3}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{-2}{3} \\ t = \dfrac{3}{2} \end{array}\right.$$

Khi đó:

i) $t = \dfrac{-2}{3} \Rightarrow (*) \Leftrightarrow -\dfrac{2}{3}x^2 + \dfrac{2}{3} = \dfrac{9}{2} \Leftrightarrow -x^2 = \dfrac{69}{4}$ (loại)

2i) $t = \dfrac{3}{2} \Rightarrow (*) \Leftrightarrow \dfrac{3}{2}x^2 - \dfrac{3}{2} = \dfrac{9}{2} \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$

Vậy (2;3) ,(-2;-3)

b) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 1 \\ x^2y + 2xy^2 + y^3 = 2 \end{cases}$

- $y = 0$

  Hệ phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 = 1 \\ 0 = 2 \end{cases}$ (VN)

- $y \neq 0$ Đặt $x = ty$

  Hệ phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} y^3(t^3+1) = 1 \\ y^3(t^2+2t+1) = 2 \end{cases}$ $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} y^3(t^3+1) = 1 \\ y^3\dfrac{t^2+2t+1}{2} = 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t^3 + 1 > 0 \\ t^3 + 1 = \dfrac{t^2+2t+1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow 2(t^3+1) = t^2 + 2t + 1$$

$$\Leftrightarrow 2t^3 - t^2 - 2t + 1 \Leftrightarrow (t-1)(2t^2 + t - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t - 1 = 0 \\ 2t^2 + t - 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = \dfrac{1}{2} \\ t = -1(loại) \end{array}\right.$$

Khi đó:

i) $t=1 \Rightarrow (*) \Leftrightarrow y^3=\frac{1}{2} \Leftrightarrow y=\frac{\sqrt[3]{4}}{2}; x=\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$

2i) $t=\frac{1}{2} \Rightarrow (*) \Leftrightarrow y^3=\frac{8}{9} \Leftrightarrow y=\frac{2}{3}\sqrt[3]{3}; x=\frac{1}{3}\sqrt[3]{3}$

Vậy hệ có hai nghiệm: $\left(\frac{\sqrt[3]{4}}{2};\frac{\sqrt[3]{4}}{2}\right);\left(\frac{2}{3}\sqrt[3]{3};\frac{1}{3}\sqrt[3]{3}\right)$.

★**Thí dụ 5.** Tìm m để hệ phương trình có nghiệm $\begin{cases}3x^2+2xy+y^2=11\\ x^2+xy+3y^2=17+m\end{cases}$

Lời giải

- $x=0$

Hệ phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases}3y^2=17+m\\ y^2=11\end{cases}$ (có nghiệm)

$$\Leftrightarrow \begin{cases}y^2=11\\ y^2=\frac{17+m}{3}\end{cases} \Leftrightarrow 11=\frac{17+m}{3} \Leftrightarrow m=16$$

- $x\neq 0$ Đặt $y=tx$

Hệ phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases}3x^2+2tx^2+t^2x^2=11\\ x^2+tx^2+3t^2x^2=17+m\end{cases}$ (có nghiệm)

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x^2\left(3+2t+t^2\right)=11\\ x^2\left(1+t+3t^2\right)=17+m\end{cases} \quad (*) \qquad \text{(có nghiệm)}$$

Ta thấy: $3+2t+t^2>0$ với mọi t

$1+t+3t^2>0$ với mọi t

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases}x^2=\frac{11}{3+2t+t^2}\\ x^2=\frac{17+m}{1+t+3t^2}\end{cases} \qquad \text{có nghiệm}$$

$$\Leftrightarrow \frac{11}{3+2t+t^2}=\frac{17+m}{1+t+3t^2} \qquad \text{có nghiệm t}$$

$$\Leftrightarrow (m-16)t^2+(23+2m)t+40+3m=0 \quad \text{có nghiệm t}$$

TH1: m = 16: Hệ phương trình có nghiệm

TH2: m $\neq$ 16: Phương trình có nghiệm.

$$\Leftrightarrow \Delta = (23+2m)^2 - 4(m-16)(40+3m) \ge 0$$
$$\Leftrightarrow m^2 - 10m - 338 \le 0$$
$$\Leftrightarrow 5-\sqrt{363} \le m \le 5+\sqrt{363}\ .$$

C. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài tập 1: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+2xy+3y^2=9 \\ 2x^2+2xy+y^2=2 \end{cases}$

Bài tập 2: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 3x^2+8y^2+12xy=23 \\ x^2+y^2=2. \end{cases}$

(Trích đề Chuyên KHTN Hà Nội năm 2010-2011)

Bài tập 3: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+y^2+xy=3 \\ xy+3x^2=4 \end{cases}$

Bài tập 4: Giải hệ phương trình:

a) $\begin{cases} x^2-3xy+y^2=-1 \\ 3x^2-xy+3y^2=13 \end{cases}$ b) $\begin{cases} -3xy+y^2=4 \\ x^2-4xy+y^2=1 \end{cases}$

Bài tập 5: Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} x^2-4xy+y^2=m \\ y^2-3xy=4 \end{cases}$$

PHẦN 6. CÁC PHƯƠNG PHÁP GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH CHỨA TRỊ TUYỆT ĐỐI

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng toán 1. Giải hệ phương trình chứa trị tuyệt đối bằng định nghĩa và phương pháp chia khoảng.

PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1. Đặt điều kiện cho các biểu thức trong hệ có nghĩa.

Bước 2. Sử dụng các phép biến đổi bằng định nghĩa hoặc chia khoảng để biến đổi hệ

Bước 3. Kết luận về nghiệm cho hệ phương trình.

★**Thí dụ 1.** Giải hệ phương trình: $\begin{cases}2x+y=4\\|x-2y|=3\end{cases}$

Hướng dẫn giải

$$\begin{cases}2x+y=4\\|x-2y|=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=4-2x\\(x-2y)^2=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=4-2x\\\left[x-2(4-2x)\right]^2=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=4-2x\\(5x-8)^2=9\end{cases}$$

$$\begin{cases}y=4-2x\\5x^2-16x+11=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=4-2x\\\left[\begin{array}{l}x=1\\x=\dfrac{11}{5}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1,y=2\\x=\dfrac{11}{5},y=-\dfrac{2}{5}\end{array}\right.$$

Vậy, hệ có nghiệm $(1;2)$ và $\left(\dfrac{11}{5},-\dfrac{2}{5}\right)$.

★**Thí dụ 2.** Giải hệ phương trình: $\begin{cases}|x|+y=2\\3x+y=4\end{cases}\quad(\text{I})$

Hướng dẫn giải

Cách 1: (Sử dụng định nghĩa): Biến đổi tương đương hệ về dạng:

$$\begin{cases}|x|+y=2\\3x+y=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|x|=2-y\\3x+y=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2-y\ge0\\\left[\begin{array}{l}x=2-y\\x=-2+y\end{array}\right.\\3x+y=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y\le2\\\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=2-y\\3x+y=4\end{cases}\\\begin{cases}x=-2+y\\3x+y=4\end{cases}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y\le2\\\left[\begin{array}{l}x=1,y=1\\x=\dfrac{1}{2},y=-\dfrac{5}{2}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}.$$

Vậy, hệ có nghiệm duy nhất (1, 1).

Cách 2: Sử dụng phương pháp chia khoảng

Với $x \ge 0$ thì

$$(\mathrm{I}) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 2 \\ 3x + y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$ thỏa mãn điều kiện $x \ge 0$.

Với $x < 0$ thì

$$(\mathrm{I}) \Leftrightarrow \begin{cases} -x + y = 2 \\ 3x + y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ y = \dfrac{5}{2} \end{cases}$$ không thỏa mãn điều kiện $x < 0$.

Vậy, hệ có nghiệm duy nhất (1, 1).

★**Thí dụ 3.** Giải hệ phương trình:

a) $\begin{cases} |x-1| + |y-2| = 1 \\ |x-1| + 3y = 3 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} |2x-y| - 2|y-x| = 1 \\ 3|2x-y| + |x-y| = 10 \end{cases}$

Hướng dẫn giải

a) $\begin{cases} |x-1| + |y-2| = 1 & (1) \\ |x-1| + 3y = 3 & (2) \end{cases}$

Từ phương trình (2): $|x-1| + 3y = 3$, ta có $|x-1| = 3 - 3y$

Thế vào phương trình (1), ta được :

$$3 - 3y + |y-2| = 1 \quad \Leftrightarrow |y-2| - 3y = -2\ (*)$$

TH1: y $\ge 2 \Rightarrow y - 2 \ge 0$ nên $|y-2| = y - 2$

Ta có: $(*) \Leftrightarrow y - 2 - 3y = -2 \Leftrightarrow -2y = 0 \Leftrightarrow y = 0$ (loại)

TH2: y $< 2 \Rightarrow y - 2 < 0$ nên $|y-2| = 2 - y$

Ta có: $(*) \Leftrightarrow 2 - y - 3y = -2 \Leftrightarrow -4y = -4 \Leftrightarrow y = 1$

$$\Rightarrow |x-1| = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là: (1;1)

b) $\begin{cases} |2x-y| - 2|y-x| = 1 \\ 3|2x-y| + |x-y| = 10 \end{cases}$

Hệ phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} |2x-y|-2|x-y|=1 \\ 3|2x-y|+|x-y|=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |2x-y|=3 \\ |x-y|=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y=\pm 3 \\ x-y=\pm 1 \end{cases}$

Vậy hệ đã cho có bốn nghiệm: (2;1); (-1;-2); (4;5); (-4;-5).

★**Thí dụ 4.** Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^4-y^4=1 & (1) \\ |x+y|+|x-y|=2 & (2) \end{cases} \quad (I)$

Hướng dẫn giải

Biến đổi (I) về dạng:

$$(1) \Leftrightarrow (x^2+y^2)(x^2-y^2)=1 \Leftrightarrow (x^2+y^2)(x-y)(x+y)=1$$

$$\Rightarrow (x-y)(x+y)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x+y>0 \,\&\, x-y>0 & (3) \\ x+y<0 \,\&\, x-y<0 & (4) \end{array}\right.$$

Với (3), ta được: $(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x^4-y^4=1 \\ x+y+x-y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^4=0 \\ x=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}.$

Với (4), ta được: $(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x^4-y^4=1 \\ -x-y-x+y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^4=0 \\ x=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=0 \end{cases}.$

Vậy, hệ có 2 cặp nghiệm (1, 0) và (-1, 0).

Dạng toán 2. Giải hệ phương trình chứa trị tuyệt đối bằng phương pháp đặt ẩn phụ.

PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1. Đặt điều kiện cho các biểu thức trong hệ có nghĩa.

Bước 2. Lựa chọn ẩn phụ để biến đổi hệ ban đầu về các hệ đại số đã biết cách giải (hệ đối xứng loại I, loại 2 và hệ đẳng cấp bậc 2).

Bước 3. Kết luận về nghiệm cho hệ phương trình.

★**Thí dụ 1.** Giải hệ phương trình: $\begin{cases} |x+1|+\dfrac{2}{|y-1|}=4 \\ |x+1|-\dfrac{1}{|1-y|}=1 \end{cases} \quad (I)$

Hướng dẫn giải

Ta có: $(I) \Leftrightarrow \begin{cases} |x+1| + \dfrac{2}{|y-1|} = 4 \\ |x+1| - \dfrac{1}{|y-1|} = 1 \end{cases}$

Đặt $\begin{cases} u = |x+1| \\ v = \dfrac{1}{|y-1|} \end{cases}$, điều kiện $y \neq 0, u, v \geq 0.$

Khi đó: $\begin{cases} u + 2v = 4 \\ u - v = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3v = 3 \\ u - v = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 1 \\ u = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x+1| = 1 \\ \dfrac{1}{|y-1|} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -2 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} y = \dfrac{1}{2} \\ y = \dfrac{3}{2} \end{array}\right. \end{cases}$

$$\Leftrightarrow (x, y) = \left(0; \frac{1}{2}\right), \left(0; \frac{3}{2}\right), \left(-2; \frac{1}{2}\right), \left(-2; \frac{3}{2}\right).$$

Vậy hệ có 4 nghiệm:

$$(x, y) = \left(0; \frac{1}{2}\right), \left(0; \frac{3}{2}\right), \left(-2; \frac{1}{2}\right), \left(-2; \frac{3}{2}\right).$$

★**Thí dụ 2.** Giải hệ phương trình: $\begin{cases} |x-y| + |x+y| + |x^2 - y^2| = 5 \\ 2(x^2 + y^2) = 5 \end{cases}$ (I)

Hướng dẫn giải

Đặt $\begin{cases} u = |x-y| \\ v = |x+y| \end{cases}$, điều kiện $u, v \geq 0.$

Khi đó: $(I) \Leftrightarrow \begin{cases} |x-y| + |x+y| + |x^2 - y^2| = 5 \\ (x-y)^2 + (x+y)^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v + uv = 5 \\ u^2 + v^2 = 5 \end{cases}$ (II)

Đặt $S = u + v$, $P = uv$, điều kiện $S, P, S^2 - 4P \geq 0.$

Khi đó: $(II) \Leftrightarrow \begin{cases} S + P = 5 \\ S^2 - 2P = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = 5 - S \\ S^2 - 2(5 - S) = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = 5 - S \\ S^2 + 2S - 15 = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} S = -5 \;\&\; P = 10 \\ S = 3 \;\&\; P = 2 \end{array}\right. \quad (l) \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 3 \\ uv = 2 \end{cases}$$

Khi đó u, v là nghiệm của phương trình: $t^2-3t+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=1 \,\&\, v=2 \\ u=2 \,\&\, v=1 \end{array}\right.$

Với u = 1 và v = 2, ta được:

$$\begin{cases} |x-y|=1 \\ |x+y|=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x+y|=2 \\ xy=\dfrac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+y=2 \\ xy=\dfrac{3}{4} \end{cases} \\ \begin{cases} x+y=-2 \\ xy=\dfrac{3}{4} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow (x,y)=\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right),\left(\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right),\left(-\frac{1}{2};-\frac{3}{2}\right),\left(-\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right).$$

Với u = 2 và v = 1, ta được:

$$\begin{cases} |x-y|=2 \\ |x+y|=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x+y|=1 \\ xy=-\dfrac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+y=1 \\ xy=-\dfrac{3}{4} \end{cases} \\ \begin{cases} x+y=-1 \\ xy=-\dfrac{3}{4} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow (x,y)=\left(-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right),\left(\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{2};-\frac{3}{2}\right),\left(-\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right).$$

Vậy hệ đã cho có 8 nghiệm:

$$(x,y)=\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right),\left(\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right),\left(-\frac{1}{2};-\frac{3}{2}\right),\left(-\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right),\left(-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right),\left(\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{2};-\frac{3}{2}\right),\left(-\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right).$$

Dạng toán 3. Phương pháp đánh giá.

PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Bằng cách đánh giá tinh tế dựa trên các các tính chất của bất đẳng thức, ta có thể nhanh chóng chỉ ra được nghiệm của hệ.

★**Thí dụ 1.** Giải hệ phương trình: $\begin{cases} |x-y|+|x+y|=2 & (1) \\ xy=1 & (2) \end{cases} \quad (I)$

Hướng dẫn giải

Biến đổi (1) về dạng:

$(1) \Leftrightarrow 4=(x-y)^2+(x+y)^2+2\left|x^2-y^2\right|=2\left(x^2+y^2\right)+2\left|x^2-y^2\right|\ge 2\left(x^2+y^2\right)\ge 4xy=4$

Vậy hệ tương đương với $\begin{cases} 2\left|x^2-y^2\right|=0 \\ x=y \\ xy=1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y=1 \\ x=y=-1 \end{array}\right.$.

Vậy hệ có nghiệm $(x, y) = (1;1), (-1;-1)$.

B. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài tập 1. Giải hệ phương trình:

a) $\begin{cases} y - |x| = 1 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y = 2 \\ |2x - 3y| = 1 \end{cases}$.

Bài tập 2. Giải hệ phương trình:

a) $\begin{cases} |x| + 2|y| = 3 \\ 7x + 5y = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} |x - y| = 12y - 11 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$..

Bài tập 3. Giải hệ phương trình:

a) $\begin{cases} |x| - y + 1 = 0 \\ 2x - |y| - 1 = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} |x^2 - 2x| + y = 1 \\ x^2 + |y| = 1 \end{cases}$.

Bài tập 4. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + 2xy - 3y^2 = 0 \\ x|x| + y|y| = -2 \end{cases}$

PHẦN 7. CÁC PHƯƠNG PHÁP GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC CAO

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Các hệ phương trình đại số bậc cao thường rất khó giải và không thể nêu ra phương pháp chung để giải chúng. Trong mục này, chúng ta xét một số hệ phương trình bậc cao đối xứng hoặc không đối xứng.

Với các hệ bậc cao khác nhau chúng ta sẽ xem xét các phương pháp để giải chúng, bao gồm:

1. Phương pháp biến đổi tương đương.
2. Phương pháp đặt ẩn phụ.
3. Phương pháp đánh giá.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng toán 1. Giải hệ đối xứng.

PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Chúng ta đã biết phương pháp giải các hệ đối xứng bậc 2 loại I, loại II và phương pháp đó cũng được áp dụng đối với các hệ đối xứng bậc cao.

★**Thí dụ 1.** Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+xy+y^2=3 \\ x^4+y^4=17 \end{cases}$ (I)

Hướng dẫn giải

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=3-xy \\ \left(x^2+y^2\right)^2=17+2x^2y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2=3+xy \\ (3-xy)^2=17+2x^2y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2=3+xy \\ \left[\begin{array}{l} xy=-2 \\ xy=-4 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=\pm 1 \\ xy=-2 \end{cases}$$

Khi đó, với: $\begin{cases} x+y=1 \\ xy=-2 \end{cases} \Rightarrow$ x, y là nghiệm của phương trình:

$$t^2-t-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_1=-1 \\ y_1=2 \end{cases} \\ \begin{cases} x_2=2 \\ y_2=-1 \end{cases} \end{array}\right.$$

$\begin{cases} x+y=-1 \\ xy=-2 \end{cases} \Rightarrow$ x, y là nghiệm của phương trình:

$$t^2 + t - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_3 = 1 \\ y_3 = -2 \end{cases} \\ \begin{cases} x_4 = -2 \\ y_4 = 1 \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy hệ có các nghiệm $(-1;2),(2;-1),(1;-2),(-2;1)$.

Chú ý: Các hệ phương trình bậc cao thường là hệ đối xứng loại I để giải chúng ta sử dụng pháp biến đổi tương đương để xác định giá trị x + y và xy, đó chính là công việc thường dùng đối với hệ đối xứng bậc 2 loại I.

★**Thí dụ 2.** Giải hệ phương trình.

a) $\begin{cases} x^4 + y^4 = 1 \\ y^6 + y^6 = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 1 \\ x^5 + y^5 = x^2 + y^2 \end{cases}$

Giải:

a)Đặt: $\begin{cases} u = x^2 \ge 0 \\ v = y^2 \ge 0 \end{cases}$

Hệ phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} u^2 + v^2 = 1 \\ u^3 + v^3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u+v)^2 - 2uv = 1 \\ (u+v)^3 - 3uv(u+v) = 1 \end{cases}$

Đặt: $\begin{cases} S = u + v \ge 0 \\ P = u.v \ge 0 \end{cases}$ điều kiện: $S^2 \ge 4P$

Hệ phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} S^2 - 2P = 1 \\ S^3 - 3SP = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = \dfrac{S^2 - 1}{2} \\ S^3 - 3S.\dfrac{S^2 - 1}{2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = \dfrac{S^2 - 1}{2} \\ S^3 - 3S + 2 = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} P = \dfrac{S^2 - 1}{2} \\ (S-1)(S^2 + S - 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = \dfrac{S^2 - 1}{2} \\ \left[\begin{array}{l} S = 1 \\ S = -2 \quad (loại) \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} P = 0 \\ S = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u.v = 0 \\ u + v = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u=0 \\ v=1 \end{cases} \\ \begin{cases} u=1 \\ v=0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=0 \\ y=\pm 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=\pm 1 \\ y=0 \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy: Hệ có 4 nghiệm (1;0), (-1;0),(0;1), (0;-1)

b) Ta có: $\begin{cases} x^3+y^3=1 \\ x^5+y^5=x^2+y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3+y^3=1 \\ x^5+y^5=(x^2+y^2).1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3+y^3=1 \\ x^5+y^5=(x^2+y^2).\left(x^3+y^3\right) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3+y^3=1 \\ x^5+y^5=x^5+x^2y^3+x^3y^2+y^5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3+y^3=1 \\ x^2y^2\left(x+y\right)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3+y^3=1 \\ \left[\begin{array}{l} x=0 \\ y=0 \\ x+y=0 \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=0 \\ x^3+y^3=1 \end{cases} \\ \begin{cases} y=0 \\ x^3+y^3=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-y \\ x^3+y^3=1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm: (1;0); (0;1).

★**Thí dụ 3.** Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \left(x-y\right)\left(x^2-y^2\right)=3 \\ \left(x+y\right)\left(x^2+y^2\right)=15 \end{cases}$ $\quad (I)$

Hướng dẫn giải

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x-y\right)^2\left(x+y\right)=3 \\ \left(x+y\right)\left(x^2+y^2\right)=15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\left(x+y\right)^2-4xy\right]\left(x+y\right)=3 \\ \left(x+y\right)\left[\left(x+y\right)^2-2xy\right]=15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\left(x+y\right)^2-4xy\right]\left(x+y\right)=3 \quad (*) \\ \left(x+y\right)\left[2\left(x+y\right)^2-4xy\right]=30 \end{cases}$$

Trừ theo vế hai phương trình cho nhau ta được:

$$\left(x+y\right)^3=27 \Leftrightarrow x+y=3$$

Thay $x+y=3$ vào (*) ta được: $\left(9-4xy\right).3=3 \Leftrightarrow xy=2$.

Do đó: $\begin{cases} x+y=3 \\ xy=2 \end{cases} \Leftrightarrow \left(x,y\right)=\left(1;2\right),\left(2;1\right)$.

Dạng toán 2. Giải hệ phương trình bậc cao bằng phương pháp đặt ẩn phụ.

PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1. Đặt điều kiện cho các biểu thức trong hệ có nghĩa.

Bước 2. Lựa chọn ẩn phụ để biến đổi hệ ban đầu về các hệ đại số đã biết cách giải (hệ đối xứng loại I, hệ đối xứng loại II và hệ đẳng cấp bậc 2).

Bước 3. Giải hệ nhận được.

Bước 4. Kết luận về nghiệm cho hệ phương trình ban đầu.

★**Thí dụ 1.** Giải hệ phương trình: $\begin{cases} y + xy^2 = 6x^2 \\ 1 + x^2y^2 = 5x^2 \end{cases} \quad (I)$

Hướng dẫn giải

Vì x = 0 không là nghiệm của hệ, chia hai vế của các phương trình cho $x^2 \neq 0$ ta được:

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{y}{x^2} + \dfrac{y^2}{x} = 6 \\ \dfrac{1}{x^2} + y^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{y}{x}\left(\dfrac{1}{x} + y\right) = 6 \\ \left(\dfrac{1}{x} + y\right)^2 - 2\dfrac{y}{x} = 5 \end{cases}$$

Đặt $u = \dfrac{y}{x} = y\dfrac{1}{x}$ và $v = \dfrac{1}{x} + y$ ta được hệ mới:

$$\begin{cases} uv = 6 \\ v^2 - 2u = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \dfrac{v^2 - 5}{2} \\ v^3 - 5v - 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 2 \\ v = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x} + y = 3 \\ \dfrac{1}{x}.y = 2 \end{cases}$$

$\Rightarrow \dfrac{1}{x}, y$ là nghiệm của phương trình: $t^2 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 1, y_1 = 2 \\ x_2 = \dfrac{1}{2}, y_2 = 1 \end{array}\right.$.

Vậy, hệ phương trình có hai cặp nghiệm $(1;2)$ và $\left(\dfrac{1}{2};1\right)$.

★**Thí dụ 2.** Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^4 - x^3y + x^2y^2 = 1 \\ x^3y - x^2 + xy = -1 \end{cases}$

Hướng dẫn giải

Hệ phương trình tương đương với $\begin{cases} \left(x^2 - xy\right)^2 = 1 - x^3y \\ x^3y - \left(x^2 - xy\right) = -1 \end{cases}$

Đặt $\begin{cases} u = x^2 - xy \\ v = x^3y \end{cases}$ Thay vào hệ ta có $\begin{cases} u^2 = 1 - v \\ v - u = -1 \end{cases}$ nên $\begin{cases} u = 1 \\ v = 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} u = -2 \\ v = -3 \end{cases}$.

Với $\begin{cases} u = 1 \\ v = 0 \end{cases}$ ta có $\begin{cases} x^2 - xy = 1 \\ x^3y = 0 \end{cases}$ nên $\begin{cases} x = 0 \\ x^2 - xy = 1 \end{cases}$ (vô nghiệm) hoặc $\begin{cases} y = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}$.

Với $\begin{cases} u = -2 \\ v = -3 \end{cases}$ ta có $\begin{cases} x^2 - xy = -2 \\ x^3y = -3 \end{cases}$ (vô nghiệm).

Vậy hệ có nghiệm $(x, y) = (1;0), (-1;0)$.

★**Thí dụ 3.** Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (2x+y)^2 - 5(4x^2 - y^2) + 6(2x-y)^2 = 0 \\ 2x + y + \dfrac{1}{2x-y} = 3 \end{cases}$

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $2x \neq y$.

Đặt $\begin{cases} u = 2x + y \\ v = 2x - y \quad (v \neq 0) \end{cases}$. Khi đó hệ phương trình tương đương:

$$\begin{cases} u^2 - 5uv + 6v^2 = 0 \\ u + \dfrac{1}{v} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} u = 2v \\ u = 3v \end{array}\right. \\ u + \dfrac{1}{v} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} 2v^2 - 3v + 1 = 0 \\ 3v^2 - 3v + 1 = 0 \quad (1) \end{array}\right. \\ u + \dfrac{1}{v} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} v = 1 \\ v = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \\ u + \dfrac{1}{v} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = 2, v = 1 \\ u = 1, v = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

Với $u = 2,\ v = 1$ thì: $\begin{cases} 2x + y = 2 \\ 2x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{4}, y = \dfrac{1}{2}$.

Với $u = 1, v = \dfrac{1}{2}$ thì: $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 2x - y = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{8}, y = \dfrac{1}{4}$.

Vậy hệ có hai nghiệm $(x, y) = \left(\dfrac{3}{4}; \dfrac{1}{2}\right), \left(\dfrac{3}{8}; \dfrac{1}{4}\right)$.

Dạng toán 3. Giải hệ phương trình bậc cao bằng phương pháp đánh giá.

PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Bằng cách đánh giá tinh tế dựa trên các tính chất của bất đẳng thức, ta có thể nhanh chóng chỉ ra được nghiệm của hệ.

★**Thí dụ 1.** Tìm các nghiệm $x, y \neq 0$ của hệ sau: $\begin{cases}(1+xy)(x+y)=4xy \\ (1+x^2y^2)(x^2+y^2)=4x^2y^2\end{cases}$ (I)

Hướng dẫn giải

Với điều kiện: $x, y \neq 0$ ta biến đổi hệ về dạng: $\begin{cases}x+y+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=4 & (1) \\ x^2+y^2+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=4 & (2)\end{cases}$

Nhận xét: $4^2=\left(x+y+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)^2 \le 4\left(x^2+y^2+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}\right)=4^2$.

Vậy, hệ phương trình có nghiệm khi và chỉ khi: $x=y=\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{y} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=y=1 \\ x=y=-1\end{array}\right.$.

Kiểm tra lại, thấy $x=y=1$ thỏa mãn hệ.

Vậy, hệ có nghiệm duy nhất $x=y=1$.

B. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài tập 1. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}(x-y)(x^2-y^2)=16 \\ (x+y)(x^2+y^2)=40\end{cases}$.

Bài tập 2. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}8(x^3-y^3)+9(x-9)=0 \\ 2xy+1=0\end{cases}$.

Bài tập 3. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x-y=1 \\ x^3-y^3=7\end{cases}$.

Bài tập 4. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x^3-y^3=7 \\ xy(x-y)=2\end{cases}$.

Bài tập 5. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}(x+y)\left(1+\dfrac{1}{xy}\right)=5 \\ (x^2+y^2)\left(1+\dfrac{1}{x^2y^2}\right)=49\end{cases}$.

Bài tập 6. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\left(\dfrac{x}{y}\right)^2+\left(\dfrac{x}{y}\right)^3=12 \\ (xy)^2+xy=6\end{cases}$.

Bài tập 7. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2y\left(x^2-y^2\right)=3x \\ x\left(x^2+y^2\right)=10y \end{cases}$.

Bài tập 8. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 8x^3y^3+27=18y^3 \\ 4x^2y+6x=y^2 \end{cases}$.

Bài tập 9. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x^2+x-\dfrac{1}{x}=1 \\ y-y^2x-2y^2=-2 \end{cases}$.

Bài tập 10. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3y\left(1+y\right)+x^2y^2\left(2+y\right)+xy^3-30=0 \\ x^2y+x\left(1+y+y^2\right)+y-11=0 \end{cases}$.

PHẦN 8. CÁC PHƯƠNG PHÁP GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH CHỨA CĂN THỨC

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

<u>Dạng toán 1.</u> Giải hệ phương trình chứa căn thức bằng phương pháp biến đổi tương đương.

PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1. Đặt điều kiện cho các biểu thức trong hệ có nghĩa.

Bước 2. Sử dụng các phép thế để nhận được từ hệ một phương trình theo ẩn x hoặc y (đôi khi có thể là theo cả hai ẩn x, y).

Bước 3. Giải phương trình nhận được bằng các phương pháp đã biết đối với phương trình chứa căn thức.

Bước 4. Kết luận về nghiệm cho hệ phương trình.

★**Thí dụ 1.** Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\sqrt{x+5}+\sqrt{y-2}=7\\ \sqrt{x-2}+\sqrt{y+5}=7\end{cases}$ $\quad (\mathrm{I})$

Hướng dẫn giải

ĐK: $\begin{cases}x-2\ge 0\\ y-2\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\ge 2\\ y\ge 2\end{cases}$

Ta có: $(\mathrm{I}) \Leftrightarrow \begin{cases}x+y+5-2+2\sqrt{(x+5)(y-2)}=49\\ x+y-2+5+2\sqrt{(x-2)(y+5)}=49\end{cases}$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{(x+5)(y-2)}=2\sqrt{(x-2)(y-5)}$$

$$\Leftrightarrow xy-2x+5y-10=xy+5x-2y-10$$

$$\Leftrightarrow x=y$$

Khi $x=y$ Hệ phương trình: $\Leftrightarrow \sqrt{x+5}+\sqrt{x-2}=49$

$$\Leftrightarrow x+5+x-2+2\sqrt{(x+5)(x-2)}=49$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x^2+3x-10}=46-2x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+3x-10}=23-x$$

$$\Leftrightarrow x^2+3x-10=(23-x)^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \le 23 \\ 49x = 539 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 23 \\ x = 11 \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện $x = 11$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là: (11;11)

★**Thí dụ 2.** Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{2xy} = 8\sqrt{2} \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 4 \end{cases}$

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$

Hệ phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{2xy} = 8\sqrt{2} \\ x + y + 2\sqrt{xy} = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2(x^2+y^2)} + 2\sqrt{xy} = 16 \\ x + y + 2\sqrt{xy} = 16 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = \sqrt{2\left(x^2+y^2\right)} \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 = 2\left(x^2+y^2\right) \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 2xy = 0 \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)^2 = 0 \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ \sqrt{x} + \sqrt{x} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ \sqrt{x} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 4 \end{cases}$$

Vậy hệ có nghiệm (4;4)

★**Thí dụ 3.** Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x^2+10x+25} = x + 5 \\ \sqrt{x^2-10x+25} = 5 - x \end{cases}$

Hướng dẫn giải

$$\begin{cases} \sqrt{(x+5)^2} = x + 5 \\ \sqrt{(5-x)^2} = 5 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x+5| = x + 5 \\ |5-x| = 5 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 5 \ge 0 \\ 5 - x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow -5 \le x \le 5$$

Vậy nghiệm của hệ là đoạn [-5;5].

★**Thí dụ 4.** Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 84 \\ x + \sqrt{xy} + y = 14 \end{cases}$

Hướng dẫn giải

Từ (2) ta có: $x + y = 14 - \sqrt{xy}$

$$\Leftrightarrow (x+y)^2 = \left(14-\sqrt{xy}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 = 196 + xy - 28\sqrt{xy}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + xy + y^2 = 196 - 28\sqrt{xy} \qquad (*)$$

Thế (1) Vào (*) Ta được: $\begin{cases} xy = 16 \\ x+y=10 \end{cases} \Rightarrow x, y$ là nghiệm của phương trình: $X^2 - 10X + 16 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} X = 8 \\ X = 2 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 2 \\ y = 8 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 8 \\ y = 2 \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy hệ có nghiệm (2, 8); (8,2).

<u>Dạng toán 2.</u> Giải hệ phương trình chứa căn thức bằng phương pháp đặt ẩn phụ.

PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Phương pháp được sử dụng nhiều nhất để giải hệ chứa căn thức là việc sử dụng các ẩn phụ. Tùy theo dạng của hệ mà lựa chọn phép đặt ẩn phụ thích hợp. Cụ thể ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1. Đặt điều kiện cho các biểu thức trong hệ có nghĩa.

Bước 2. Lựa chọn ẩn phụ để biến đổi hệ ban đầu về các hệ đại số đã biết cách giải (hệ đối xứng loại I, hệ đối xứng loại II và hệ đẳng cấp bậc 2).

Bước 3. Giải hệ nhận được.

Bước 4. Kết luận về nghiệm cho hệ phương trình ban đầu.

★**Thí dụ 1.** Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x\sqrt{y} + y\sqrt{x} = 30 \\ x\sqrt{x} + y\sqrt{y} = 35 \end{cases}$

Hướng dẫn giải

$\begin{cases} x\sqrt{y} + y\sqrt{x} = 30 \\ x\sqrt{x} + y\sqrt{y} = 35 \end{cases}$. Đặt $\begin{cases} u = \sqrt{x} \ge 0 \\ v = \sqrt{y} \ge 0 \end{cases}$

Hệ phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} u^2v + uv^2 = 30 \\ u^3 + v^3 = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} uv(u+v) = 30 \\ (u+v)^3 - 3uv(u+v) = 35 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} uv(u+v) = 30 \\ (u+v)^3 = 125 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=5 \\ uv = 6 \end{cases}$$

$\Rightarrow u, v$ là nghiệm của phương trình: $X^2 - 5X + 6 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} X=3 \\ X=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u=2 \\ v=3 \end{cases} \\ \begin{cases} u=3 \\ v=2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=4 \\ y=9 \end{cases} \\ \begin{cases} x=9 \\ y=4 \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy hệ có nghiệm (4, 9); (9,4)

★**Thí dụ 2.** Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}}{y}+\dfrac{\sqrt{y}}{x}=\dfrac{7}{\sqrt{xy}}+1 \\ x\sqrt{xy}+y\sqrt{xy}=78 \end{cases}$ $\quad (x>0; y>0)$

Hướng dẫn giải

Hệ phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=7+\sqrt{xy} \\ (x+y)\sqrt{xy}=78 \end{cases}$

Đặt: $\begin{cases} u=x+y \\ v=\sqrt{xy}\geq 0 \end{cases}$

Hệ phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} u=7+v \\ uv=78 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=7+v \\ v(7+v)=78 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=7+v \\ v^2+7v-78=0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u=7+v \\ \left[\begin{array}{l} v=6 \\ v=-13 \quad \textit{loại} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=13 \\ v=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=13 \\ \sqrt{xy}=6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=13 \\ xy=36 \end{cases}$$

$\Rightarrow x, y$ là nghiệm của phương trình: $X^2-13X+36=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} X=4 \\ X=9 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=4 \\ y=9 \end{cases} \\ \begin{cases} x=9 \\ y=4 \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy hệ có nghiệm (4, 9); (9,4)

★**Thí dụ 3.** Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}=4 & (1) \\ x^2+y^2=128 & (2) \end{cases}$

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $\begin{cases} x+y \ge 0 \\ x-y \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \ge -x \\ y \le x \end{cases} \Leftrightarrow -x \le y \le x$ suy ra $x \ge 0$.

Khi đó hệ tương đương với: $\begin{cases} \sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}=4 \\ \frac{1}{2}(x+y)^2+\frac{1}{2}(x-y)^2=128 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}=4 \\ (x+y)^2+(x-y)^2=256 \end{cases}$

Đặt $\begin{cases} u=\sqrt{x+y} \\ v=\sqrt{x-y} \end{cases}, u, v \ge 0.$

Ta được: $\begin{cases} u+v=4 \\ u^2+v^2=256 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=4 \\ uv(uv-32)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=4 \\ \left[\begin{array}{l} uv=0 \\ uv=32 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \begin{cases} u+v=4 \\ uv=32 \end{cases} & (I) \\ \begin{cases} u+v=4 \\ uv=0 \end{cases} & (II) \end{array}\right.$

Giải (I): vô nghiệm.

Giải (II): $(II) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=4 \,\&\, v=0 \\ u=0 \,\&\, v=4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sqrt{x+y}=4 \\ \sqrt{x-y}=0 \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{x+y}=0 \\ \sqrt{x-y}=4 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y=8 \\ x=8 \,\&\, y=-8 \end{array}\right.$

Vậy, hệ phương trình có hai cặp nghiệm (8, 8) và (8, - 8).

Chú ý: Trong nhiều trường hợp chưa thấy sự xuất hiện của ẩn phụ, trong trường hợp này cần một vài biến đổi phù hợp

★**Thí dụ 4.** Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=4 \\ \sqrt{x+5}+\sqrt{y+5}=6 \end{cases} \quad (I)$

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $x, y \ge 0$.

Tâ có: : $(I) \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\sqrt{x+5}+\sqrt{x}\right)+\left(\sqrt{y+5}+\sqrt{y}\right)=10 \\ \left(\sqrt{x+5}-\sqrt{x}\right)+\left(\sqrt{y+5}-\sqrt{y}\right)=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\sqrt{x+5}+\sqrt{x}\right)+\left(\sqrt{y+5}+\sqrt{y}\right)=10 \\ \dfrac{5}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x}}+\dfrac{5}{\sqrt{y+5}+\sqrt{y}}=2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\sqrt{x+5}+\sqrt{x}\right)+\left(\sqrt{y+5}+\sqrt{y}\right)=10 \\ 5.\dfrac{\left(\sqrt{x+5}+\sqrt{x}\right)+\left(\sqrt{y+5}+\sqrt{y}\right)}{\left(\sqrt{x+5}+\sqrt{x}\right).\left(\sqrt{y+5}+\sqrt{y}\right)}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\sqrt{x+5}+\sqrt{x}\right)+\left(\sqrt{y+5}+\sqrt{y}\right)=10 \\ \left(\sqrt{x+5}+\sqrt{x}\right).\left(\sqrt{y+5}+\sqrt{y}\right)=25 \end{cases}$$

Đặt $\begin{cases} u=\sqrt{x+5}+\sqrt{x} \\ v=\sqrt{y+5}+\sqrt{y} \end{cases}, u,v \ge \sqrt{5}.$

Ta được: $\begin{cases} u+v=10 \\ uv=25 \end{cases} \Leftrightarrow$ u, v là nghiệm của phương trình $t^2-10t+25=0 \Leftrightarrow t=5$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+5}+\sqrt{x}=5 \\ \sqrt{y+5}+\sqrt{y}=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x(x+5)}=10-x \\ \sqrt{y(y+5)}=10-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le x,y \le 10 \\ x(x+5)=(10-x)^2 \\ y(y+5)=(10-y)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=4.$$

Vậy hệ phương trình có một nghiệm (x, y) = (4; 4).

Dạng toán 3. Giải hệ phương trình chứa căn thức bằng phương pháp đánh giá.

PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Bằng phương pháp đánh giá tinh tế dựa trên các tính chất của bất đẳng thức, ta có thể nhanh chóng chỉ ra được nghiệm của hệ.

★**Thí dụ 1.** Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x+1}+\sqrt{y}=1 \\ \sqrt{x}+\sqrt{y+1}=1 \end{cases}$

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $\begin{cases} x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}.$

Với điều kiện (1) nhận xét rằng: $\begin{cases} \sqrt{x+1}+\sqrt{y} \ge 1 \\ \sqrt{x}+\sqrt{y+1} \ge 1 \end{cases}$

Vậy hệ có nghiệm khi và chỉ khi x = y = 0.

★**Thí dụ 2.** Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x+\sqrt[4]{y-1}=1 \\ y+\sqrt[4]{x-1}=1 \end{cases}$

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $\begin{cases} x \ge 1 \\ y \ge 1 \end{cases}.$

Với điều kiện (1) nhận xét rằng: $\begin{cases} x+\sqrt[4]{y-1}\ge 1 \\ y+\sqrt[4]{x-1}\ge 1 \end{cases}$

Vậy hệ có nghiệm khi và chỉ khi x = y = 1.

★Thí dụ 3. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}+\sqrt{x+3}=\sqrt{y-1}+\sqrt{y-2}+\sqrt{y-3} \\ x^2+y^2=10 \end{cases}$.

(Trích đề HSG lớp 9 tỉnh Khánh Hòa năm 2014-2015)

Hướng dẫn giải

Điều kiện $x\ge -1,\ y\ge 3.$ Ta xét các trường hợp

Trường hợp 1: $x+1<y-3 \Leftrightarrow y>x+4$

Khi đó, $\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}+\sqrt{x+3}<\sqrt{y-1}+\sqrt{y-2}+\sqrt{y-3}$

Suy ra hệ vô nghiệm

Trường hợp 2: $x+1>y-3 \Leftrightarrow y<x+4$

Khi đó, $\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}+\sqrt{x+3}>\sqrt{y-1}+\sqrt{y-2}+\sqrt{y-3}$

Suy ra hệ vô nghiệm

Trường hợp 3: $x+1=y-3 \Leftrightarrow y=x+4$

Thay vào phương trình thứ hai của hệ đã cho, ta được

$2x^2+8x+6=0 \Leftrightarrow x=-1 \vee x=-3$

So điều kiện ta được $x=-1 \Rightarrow y=3.$ Vậy $(x;y)=(-1;3)$.

B. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài tập 1. Giải hệ phương trình:

a) $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=1 \\ |x|+|y|=1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y-\sqrt{xy}=7 \\ x^2+y^2+xy=133 \end{cases}$.

Bài tập 2. Giải hệ phương trình:

a) $\begin{cases} x+\sqrt{y-3}=4 \\ y+\sqrt{x-3}=4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=5 \\ \sqrt{x+5}+\sqrt{y+5}=8 \end{cases}$.

Bài tập 3. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{2-y}=\sqrt{2} \\ \sqrt{2-x}+\sqrt{y}=\sqrt{2} \end{cases}$

PHẦN 9. CÁC PHƯƠNG PHÁP GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH MŨ

PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng phương trình chứa ẩn số mũ của luỹ thừa. Chúng ta dùng phép cộng, phép thế, đặt ẩn phụ...

★**Thí dụ 1.** Giải hệ phương trình. $\begin{cases} 2^x + 2.3^{x+y} = 56 \\ 3.2^x + 3^{x+y+1} = 87 \end{cases}$

Hướng dẫn giải

Đặt $2^x = u > 0, 3^{x+y} = v > 0$ hệ đã cho trở thành

$$\begin{cases} u + 2v = 56 \\ u + v = 29 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v = 27 \\ u + v = 29 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u = 2 \\ v = 27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x = 2 \\ 3^{x+y} = 27 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2^x = 2^1 \\ 3^{x+y} = 3^3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x + y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm: (1;2).

★**Thí dụ 2.** Giải hệ phương trình. $\begin{cases} (x^4 + y)3^{y-x^4} = 1 \\ 8(x^4 + y) - 6^{x^4-y} = 0 \end{cases}$

Hướng dẫn giải

$$\begin{cases} (x^4 + y)3^{y-x^4} = 1 & (1) \\ 8(x^4 + y) - 6^{x^4-y} = 0 & (2) \end{cases}$$

$(1) \Leftrightarrow x^4 + y = 3^{x^4-y}$

$$\Rightarrow (2) \Leftrightarrow 8\left(3^{x^4-y} - 6^{x^4-y}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3^{x^4-y}\left(8-2^{x^4-y}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 8-2^{x^4-y}=0$$

$$\Leftrightarrow 2^{x^4-y}=8=2^3$$

$$\Leftrightarrow x^4-y=3$$

Khi đó: $\begin{cases} x^4-y=3 \\ x^4+y=27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4=15 \\ y=12 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm\sqrt[4]{15} \\ y=12 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có 2 nghiệm: $\left(-\sqrt[4]{15};12\right),\left(\sqrt[4]{15};12\right)$

★**Thí dụ 3.** Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x+2y=-1 \\ 4^{x+y^2}=16 \end{cases}$

Hướng dẫn giải

Từ phương trình thứ nhất ta có: $x=-2y-1$

Thay vào phương trình thứ hai ta được:

$$4^{-2y-1+y^2}=4^2$$

$$\Leftrightarrow -2y-1+y^2=2$$

$$\Leftrightarrow y^2-2y-3=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-1 \quad \Rightarrow x=1 \\ y=3 \quad \Rightarrow x=-7 \end{array}\right.$$

Vậy hệ có hai nghiệm là: (1;-1); (-7;3).

★**Thí dụ 4.** Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 3^{y-1}-2^x=5 \\ 4^x-6.3^y+2=0 \end{cases}$

Hướng dẫn giải

Đặt $u=2^x;v=3^y\,(u>0,v>0)$, hệ phương trình đã cho trở thành

$$\begin{cases} 3v-u=5 \\ u^2-6v+2=0 \end{cases}$$

Đây là phương trình bậc hai với ẩn số u,v. Giải hệ ta tìm được

$$\begin{cases} u = -2 \\ v = 1 \end{cases} \quad (loại) \quad ; \begin{cases} u = 4 \\ v = 3 \end{cases}$$

Từ đó suy ra $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$

Vậy hệ có nghiệm là: (2;1).

B. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài tập `1. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^{x+y} = y^{x-y} \\ x^2 y = 1 \end{cases}$

PHẦN 10. CÁC PHƯƠNG PHÁP GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH BA ẨN

PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Hệ phương trình ba ẩn là một chủ đề khó và cũng rất hay gặp trong các đề thi học sinh giỏi và vào các trường chuyên, lớp chọn. Không có phương pháp nào tổng quát để giải các bài toán chủ đề này. Mình sẽ trình bày các ví dụ và lời giải chi tiết để các bạn có thể rút ra các kinh nghiệm để giải khi gặp các bài toán loại hệ ba ẩn này.

🗁 Dạng 1. Hệ hai phương trình ba ẩn

★**Thí dụ 1.** Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=xy+yz+zx \\ x^{2003}+y^{2003}+z^{2003}=3^{2004} \end{cases}$

Hướng dẫn giải

Ta có: $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=xy+yz+zx & (1) \\ x^{2003}+y^{2003}+z^{2003}=3^{2004} & (2) \end{cases}$

PT (1) $\Leftrightarrow 2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2yz-2zx=0$

$\Leftrightarrow (x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=0$

$\Leftrightarrow x=y=z$

Thế vào (2) ta có: $3x^{2003}=3^{2004} \Leftrightarrow x^{2003}=3^{2003} \Leftrightarrow x=3$

Do đó $x=y=z=3$

Vậy nghiệm của hệ đã cho là: $(x;y;z)=(3;3;3)$

★**Thí dụ 2.** Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x^4+y^4+z^4=xyz \end{cases}$

(Trích đề thi HSG tỉnh Thanh Hóa năm 2013-2014)

Hướng dẫn giải

Ta có: $x^4+y^4+z^4=\dfrac{x^4+y^4}{2}+\dfrac{y^4+z^4}{2}+\dfrac{z^4+x^4}{2}\ge x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2$

$=\dfrac{x^2y^2+y^2z^2}{2}+\dfrac{y^2z^2+z^2x^2}{2}+\dfrac{z^2x^2+x^2y^2}{2}\ge xyyz+yzzx+zxxy$

$=xyz(x+y+z)=xyz$ (vì $x+y+z=1$).

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x = y = z \\ x + y + z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = \dfrac{1}{3}$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là: $\left(x = \dfrac{1}{3}; y = \dfrac{1}{3}; z = \dfrac{1}{3}\right)$

★**Thí dụ 3.** Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2xy - z^2 = 4 \end{cases}$

(Trích đề HSG Lâm Đồng năm 2010-2011)

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2xy - z^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2 - x - y \\ z^2 = 2xy - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2 - x - y)^2 = 2xy - 4 \\ z = 2 - x - y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2 + (y-2)^2 = 0 \\ z = 2 - x - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 2 \\ z = -2 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là: $(x, y, z) = (2; 2; -2)$

★**Thí dụ 4.** Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x^2 + y^2 - 2xy + 2yz - 2zx + 1 = 0 \end{cases}$

Hướng dẫn giải

Hệ phương trình viết lại $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ (x - y)^2 - 2z(x - y) + 1 = 0 \end{cases}$

Từ phương trình thứ nhất ta được: $-1 \le z \le 1$. $\quad (1)$

Từ phương trình thứ (2) suy ra (x – y) tồn tại khi: $z^2 - 1 \ge 0 \Leftrightarrow |z| \ge 1$. $\quad (2)$

Kết hợp (1) và (2) ta có $z = \pm 1$.

Với z = 1, hệ phương trình có dạng:

$\begin{cases} x^2 + y^2 = 0 \\ x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 0 \\ y = x - 1 \end{cases}$ vô nghiệm.

Với z = -1, hệ phương trình có dạng:

$\begin{cases} x^2 + y^2 = 0 \\ x - y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 0 \\ y = x + 1 \end{cases}$ vô nghiệm.

Vậy hệ vô nghiệm.

🗁 Dạng 2. Hệ ba phương trình ba ẩn

★**Thí dụ 1.** Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=16 \\ \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=20 \\ \dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{x}=18 \end{cases}$

Hướng dẫn giải

Điều kiện : $\begin{cases} x \neq 0 \\ y \neq 0 \\ z \neq 0 \end{cases}$

Cộng theo từng vế ba phương trình của hệ ta được: $2\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)=54 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=27$

Đem phương trình này, trừ đi từng vế lần lượt từng phương trình của hệ, ta có:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{z}=11 \\ \dfrac{1}{x}=7 \\ \dfrac{1}{y}=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=\dfrac{1}{11} \\ x=\dfrac{1}{7} \\ y=\dfrac{1}{9} \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm: $\left(\dfrac{1}{7};\dfrac{1}{9};\dfrac{1}{11}\right)$

★**Thí dụ 2.** Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{xy}{x+y}=\dfrac{8}{3} \\ \dfrac{yz}{y+z}=\dfrac{12}{5} \\ \dfrac{xz}{x+z}=\dfrac{24}{7} \end{cases}$

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $\begin{cases} x \neq -y \\ y \neq -z \\ x \neq -z \\ xyz \neq 0 \end{cases}$

Ta có: $\begin{cases} \dfrac{xy}{x+y}=\dfrac{8}{3} \\ \dfrac{yz}{y+z}=\dfrac{12}{5} \\ \dfrac{xz}{x+z}=\dfrac{24}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x+y}{xy}=\dfrac{3}{8} \\ \dfrac{y+z}{yz}=\dfrac{5}{12} \\ \dfrac{x+z}{xz}=\dfrac{7}{24} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{3}{8} \\ \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{5}{12} \\ \dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{7}{24} \end{cases}$

Giải tương tự câu a), ta được: $\begin{cases} x=8 \\ y=4 \\ z=6 \end{cases}$

★**Thí dụ 3.** Giải hệ phương trình: $\begin{cases} xy+z^2=2 \\ yz+x^2=2 \\ zx+y^2=2 \end{cases}$

Hướng dẫn giải

Từ (1) và (2) ta có : (x – z)(x – y + z) = 0 (4)

Từ (2) và (3) ta có: (y - x)(x + y –z) = 0 (5)

Từ (3) ; (4) ; (5) ta có hệ : $\begin{cases} (x-z)(x-y+z)=0 \\ (y-x)(x+y-z)=0 \\ zx+y^2=2 \end{cases}$

Để giải hệ trên ta giải 4 hệ :

$\begin{cases} x-z=0 \\ y-x=0 \\ zx+y^2=2 \end{cases} \quad (A) \qquad \begin{cases} x-z=0 \\ x+y-z=0 \\ zx+y^2=2 \end{cases} \quad (B)$

$\begin{cases} x-y+z=0 \\ y-x=0 \\ zx+y^2=2 \end{cases} \quad (C) \qquad \begin{cases} x-y+z=0 \\ x+y-z=0 \\ zx+y^2=2 \end{cases} \quad (D)$

Giải 4 hệ trên ta được 8 bộ nghiệm của hệ phương trình :

(1; 1; 1) ; (-1;-1; -1) ; $\left(\sqrt{2};\ 0;\sqrt{2}\right)$; $\left(-\sqrt{2};\ 0;-\sqrt{2}\right)$

$\left(\sqrt{2};\ \ \sqrt{2}\ ;0\right)$; $\left(-\sqrt{2};\ -\sqrt{2}\ ;0\right)$; $\left(0;\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$; $\left(0;-\sqrt{2};-\sqrt{2}\right)$

★**Thí dụ 4.** Tìm các số thực *x, y, z* thỏa mãn: $\begin{cases} x-y-z=1 \\ y-z-x=3. \\ z-x-y=5 \end{cases}$

(Trích đề Chuyên Hùng Vương Phú Thọ năm 2015-2016)

Hướng dẫn giải

Cộng vế với vế các phương trình đã cho ta được $x+y+z=-9.$

Phương trình đầu có dạng $2x-(x+y+z)=1 \Rightarrow x=-4.$

Phương trình thứ hai có dạng $2y-(x+y+z)=3 \Rightarrow y=-3.$

Phương trình thứ ba có dạng $2z-(x+y+z)=5 \Rightarrow z=-2.$

Thử lại thỏa mãn. Vậy $x=-4, y=-3, z=-2.$

★**Thí dụ 5.** Giải hệ phương trình: $\begin{cases} xy=x+y+1 \\ yz=y+z+5 \\ zx=z+x+2 \end{cases} \quad (x,\ y,\ z \in \mathbb{R})$

(Trích đề vào lớp 10 Chuyên Vĩnh Phúc năm 2013-2014)

Hướng dẫn giải

Ta có: $\begin{cases} xy=x+y+1 \\ yz=y+z+5 \\ zx=z+x+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(y-1)=2 \\ (y-1)(z-1)=6 \\ (z-1)(x-1)=3 \end{cases}$

Nhân từng vế các phương trình của hệ trên ta được

$$\left((x-1)(y-1)(z-1)\right)^2=36 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x-1)(y-1)(z-1)=6 \\ (x-1)(y-1)(z-1)=-6 \end{array}\right.$$

+) Nếu $(x-1)(y-1)(z-1)=6$, kết hợp với hệ trên ta được

$$\begin{cases} x-1=1 \\ y-1=2 \\ z-1=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=3 \\ z=4 \end{cases}$$

+) Nếu $(x-1)(y-1)(z-1)=-6$, kết hợp với hệ trên ta được

$$\begin{cases} x-1=-1 \\ y-1=-2 \\ z-1=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-1 \\ z=-2 \end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình đã cho có 2 nghiệm $(x;y;z)=(2;3;4),(0;-1;-2)$.

★**Thí dụ 6.** Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x+xy+y=1 \\ y+yz+z=4 \\ z+zx+x=9 \end{cases}$ trong đó $x,y,z>0$

Hướng dẫn giải

Hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases}(x+1)(y+1)=2\\(y+1)(z+1)=5\\(z+1)(x+1)=10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[(x+1)(y+1)(z+1)\right]^2=100\\(x+1)(y+1)=2\\(y+1)(z+1)=5\\(z+1)(x+1)=10\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(x+1)(y+1)(z+1)=10\\(x+1)(y+1)=2\\(y+1)(z+1)=5\\(z+1)(x+1)=10\end{cases}\quad (\text{Do } x,y,z>0)$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}z+1=5\\x+1=2\\y+1=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=0\\z=4\end{cases}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm là: $(x;y;z)=(1;0;4)$

★Thí dụ 7. Giải hệ phương trình.

a) $\begin{cases}x+y=-3\\x+z=-2\\xy+yz+zx=2\end{cases}$ **b)** $\begin{cases}xy+yz=5\\yz+zx=9\\zx+xy=8\end{cases}$

c) $\begin{cases}(2-x)(3x-2z)=3-z & (1)\\y^3+3y^2=x^2-3x+2 & (2)\\z^2+y^2=6z & (3)\\z\le 3 & (4)\end{cases}$

Hướng dẫn giải

a)Xem hệ phương trình: $\begin{cases}x+y=-3 & (1)\\x+z=-2 & (2)\\xy+yz+zx=2 & (3)\end{cases}$

Ta có:

$$\begin{cases}x+y=-3\\x+z=-2\\xy+yz+xz=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=-x-3\\z=-x-2\\x^2=4\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=2\\y=-5\\z=-4\end{cases}\\\begin{cases}x=-2\\y=-1\\z=0\end{cases}\end{array}\right.$$

Vậy nghiệm củahệ đã cho là: (2; -5; -4);(-2; -1; 0).

b) Xem hệ phương trình $\begin{cases} xy + yz = 5 & (1) \\ yz + zx = 9 & (2) \\ zx + xy = 8 & (3) \end{cases}$

Cộng các phương trình (1),(2),(3), vế theo vế ta có:

$$2(xy + yz + zx) = 22$$
$$\Leftrightarrow xy + yz + zx = 11 \qquad (4)$$

Từ (4) và các phương trình của hệ ta có:

$$\begin{cases} xz = 6 \\ xy = 2 \\ yz = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 4 \\ xy = 2 \\ yz = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \\ z = -3 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ z = 3 \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là: (2;1;3); (-2;-1;-3).

c) $\begin{cases} (2 - x)(3x - 2z) = 3 - z & (1) \\ y^3 + 3y^2 = x^2 - 3x + 2 & (2) \\ z^2 + y^2 = 6z & (3) \\ z \le 3 & (4) \end{cases}$

Từ (1) ta có $3x^2 - 2(3 + z)x + 3z + 3 = 0$. Để tồn tại x thì $\Delta' \ge 0$

$$\Delta' = z^2 - 3z \ge 0$$

$$\Leftrightarrow z \le 0 \text{ hoặc } z \ge 3 \quad (5)$$

Từ (3) ta có $y^2 = 6z - z^2 = z(6 - z) \ge 0$

$$\Leftrightarrow 0 \le z \le 6 \quad (6)$$

Kết hợp (4), (5), (6) ta có: z = 0; z = 3.

Khi $z = 0 \Rightarrow x = 1; y = 0$

$z = 3 \Rightarrow x = 2; y = -3$

Vậy hệ có nghiệm là: (1;0;0); (2;-3;3).

★**Thí dụ 8.** Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2(y+z)^2 = (3x^2+x+1)y^2z^2 \\ y^2(z+x)^2 = (4y^2+y+1)z^2x^2 \\ z^2(x+y)^2 = (5z^2+z+1)x^2y^2 \end{cases}$

Hướng dẫn giải

Nếu chia hai vế của mỗi phương trình cho $x^2y^2z^2$ thì ta được hệ mới đơn giản hơn.

TH 1. $xyz=0$. Nếu $x=0$ thì hệ $\Leftrightarrow y^2z^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ z=t,\ t\in\mathbb{R} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} z=0 \\ y=t,\ t\in\mathbb{R} \end{cases}$

-Tương tự với $y=0$ và $z=0$ ta thu được các nghiệm là

$(0;0;t),\ (0;t;0),\ (t;0;0),\ t\in\mathbb{R}$

-TH 2. $xyz\neq 0$. Chia hai vế của mỗi pt trong hệ cho $x^2y^2z^2$ ta được

$$\begin{cases} \left(\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{y}\right)^2 = 3+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2} & (1) \\ \left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{z}\right)^2 = 4+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{y^2} & (2). \\ \left(\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{x}\right)^2 = 5+\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{z^2} & (3) \end{cases}$$

Cộng vế 3 phương trình của hệ ta được :

$$\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{y}\right)^2+\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\right)^2+\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{x}\right)^2 = 12+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)-12=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=4 \quad (4) \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=-3 (5) \end{array}\right.$$

- Từ (4) và (1) ta có $\left(4-\dfrac{1}{x}\right)^2 = 3+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2} \Leftrightarrow \dfrac{9}{x}=13 \Leftrightarrow x=\dfrac{9}{13}$
- Tứ (4) và (2) ta có $y=\dfrac{3}{4}$. Từ (4) và (3) ta có $z=\dfrac{9}{11}$
- Tương tự, từ (5), (1), (2), (3) ta có $x=-\dfrac{5}{6},\ y=-1,\ z=-\dfrac{5}{4}$.
- Vậy hệ có tập nghiệm là

$$S=\left\{(t;0;0);\ (0;t;0);\ (0;0;t);\ \left(\frac{9}{13};\frac{3}{4};\frac{9}{11}\right);\ \left(-\frac{5}{6};-1;-\frac{5}{4}\right),\ t\in\mathbb{R}\right\}$$

★**Thí dụ 8.** Cho hệ: $\begin{cases} x^2+z^2=9 & (1) \\ y^2+t^2=16 & (2) \\ xt+yz\geq 12 & (3) \end{cases}$

Trong tập hợp các nghiệm của hệ đã cho, hãy tìm nghiệm (x_0, y_0, z_0, t_0) sao cho tổng $x_0 + y_0$ đạt giá trị lớn nhất.

Hướng dẫn giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky ta có:

$$(xt + zy)^2 \le (x^2 + z^2)(t^2 + y^2)$$

Dấu "=" khi và chỉ khi $xt = yz$ hay $\frac{x}{t} = \frac{z}{y} = k$, suy ra $xt + yz = 12$

Ta có: $\frac{x}{t} = \frac{z}{y} = k \Rightarrow k^2 = \frac{x^2 + z^2}{t^2 + y^2} = \frac{9}{16} \Rightarrow k = \pm\frac{3}{4}$

Cộng (1),(2) vế theo vế ta có:

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = (x + y)^2 + (z - t)^2 = 25$$

$$\Leftrightarrow (x + y)^2 = 25 - (z - t)^2 \text{ mà } (z - t)^2 \ge 0$$

Nên $(x + y)^2 \le 25 \Leftrightarrow x + y \le 5$

Vậy x + y đạt giá trị lớn nhất bằng 5, khi t = z.

Giải hệ phương trình này với $z = t$ và $x = kt (k = \pm\frac{3}{4})$, có $x = \frac{9}{5}; y = \frac{16}{5}; z = \frac{12}{5}; t = \frac{12}{5}$.

B. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài toán 1. Giải hệ phương trình:

a) $\begin{cases} \frac{xy}{x + y} = \frac{12}{5} \\ \frac{yz}{y + z} = \frac{18}{5} \\ \frac{xz}{x + z} = \frac{36}{13} \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^4 + y^4 = 13 + x^2y^2 \\ x^2 - y^2 = 1 + 2xy \\ xy < 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 29 \\ xy + yz + zx = -10 \\ x + y = -1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} y + 4 = (3 - x)^3 \\ (2z - y)(y + 2) = 9 + 4y \\ x^2 + z^2 = 4x \\ z \ge 0 \end{cases}$

Bài toán 2. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x + y = z \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z} \end{cases}$

Bài toán 3. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x+y+z=-2 \\ x^2+y^2+z^2=6 \quad (z\geq 1) \\ x^3+y^3+z^3=-6 \end{cases}$

Bài toán 4. Tìm tất cả các bộ gồm ba số (x, y, z) thoả mãn hệ:

$$\begin{cases} x+y+z>2 \\ x^2+y^2=4-2xy \\ x^2+z^2=9-2xz \\ y^2+z^2=16-2yz \end{cases}$$

Bài toán 4. Xác định a để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} x^2+y^2=z \\ x+y+z=a \end{cases}$$

CHỦ ĐỀ 2 CÁC KĨ THUẬT GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH

PHÂN 1. KĨ THUẬT THẾ TRONG GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH

A. NỘI DUNG PHƯƠNG PHÁP

- Hệ gồm hai phương trình, trong đó từ một phương trình ta có thể rút được một ẩn theo ẩn còn lại và thế vào phương trình kia tạo ra phương trình đa thức bậc cao một ẩn có thể giải được. Đôi khi ta cũng thực hiện phép thế hằng số hoặc thế một biểu thức vào phương trình còn lại.

Dấu hiệu nhận biết:

- Trong hai phương trình của hệ có ít nhất một phương trình bậc nhất của x và y.
- Có thể rút một biến theo biến còn lại từ một phương trình của hệ.

B. THÍ DỤ MINH HỌA

Dạng 1. Rút một ẩn theo ẩn còn lại và thế vào phương trình kia của hệ

★**Thí dụ 1.** Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x+3y=5 & (1) \\ 3x^2-y^2+2y=4 & (2) \end{cases}$

Lời giải

Từ (1) ta có $x=\dfrac{5-3y}{2}$ thế vào (2) ta được

$$3\left(\frac{5-3y}{2}\right)^2-y^2+2y-4=0$$

$$\Leftrightarrow 3(25-30y+9y^2)-4y^2+8y-16$$

$$\Leftrightarrow 23y^2-82y+59=0$$

$$\Leftrightarrow (y-1)(23y-59)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=\dfrac{59}{23} \end{array}\right.$$

Với y = 1 thay vào (1) ta được: $2x+3=5 \Rightarrow x=1$

Với $y=\dfrac{59}{23}$ thay vào (1) ta được: $2x+3.\dfrac{59}{23}=5 \Leftrightarrow x=-\dfrac{31}{23}$

Vậy tập nghiệm của hệ phương trình là $\left\{(1;1);\left(-\frac{31}{23};\frac{59}{23}\right)\right\}$

Nhận xét: Ở bài toán này ta rút x theo y vì phương trình (2) của hệ chưa nhiều ẩn y hơn so với x, khi thế x theo y chúng ta sẽ nhẹ nhàng hơn trong việc tính toán.

★**Thí dụ 2.** Giải hệ phương trình $\begin{cases} xy+2x+y=14 \\ x^3+3x^2+3x-y=1 \end{cases}$

Lời giải

Ta có: $\begin{cases} xy+2x+y=14 \\ x^3+3x^2+3x-y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(y+2)=14-y \quad (1) \\ (x+1)^3-y-2=0 \quad (2) \end{cases}$

Với $y=-2$ thế vào (1) ta được: 0x = 16 (vô lý)

Với $y\neq -2$ từ (*) suy ra: $x=\frac{14-y}{y+2}$ thế vào (2) ta được:

$$\left(\frac{14-y}{y+2}+1\right)^3-y-2=0 \Leftrightarrow \left(\frac{16}{y+2}\right)^3=y+2 \Leftrightarrow (y+2)^4=16^3$$

$$\Leftrightarrow (y+2)^4=8^4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y+2=8 \\ y+2=-8 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=6\Rightarrow x=1 \\ y=-10\Rightarrow x=-3 \end{array}\right.$$

Với y = 1 thay vào (1) ta được: $2x+3=5\Rightarrow x=1$

Với $y=\frac{59}{23}$ thay vào (1) ta được: $2x+3.\frac{59}{23}=5\Leftrightarrow x=-\frac{31}{23}$

Vậy tập nghiệm của hệ phương trình là $\{(1;6);(-3;-10)\}$

🗁 Dạng 2. Thế một biểu thức vào phương trình còn lại

★**Thí dụ 3.** Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2-x-y=-1 \\ x^3+x^2y+x^2+xy=x+y-2 \end{cases}$

Lời giải

Ta có: $\begin{cases} x^2-x-y=-1 \\ x^3+x^2y+x^2+xy=x+y-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=x^2+1 \\ x^2(x+y)+x(x+y)-(x+y)=-2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=x^2+1 \quad (1) \\ (x+y)(x^2+x-1)=-2 \quad (2) \end{cases}$$

Thay $x+y=x^2+1$ thế vào (2) ta được:

$$(x^2+1)(x^2+x-1)=-2$$
$$\Leftrightarrow x^4+x^3-x^2+x^2+x-1=-2$$
$$\Leftrightarrow x^4+x^3+x+1=0$$

$\Leftrightarrow x^3(x+1)+(x+1)=0$

$\Leftrightarrow (x+1)(x^3+1)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1=0 \\ x^3+1=0 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x^3=-1 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow x=-1$

Với $x=-1$ thế vào (1) ta được: $-1+y=1+1 \Leftrightarrow y=3$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x,y)=(-1;3)$

★**Thí dụ 4.** Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^4+2x^3y+x^2y^2=2x+9 \\ x^2+2xy=6x+6 \quad (*) \end{cases}$

Lời giải

Ta có: $\begin{cases} x^4+2x^3y+x^2y^2=2x+9 \\ x^2+2xy=6x+6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2+xy)^2=2x+9 \\ 2x^2+2xy=x^2+6x+6 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x^2+xy)^2=2x+9 & (1) \\ x^2+xy=\dfrac{x^2+6x+6}{2} & (2) \end{cases}$$

Thế $x^2+xy=\dfrac{x^2+6x+6}{2}$ vào (1) ta được:

$$\left(\frac{x^2+6x+6}{2}\right)^2=2x+9$$

$$\Leftrightarrow (x^2+6x+6)^2=4(2x+9)$$

$$\Leftrightarrow x^4+36x^2+36+12x^3+12x^2+72x=4(2x+9)$$

$$\Leftrightarrow x^4+12x^3+48x^2+64x=0$$

$$\Leftrightarrow x(x^3+12x^2+48x+64)=0$$

$$\Leftrightarrow x(x+4)^3=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-4 \end{array}\right.$$

Với $x=0$ thế vào (*) ta được: $0y=6$ (vô nghiệm)

Với $x=-4$ thế vào (*) ta được: $16-8y=-24+6 \Leftrightarrow 8y=34 \Rightarrow y=\dfrac{17}{4}$ (vô nghiệm)

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x,y)=\left(-4;\dfrac{17}{4}\right)$

Nhận xét: Chúng ta hoàn toàn có thể rút trực tiếp *y* hoặc *xy* từ phương trình (*) thế vào phương trình kia của hệ để chuyển về phương trình bậc 4 một ẩn x và giải bằng cách nhẩm nghiệm, nhưng nếu linh hoạt một chút chúng ta biến đổi sau đó mới thế như cách tôi trình bày ở trên thì lời giải sẽ nhẹ nhàng về mặt tính toán và đẹp mắt hơn.

★**Thí dụ 5.** Giải hệ phương trình $\begin{cases} y^2 - xy + 1 = 0 & (1) \\ x^2 + y^2 + 2x + 2y + 1 = 0 & (2) \end{cases}$

Phân tích: Rút $y^2 = xy + 1$ thế vào phương trình (2) của hệ ta được phương trình đưa được về phương trình tích nên ta dùng phương pháp thế.

$$x^2 + xy + 2x + 2y = 0 \Leftrightarrow x(x+y) + 2(x+y) = 0 \Leftrightarrow (x+y)(x+2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + y = 0 \\ x + 2 = 0 \end{array}\right.$$

Lời giải

$$\begin{cases} y^2 - xy + 1 = 0 \\ x^2 + y^2 + 2x + 2y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = xy - 1 \\ x^2 + xy - 1 + 2x + 2y + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = xy - 1 \\ x^2 + xy + 2x + 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = xy - 1 \\ x(x+y) + 2(x+y) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = xy - 1 \\ (x+y)(x+2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = xy - 1 \\ \left[\begin{array}{l} x + y = 0 \\ x + 2 = 0 \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = xy - 1 \\ \left[\begin{array}{l} x = -y \\ x = -2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = -y \\ y^2 = -y^2 - 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -2 \\ y^2 = -2y - 1 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = -y \\ 2y^2 = -1 \end{cases} (VN) \\ \begin{cases} x = -2 \\ (y+1)^2 = 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases}$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất (x, y) = $(-2;1)$

🗁 Dạng 3. Thế hằng số từ phương trình này vào phương trình kia

★**Thí dụ 6.** Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3 + xy^2 - 10y = 0 \\ x^2 + 6y^2 = 10 \end{cases}$

(Trích đề chuyên Hùng Vương - Phú Thọ 2015-2016)

Lời giải

Ta có: $\begin{cases} x^3 + xy^2 - 10y = 0 & (1) \\ x^2 + 6y^2 = 10 & (2) \end{cases}$

Thế $10 = x^2 + 6y^2$ vào phương trình (1) ta được

$$x^3 + xy^2 - (x^2 + 6y^2)y = 0$$

$<=> x^3 + xy^2 - x^2y - 6y^3 = 0$

$<=> x^3 - 2x^2y + x^2y - 2xy^2 + 3xy^2 - 6y^3 = 0$

$<=> (x-2y)(x^2 + xy + 3y^2) = 0$

$<=> \left[\begin{array}{l} x = 2y \\ x^2 + xy + 3y^2 = 0 \end{array}\right.$

+ Trường hợp 1: $x^2 + xy + 3y^2 = 0 \;<=> \left(x + \dfrac{y}{2}\right)^2 + \dfrac{11y^2}{4} = 0 => x = y = 0$

Vì $x = y = 0$ không thỏa mãn phương trình (2) nên x = y = 0 không là nghiệm của hệ.
+ Trường hợp 2: $x = 2y$ thay vào phương trình (2) ta có:

$4y^2 + 8y^2 = 12 <=> y^2 = 1 <=> \left[\begin{array}{l} y = 1 => x = 2 \\ y = -1 => x = -2 \end{array}\right.$

Vậy hệ phương trình có 2 nghiệm $(x;y) \in \{(2;1);(-2;-1)\}$

Nhận xét: Việc thế $10 = x^2 + 6y^2$ vào (2) nhằm tạo ra một phương trình đẳng cấp bậc 3 đối với x và y, từ phương trình đẳng cấp này chúng ta dễ dàng chuyển thành dạng tích để rút ra được mối liên hệ giữa x với y.

Trường hợp bạn chưa có nhiều kĩ năng phân tích nhân tử, bạn không thể chuyển $x^3 + xy^2 - x^2y - 6y^3 = 0$ thành dạng tích, bạn của thể làm như sau:

- Xét y = 0 thì x = 0 thay vào hệ phương trình đã cho ta thấy (x, y) = (0, 0) không thỏa mãn hệ phương trình.

- Xét $y \neq 0$ chia hai vế của phương trình cho $y^3 \neq 0$ ta được: $\left(\dfrac{x}{y}\right)^3 - \left(\dfrac{x}{y}\right)^2 + \dfrac{x}{y} - 6 = 0$

Đặt $\dfrac{x}{y} = t$ ta được: $t^3 - t^2 + t - 6 = 0$ đây là phương trình bậc 3 chúng ta dễ dàng dùng máy tính để bấm ra nghiệm hoặc tự nhẩm nghiệm cũng đơn giản hơn, từ đó dễ dàng giải quyết bài toán.

★**Thí dụ 7.** Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3 - 8x = y^3 + 2y \\ x^2 - 3 = 3\left(y^2 + 1\right) \end{cases}$

Lời giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 2\left(4x + y\right) \\ x^2 - 3y^2 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^3 - 3y^3 = 6\left(4x + y\right) & (1) \\ x^2 - 3y^2 = 6 & (2) \end{cases}$$

Thay (2) vào (1) ta có:

$$3x^3-3y^3=\left(x^2-3y^2\right)\left(4x+y\right)\Leftrightarrow x^3+x^2y-12xy^2=0\quad\left(*\right)$$

- Xét x = 0 thì y = 0 thay vào hệ phương trình đã cho ta thấy (x, y) = (0, 0) không thỏa mãn hệ phương trình.

- Xét $x\neq 0$ chia hai vế của phương trình cho $x^3\neq 0$ ta được: $1+\left(\dfrac{y}{x}\right)-12\left(\dfrac{y}{x}\right)^2=0$

Đặt $\dfrac{y}{x}=t$, ta được: $1+t-12t^2=0\Leftrightarrow\left(1-3t\right)\left(4t+1\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\dfrac{1}{3}\\ t=-\dfrac{1}{4}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3y\\ x=-4y\end{array}\right.$

Với $x=3y$ thay vào (2) ta được: $9y^2-3y^2=6\Leftrightarrow y^2=1\Leftrightarrow y=\pm 1\Rightarrow x=\pm 3$

Với $x=-4y$ thay vào (2) ta được:

$$16y^2-3y^2=6\Leftrightarrow 13y^2=6\Leftrightarrow y=\pm\sqrt{\frac{6}{13}}\Rightarrow x=\mp\sqrt{\frac{96}{13}}$$

Vậy tập nghiệm của hệ phương trình là $\left\{\left(1;3\right);\left(-1;-3\right);\left(\sqrt{\dfrac{6}{13}};-\sqrt{\dfrac{96}{13}}\right)\left(-\sqrt{\dfrac{6}{13}};\sqrt{\dfrac{96}{13}}\right)\right\}$

PHẦN 2. KĨ THUẬT PHÂN TÍCH THÀNH NHÂN TỬ

A. NỘI DUNG PHƯƠNG PHÁP:

Hệ có dạng $\begin{cases} A(x,y)=0 \\ B(x,y)=0 \end{cases}$

Trong đó có một phương trình của hệ đưa được về dạng tích

Chẳng hạn: A(x, y) = a(x, y).b(x, y) = 0 thông thường A(x) là phương trình đa thức 2 ẩn, hoặc phương trình đẳng cấp, tìm được mối quan hệ các biến trong phương trình.

Ta biến đổi: $\begin{cases} A(x,y)=0 \\ B(x,y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(x,y).b(x,y)=0 \\ B(x,y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(x,y)=0 \\ B(x,y)=0 \end{cases} \vee \begin{cases} b(x,y)=0 \\ B(x,y)=0 \end{cases}$

Dấu hiệu thường gặp:

- Có một phương trình trình là phương trình đa thức, nhưng đôi khi có thể là bậc cao chẳng hạn bậc 4 hoặc 6, chúng ta giải xuống bằng cách đặt ẩn phụ ($t = x^2$, $t = x^3$)

- Hệ có phương trình đẳng cấp, hoặc có thể dùng phép thế để kết hợp 2 hệ chuyển được về phương trình đẳng cấp.

- Hệ có căn thức cũng rất thường xuyên có thể chuyển về dạng tích bằng cách sử dụng lượng liên hợp, đặt ẩn phụ, hoặc đánh giá hàm số.

B. THÍ DỤ MINH HỌA:

★**Thí dụ 8.** Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 6x^2-3xy+x=1-y & (1) \\ x^2+y^2=1 & (2) \end{cases}$

(Trích đề chuyên Yên Bái 2012-2013)

Lời giải

Biến đổi phương trình (1) của hệ ta được:

$$\begin{aligned} & 6x^2-3xy+x=1-y \\ \Leftrightarrow\ & 6x^2-3xy+x+y-1=0 \\ \Leftrightarrow\ & 6x^2-3xy+3x-2x+y-1=0 \\ \Leftrightarrow\ & 3x(2x-y+1)-(2x-y+1)=0 \\ \Leftrightarrow\ & (3x-1)(2x-y+1)=0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x-1=0 \\ 2x-y+1=0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{3} \\ y=2x+1 \end{array}\right.$$

Với $x=\frac{1}{3}$ thế vào (2) ta được:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2+y^2=1\Leftrightarrow y^2=\frac{8}{9}\Leftrightarrow y=\frac{\pm 2\sqrt{2}}{3}$$

Với $y=2x+1$ thế vào (2) ta được:

$$x^2+(2x+1)^2=1\Leftrightarrow 5x^2+4x=0\Leftrightarrow x(5x+4)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=0\Rightarrow y=1\\ x=-\frac{4}{5}\Rightarrow y=-\frac{3}{5}\end{array}\right.$$

Vậy tập nghiệm của hệ phương trình là $\left\{\left(\frac{1}{3};\frac{2\sqrt{2}}{3}\right);\left(\frac{1}{3};-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right);(0;1);\left(-\frac{4}{5};-\frac{3}{5}\right)\right\}$

Nhận xét: Đối các hệ phương trình có một phương trình có dạng là một tam thức bậc 2 đối với 2 ẩn như phương trình (1) của hệ trên việc chúng ta phải làm kiểm tra xem phương trình này có thể chuyển về phương trình tích để rút một ẩn theo ẩn kia và thế vào phương trình còn lại. Tuy nhiên đôi khi việc chuyển về phương trình tích là tương đối khó, ta có thể một ẩn là tham số như sau:

$$6x^2-3xy+x=1-y\Leftrightarrow 6x^2-(3y-1)x+y-1=0\quad(1)$$

$$\Delta_{(1)}=(3y-1)^2-4.6(y-1)=9y^2-6y+1-24y+24=9y^2-30y+25=(3y-5)^2$$

$$x_1=\frac{(3y-1)+(3y-5)}{12}=\frac{y-1}{2};\ x_2=\frac{(3y-1)-(3y-5)}{12}=\frac{1}{3}$$

Từ đây chúng ta dễ dành đưa phương trình của hệ về dạng tích. Trong trường hợp dental không là số chính phương thì hệ đó không giải được bằng cách đưa phương trình đó của hệ về dạng tích, ta nên nghĩ tớ việc tìm liên hệ giữa các ẩn bằng phương trình kia của hệ, hoặc có thể là phải kết hợp cả 2 phương trình cử hệ mới tìm được quan hệ giữa các ẩn. Để minh họa điều này ta đến ví dụ sau:

★Thí dụ 9. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+(x+3)(2x-y+5)=x+16 & (1)\\ \sqrt{x+2}(x-y+3)=\sqrt{y} & (2)\end{cases}$

(Trích đề chuyên Nam Định 2015-2016)

Phân tích: Điều kiện: $\begin{cases} x+2\ge 0\\ y\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow x\ge -2, y\ge 0.$

Phương trình (1) của hệ có dạng bậc 2 của x và y nên thử ta thử kiểm tra xem có thể đưa về dạng tích hay không.

$$(1)\Leftrightarrow x^2+2x^2-xy+5x+6x-3y+15=x+16$$
$$\Leftrightarrow 3x^2-(y-10)x-3y-1=0\qquad(*)$$

Ta có: $\Delta_{(*)}=(y-10)^2-4.3(-3y-1)=y^2-20y+100+26y+12=y^2+6y+112$

Ta thấy dental phương trình (*) không là số chính phương nên phương trình (1) của hệ không thể đưa về dạng tích để rút ẩn này theo ẩn kia. Do đó ta nên nghĩ tới việc tìm liên hệ giữa các ẩn bằng phương trình (2) của hệ cho dù nhìn chứa căn tương đối phức tạp so với phương trình (1).

$$\sqrt{x+2}\left(x-y+3\right)=\sqrt{y}$$

Do (2) có 2 căn, một căn chứa *(x + 2)* và và một căn chứa *y* nên chúng sẽ thường có quan hệ đặc biệt với nhau, ta tách đại lượng (x – y + 3) theo chúng (x + 2) và y để tạo muốn liên hệ:

$$\begin{aligned}
&\sqrt{x+2}\left(x-y+3\right)=\sqrt{y}\\
&\Leftrightarrow \sqrt{x+2}\left[\left(x+2\right)-y+1\right]-\sqrt{y}=0\\
&\Leftrightarrow \left(x+2\right)\sqrt{x+2}-y\sqrt{x+2}+\sqrt{x+2}-\sqrt{y}=0\\
&\Leftrightarrow \sqrt{x+2}\left(x+2-y\right)+\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{y}\right)=0\\
&\Leftrightarrow \sqrt{x+2}\left[\left(\sqrt{x+2}\right)^2-\left(\sqrt{y}\right)^2\right]+\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{y}\right)=0\\
&\Leftrightarrow \sqrt{x+2}.\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{y}\right)+\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{y}\right)=0\\
&\Leftrightarrow \left(\sqrt{x+2}-\sqrt{y}\right)\left[\sqrt{x+2}.\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{y}\right)+1\right]=0\\
&\Leftrightarrow \sqrt{x+2}-\sqrt{y}=0\ \left(\text{do } \sqrt{x+2}.\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{y}\right)+1>0\right)\\
&\Leftrightarrow y=x+2
\end{aligned}$$

Hoặc các bạn có thể sử dụng biểu thức liên hợp:

$$\begin{aligned}
&\left(x+2\right)\sqrt{x+2}-y\sqrt{x+2}+\sqrt{x+2}-\sqrt{y}=0\\
&\Leftrightarrow \left(x+2-y\right)\sqrt{x+2}+\frac{x+2-y}{\sqrt{x+2}+\sqrt{y}}=0\\
&\Leftrightarrow \left(x+2-y\right)\left(\sqrt{x+2}+\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{y}}\right)=0\\
&\Leftrightarrow y=x+2\quad \left(\text{do }\ \sqrt{x+2}+\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{y}}>0\right)
\end{aligned}$$

Thay $y=x+2$ vào (1) ta được:

$$x^2+(x+3)(2x-y+5)=x+16$$
$$\Leftrightarrow x^2+(x+3)(2x-(x+2)+5)=x+16$$
$$\Leftrightarrow x^2+(x+3)^2=x+16$$
$$\Leftrightarrow 2x^2+5x-7=0$$
$$\Leftrightarrow (x-1)(2x+7)=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\Rightarrow y=3 \\ x=-\dfrac{7}{2}\ (\text{loai}) \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có nghiệm là (x, y) = (1, 3)

Với phân tích trên các bạn tự trình bày lời giải nhé!

★**Thí dụ 10.** Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}=3 & (1) \\ xy+x+y=x^2-2y^2 & (2) \end{cases}$

Lời giải

Điều kiện: $x\ge 1, y\ge 1$

$$(2)\Leftrightarrow xy+x+y=x^2-2y^2$$
$$\Leftrightarrow (x^2-y^2)-(y^2+xy)-(x+y)=0$$
$$\Leftrightarrow (x-y)(x+y)-y(x+y)-(x+y)=0$$
$$\Leftrightarrow (x+y)(x-y-y-1)=0$$
$$\Leftrightarrow (x+y)(x-2y-1)=0$$
$$\Leftrightarrow x-2y-1=0 \quad (\text{ do } x\ge 1, y\ge 1\Rightarrow x+y>0)$$
$$\Leftrightarrow x=2y+1$$

Thay x = 2y + 1 vào (1) ta được:

$$\sqrt{2y+1-1}+\sqrt{y-1}=3\Leftrightarrow \sqrt{2y}+\sqrt{y-1}=3\Leftrightarrow 2y+2\sqrt{2y(y-1)}+y-1=9$$
$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2y(y-1)}=10-3y\Leftrightarrow \begin{cases} 10-3y\ge 0 \\ y^2-52y+100=0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y\le \dfrac{10}{3} \\ \left[\begin{array}{l} y=50 \\ y=2 \end{array}\right. \end{cases}\Leftrightarrow y=2\Rightarrow x=5$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất (x, y) = (5, 2)

★**Thí dụ 11.** Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2\sqrt{x}+\sqrt{y}=3 & (1) \\ 3x^4+(x-y)^2=6x^3y+y^2 & (2) \end{cases}$

Lời giải

Điều kiện $\begin{cases} x\ge 0 \\ y\ge -1 \end{cases}$

Xuất phát từ phương trình (2) ta có:

$$3x^4-6x^3y+(x-y)^2-y^2=0$$

$$\Leftrightarrow 3x^3(x-2y)+x(x-2y)=0 \Leftrightarrow x(x-2y)(3x^2+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2y \end{array}\right.$$

Với $x=0$ thay vào (1) ta có: $2.0+\sqrt{y}=3 \Leftrightarrow \sqrt{y}=3 \Leftrightarrow y=9$

Với $x=2y$ thay vào (1) ta có: $2.\sqrt{2y}+\sqrt{y}=3 \Leftrightarrow \left(2\sqrt{2}+1\right)\sqrt{y}=3 \Leftrightarrow y=\dfrac{9}{9+4\sqrt{2}}$

Vậy tập nghiệm của hệ phương trình là $\left\{(0;9),\left(\dfrac{18}{9+4\sqrt{2}};\dfrac{9}{9+4\sqrt{2}}\right)\right\}$

PHẦN 3. KĨ THUẬT CỘNG, TRỪ, NHÂN HAI VẾ CỦA HỆ PHƯƠNG TRÌNH

A. NỘI DUNG PHƯƠNG PHÁP:

Đối với nhiều hệ phương trình chúng ta không thể bắt đầu khai thác từng phương trình của hệ mà phải kết hợp cả 2 phương trình của hệ mới tạo ra được muối liên hệ giữa các ẩn. Các bài toán dạng này thường không có phương pháp chung chúng ta phải linh hoạt trong từng bài toán.

B. THÍ DỤ MINH HỌA

🗁 **Dạng 1. Cộng, trừ đại số để đưa về các tổng bình phương**

★**Thí dụ 12.** Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+3y^2-3x-1=0 \\ x^2-y^2-x-4y+5=0. \end{cases}$

(Trích đề Chuyên Nam Định năm 2016-2017)

Lời giải

Ta có: $\begin{cases} x^2+3y^2-3x-1=0 & (1) \\ x^2-y^2-x-4y+5=0 & (2) \end{cases}$

Cộng vế với vế của (1) và (2) ta được $2x^2+2y^2-4x-4y+4=0 \quad (3)$

Phương trình (3) tương đương với $(x-y)^2+(x+y-2)^2=0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ x+y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1. \end{cases}$$

Ta thấy $x=y=1$ thỏa mãn (1) và (2). Hệ đã cho có duy nhất nghiệm $(x;y)=(1;1)$.

★Thí dụ 13. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2-5xy+x-5y^2=42 \\ 7xy+6y^2+42=x \end{cases}$.

(Trích đề Chuyên Tây Ninh năm 2019-2020)

Lời giải

Lấy $(1)+(2)$ ta được $(x+y)^2=0 \Leftrightarrow x=-y$

Thay $x=-y$ vào (1) ta được $x^2+x-42=0$

Giải phương trình trên ta được $x=-7; x=6$

Với $x=-7$ ta có $y=7$; Với $x=6$ ta có $y=-6$.

Vậy hệ đã cho có hai nghiệm là $(-7;7)$ và $(6;-6)$.

🗁 Dạng 2. Cộng, trừ đại số để đưa về phương trình một ẩn

★Thí dụ 14. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x+x^2-y^2=3 & (1) \\ x^2+y^2=1 & (2) \end{cases}$

Lời giải

Cộng theo vế phương trình (1) và (2) của hệ ta được:

$$2x+2x^2=4 \Leftrightarrow x^2+x-2=0 \Leftrightarrow (x-1)(x+2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-2 \end{array}\right.$$

Với $x = 1$ thay vào PT (2) ta được: $1+y^2=1 \Leftrightarrow y=0$

Với $x=-2$ thay vào PT (2) ta được: $4+y^2=1\,(VN)$

Vậy có hệ có nghiệm duy nhất (x, y) = (1, 0)

★**Thí dụ 16.** Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2\left(y^2+1\right)=2 \\ x^2y^2+xy+1=3x^2 \end{cases}$

Lời giải

Hệ phương trình tương đương với

$$\begin{cases} x^2\left(y^2+1\right)=2 \\ x^2y^2+xy+1=3x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2y^2-2=-x^2 \\ x^2y^2+xy+1=3x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2y^2-6=-3x^2 & (1) \\ x^2y^2+xy+1=3x^2 & (2) \end{cases}$$

Cộng theo vế hai phương trình của hệ ta được:

$$4x^2y^2+xy-5=0 \Leftrightarrow (xy-1)(4xy+5)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} xy=1 \\ xy=-\dfrac{5}{4} \end{array}\right.$$

Với $xy=1$ thay vào (1) ta được: $-3x^2=-3 \Leftrightarrow x=\pm 1 \Rightarrow y=\pm 1$

Với $xy=-\dfrac{5}{4}$ thay vào (1) ta được:

$$-3x^2=\frac{75}{16}-6=\frac{75-96}{16}=-\frac{21}{16} \Leftrightarrow x^2=\frac{21}{48} \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{\frac{21}{48}} \Rightarrow y=\mp\frac{5}{4}\sqrt{\frac{48}{21}}$$

Vậy hệ có 4 nghiệm là $\left\{(1;1),(-1;-1),\left(\sqrt{\dfrac{21}{48}};-\dfrac{5}{4}\sqrt{\dfrac{48}{21}}\right),\left(\left(-\sqrt{\dfrac{21}{48}};\dfrac{5}{4}\sqrt{\dfrac{48}{21}}\right)\right)\right\}$

★**Thí dụ 15.** Giải hệ phương trình: $\begin{cases} xy-3y=4x^2 \\ y^2+2y+7=7x^2+8x \end{cases}$

(Trích đề Chuyên Phan Bội Châu năm 2018-2019)

Lời giải

Hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases} 2xy-6y=8x^2 \\ y^2+2y+7=8x^2-x^2+8x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy-3y=4x^2 \\ y^2+2y+7-2xy+6y+x^2-8x=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy-3y=4x^2 \\ (x-y)^2-8(x-y)+7=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy-3y=4x^2 \\ (x-y-7)(x-y-1)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-y=1 \\ 3x^2+4x-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{-2+\sqrt{13}}{3}; y=\dfrac{-5+\sqrt{13}}{3} \\ x=\dfrac{-2-\sqrt{13}}{3}; y=\dfrac{-5-\sqrt{13}}{3} \end{array}\right. \\ \begin{cases} x-y=7 \\ 3x^2+10x-21=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{-5+2\sqrt{22}}{3}; y=\dfrac{-26+2\sqrt{22}}{3} \\ x=\dfrac{-5-2\sqrt{22}}{3}; y=\dfrac{-26-2\sqrt{22}}{3} \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Vậy hệ phương trình đã cho có 4 nghiệm

$$\left\{\left(\frac{-2+\sqrt{13}}{3};\frac{-5+\sqrt{13}}{3}\right),\left(\frac{-2-\sqrt{13}}{3};\frac{-5-\sqrt{13}}{3}\right),\left(\frac{-5-2\sqrt{22}}{3};\frac{-26-2\sqrt{22}}{3}\right)\right\}$$

🗁 Dạng 3. Cộng, trừ đại số để đưa về phương trình tích

★Thí dụ 16. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+y^2+xy+1=4y & (1) \\ y(x+y)^2=2x^2+7y+2 & (2) \end{cases}$

Lời giải

Nhân 2 vế của PT (1) với (2) rồi cộng với PT (2) theo vế ta được:

$$y(x+y)^2+2y^2+2xy=15y \Leftrightarrow y\left[(x+y)^2+2(x+y)-15\right]=0$$
$$\Leftrightarrow y(x+y-3)(x+y+5)=0.$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=0 \\ x+y-3=0 \\ x+y+5=0 \end{array}\right.$$

Với $y=0$ ta có: $x^2+1=0$ (vô nghiệm)

Với $y=3-x$ thay (1) ta được: $x^2+x-2=0 \Leftrightarrow (x-1)(x+2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \Rightarrow y=2 \\ x=-2 \Rightarrow y=5 \end{array}\right.$

Với $y=5$ - x thay (1) ta được: $x^2+9x+46=0$ (vô nghiệm)

Vậy hệ phương trình đã cho có 2 nghiệm $\{(1;2),(-2;5)\}$

★Thí dụ 17. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+y^2+4x+2y=3 \\ x^2+7y^2-4xy+6y=13. \end{cases}$

(Trích đề Chuyên Quảng Nam năm 2019-2020)

Lời giải

$$\begin{cases} x^2+y^2+4x+2y=3 \\ x^2+7y^2-4xy+6y=13 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+4x+4+y^2+2y+1=8 \\ x^2-4xy+4y^2+3y^2+6y+3=16 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+2)^2+(y+1)^2=8 \ (1) \\ (x-2y)^2+3(y+1)^2=16 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(x+2)^2+2(y+1)^2=16 \\ (x-2y)^2+3(y+1)^2=16 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2(x+2)^2-(x-2y)^2-(y+1)^2=0$$

$$\Leftrightarrow (x+2)^2-(x-2y)^2+(x+2)^2-(y+1)^2=0$$

$$\Leftrightarrow (2x-2y+2)(2y+2)+(x+y+3)(x-y+1)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-y+1)(4y+4)+(x+y+3)(x-y+1)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-y+1)(x+5y+7)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x=y-1 & (2) \\ x=-5y-7 & (3) \end{array}\right.$$

Thay (2) vào (1) được:

$(y-1+2)^2+(y+1)^2=8 \Leftrightarrow 2(y+1)^2=8 \Leftrightarrow (y+1)^2=4$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1 \ \Rightarrow x=0 \\ y=-3 \Rightarrow x=-4 \end{array}\right.$

Thay (3) vào (1) được:

$(-5y-7+2)^2+(y+1)^2=8 \Leftrightarrow 26(y+1)^2=8 \Leftrightarrow (y+1)^2=\dfrac{4}{13}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-1+\dfrac{2}{\sqrt{13}} \Rightarrow x=-2-\dfrac{10}{\sqrt{13}} \\ y=-1-\dfrac{2}{\sqrt{13}} \Rightarrow x=-2+\dfrac{10}{\sqrt{13}} \end{array}\right.$

Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là

$(x;y)\in\left\{(0;1),(-4;-3),\left(-2-\dfrac{10}{\sqrt{13}};-1+\dfrac{2}{\sqrt{13}}\right),\left(-2+\dfrac{10}{\sqrt{13}};-1-\dfrac{2}{\sqrt{13}}\right)\right\}$

🗁 **Dạng 4. Các bài toán hệ phương trình không mẫu mực giải bằng cách cộng, trừ, nhân theo vế hai phương trình của hệ với nhau**

★**Thí dụ 18.** Giải hệ phương trình $\begin{cases}(x^2+xy+y^2)\sqrt{x^2+y^2}=185\\(x^2-xy+y^2)\sqrt{x^2+y^2}=65\end{cases}$

(Trích đề HSG huyện Quảng Điền năm 2016-2017)

Lời giải

Lấy (1) + (2): $(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}=125 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2}=5$ thay vào $(1)\Rightarrow xy=12$

Từ đó ta có hệ: $\begin{cases}x^2+y^2=25\\2xy=24\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x+y=\pm 7\\x-y=\pm 1\end{cases}$

Từ đó ta có hệ pt:

a) $\begin{cases}x+y=7\\x-y=1\end{cases}$ b) $\begin{cases}x+y=7\\x-y=-1\end{cases}$ c) $\begin{cases}x+y=-7\\x-y=1\end{cases}$ d) $\begin{cases}x+y=-7\\x-y=-1\end{cases}$

Vậy hệ đã cho có nghiệm: (x, y) $\in$ {(4; 3), (3; 4), (-3;-4), (-4; -3)}

★**Thí dụ 19.** Giải hệ phương trình $\begin{cases}x+\dfrac{x+3y}{x^2+y^2}=3 & (1)\\ y-\dfrac{y-3x}{x^2+y^2}=0 & (2)\end{cases}$

Lời giải

Điều kiện: $x^2+y^2\neq 0$

Với $x=0$ thì $y=1$

Với $y=0$ phương trình (2) có dạng $\dfrac{3}{x^2}=0$ (vô lý).

Xét $x\neq 0, y\neq 0$ nhân 2 vế của PT(1) với y, nhân 2 vế PT(2) với x ta được:

$$\begin{cases}xy+\dfrac{xy+3y^2}{x^2+y^2}=3y & (3)\\ xy-\dfrac{xy-3x^2}{x^2+y^2}=0 & (4)\end{cases}$$

Cộng theo vế (3) và (4) ta được: $2xy+3=3y \Leftrightarrow x=\dfrac{3y-3}{2y}$ (5)

Thay (5) vào (2) biến đổi dẫn đến

$$4y^4+5y^2-9=0 \Leftrightarrow (y^2-1)(4y^2+9)=0 \Leftrightarrow y^2=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}y=1\Rightarrow x=0\ (\text{loai do } x\neq 0)\\ y=-1\Rightarrow x=3 \quad (\text{TM})\end{array}\right.$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm: (x, y) $\in$ {(0; 1), (3; -1)}

★**Thí dụ 20.** Giải hệ phương trình $\begin{cases}\left(1-\dfrac{12}{y+3x}\right)\sqrt{x}=2 & (1)\\ \left(1+\dfrac{12}{y+3x}\right)\sqrt{y}=6 & (2)\end{cases}$

Lời giải

Điều kiện để hệ có nghiệm là $x > 0$ và $y > 0$ khi đó ta có:

$$\begin{cases}\left(1-\dfrac{12}{y+3x}\right)\sqrt{x}=2\\ \left(1+\dfrac{12}{y+3x}\right)\sqrt{y}=6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}1-\dfrac{12}{y+3x}=\dfrac{2}{\sqrt{x}}\\ 1+\dfrac{12}{y+3x}=\dfrac{6}{\sqrt{y}}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{2}{\sqrt{x}}+\dfrac{6}{\sqrt{y}}=2 & (3)\\ \dfrac{6}{\sqrt{y}}-\dfrac{2}{\sqrt{x}}=\dfrac{24}{y+3} & (4)\end{cases}$$

Nhân vế phương trình (3) và (4) của hệ ta được:

$$\frac{36}{y}-\frac{4}{x}=\frac{48}{y+3} \Leftrightarrow 27x^2-6xy-y^2=0 \Leftrightarrow (3x-y)(9x+y)=0 \Leftrightarrow y=3x\ (\text{do } x>0, y>0)$$

Thay $y = 3x$ vào (3) ta được:

$$\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{6}{\sqrt{3x}}=2 \Leftrightarrow x=4+2\sqrt{3} \Rightarrow y=12+6\sqrt{3}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm: $(x,y)=\left(4+2\sqrt{3};12+6\sqrt{3}\right)$

Nhận xét: Có nhiều bài toán tương tự như ví dụ 20, chúng có đặc điểm là 2 phương trình của hệ có dạng nữa đối xứng hoặc gần giống nhau nhưng sai khác về dấu. Điểm mấu chốt là đưa về sử dụng hằng đẳng thức: $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

Nếu tìm hiểu sâu về hệ phương trình các bạn có thể giải các hệ phương trình này bằng phương pháp số phức hóa. Các bạn rèn luyện thêm các ví dụ sau:

$$\begin{cases}2x\left(1+\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)=3 & (1)\\ 2y\left(1-\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)=1 & (2)\end{cases} \qquad \begin{cases}x+\dfrac{78y}{x^2+y^2}=20 & (1)\\ y+\dfrac{78x}{x^2+y^2}=15 & (2)\end{cases}$$

★**Thí dụ 21.** Giải hệ phương trình $\begin{cases}y(xy-2)=3x^2 & (1)\\ y^2+x^2y+2x=0 & (2)\end{cases}$

Lời giải

Hệ phương trình tương đương với: $\begin{cases}y(xy-2)=3x^2\\ y^2+x^2y+2x=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y(xy-2)=3x^2\\ x(xy+2)=-y^2\end{cases}$

Nhân vế với vế 2 phương trình của hệ ta được:

$$xy(xy-2)(xy+2)=-3x^2y^2 \Leftrightarrow xy(xy-1)(xy+4)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}xy=0\\ xy=1\\ xy=-4\end{array}\right.$$

Với $xy = 0$ ta có: $x = y = 0$

Với $xy = 1$ thay vào PT(1) của hệ ta được: $y(1-2) = \frac{3}{y^2} \Leftrightarrow y = -\sqrt[3]{3} \Rightarrow x = -\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$

Với $xy = -4$ thay vào PT(1) của hệ ta được: $y(-4-2) = 3.\frac{16}{y^2} \Leftrightarrow y = -2 \Rightarrow x = 2$

Vậy hệ đã cho có nghiệm: $(x,y) = (0;0), (2;-2), \left(-\frac{1}{\sqrt[3]{3}}; -\sqrt[3]{3}\right)$

PHẦN 4. KĨ THUẬT ĐẶT ẨN PHỤ

A. NỘI DUNG PHƯƠNG PHÁP:

Phương pháp thường xuyên được sử dụng để giải hệ phương trình nhất là việc sử dụng ẩn phụ. Tùy dạng của hệ mà ta có phép đặt ẩn phụ phù hợp.

Dấu hiệu thường gặp:

- Hệ đối xứng loại I
- Hệ có các nhân tử lập lại trong hai phương trình của hệ
- Đối với các hệ chứa căn thức chung ta cũng nên chú ý tới việc đặt ẩn phụ
- Các hệ chứa tổng và hiệu (x + y), (x – y)
- Đối với một số trường hợp đặt ẩn phụ để đưa về hệ đối xứng loại I và loại II

B. THÍ DỤ MINH HỌA:

🗁 **Dạng 1. Dùng ẩn phụ đưa về dạng bậc nhất 2 ẩn**

★**Thí dụ 22.** Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{2x}{x+1} + \dfrac{y}{y+1} = 3 \\ \dfrac{x}{x+1} + \dfrac{3y}{y+1} = -1 \end{cases}$

(Trích đề Chuyên Hòa Bình năm 2010-2011)

Lời giải

Điều kiện: $x \neq -1, y \neq -1$

+ Đặt $\begin{cases} u = \dfrac{x}{x+1} \\ v = \dfrac{y}{y+1} \end{cases}$, Khi đó hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} 2u + v = 3 \\ u + 3v = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u + v = 3 \\ 2u + 6v = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u + v = 3 \\ 5v = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 2 \\ v = -1 \end{cases}$$

Do đó: $\begin{cases} u = 2 \\ v = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{x+1} = 2 \\ \dfrac{y}{y+1} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2x + 2 \\ y = -y - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$

Vậy hệ đã cho có nghiệm: $(x, y) = \left(-2; -\dfrac{1}{2}\right)$

★**Thí dụ 23.** Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 5x^2 - \dfrac{10y}{y^2+1} = 1 \\ 3x^2 + \dfrac{20y}{y^2+1} = 11 \end{cases}$

(Trích đề Chuyên Kiên Giang năm 2011-2012)

Lời giải

(I)$\begin{cases} 5x^2 - \dfrac{10y}{y^2+1} = 1 \\ 3x^2 + \dfrac{20y}{y^2+1} = 11 \end{cases}$. Đặt $x^2 = u$ $(u \geq 0)$ và $\dfrac{10y}{y^2+1} = v$

Hệ (I) trở thành: $\begin{cases} 5u - v = 1 \\ 3u + 2v = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10u - 2v = 2 \\ 3u + 2v = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 13u = 13 \\ 5u - v = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 \\ v = 4 \end{cases}$

Với $u = 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$

Với $v = 4 \Rightarrow \dfrac{10y}{y^2+1} = 4 \Leftrightarrow 4y^2 - 10y + 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 2 \\ y = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$

Thử lại ta thấy hệ (I) đúng với $x = \pm 1;\ y = 2$ hoặc $y = \dfrac{1}{2}$

Vậy hệ (I) có 4 nghiệm (1 ; 2) ; (1 ; $\dfrac{1}{2}$) ; (-1 ; 2) ; (-1 ; $\dfrac{1}{2}$)

★**Thí dụ 24.** Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{x-2}{x-3} + \dfrac{3}{y+1} = \dfrac{13}{10} \\ \dfrac{3}{x-3} - \dfrac{2y+4}{y+1} = -\dfrac{11}{6} \end{cases}$

(Trích đề Chuyên Bình Định năm 2013-2014)

Lời giải

Điều kiện: $x \neq 3; y \neq -1$

$$\begin{cases}\dfrac{x-2}{x-3}+\dfrac{3}{y+1}=\dfrac{13}{10}\\ \dfrac{3}{x-3}-\dfrac{2y+4}{y+1}=-\dfrac{11}{6}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}1+\dfrac{1}{x-3}+\dfrac{3}{y+1}=\dfrac{13}{10}\\ \dfrac{3}{x-3}-2-\dfrac{2}{y+1}=-\dfrac{11}{6}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{1}{x-3}+\dfrac{3}{y+1}=\dfrac{3}{10}\\ \dfrac{3}{x-3}-\dfrac{2}{y+1}=\dfrac{1}{6}\end{cases}$$

Đặt $a=\dfrac{1}{x-3}$; $b=\dfrac{1}{y+1}$ ta được hệ :

$$\begin{cases}a+3b=\dfrac{3}{10}\\ 3a-2b=\dfrac{1}{6}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=\dfrac{1}{10}\\ b=\dfrac{1}{15}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\dfrac{1}{x-3}=\dfrac{1}{10}\\ \dfrac{1}{y+1}=\dfrac{1}{15}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=13\\ y=14\end{cases} \quad \text{(TMDK)}$$

Vậy hệ pt có nghiệm duy nhất $(x;y) = (13;14)$

🗁Dạng 2. Dùng ẩn phụ đưa về hệ đối xứng loại I

★Thí dụ 25. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x^2+y^2+x^2y^2=1+2xy\\ x+x^2y+xy=xy^2+y+1.\end{cases}$

Lời giải

Ta có: $\begin{cases}x^2+y^2+x^2y^2=1+2xy\\ x+x^2y+xy=xy^2+y+1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-y)^2+x^2y^2=1\\ (x-y)+xy(x-y)+xy=1\end{cases}$

Đặt $x-y=u$, $xy=v$ hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases}u^2+v^2=1\\ u+uv+v=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(u+v)^2-2uv=1 & (1)\\ 2(u+v)+2uv=2 & (2)\end{cases}$$

Cộng (1) và (2) theo vế ta được: $(u+v)^2+2(u+v)-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}u+v=1\\ u+v=-3\end{array}\right.$

Với $u+v=1 \Rightarrow uv=0 \Rightarrow \begin{cases}u=1\\ v=0\end{cases} \vee \begin{cases}u=0\\ v=1\end{cases}$

Từ đó ta được nghiệm: $(x, y) = (1; 0), (0; -1), (1; 1), (-1, -1)$.

Với $u+v=-3 \Rightarrow uv=4$. Khi đó $9=(u+v)^2<4uv=16$ (vô lý)

Vậy hệ đã cho có 4 nghiệm là : $(x, y) = (1; 0), (0; -1), (1; 1), (-1, -1)$.

★**Thí dụ 26.** Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+y^2+2x+2y=(x+2)(y+2) \\ \left(\dfrac{x}{y+2}\right)^2+\left(\dfrac{y}{x+2}\right)^2=1 \end{cases}$.

(Trích đề Chuyên Phú Yên năm 2019-2020)

Lời giải

Điều kiện xác định của hệ phương trình $\begin{cases} x\neq -2, \\ y\neq -2. \end{cases}$

Với điều kiện xác định trên, hệ phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y+2}+\dfrac{y}{x+2}=1 \\ \left(\dfrac{x}{y+2}\right)^2+\left(\dfrac{y}{x+2}\right)^2=1 \end{cases} \qquad (2.2)$$

Đặt $a=\dfrac{x}{y+2}, b=\dfrac{y}{x+2}$. Khi đó, hệ phương trình (2.2) trở thành

$$\begin{cases} a+b=1 \\ a^2+b^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=1 \\ (a+b)^2-2ab=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=1 \\ ab=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=0 \\ b=1 \end{cases} \\ \begin{cases} a=1 \\ b=0 \end{cases} \end{array}\right..$$

Với $a=0, b=1$, ta có $\begin{cases} \dfrac{x}{y+2}=0 \\ \dfrac{y}{x+2}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=2 \end{cases}.$

Với $a=1,\ b=0$, ta có $\begin{cases} \dfrac{x}{y+2}=1 \\ \dfrac{y}{x+2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases}.$

Vậy hệ phương trình đã cho có hai nghiệm $(0;2),(2;0)$.

★**Thí dụ 27.** Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+\dfrac{1}{x}+y-\dfrac{1}{y}=3 \\ x^2+\dfrac{1}{x^2}+y^2+\dfrac{1}{y^2}=5 \end{cases}$

(Trích đề Chuyên Đại học Vinh năm 2018-2019)

Lời giải

Điều kiện : $x;y\neq 0$. Ta có:

$$\begin{cases} x+\dfrac{1}{x}+y-\dfrac{1}{y}=3 \\ x^2+\dfrac{1}{x^2}+y^2+\dfrac{1}{y^2}=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+\dfrac{1}{x}+y-\dfrac{1}{y}=3 \\ \left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2+\left(y-\dfrac{1}{y}\right)^2=5 \end{cases} \quad (I)$$

Đặt $a=\dfrac{1}{x}+x;\quad b=y-\dfrac{1}{y}$ với $a^2\geq 4$

Thay vào hệ (I) ta có:

$$\begin{cases} a^2+b^2=5 \\ a+b=3 \end{cases} \Rightarrow (a+b)^2-2ab=5 \Leftrightarrow 9-2ab=5 \Leftrightarrow ab=2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases} \\ \begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases} \end{array}\right.$$

Mà $a^2\geq 4$ nên $\begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+\dfrac{1}{x}=2 \\ y-\dfrac{1}{y}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x+1=0 \\ y^2-y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x=1 & (tm) \\ y=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2} & (tm) \end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của hệ đã cho là $\left(1;\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right);\left(1;\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$

🗁Dạng 3. Dùng ẩn phụ đưa về hệ đối xứng loại II

★**Thí dụ 28.** Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2+3x=\dfrac{8}{y^3} \\ x^3-2=\dfrac{6}{y} \end{cases}$

(Trích đề Chuyên Nghệ An năm 2009-2010)

Lời giải

Đặt $\dfrac{2}{y}=z$. Hệ đã cho trở thành $\begin{cases} 2+3x=z^3 \\ 2+3z=x^3 \end{cases}$

$\Rightarrow 3(x-z)=z^3-x^3$

$\Leftrightarrow (x-z)(x^2+xz+z^2+3)=0$

$\Leftrightarrow x=z\quad$ (vì $x^2+xz+z^2+3>0, \forall x,z$).

Từ đó ta có phương trình: $x^3-3x-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=2 \end{array}\right.$

Vậy hệ đã cho có 2 nghiệm: $(x,y)=(-1;-2),(2,1)$

★**Thí dụ 29.** Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 4x^2 - x + \dfrac{1}{y} = 1 \\ y^2 + y - xy^2 = 4 \end{cases}$

(Trích đề Chuyên Hải Phòng năm 2012-2013)

Lời giải

Đặt: $\begin{cases} 4x^2 - x + \dfrac{1}{y} = 1 & (1) \\ y^2 + y - xy^2 = 4 & (2) \end{cases}$

Nếu y = 0 thì (2) vô lí nên $y \neq 0$ vậy $(2) \Leftrightarrow 1 + \dfrac{1}{y} - x = \dfrac{4}{y^2}$

Đặt $\dfrac{1}{y} = b$ ta có hệ: $\begin{cases} 4x^2 - x + b = 1 & (1') \\ 4b^2 - b + x = 1 & (2') \end{cases}$

Lấy (1′) – (2′) ta có (x - b) (2x + 2b - 1) = 0

*) Nếu x = b ta có hai nghiệm $\left(-\dfrac{1}{2}, -2\right)$ và $\left(\dfrac{1}{2}; 2\right)$

*) Nếu 2x + 2b = 1 thì hệ vô nghiệm

Vậy hệ có hai nghiệm $\left(-\dfrac{1}{2}, -2\right)$ và $\left(\dfrac{1}{2}; 2\right)$

Dạng 4. Dùng ẩn phụ đưa về phương trình một ẩn

★**Thí dụ 30.** Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 + 4y = y^3 + 16x \\ 1 + y^2 = 5(1 + x^2) \end{cases}$

(Trích đề Chuyên Ninh Bình năm 2015-2016)

Lời giải

– Xét x = 0, hệ (I) trở thành $\begin{cases} 4y = y^3 \\ y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow y = \pm 2$

– Xét x ≠ 0, đặt $\dfrac{y}{x} = t \Leftrightarrow y = xt$. Hệ (I) trở thành

$$\begin{cases} x^3 + 4xt = x^3t^3 + 16x \\ 1 + x^2t^2 = 5(1 + x^2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3(t^3 - 1) = 4xt - 16x \\ x^2(t^2 - 5) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3(t^3 - 1) = 4x(t - 4)(1) \\ 4 = x^2(t^2 - 5)(2) \end{cases}$$

Nhân từng vế của (1) và (2), ta được phương trình hệ quả

$$4x^3(t^3 - 1) = 4x^3(t - 4)(t^2 - 5)$$

$$\Leftrightarrow t^3 - 1 = t^3 - 4t^2 - 5t + 20 \quad (\text{Do } x \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow 4t^2 + 5t - 21 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-3 \\ t=\dfrac{7}{4} \end{array}\right.$$

+ Với $t = -3$, thay vào (2) được $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

$x = 1$ thì $y = -3$, thử lại $(1;-3)$ là một nghiệm của (I)

$x = -1$ thì $y = 3$, thử lại $(-1;3)$ là một nghiệm của (I)

+ Với $t = \dfrac{7}{4}$, thay vào (2) được $x^2 = -\dfrac{64}{31}$ (loại)

Vậy hệ (I) có các nghiệm $(0;2)$, $(0;-2)$, $(1;-3)$, $(-1;3)$.

★**Thí dụ 31.** Giải hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{1}{3x}+\dfrac{2x}{3y}=\dfrac{x+\sqrt{y}}{2x^2+y} \\ 2\left(2x+\sqrt{y}\right)=\sqrt{2x+6}-y \end{cases}$

Lời giải

Điều kiện: $y > 0; -3 \le x \ne 0$.

Đặt $\sqrt{y} = tx \Rightarrow y = t^2x^2$ thay vào (1) ta được: $\dfrac{1}{3x}+\dfrac{2x}{3t^2x^2}=\dfrac{x+tx}{2x^2+t^2x^2}$

Rút gọn biến x ta đưa về phương trình ẩn t:

$(t-2)^2\left(t^2+t+1\right)=0 \Leftrightarrow t=2 \Leftrightarrow \sqrt{y}=2x \ge 0$.

Thay vào (2) ta được:

$$4x^2+8x=\sqrt{2x+6} \Leftrightarrow 4x^2+10x+\frac{25}{4}=2x+6+\sqrt{2x+6}+\frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left(2x+\frac{5}{2}\right)^2=\left(\sqrt{2x+6}+\frac{1}{2}\right)^2.$$

Giải ra ta được $x=\dfrac{\sqrt{17}-3}{4} \Rightarrow y=\dfrac{13-3\sqrt{17}}{2}$.

Vậy nghiệm của hệ $(x;y)=\left(\dfrac{\sqrt{17}-3}{4};\dfrac{13-3\sqrt{17}}{2}\right)$.

🗁 Dạng 5. Dùng ẩn phụ dạng tổng hiệu

★**Thí dụ 32.** Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 6x+\dfrac{3}{x+y}=13 \\ 12\left(x^2+xy+y^2\right)+\dfrac{9}{\left(x+y\right)^2}=85 \end{cases}$.

(Trích đề Chuyên Hà Tĩnh năm 2016-2017)

Lời giải

Ta có: $\begin{cases} 6x+\dfrac{3}{x+y}=13 \\ 12\left(x^2+xy+y^2\right)+\dfrac{9}{\left(x+y\right)^2}=85 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\left(x-y\right)+3\left(x+y\right)+\dfrac{3}{x+y}=13 \\ 9\left(x+y\right)^2+3\left(x-y\right)^2+\dfrac{9}{\left(x+y\right)^2}=85 \end{cases}$.

Đặt $\begin{cases} x+y=a\neq 0 \\ x-y=b \end{cases}$. Khi đó ta có: $\begin{cases} 3a+\dfrac{3}{a}=13-3b \;\; (1) \\ 9\left(a+\dfrac{1}{a}\right)^2=103-3b^2 \end{cases}$

$\Rightarrow\; 2b^2-13b+11=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} b=1 \\ b=\dfrac{11}{2} \end{array}\right.$.

Xét $b=\dfrac{11}{2}$, thay vào (1) ta có $6a^2+7a+6=0$ (vô nghiệm).

Xét $b=1$, thay vào (1) ta có $a+\dfrac{1}{a}=\dfrac{10}{3} \Leftrightarrow 3a^2-10a+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=3 \\ a=\dfrac{1}{3} \end{array}\right.$.

Khi $\begin{cases} a=3 \\ b=1 \end{cases}$ ta có $\begin{cases} x+y=3 \\ x-y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$;

Khi $\begin{cases} a=\dfrac{1}{3} \\ b=1 \end{cases}$ ta có $\begin{cases} x+y=\dfrac{1}{3} \\ x-y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{2}{3} \\ y=\dfrac{-1}{3} \end{cases}$.

Thử lại ta suy ra hệ đã cho có nghiệm $\left(x\;;\;y\right)\in\left\{\left(2\;;\;1\right);\left(\dfrac{2}{3}\;;\;-\dfrac{1}{3}\right)\right\}$

★**Thí dụ 33.** Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+y^2=xy+xy+y \\ x^2-y^2=3 \end{cases}$

Lời giải

Đặt u = x + y, v = x – y khi đó hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases}\dfrac{u^2+v^2}{2}=\dfrac{u^2-v^2}{4}+u\\ uv=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u^2+3v^2-4u=0\\ uv=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u^2+\dfrac{27}{u^2}-4u=0\\ v=\dfrac{3}{u}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u^4-4u^3+27=0\\ v=\dfrac{3}{u}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(u-3)^2\left(u^2+2u+3\right)=0\\ v=\dfrac{3}{u}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u=3\\ v=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=3\\ x-y=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\ y=1\end{cases}$$

Thử lại ta suy ra hệ đã cho có nghiệm $(x\,;\,y)=(2\,;\,1)$

★**Thí dụ 34.** Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\sqrt{x^2+2x+6}=y+1\\ x^2+xy+y^2=7\end{cases}$

Lời giải

Điều kiện: $y>-1$. Khi đó hệ phương trình tương đương với:

$$\begin{cases}\sqrt{x^2+2x+6}=y+1\\ x^2+xy+y^2=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+2x+6=y^2+2y+1\\ \dfrac{1}{4}\left[(x-y)^2+3(x+y)^2\right]=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-y^2+2(x-y)+5=0\\ (x-y)^2+3(x+y)^2=28\end{cases}$$

Đặt u = x + y, v = x – y khi đó hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases}uv+2v+5=0\\ 3u^2+v^2=28\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u=-1\\ v=-5\end{cases}\vee\begin{cases}u=3\\ v=-1\end{cases}$$

Với $\begin{cases}u=-1\\ v=-5\end{cases}$ ta có $\begin{cases}x+y=-1\\ x-y=-5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-3\\ y=2\end{cases}$;

Với $\begin{cases}u=3\\ v=-1\end{cases}$ ta có $\begin{cases}x+y=3\\ x-y=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ y=2\end{cases}$;

Vậy hệ đã cho có 2 nghiệm: $(x,y)=(-3;2),(1,2)$

PHẦN 5.KĨ THUẬT NHÂN LIÊN HỢP ĐỐI VỚI HỆ PHƯƠNG TRÌNH CHỨA CĂN THỨC

A. NỘI DUNG PHƯƠNG PHÁP:

Đối với các bài toán chứa căn thức thì kĩ thuật nhân liên hợp là kĩ thuật không thể không nhắc tới, đối hệ phương trình kĩ thuật nhân liên giúp chúng ta tìm mối liên hệ giữa x và y thông qua một trong hai phương trình của hệ (thường là phương trình chứa căn thức) bằng cách chuyển nó về phương trình tích dạng:

$(ax+by+c)A(x)=0$

Khi áp dụng kĩ thuật nhân liên hợp chúng ta cần khéo léo trong việc xử lý phương trình tích cuối cùng, cần dùng điều kiện bài toán và đánh giá để chứng minh được phương trình A(x) = 0 vô nghiệm.

B. THÍ DỤ MINH HỌA:

★Thí dụ 35. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} xy-y^2=\sqrt{3y-1}-\sqrt{x+2y-1} \\ x^3y-4xy^2+7xy-5x-y+2=0. \end{cases}$

(Trích đề Chuyên Bình Phước năm 2016-2017)

Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases} y \ge \dfrac{1}{3} \\ x+2y \ge 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge \dfrac{1}{3} \\ y \ge \dfrac{1}{3}. \end{cases}$

Xét $\sqrt{3y-1}+\sqrt{x+2y-1}=0 \Leftrightarrow x=y=\dfrac{1}{3}$

Thay vào (2) không thỏa mãn.

Xét $\sqrt{3y-1}+\sqrt{x+2y-1} \ne 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \ne \dfrac{1}{3} \\ y \ne \dfrac{1}{3}. \end{array}\right.$

$$(1) \Leftrightarrow y(x-y)=\frac{y-x}{\sqrt{3y-1}+\sqrt{x+2y-1}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y \\ y+\dfrac{y-x}{\sqrt{3y-1}+\sqrt{x+2y-1}}=0 \left(\text{VN do } y \ge \dfrac{1}{3}\right) \end{array}\right.$$

Với $x=y$, thay vào (2) ta được:

$x^4-4x^3+7x^2-6x+2=0 \Leftrightarrow (x-1)^2(x^2-2x+2)=0 \Leftrightarrow x=1 \Rightarrow y=1$

Vậy nghiệm của hệ là: (1; 1).

★Thí dụ 36. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x^2-y^2+xy-5x+y+2=\sqrt{y-2x+1}-\sqrt{3-3x} \\ x^2-y-1=\sqrt{4x+y+5}-\sqrt{x+2y-2} \end{cases}$

(Trích đề Chuyên Hải Dương năm 2015-2016)

Lời giải

Điều kiện: $y-2x+1 \ge 0, 4x+y+5 \ge 0, x+2y-2 \ge 0, x \le 1$

TH 1. $\begin{cases} y-2x+1=0 \\ 3-3x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0=0 \\ -1=\sqrt{10}-1 \end{cases}$ (Không TM hệ)

TH 2. $x \neq 1, y \neq 1$ Đưa pt thứ nhất về dạng tích ta được

$$(x+y-2)(2x-y-1)=\frac{x+y-2}{\sqrt{y-2x+1}+\sqrt{3-3x}}$$

$$(x+y-2)\left[\frac{1}{\sqrt{y-2x+1}+\sqrt{3-3x}}+y-2x+1\right]=0$$. Do $y-2x+1 \geq 0$

nên $\frac{1}{\sqrt{y-2x+1}+\sqrt{3-3x}}+y-2x+1>0 \Rightarrow x+y-2=0$

Thay $y=2-x$ vào pt thứ 2 ta được: $x^2+x-3=\sqrt{3x+7}-\sqrt{2-x}$

$$\Leftrightarrow x^2+x-2=\sqrt{3x+7}-1+2-\sqrt{2-x}$$

$$\Leftrightarrow (x+2)(x-1)=\frac{3x+6}{\sqrt{3x+7}+1}+\frac{2+x}{2+\sqrt{2-x}}$$

$$\Leftrightarrow (x+2)\left[\frac{3}{\sqrt{3x+7}+1}+\frac{1}{2+\sqrt{2-x}}+1-x\right]=0$$

Do $x \leq 1$ nên $\frac{3}{\sqrt{3x+7}+1}+\frac{1}{2+\sqrt{2-x}}+1-x>0$

Vậy $x+2=0 \Leftrightarrow x=-2 \Rightarrow y=4$ (TMĐK)

Vậy nghiệm của hệ phương trình là (x, y) = (-2; 4).

★Thí dụ 37. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2\sqrt{2xy-y}+2x+y=10 \\ \sqrt{3y+4}-\sqrt{2y+1}+2\sqrt{2x-1}=3 \end{cases}$

(Trích đề HSG huyện Trực Ninh năm 2011-2012)

Lời giải

Điều kiện: $x \geq \frac{1}{2}$; $y \geq 0$

(1) $\Leftrightarrow$ $\left(\sqrt{2x-1}+\sqrt{y}\right)^2=9 \Leftrightarrow \sqrt{2x-1}+\sqrt{y}=3 \Leftrightarrow \sqrt{2x-1}=3-\sqrt{y}$ (*)

Thay vào (2)

$$\sqrt{3y+4}-\sqrt{2y+1}-2(\sqrt{y}-2)-1=0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{3y+4}-4)-(\sqrt{2y+1}-3)-2(\sqrt{y}-2)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3y+4-16}{\sqrt{3y+1}+4}-\frac{2y+1-9}{\sqrt{2y+1}+3}-2.\frac{y-4}{\sqrt{y}+2}=0$$

$$\Leftrightarrow (y-4).\left(\frac{3}{\sqrt{3y+1}+4}-\frac{2}{\sqrt{2y+1}+3}-\frac{2}{\sqrt{y}+2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y-4=0 \\ \dfrac{3}{\sqrt{3y+1}+4}=\dfrac{2}{\sqrt{2y+1}+3}+\dfrac{2}{\sqrt{y}+2} \quad (3) \end{array}\right.$$

Với y = 4 ta có x = 1

Với $y \geq 0$ ta có $\dfrac{3}{\sqrt{3y+1}+4} \leq \dfrac{1}{2}$

Từ (*) suy ra y $\leq$ 9 suy ra $\dfrac{2}{\sqrt{2y+1}+3}+\dfrac{2}{\sqrt{y}+2} > \dfrac{1}{2}$.

Vậy phương trình (3) vô nghiệm

Kết luận nghiệm của hệ (x;y) = (1 ; 4)

PHẦN 6. KĨ THUẬT ĐÁNH GIÁ TRONG GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH

A. NỘI DUNG PHƯƠNG PHÁP:

Đối với nhiều hệ phương trình việc đánh giá các phương trình của hệ là mấu chốt để giải bài toán một cách nhanh gọn, trong nhiều bài toán gần như là phương pháp duy nhất để giải hệ phương trình. Chúng ta thường dùng bất đẳng thức, tính đơn điệu tăng giảm của các vế của phương trình, điều kiện có nghiệm của phương trình bậc 2, nói chung nói đến phương pháp đánh giá chúng cần hết sức linh hoạt, càng đánh giá sát và chặt thì việc giải quyết hệ phương trình càng giảm bớt các trường hợp đồng thời không bỏ soát nghiệm.

B. THÍ DỤ MINH HỌA

🗁Dạng 1. Dựa vào tính đồng biến, nghịch biến các vế phương trình của hệ

★Thí dụ 38. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{2012-y}=\sqrt{2012} \\ \sqrt{2012-x}+\sqrt{y}=\sqrt{2012} \end{cases}$

(Trích đề HSG huyện Thanh Oai năm 2012-2013)

Lời giải

Điều kiện : $\begin{cases} 0 \leq x \leq 2012 \\ 0 \leq y \leq 2012 \end{cases}$

Từ 2 phương trình của hệ ta có:

$\sqrt{x}+\sqrt{2012-y}=\sqrt{2012-x}+\sqrt{y} \Leftrightarrow \sqrt{x}-\sqrt{2012-x}=\sqrt{y}-\sqrt{2012-y}$

Nếu x > y thì : $-\sqrt{2012-x} > -\sqrt{2012-y}$ => VT > VP (mâu thuẫn)

Tương tự nếu x < y => VT < VP (mâu thuẫn)

=> x = y

Do đó: Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} x = y & (1) \\ \sqrt{x} + \sqrt{2012 - x} = \sqrt{2012} & (2) \end{cases}$

$$\begin{aligned}(2) &\Leftrightarrow x + 2012 - x + 2\sqrt{x(2012 - x)} = 2012 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x(2012 - x)} = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2012\end{aligned}$$

Vậy nghiệm của hệ (x;y) = (0;0),(2012;2012)

★**Thí dụ 39.** Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (2x - y)(x^2 + y^2) + 2x^2 + 6x = xy + 3y & (1) \\ \sqrt{3(x^2 + y) + 7} + \sqrt{5x^2 + 5y + 14} = 4 - 2x - x^2 & (2) \end{cases}$

(Trích đề Chuyên Đăk Lăk năm 2018-2019)

Lời giải

Phương trình **(1)**: $(2x - y)(x^2 + y^2 + x + 3) = 0 \Leftrightarrow 2x = y$.

Thế vào **(2)**: $\sqrt{3x^2 + 6x + 7} + \sqrt{5x^2 + 10x + 14} = 4 - 2x - x^2 \quad (*)$.

Đánh giá vế trái của (*): $\sqrt{3(x + 1)^2 + 4} + \sqrt{5(x + 1)^2 + 9} \geq 5$.

Và đánh giá vế phải của (*): $4 - 2x - x^2 = 5 - (x + 1)^2 \leq 5$.

Dấu bằng xảy ra khi $x = -1$.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x; y) = (-1; -2)$.

★**Thí dụ 40.** Giải hệ phương trình: $\begin{cases} y = -x^3 + 3x + 4 \\ x = 2y^2 - 6y - 2 \end{cases}$

Lời giải

Hệ phương trình tương đương với: $\begin{cases} y - 2 = -(x + 1)^2(x - 2) & (1) \\ x - 2 = 2(y + 1)^2(y - 2) & (2) \end{cases}$

Nếu x > 2 thì x – 2 > 0 thừ phương trình (1) suy ra y – 2 < 0. Khi đó vế phải phương trình (2) luôn không dương nên x – 2 ≤ 0 hay x ≤ 2 (vô lý với x > 2)

Tương tự với x < 2 ta cũng suy ra điều vô lý.

Suy ra x = 2 khi đó y = 2

Vậy hệ có nghiệm duy nhất là (x, y) = (2, 2)

🗁 Dạng 2. Sử dụng các bất đẳng thức cổ điển để đánh giá

Một số bất đẳng thức Cổ điển thường được sử dụng như:

1. Bất đẳng thức Cauchy (tên quốc tế là AM – GM)

Nếu $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ *là các số thực không âm thì:* $\dfrac{a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n}{n} \geq \sqrt{a_1.a_2.a_3.......a_n}$

Đẳng thức xảy ra khi $a_1 = a_2 = a_3 = ... = a_n$

2. Bất đẳng thức Bunhiacopxki với hai bộ số thực bất kì $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$ *và* $(b_1, b_2, b_3, ..., b_n)$ *ta có*

$$\left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^3 + ... + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + ... + b_n^2\right) \geq \left(a_1b_2 + a_2b_2 + a_3b_3 + ... + a_nb_n\right)^2$$

Đẳng thức xảy ra khi tồn tại số thực k $(k \neq 0)$ *sao cho* $a_i = kb_i$ *với i = 1, 2, 3,…, n.*

Một số bất đẳng thức phụ cần nhớ:

1. *Với a, b dương ta ta có:* $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} \geq \dfrac{4}{a+b}$

Dấu "=" xảy ra khi a = b.

2. *Với* $ab \geq 1$ *thì* $\dfrac{1}{1+a^2} + \dfrac{1}{1+b^2} \geq \dfrac{2}{1+ab}$. *Với* $ab \leq 1$ *thì bất đẳng thức đổi chiều.*

Dấu "=" xảy ra khi a = b = 1.

★Thí dụ 41. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x + \dfrac{1}{\sqrt{x+1}} = \dfrac{4}{\sqrt{x+1} + \sqrt{y}} - 1 & (1) \\ y + \dfrac{1}{\sqrt{y}} = 2\sqrt{xy + y} & (2) \end{cases}$

Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases} x > -1 \\ y > 0 \end{cases}$

Cộng theo vế phương trình (1) và (2) ta được:

$$(x+1) + y + \left(\frac{1}{\sqrt{x+1}} + \frac{1}{\sqrt{y}}\right) = 2\sqrt{y(x+1)} + \frac{4}{\sqrt{x+1} + \sqrt{y}} \quad (I)$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$(x+1) + y \geq 2\sqrt{y(x+1)} \qquad (\text{do } x+1 > 0, y > 0) \quad (3)$$

Mặt khác với a, b dương ta ta có:

$$(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 2\sqrt{ab}.\frac{2}{\sqrt{ab}} = 4 \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b} \quad (*)$$

Dấu "=" xảy ra khi a = b

Áp dụng (*) ta được: $\frac{1}{\sqrt{x+1}}+\frac{1}{\sqrt{y}}\ge\frac{4}{\sqrt{x+1}+\sqrt{y}}\quad(4)$

Cộng (3) và (4) ta được:

$$(x+1)+y+\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}}+\frac{1}{\sqrt{y}}\right)\ge 2\sqrt{y(x+1)}+\frac{4}{\sqrt{x+1}+\sqrt{y}}\quad(II)$$

Từ (I) và (II) suy ra để phương trình có nghiệm thì x + 1 = y

Thay x + 1 = y và phương trình (2) ta được:

$$y+\frac{1}{\sqrt{y}}=2y\Leftrightarrow y\sqrt{y}=1\Leftrightarrow y^3=1\Leftrightarrow y=1\Rightarrow x=0$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất (x, y) = (0, 1)

★Thí dụ 42. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x\sqrt{12-y}+\sqrt{y\left(12-x^2\right)}=12 & (1)\\ x^3-8x-1=2\sqrt{y-2} & (2)\end{cases}$

Lời giải

Điều kiện: $-2\sqrt{3}\le x\le 2\sqrt{3}, 2\le y\le 12$

Với 2 số thực a, b bất kì ta có: $(a-b)^2\ge 0\Leftrightarrow\frac{a^2+b^2}{2}\ge ab$

Áp dụng ta được: $\begin{cases} x\sqrt{12-y}\le|x|\sqrt{12-y}\le\frac{x^2+12-y}{2}\\ \sqrt{y\left(12-x^2\right)}\le\frac{y+12-x^2}{2}\end{cases}\Rightarrow x\sqrt{12-y}+\sqrt{y\left(12-x^2\right)}\le 12$

Do đó $(1)\Leftrightarrow\begin{cases} x\ge 0\\ y=12-x^2\end{cases}$

Thay $y=12-x^2$ vào (2) ta được:

$$x^3-8x-1=2\sqrt{10-x^2}$$
$$\Leftrightarrow x^3-8x-3+2\left(1-\sqrt{10-x^2}\right)=0$$
$$\Leftrightarrow(x-3)\left[x^2+3x+1+\frac{2(x+3)}{1+\sqrt{10-x^2}}\right]=0\quad(3)$$

Do $x\ge 0$ nên $x^2+3x+1+\frac{2(x+3)}{1+\sqrt{10-x^2}}>0$ do đó: $x=3\Rightarrow y=3$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất (x, y) = (3, 3)

★**Thí dụ 43.** Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt[4]{32-x}=y^2-3 \\ \sqrt[4]{x}+\sqrt{32-x}=24-6y \end{cases}$

Lời giải

Điều kiện: $0\le x\le 32$

Hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases} (\sqrt{x}+\sqrt{32-x})+(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{32-x})=y^2-6y+21 \\ \sqrt{x}+\sqrt[4]{32-x}=y^2-3 \end{cases}$$

Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có:

$$(\sqrt{x}+\sqrt{32-x})^2\le(1^2+1^2)(x+32-x)=64\Rightarrow\sqrt{x}+\sqrt{32-x}\le 8$$

$$\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{32-x}\right)^4\le\left[2(\sqrt{x}+\sqrt{32-x})\right]^2\le 256\Rightarrow\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{32-x}\le 4$$

Suy ra $(\sqrt{x}+\sqrt{32-x})+(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{32-x})\le 12$

Mặt khác $y^2-6y+21=(y-3)^2+12\ge 12$

Đẳng thức xẩy ra khi x = 16 và y = 3 (t/m)

Vậy hệ đã có nghiệm là (x;y) = (16;3)

★**Thí dụ 44.** Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{1+2x^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+2y^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{1+2xy}} \\ \sqrt{x(1-2x)}+\sqrt{y(1-2y)}=\dfrac{2}{9} \end{cases}$

Lời giải

Điều kiện: $0\le x,y\le\dfrac{1}{2}$.

Đặt $a=\sqrt{2}x, b=\sqrt{2}y; a,b\in\left[0;\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right]$.

Ta có: $VT=\dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+b^2}}\le\sqrt{2\left(\dfrac{1}{1+a^2}+\dfrac{1}{1+b^2}\right)}$.

Ta sử dụng bổ đề với $a,b>0$ và $ab\le 1$ ta có bất đẳng thức:

$$\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}\le\frac{2}{1+ab}\Leftrightarrow\frac{(a-b)^2(ab-1)}{(1+ab)(1+a^2)(1+b^2)}\le 0 \text{ (đúng).}$$

Vậy $VT \le \dfrac{2}{\sqrt{1+ab}} = VP$.

Đẳng thức xảy ra khi $x = y$. Thay vào(2) ta tìm được nghiệm của phương trình.

Nghiệm của hệ $(x;y) = \left(\dfrac{9-\sqrt{73}}{36};\dfrac{9-\sqrt{73}}{36}\right),\left(\dfrac{9+\sqrt{73}}{36};\dfrac{9+\sqrt{73}}{36}\right)$.

Dạng 3. Sử dụng điều kiện có nghiệm của hệ phương trình

1. Hệ có dạng: $\begin{cases} f^2(x,y) = 0 \\ g^k(x) = 0 \end{cases}$ hệ phương trình có một phương trình là phương trình bậc hai hai ẩn, ta coi một ẩn là tham số từ phương trình này ta tính dental và giới hơn miền giá trị của nghiệm của ẩn, từ đó giải bài toán

1. Hệ có dạng: $\begin{cases} \sqrt{A(x,y)} = B(x,y) \\ C(x) = 0 \end{cases}$ từ đây ta có điều kiện: $\begin{cases} A(x,y) \ge 0 \\ B(x) \ge 0 \end{cases}$

từ đó chúng ta có điều kiện rằng buộc giữa x và y.

Phương pháp này rất ít được áp dụng trong các đề thi.

★**Thí dụ 45.** Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (x-1)^2 = -y^3 - 3y^2 - 3y & (1) \\ x^2 + 2x(y-1) + y^2 - 6y + 1 = 0 & (2) \end{cases}$

Lời giải

Viết phương trình (2) của hệ dưới dạng:

$x^2 + 2(y-1).x + y^2 - 6y + 1 = 0$

Ta coi đây là phương trình bậc 2 ẩn x tham số y, để phương trình có nghiệm thì:

$\Delta'_{(x)} = (y-1)^2 - (y^2 - 6y + 1) = 4y \ge 0 \Leftrightarrow y \ge 0.$

Mặt khác $(1) \Leftrightarrow (x-1)^2 = 1 - (y+1)^3$

Do $y \ge 0$ nên $VT = (x-1)^2 \ge 0 \ge 1 - (y+1)^3$

Vì thế hệ có nghiệm khi x = 1 và y = 0, thay và hệ ban đầu ta thấy thỏa mãn.

Vậy hệ có nghiệm duy nhất là (x, y) = (1, 0).

★**Thí dụ 45.** Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 10x^2+5y^2-2xy-38x-6y+41=0 & (1) \\ \sqrt{x^3+xy+6y}-\sqrt{y^3+x^2-1}=2 & (2) \end{cases}$

Lời giải

Viết phương trình (1) của hệ dưới dạng:

$10x^2-2(y+19)x+5y^2-6y+41=0.$

Ta coi đây là phương trình bậc 2 ẩn x tham số y, để phương trình có nghiệm thì:

$\Delta'_{(x)}=(y+19)^2-10(5y^2-6y+41)=-49(y-1)^2\ge 0 \Leftrightarrow y=1 \Rightarrow x=2.$

Thử lại (x, y) = (2, 1) thỏa mãn hệ phương trình đã cho

Vậy hệ có nghiệm duy nhất là (x, y) = (2, 1).

★**Thí dụ 46.** Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^4+y^2=9 & (1) \\ x^2+y^2+xy-3x-4y+4=0 & (2) \end{cases}$

Lời giải

Viết phương trình (1) của hệ dưới dạng:

$x^2+(y-3)x+y^2-4y+4=0.$

Ta coi đây là phương trình bậc 2 ẩn x tham số y, để phương trình có nghiệm thì:

$\Delta_{(x)}=(y-3)^2-4(y^2-4y+4)=-3y^2+10y-7\ge 0 \Leftrightarrow 1\le y\le \frac{7}{3}.$

Tương tự viết phương trình (1) của hệ dưới dạng:

$y^2+(x-4)y+x^2-3x+4=0.$

Ta coi đây là phương trình bậc 2 ẩn y tham số x, để phương trình có nghiệm thì:

$\Delta_{(x)}=(x-4)^2-4(x^2-3x+4)=-3x^2+4x\ge 0 \Leftrightarrow 0\le x\le \frac{4}{3}.$

Khi đó: $x^4+y^2\le \left(\frac{4}{3}\right)^4+\left(\frac{7}{3}\right)^2=\frac{697}{81}<9$.

Vì vậy hệ đã cho vô nghiệm

PHẦN 7. KĨ THUẬT HỆ SỐ BẤT ĐỊNH

A. NỘI DUNG PHƯƠNG PHÁP:

Phương trình có dạng: $\begin{cases} f(x,y)=0 & (1) \\ g(x,y)=0 & (2) \end{cases}$

Ta lấy : $\alpha.f(x)+\beta.g(x)=0 \quad (3)$ trong đó α và β là các hằng số cần tìm để ta có thể chuyển phương trình (3) trở về phương trình tích. Thông thường ta lấy $\alpha = 1$ hoặc $\beta = 1$, nếu bậc của f(x) cao hơn g(x) thì chọn $\alpha = 1$. Thông thường ta đưa phương trình (3) về các dạng sau:

Dạng 1: $\alpha(mx+ny)^2+\beta(mx+ny)+\lambda=0$

Dạng 2: : $(x+a)^3=(y+b)^3$ hoặc $(ax+b)^3=(cy+d)^3$

Dạng 3: : $(x+a)^4=(y+b)^4$ hoặc $(ax+b)^4=(cy+d)^4$

Nhận xét:

- Các hệ phương trình đa thức bậc hai hai ẩn đều giải được bằng phương pháp hệ số bất định.
- Nếu hệ phương trình đa thức bậc cao nhất là 2 ta nghĩ tới dạng 1, nếu bậc cao nhất là 3 ta nghĩ tới dạng 2, bậc cao nhất là 4 ta nghĩ tới dạng 3.

B. THÍ DỤ MINH HỌA:

★Thí dụ 47. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+2xy+2y^2+3x=0 & (1) \\ xy+y^2+3y+1=0 & (2) \end{cases}$

Phân tích:

Quan sát thấy phương trình (1) và (2) của hệ đều có bậc cao nhất của x và y là bậc 2 nên ta tìm cách đưa phương trình về dạng phương trình bậc 2 theo *mx + ny*. Để làm được vậy ta nhân 2 vế PT (1) với α, nhân 2 vế PT (2) với β, rồi cộng lại theo vế với nhau:

$$\alpha(x^2+2xy+2y^2+3x)+\beta(xy+y^2+3y+1)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\alpha.x^2+(2\alpha+\beta)xy+(2\alpha+\beta)y^2\right]+3(\alpha x+\beta y)+\beta=0$$

$$\Leftrightarrow \alpha\left[x^2+\left(2+\frac{\beta}{\alpha}\right)xy+\left(2+\frac{\beta}{\alpha}\right)y^2\right]+3\alpha\left(x+\frac{\beta}{\alpha}\right)y+\beta=0$$

Chúng ta cần tìm α và β sao cho:

$$x^2+\left(2+\frac{\beta}{\alpha}\right)xy+\left(2+\frac{\beta}{\alpha}\right)y^2=\left(x+\frac{\beta}{\alpha}y\right)^2$$
$$\Leftrightarrow x^2+\left(2+\frac{\beta}{\alpha}\right)xy+\left(2+\frac{\beta}{\alpha}\right)y^2=x^2+2\frac{\beta}{\alpha}xy+\frac{\beta^2}{\alpha^2}y^2$$

Đồng nhất hệ số ta được $\begin{cases}2+\dfrac{\beta}{\alpha}=2\dfrac{\beta}{\alpha}\\ 2+\dfrac{\beta}{\alpha}=\dfrac{\beta^2}{\alpha^2}\end{cases}\quad\Leftrightarrow\dfrac{\beta}{\alpha}=2$

Ta chọn $\alpha=1$, $\beta=2$ dẫn tới lời giải sau:

Lời giải.

Nhân 2 vế của PT (2) với 2 ta được: $2xy+2y^2+6y+2=0 \qquad (3)$

Cộng (1) và (3) theo vế ta được:

$$2xy+2y^2+6y+2+x^2+2xy+2y^2+3x=0$$
$$\Leftrightarrow\left(x^2+4xy+4y^2\right)+3(x+2y)+2=0$$
$$\Leftrightarrow(x+2y)^2+3(x+2y)+2=0$$
$$\Leftrightarrow(x+2y+1)(x+2y+2)=0$$
$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+2y+1=0\\x+2y+2=0\end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2y-1\\x=-2y-2\end{array}\right.$$

Với $x=-2y-1$ thay vào PT(2) của hệ ta được:

$$-y^2+2y+1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=1+\sqrt{2}\Rightarrow x=-3-2\sqrt{2}\\y=1-\sqrt{2}\Rightarrow x=-3+2\sqrt{2}\end{array}\right.$$

Với $x=-2y-2$ thay vào PT(2) của hệ ta được:

$$-y^2+y+1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\Rightarrow x=-3+\sqrt{5}\\y=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\Rightarrow x=-3-\sqrt{5}\end{array}\right.$$

Vậy hệ có 4 nghiệm là

$$(x;y)=\left(-3-2\sqrt{2};1+\sqrt{2}\right),\left(-3+2\sqrt{2};1-\sqrt{2}\right),\left(-3+\sqrt{5};\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right),\left(-3-\sqrt{5};\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$$

★Thí dụ 48. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3 - y^3 = 35 & (1) \\ 2x^2 + 3y^2 = 4x - 9y & (2) \end{cases}$

Phân tích: Quan sát 2 phương trình của hệ ta thấy không thể dùng phương pháp thế hay đưa về phương trình đẳng cấp để giải hệ phương trình. Do x, y độc lập với nhau, ta hi vọng từ 2 phương trình của hệ kết hợp với nhau để đưa về dạng: $(x+a)^3 = (y+b)^3 \quad (*)$

Ta thấy phương trình (1) là phương trình có bậc 3 (bậc cao nhất) nên không nhân 2 vế của phương trình (1) thêm hệ số. Ta nhân 2 vế của phương trình (2) với hệ số α và cộng với phương trình (1) được:

$$\left(x^3 - y^3 - 35\right) + \alpha\left(2x^2 + 3y^2 - 4x + 9y\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow x^3 - y^3 - 35 + 2\alpha x^2 + 3\alpha y^2 - 4\alpha x + 9\alpha y = 0\,(3)$$

Mà: $(x+a)^3 = (y+b)^3 \Leftrightarrow x^3 - y^3 + \left(a^3 - b^3\right) + 3ax^2 + 3a^2x - 3by^2 - 3b^2y = 0 \quad (4)$

Đồng nhất hệ số (3) và (4) ta được:

$$\begin{cases} a^3 - b^3 = 35 \\ 2\alpha = 3a \\ -4\alpha = 3a^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^3 - b^3 = -35 \\ 2\alpha = 3a \\ \dfrac{3a^2}{3a} = \dfrac{-4\alpha}{2\alpha} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^3 - b^3 = -35 \\ 2\alpha = 3a \\ a = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 3 \\ \alpha = -3 \end{cases}$$

Do đó: $(x-2)^3 = (y+3)^3$ dẫn tới lời giải sau:

Lời giải.

Nhân 2 vế của phương trình (2) với -3 ta được:

$$-6x^2 - 9y^2 = -12x + 27y \qquad (5)$$

Cộng (5) và (1) vế theo vế ta được:

$$x^3 - y^3 - 6x^2 - 9y^2 = -12x + 27y + 35$$
$$\Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = y^3 + 9y^2 + 27y + 27$$
$$\Leftrightarrow (x-2)^3 = (y+3)^3$$
$$\Leftrightarrow x - 2 = y + 3$$
$$\Leftrightarrow x = y + 5$$

Thay x = y + 5 vào (1) ta được:

$$2(y+5)^2+3y^2=4(y+5)-9y$$
$$\Leftrightarrow 2y^2+20y+50+3y^2-4y-20+9y=0$$
$$\Leftrightarrow y^2+5y+6=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-2 \Rightarrow x=3 \\ y=-3 \Rightarrow x=2 \end{array}\right.$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất là (x, y) = (3; -2), (2; -3)

★Thí dụ 49. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^4-y^4=240 & (1) \\ x^3-3y^3=3(x^2-4y^2)-4(x-8y) & (2) \end{cases}$

Phân tích: Hệ phương trình có bậc 4, cũng như 2 bài toán trên ta không thể giải hệ phương trình bằng phương pháp thế, đăng cấp hay là đưa về phương trình tích. Ta hi vọng đưa phương trình về dạng $(x+\alpha)^4=(y+\beta)^4$

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} x^4+a=y^4+a+240 \\ x^3-3y^3=3(x^2-4y^2)-4(x-8y) \end{cases}$$

Nhân 2 vế phương trình thứ 2 với k và cộng theo vế với phương trình thứ nhất ta được:

$$x^4+a+k(x^3-3y^3)=y^4+a+240+k.\left[3(x^2-4y^2)-4(x-8y)\right] \quad (*)$$

Mặt khác:

$$(x+\alpha)^4=(y+\beta)^4 \Leftrightarrow x^4+4\alpha x^3+6\alpha^2x^2+4\alpha^3x+\alpha^4=x^4+4\beta x^3+6\beta^2x^2+4\beta^3x+\beta^4 \quad (**)$$

Đồng nhất hệ số (*) và (**) ta được: $\begin{cases} a=\alpha^4 \\ k=4\alpha \\ -3k=6\alpha^2 \\ 4k=4\alpha^3 \\ a+240=\beta^4 \\ 2k=4\beta \\ -12k=6\beta^2 \\ 32k=4\beta^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=-8 \\ \alpha=-2 \\ a=16 \\ \beta=-4 \end{cases}$

Lời giải.

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} x^4+16=y^4+256 \\ x^3-3y^3=3\left(x^2-4y^2\right)-4\left(x-8y\right) \end{cases}$$

Nhân 2 vế của phương trình thứ 2 với -8 rồi cộng theo vế với phương trình thứ nhất ta được:

$$x^4+16-8\left(x^3-3y^3\right)=y^4+256-8\left[3\left(x^2-4y^2\right)-4\left(x-8y\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow \left(x-2\right)^4=\left(y-4\right)^4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2=y-4 \\ x-2=4-y \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y-2 \\ x=6-y \end{array}\right.$$

Với x = y – 2 thay vào (1) ta được:

$$8y^3-24y^2+32y+224=0 \Leftrightarrow \left(y+2\right)\left(8y^2-40y+112\right)=0 \Leftrightarrow y=-2 \Rightarrow x=-4$$

Với x = 6 – y thay vào (1) ta được:

$$y^3-9y^2+36y-44=0 \Leftrightarrow \left(y-2\right)\left(y^2-7y+22\right)=0 \Leftrightarrow y=2 \Rightarrow x=4$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất là (x, y) = (-4; -2), (4; 2)

BÀI TẬP RÈN LUYỆN:

Câu 1. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3+y^3=9 & (1) \\ x^2+2y^2=x+4y & (2) \end{cases}$

Câu 2. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+y^2=\dfrac{1}{5} & (1) \\ 4x^2+3x-\dfrac{57}{25}=-y\left(3x+1\right) & (2) \end{cases}$

Câu 3. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3+3xy^2=-49 & (1) \\ x^2-8xy+y^2=8y-17x & (2) \end{cases}$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1.

Lấy phương trình (1) trừ đi 3 lần phương trình (2) theo vế ta được:

$$\left(x-1\right)^3=\left(2-y\right)^3 \Rightarrow x=3-y \quad (3)$$

Thế (3) vào (2) ta được:

$$y^2-3y+2=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=1 \Rightarrow x=2 \\ y=2 \Rightarrow x=1 \end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của hệ là: (2, 1); (1, 2)

Câu 2. Lấy phương trình (1) nhân với 25 và cộng theo vế với phương trình (2) nhân 50 nhóm lại ta được:

$$25(3x+y)^2+50(3x+y)-119=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x+y=\dfrac{7}{5} \\ 3x+y=-\dfrac{17}{5} \end{array}\right.$$

Với $\begin{cases} y=\dfrac{7}{5}-3x \\ x^2+y^2=\dfrac{1}{5} \end{cases} \Leftrightarrow (x,y)=\left(\dfrac{2}{5};\dfrac{1}{5}\right),\left(\dfrac{11}{25};\dfrac{2}{25}\right)$

Với $\begin{cases} y=-\dfrac{17}{5}-3x \\ x^2+y^2=\dfrac{1}{5} \end{cases}$ (vô nghiệm)

Vậy hệ có 2 nghiệm là $(x,y)=\left(\dfrac{2}{5};\dfrac{1}{5}\right),\left(\dfrac{11}{25};\dfrac{2}{25}\right)$.

Câu 3. Lấy phương trình (1) cộng với 3 lần phương trình (2) theo vế ta được:

$$x^3+3x^2+(3y^2-24y+51)x+3y^2-24y+49=0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)\left[(x+1)^2+3(y-4)^2\right]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=-1, y=4 \end{array}\right.$$

Thay x = -1 vào (1) ta được: $-1-3y^2=-49 \Rightarrow y^2=16 \Rightarrow y=\pm 4$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là (x, y) = (- 1; 4), (-1, - 4).

BÀI TẬP RÈN LUYỆN TỔNG HỢP

Câu 1. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x(x+y)+y^2-4y+1=0 \\ y(x+y)^2-2x^2-7y=2 \end{cases}$.

(Trích đề HSG huyện Hạ Hòa năm 2015-2016)

Câu 2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} y^2+2xy+4=2x+5y \\ 5x^2+7y-18=\sqrt{x^4+4} \end{cases}$.

(Trích đề Chuyên Bắc Ninh năm 2019-2020)

Câu 3. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 8xy+22y+12x+25=\dfrac{1}{x^3} \\ y^3+3y=(x+5)\sqrt{x+2} \end{cases}$.

(Trích đề Chuyên Đà Nẵng năm 2019-2020)

Câu 4. Giải hệ phương trình $\begin{cases} (x+y)^2=xy+3y-1 & (1) \\ x+y=\dfrac{x^2+y+1}{1+x^2} & (2) \end{cases}$

(Trích đề Chuyên Hưng Yên năm 2019-2020)

Câu 5. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x+y=4 \\ x^3+y^3=4x^2+4y^2-12 \end{cases}$

(Trích đề Chuyên Lâm Đồng năm 2019-2020)

Câu 6. Giải hệ phương trình $\begin{cases} (x-y)^2+4=3y-5x+2\sqrt{(x+1)(y-1)} \\ \dfrac{3xy-5y-6x+11}{\sqrt{x^3+1}}=5 \end{cases}$

(Trích đề Chuyên Nam Định năm 2019-2020)

Câu 7. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x+y+3}=\sqrt{2x+3y+1} \\ x(y+1)-4(x+y)+54=0 \end{cases}$.

(Trích đề Chuyên PTNK Hồ Chí Minh năm 2019-2020)

Câu 8. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x+6y=13 \\ 2x^2=(x+2y-3)(2-x) \end{cases}$

(Trích đề Chuyên Quảng Trị năm 2019-2020)

Câu 9. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (3x-y-1)\sqrt{y+1}+3x-1=y\sqrt{3x-y} \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$

(Trích đề Chuyên Tiền Giang năm 2019-2020)

Câu 10. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x-3y-2+\sqrt{y(x-y-1)+x}=0 \\ 3\sqrt{8-x}-\dfrac{4y}{\sqrt{y+1}+1}=x^2-14y-8. \end{cases}$

(Trích đề Chuyên Nam Định năm 2018-2019)

Câu 11. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} xy-x-y=-5 \\ \dfrac{1}{x^2-2x}+\dfrac{1}{y^2-2y}=\dfrac{2}{3} \end{cases}$

(Trích đề Chuyên Hà Tĩnh năm 2018-2019)

Câu 12. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x+y-\dfrac{4}{x}-\dfrac{4}{y}=3 \\ x+y+\dfrac{6}{x+y}=-5 \end{cases}$

(Trích đề Chuyên Bình Định năm 2018-2019)

Câu 13. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=1 \\ \sqrt{x^2-1}+\sqrt{y^2-1}=\sqrt{xy+2} \end{cases}$

(Trích đề Chuyên Lam Sơn năm 2018-2019)

Câu 14. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+y^2+x+y=(x+1)(y+1) \\ \left(\dfrac{x}{y+1}\right)^2+\left(\dfrac{y}{x+1}\right)^2=1 \end{cases}$

(Trích đề Chuyên Hưng Yên năm 2018-2019)

Câu 15. (Trích đề Chuyên Hưng Yên năm 2018-2019)

Cho hệ phương trình $\begin{cases} x+2y=m+3 \\ 2x-3y=m \end{cases}$ (I) (m là tham số)

a) Giải hệ phương trình (1) khi $m=1$

b) Tìm m để hệ (1) có nghiệm $(x;y)$ sao cho $P=98\left(x^2+y^2\right)+4m$ đạt giá trị nhỏ nhất

(Trích đề Chuyên Hưng Yên năm 2018-2019)

Câu 16. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x+y+xy=5 \end{cases}$

(Trích đề Chuyên Vĩnh Phúc năm 2018-2019)

Câu 17. (Trích đề Chuyên Bến Tre năm 2018-2019)

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+4y^2=2 \\ (x-2y)(1-2xy)=4 \end{cases}$

(Trích đề Chuyên Bến Tre năm 2018-2019)

Câu 18. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x^3-y^3+3x^2+6x-3y+4=0 \\ x^2+y^2-3x=1 \end{cases}$

(Trích đề Chuyên Thái Bình năm 2018-2019)

Câu 19. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+y^2+x+y=18 \\ xy(x+1)(y+1)=72 \end{cases}$

(Trích đề Chuyên Lâm Đồng năm 2018-2019)

Câu 20. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 - xy = 6 \\ 3x^2 + 2xy - 3y^2 = 30 \end{cases} (x, y \in \mathbb{R})$

(Trích đề Chuyên Đồng Nai năm 2018-2019)

Câu 21. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 - x - y^2 + y = 0 \\ 2x^2 - y^2 + x + y - 3 = 0 \end{cases}$.

(Trích đề Chuyên Quảng Nam năm 2018-2019)

Câu 22. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3x^2 + xy - 4x + 2y = 2 \\ x(x+1) + y(y+1) = 4 \end{cases}$

(Trích đề Chuyên Hải Dương năm 2018-2019)

Câu 23. Giải hệ phương trình $\begin{cases} (x+3)(x-1) = (y-2)(x+3) \\ (x-1)\sqrt{y^2 - 5y + 8} = (y-2)^2 \end{cases}$

(Trích đề Chuyên PTNK Hồ Chí Minh năm 2018-2019)

Câu 24. Tìm nghiệm nguyên của hệ phương trình : $\begin{cases} x^2 - 2x + 2y - 3 = 0 \\ 16x^2 - 8xy^2 + y^4 - 2y + 4 = 0 \end{cases}$

(Trích đề Chuyên Tuyên Quang năm 2018-2019)

Câu 25. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x^2 + y^2 + 3 = 4x \\ x^3 + 12x + y^3 = 6x^2 + 9 \end{cases}$

(Trích đề Chuyên Thái Nguyên năm 2018-2019)

Câu 26. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \left(x + \sqrt{x^2 + 2x + 2} + 1\right)\left(y + \sqrt{y^2 + 1}\right) = 1 \\ x^2 - 3xy - y^2 = 3 \end{cases}$

(Trích đề Chuyên Hải Dương năm 2016-2017)

Câu 27. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x^2 + xy - y^2 - 5x + y + 2 = 0 \\ x^2 + y^2 + x + y - 4 = 0 \end{cases}$.

(Trích đề Chuyên Quốc Học Huế năm 2018-2019)

Câu 28. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{2x - y - 9} - 36 + x^2 = 0 \\ y^2 - xy + 9 = 0 \end{cases}$

(Trích đề Chuyên Vĩnh Long năm 2018-2019)

Câu 29. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + y^3 = 1 & (1) \\ x^2 + y^5 = x^3 + y^2 & (2) \end{cases}$

(Trích đề Chuyên PTNK Hồ Chí Minh năm 2018-2019)

Câu 30. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 - xy - x + 3y - 6 = 0 \\ \sqrt{5x-6} + \sqrt{16-3y} = 2x^2 - 2x + y - 4. \end{cases}$

(Trích đề Chuyên Bắc Giang năm 2018-2019)

Câu 31. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 8x^3 + \dfrac{27}{y^3} = 18 \\ \dfrac{4x^2}{y} + \dfrac{6x}{y^2} = 1 \end{cases}$

(Trích đề Chuyên Quảng Nam năm 2018-2019)

Câu 32. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + 2y = xy + 2x \\ \sqrt{x+y} = xy - 2 \end{cases}$

(Trích đề Chuyên Quảng Nam năm 2018-2019)

Câu 33. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x - 3y - 2 + \sqrt{y(x-y-1) + x} = 0 \\ 3\sqrt{8-x} - \dfrac{4y}{\sqrt{y+1}+1} = x^2 - 14y - 8 \end{cases}$

(Trích đề Chuyên Nam Định năm 2018-2019)

Câu 34. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x - 2y + xy = 2 \\ x^2 + 4y^2 = 4 \end{cases}$.

(Trích đề Chuyên Quảng Ngãi năm 2018-2019)

Câu 35. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} xy - \dfrac{x}{y} = \dfrac{16}{3} \\ xy - \dfrac{y}{x} = \dfrac{9}{2} \end{cases}$.

(Trích đề Chuyên Quảng Ngãi năm 2018-2019)

Câu 36. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 4\sqrt{x+2} + 2\sqrt{3(x+4)} = 3y(y+1) + 10 \\ (x+2)^3 + x = y(y^2+1) - 2 \end{cases}$

(Trích đề Chuyên Đà Nẵng năm 2018-2019)

Câu 37. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 2 \\ (x-2y)(1-2xy) = 4 \end{cases}$.

(Trích đề Chuyên Bến Tre năm 2018-2019)

Câu 38. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} (x^2+1)(y^2+1) = 10 \\ (x+y)(xy-1) = 3 \end{cases}$

(Trích đề Chuyên Bình Phước năm 2018-2019)

Câu 39. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x^2 - y^2 - xy + x - y = 0 \\ \sqrt{2x + y - 2} + 2 - 2x = 0. \end{cases}$

(Trích đề Chuyên Nam Định năm 2016-2017)

Câu 40. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2y + 1 \\ xy = x + 1 \end{cases}$.

(Trích đề Chuyên Trà Vinh năm 2018-2019)

Câu 41. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x^2 + xy = y^2 - 3y + 2 \\ x^2 - y^2 = 3 \end{cases}$

(Trích đề Chuyên Tiền Giang năm 2018-2019)

Câu 42. Giải hệ phương trình $\begin{cases} (x+y)^2 = xy + 3y - 1 \\ x + y = \dfrac{x^2 + y + 1}{1 + x^2} \end{cases}$.

(Trích đề Chuyên Hưng Yên năm 2018-2019)

Câu 43. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 + 4y = y^3 + 16x \\ 1 + y^2 = 5(1 + x^2) \end{cases}$

(Trích đề Chuyên Ninh Bình năm 2015-2016)

Câu 44. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}} - \dfrac{\sqrt{x}}{y} = x^2 + xy - 2y^2 & (1) \\ \left(\sqrt{x+3} - \sqrt{y}\right)\left(1 + \sqrt{x^2 + 3x}\right) = 3 & (2) \end{cases}$

(Trích đề Chuyên Bình Phước năm 2015-2016)

Câu 45. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} 4\sqrt{x+1} - xy\sqrt{y^2 + 4} = 0 & (1) \\ \sqrt{x^2 - xy^2 + 1} + 3\sqrt{x - 1} = xy^2 & (2). \end{cases}$

(Trích đề Chuyên Bình Phước năm 2017-2018)

Câu 46. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x + y + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + 4 = 0 \\ xy + \dfrac{1}{xy} + \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} - 4 = 0 \end{cases}$

(Trích đề Chuyên Quốc Học Huế năm 2010-2011)

Câu 47. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 - 2xy + x - 2y + 3 = 0 \\ y^2 - x^2 + 2xy + 2x - 2 = 0. \end{cases}$

(Trích đề Chuyên Phan Bội Châu năm 2012-2013)

Câu 48. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x(x+4)(4x+y)=6 \\ x^2+8x+y=-5 \end{cases}$

(Trích đề Chuyên Quảng Nam năm 2015-2016)

Câu 49. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x+y=2a+1 \\ x^2+y^2=2a^2+4a-1 \end{cases}$ (với a là tham số).

1. Giải hệ khi $a=1$.
2. Tìm a để hệ đã cho có nghiệm $(x;y)$ thoả mãn tích $x.y$ đạt giá trị nhỏ nhất

(Trích đề Chuyên Lam Sơn năm 2011-2012)

Câu 50. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+xy-2y^2=0 \\ xy+3y^2+x=3 \end{cases}$.

(Trích đề Chuyên Quảng Ninh năm 2017-2018)

Câu 51. Cho hệ phương trình $\begin{cases} (m+1)x-(m+1)y=4m \\ x+(m-2)y=2 \end{cases}$, với $m \in R$

a. Giải hệ đã cho khi $m=-3$

b. Tìm điều kiện của m để phương trình có nghiệm duy nhất. Tìm nghiệm duy nhất đó.

(Trích đề Chuyên Gia Lai năm 2012-2013)

Câu 52. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} |x|+|y-3|=1 \\ y-|x|=3 \end{cases}$

(Trích đề Chuyên Đồng Nai năm 2012-2013)

Câu 53. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} (m-1)x+y=2 \\ mx+y=m+1 \end{cases}$ (m là tham số)

1. Giải hệ phương trình khi $m=2$;

2. Chứng minh rằng với mọi giá trị của m thì hệ phương trình luôn có nghiệm duy nhất $(x;y)$ thoả mãn: $2x+y\le 3$.

(Trích đề Chuyên Thái Bình năm 2009-2010)

Câu 54. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+2y-2xy+z^2=1 \end{cases}$.

(Trích đề Chuyên Phú Yên năm 2009-2010)

Câu 55. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3-x=x^2y-y \\ \sqrt{2(x^4+1)}-5\sqrt{|x|}+\sqrt{y}+2=0 \end{cases}$

(Trích đề Chuyên Hải Dương năm 2009-2010)

Câu 56. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+2y-2xy+z^2=1 \end{cases}$

(Trích đề Chuyên Tuyên Quang năm 2012-2013)

Câu 57. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+y=3+\sqrt{xy} \\ x^2+y^2=18 \end{cases}$.

(Trích đề Chuyên Bà Rịa Vũng Tàu năm 2016-2017)

Câu 58. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 3x^2+8y^2+12xy=23 \\ x^2+y^2=2. \end{cases}$

(Trích đề Chuyên KHTN Hà Nội năm 2010-2011)

Câu 59. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \left(x+\sqrt{x^2+2012}\right)\left(y+\sqrt{y^2+2012}\right)=2012 \\ x^2+z^2-4(y+z)+8=0 \end{cases}$.

(Trích đề Chuyên Hải Dương năm 2012-2013)

Câu 60. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+y^2+xy=3 \\ xy+3x^2=4 \end{cases}$

(Trích đề Chuyên Hải Dương năm 2009-2010)

Câu 61. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}}-\dfrac{\sqrt{x}}{y}=x^2+xy-2y^2 & (1) \\ (\sqrt{x+3}-\sqrt{y})(1+\sqrt{x^2+3x})=3 & (2) \end{cases}$

(Trích đề Chuyên Bình Phước năm 2015-2016)

Câu 62. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (x+2y-2)(2x+y)=2x(5y-2)-2y \\ x^2-7y=-3 \end{cases}$

(Trích đề Chuyên Bình Phước năm 2013-2014)

Câu 63. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} mx-y=2 \\ 3x+my=5 \end{cases}$

a) Giải hệ phương trình khi $m=\sqrt{2}$.

b) Tìm giá trị của m để hệ phương trình đã cho có nghiệm (x; y) thỏa mãn hệ thức $x+y=1-\dfrac{m^2}{m^2+3}$.

(Trích đề Chuyên Quảng Ninh năm 2008-2009)

Câu 64. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x^2+9}+y=9\\\sqrt{y^2+9}+x=9\end{cases}$

(Trích đề Chuyên Phú Yên năm 2011-2012)

Câu 65. Giải hệ phương trình $\begin{cases}2xy+x+2y=20\\\dfrac{1}{y}+\dfrac{2}{x}=\dfrac{4}{3}\end{cases}$

(Trích đề Chuyên Quảng Nam năm 2013-2014)

Câu 66. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x+y=13\\\sqrt{x-3}+\sqrt{y+7}=5.\end{cases}$

(Trích đề Chuyên Đà Nẵng năm 2009-2010)

Câu 67. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^2+2y+3=y^2+4x\\x^2+y^2=5\end{cases}$

(Trích đề Chuyên Bình Phước năm 2012-2013)

Câu 68. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x^2+xy-4x=-6\\y^2+xy=-1\end{cases}$

(Trích đề Chuyên Quảng Nam năm 2012-2013)

Câu 69. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x^3-\dfrac{6}{y}=2\\3x-\dfrac{8}{y^3}=-2.\end{cases}$

(Trích đề HSG tỉnh Điện Biên năm 2018-2019)

Câu 70. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}(x-1)^2+(y-3)^2=1\\(x-1)(y-3)-x-y=-3.\end{cases}$

(Trích đề HSG tỉnh Nghệ An năm 2018-2019)

Câu 71.

1) Cho (x, y) là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases}x-y=m+1\\2x-3y=m+3\end{cases}$ (với m là tham số thực).

   Tìm m để biểu thức $P=x^2+8y$ đạt giá trị nhỏ nhất.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^2+y^2=1\\x^3-y^3=-1\end{cases}$ (với x, y thuộc R).

(Trích đề HSG tỉnh Đồng Nai năm 2018-2019)

Câu 72. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x+\sqrt{x^2+1}=2y+1 \\ y+\sqrt{y^2+1}=2x+1 \end{cases}$

(Trích đề HSG tỉnh Thanh Hóa năm 2018-2019)

Câu 73. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} xy-2x+y=6 \\ (x+1)^2+(y-2)^2=8 \end{cases}$

(Trích đề HSG tỉnh Bình Phước năm 2018-2019)

Câu 74. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3+2xy^2+12y=0 \\ 8y^2+x^2=12 \end{cases}$

(Trích đề HSG tỉnh Sơn La năm 2018-2019)

Câu 75. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (y-2x)(1-y-x)=2x^2-x \\ x(y-1)+\sqrt[3]{x^2-y}=2 \end{cases}$

(Trích đề HSG tỉnh Ninh Bình năm 2018-2019)

Câu 76. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{(x-y)^2-1}{xy}-\dfrac{2(x+y-1)}{x+y}=-4 \\ 4x^2+5y+\sqrt{x+y-1}+6\sqrt{x}=13 \end{cases}$.

(Trích đề HSG tỉnh Nam Định năm 2018-2019)

Câu 77. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{2x-y-1}+\sqrt{3y+1}=\sqrt{x}+\sqrt{x+2y} \\ x^3-3x+2=2y^3-y^2 \end{cases}$

(Trích đề HSG tỉnh Bắc Ninh năm 2018-2019)

Câu 78. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{2x+1}+\sqrt{2y+1}=\dfrac{(x-y)^2}{2} \\ (3x+2y)(y+1)=4-x^2 \end{cases}$

(Trích đề HSG tỉnh Hưng Yên năm 2017-2018)

Câu 79. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (x+y)^2(8x^2+8y^2+4xy-13)+5=0 \\ 2x+\dfrac{1}{x+y}=1 \end{cases}$

(Trích đề HSG tỉnh Thanh Hóa năm 2017-2018)

Câu 80. Cho hệ phương trình $\begin{cases} (m-1)x+y=2 \\ x+2y=2 \end{cases}$ (với m là tham số và x, y là ẩn số).

Tìm các giá trị m nguyên để hệ phương trình có nghiệm (x, y) nguyên.

(Trích đề HSG tỉnh Vĩnh Phúc năm 2017-2018)

Câu 81. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + y^2 - xy = 2 \\ x^3 = x + y \end{cases}$

(Trích đề HSG tỉnh Hải Dương năm 2017-2018)

Câu 82. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 = 2 + xy^2 \\ y^2 = 2 + x^2y \end{cases}$

(Trích đề HSG tỉnh Thanh Hóa năm 2016-2017)

Câu 83. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + xy^2 - xy - y^3 = 0 \\ 2\left(x^2+1\right) - 3\sqrt{x}\left(y+1\right) - y = 0. \end{cases}$

(Trích đề HSG tỉnh Nghệ An năm 2016-2017)

Câu 84. Giải hệ phương trình $\begin{cases} xy^2 + 2x - 4y = -1 \\ x^2y^3 + 2xy^2 - 4x + 3y = 2 \end{cases}$

(Trích đề HSG tỉnh Quảng Nam năm 2016-2017)

Câu 85. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + \left(y+1\right)^2 = xy + x + 1 \\ 2x^3 = x + y + 1 \end{cases}.$

(Trích đề HSG tỉnh Hải Dương năm 2016-2017)

Câu 86. Giải hệ phương trình $\begin{cases} y^2\sqrt{2x-1} + \sqrt{3} = 5y^2 - \sqrt{6x-3} \\ 2y^4\left(5x^2 - 17x + 6\right) = 6 - 15x \end{cases}$

(Trích đề HSG tỉnh Hưng Yên năm 2016-2017)

Câu 87. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x\left(y-1\right) + y\left(x+1\right) = 6 \\ \left(x-1\right)\left(y+1\right) = 1 \end{cases}$

(Trích đề HSG TP. Hồ Chí Minh năm 2016-2017)

Câu 88. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + 4y^2 + 3 = 4x \\ x^3 + 12x + 8y^3 = 6x^2 + 9 \end{cases}$

(Trích đề HSG tỉnh Hải Dương năm 2015-2016)

Câu 89. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 4x^2 + 1 = y^2 - 4x \\ x^2 + xy + y^2 = 1 \end{cases}$

(Trích đề HSG tỉnh Nghệ An năm 2015-2016)

Câu 90. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 - y^3 = 4\left(4x - y\right) \\ y^2 - 5x^2 = 4 \end{cases}.$

(Trích đề HSG tỉnh Thanh Hóa năm 2015-2016)

Câu 91. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x^2+y^2-3xy-4x+3y+2=0 \\ \sqrt{x^2-y+3}+\sqrt{y-x+1}=2 \end{cases}$

(Trích đề HSG tỉnh Hưng Yên năm 2015-2016)

Câu 92. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x^2-y^2+xy+y-5x+2=0 \\ x^2+y^2+x+y-4=0 \end{cases}$

(Trích đề HSG tỉnh Phú Thọ năm 2015-2016)

Câu 93. Giải hệ phương trình $\begin{cases} y^2-y\left(\sqrt{x-1}+1\right)+\sqrt{x-1}=0 \\ x^2+y-\sqrt{7x^2-3}=0. \end{cases}$

(Trích đề HSG tỉnh Nam Định năm 2015-2016)

Câu 94. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x-5y=-20 \\ (1+x)(1+2x)(1+3x)=(1+3y)(1+3y+2x^2) \end{cases}$

(Trích đề HSG tỉnh Đắc Lắc năm 2015-2016)

Câu 95. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 5x^2+2y^2+2xy-2x-4y=24 \\ 3x+(2x+y-1)(x-y+1)=11 \end{cases}$

(Trích đề HSG tỉnh Vĩnh Long năm 2015-2016)

Câu 96. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+y+z=3 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{3} \\ x^2+y^2+z^2=17 \end{cases}$

(Trích đề HSG TP Hà Nội năm 2015-2016)

Câu 97. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+xy+zx=48 \\ y^2+xy+yz=12 \\ z^2+zx+yz=84 \end{cases}$

(Trích đề HSG tỉnh Đà Nẵng năm 2015-2016)

Câu 99. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3-y^3-15y-14=3\cdot(2y^2-x) \\ 4x^3+6xy+15x+3=0 \end{cases}$

(Trích đề HSG tỉnh Hưng Yên năm 2014-2015)

Câu 100. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+y^2+xy=2 \\ x^3+y^3=2x+4y \end{cases}$

(Trích đề HSG tỉnh Nghệ An năm 2014-2015)

Câu 101. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\left(x^2-1\right)y+\left(y^2-1\right)x=2\left(xy-1\right)\\4x^2+y^2+2x-y-6=0\end{cases}$

(Trích đề HSG tỉnh Phú Thọ năm 2014-2015)

Câu 102. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^2+y^2=2x^2y^2\\(x+y)(1+xy)=4x^2y^2\end{cases}$

(Trích đề HSG tỉnh Thanh Hóa năm 2014-2015)

Câu 103.

Cho hệ phương trình $\begin{cases}mx-2y=2\\2x+my=5\end{cases}$ (với m là tham số).

a) Giải hệ phương trình khi $m=10$;

b) Tìm m để hệ phương trình đã cho có nghiệm $\left(x;y\right)$ thỏa mãn

$$x+y-2014=\frac{-2015m^2+14m-8056}{m^2+4}.$$

(Trích đề HSG tỉnh Vĩnh Phúc năm 2014-2015)

Câu 104. Giải hệ phương trình $\begin{cases}3x^2+xy-4x+2y=2\\x\left(x+1\right)+y\left(y+1\right)=4\end{cases}$

(Trích đề HSG tỉnh Hải Dương năm 2014-2015)

Câu 105. Định m nguyên để hệ có nghiệm duy nhất là nghiệm nguyên $\begin{cases}mx+2y=m+1\\2x+my=2m-1\end{cases}$

Câu 106. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^3=2x+y\\y^3=2y+x\end{cases}$

(Trích đề HSG tỉnh Hải Dương năm 2014-2015)

Câu 107. Giải hệ phương trình $\begin{cases}4x^3-y^3=x+2y\\52x^2-82xy+21y^2=-9\end{cases}$

(Trích đề HSG tỉnh Hưng Yên năm 2014-2015)

Câu 108. Giải hệ phương trình $\begin{cases}3x^2+2y^2-4xy+x+8y-4=0\\x^2-y^2+2x+y-3=0.\end{cases}$

(Trích đề HSG tỉnh Phú Thọ năm 2014-2015)

Câu 109. Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases}3x-y=6\\mx+y=n+3\end{cases}$$

Tìm các giá trị của m và n để:

a) Hệ có nghiệm duy nhất

b) Hệ vô nghiệm

c) Hệ có vô số nghiệm

Câu 110. Tìm các giá trị của a để hệ sau vô nghiệm: $\begin{cases} x + ay = 1 \\ x - 3ay = 2a + 3 \end{cases}$

Câu 111. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} mx + 4y = 20 & (1) \\ x + my = 10 & (2) \end{cases}$ (m là tham số)

a) Với giá trị nào của m hệ đã cho:

b) Vô nghiệm

c) Có nghiệm duy nhất

d) Vô số nghiệm

Câu 112. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x + y = 2m + 1 \\ x^2y + y^2x = 2m^2 - m - 1 \end{cases}$, với *m* là tham số.

a) Giải hệ phương trình với *m* =2.

b) Chứng minh rằng hệ luôn có nghiệm với mọi *m*.

(Trích đề Chuyên Phú Yên năm 2012-2013)

Câu 113. Cho hệ phương trình $\begin{cases} 2x^2 - xy = 1 \\ 4x^2 + 4xy - y^2 = m \end{cases}$, trong đó m là tham số và x, y là các ẩn số.

a) Giải hệ phương trình với $m = 7$.

b) Tìm tất cả các giá trị của m để hệ phương trình có nghiệm.

(Trích đề vào lớp 10 Chuyên Vĩnh Phúc năm 2017-2018)

Câu 114. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} (m-1)x + y = 3m - 4 & (1) \\ x + (m-1)y = m & (2) \end{cases}$

Tìm m để hệ có nghiệm duy nhất thỏa mãn x + y = 2.

Câu 115. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} mx + y = -1 \\ x + y = -m. \end{cases}$

Tìm m để phương trình có nghiệm duy nhất (x, y) thỏa mãn: $y = x^2$

Câu 116. Tìm nghiệm nguyên a để hệ phương trình $\begin{cases} 2x - 3y = 2 - a \\ x + 2y = 3a + 1 \end{cases}$

Có nghiệm (x; y) sao cho T = $\frac{y}{x}$ là số nguyên.

(Trích đề tuyển sinh lớp 10 Chuyên Tây Ninh năm 2014-2015)

Câu 117. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x^3y^2 - 2x^2y - x^2y^2 + 2xy + 3x - 3 = 0 \\ y^2 + x^{2017} = y + 3m \end{cases}$.

Tìm các giá trị của m để hệ phương trình có hai nghiệm phân biệt $(x_1; y_1)$ và $(x_2; y_2)$ thỏa mãn điều kiện $(x_1 + y_2)(x_2 + y_1) + 3 = 0$.

(Trích đề thi HSG tỉnh Hải Phòng năm học 2016-2017)

Câu 118. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} mx - y = 2 \\ 3x + my = 5 \end{cases}$

a) Giải hệ phương trình khi $m = \sqrt{2}$.

b) Tìm giá trị của m để hệ phương trình đã cho có nghiệm (x; y) thỏa mãn hệ thức $x + y = 1 - \dfrac{m^2}{m^2 + 3}$.

(Trích đề vào lớp 10 Chuyên Quảng Nam năm 2008-2009)

Câu 119. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + 1 + y^2 + xy = 4y \\ x + y - 2 = \dfrac{y}{x^2 + 1} \end{cases}$

Câu 120. Hệ phương trình tương đương với $\begin{cases} (x^2 + y^2)(x + y + 2) = 4(y + 2) \\ x^2 + y^2 + x(y + 2) + (y + 2)(y - 2) = 0 \end{cases}$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1.

Thay $y=0$ vào hệ phương trình ta thấy không thỏa mãn.

Với $y\neq 0$ ta có:

$$\begin{cases}x(x+y)+y^2-4y+1=0\\ y(x+y)^2-2x^2-7y=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+1+y(y+x)=4y\\ y(x+y)^2-2(x^2+1)=7y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{x^2+1}{y}+x+y=4\\ (x+y)^2-2\dfrac{x^2+1}{y}=7\end{cases}$$

Đặt $u=\dfrac{x^2+1}{y}$, $v=x+y$

Hệ phương trình trở thành: $\begin{cases}u+v=4\\ v^2-2u=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u=4-v\\ v^2+2v-15=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}v=3,u=1\\ v=-5,u=9\end{array}\right.$.

- Với $v=3,u=1$ ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}x^2+1=y\\ x+y=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+x-2=0\\ y=3-x\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1,\ y=2\\ x=-2,\ y=5\end{array}\right..$$

- Với $v=-5$, $u=9$ ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}x^2+1=9y\\ x+y=-5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+1=9y\\ y=-5-x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+9x+46=0\\ y=-5-x\end{cases}\text{(vô nghiệm).}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x;y)\in\{(1;2);(-2;5)\}$.

Câu 2.

$$\begin{cases}y^2+2xy+4=2x+5y\ (1)\\ 5x^2+7y-18=\sqrt{x^4+4}\ (2)\end{cases}$$

ĐK: $x,y\in\mathbb{R}$.

$$(1)\Leftrightarrow y^2-y+2x(y-1)+4(1-y)=0\Leftrightarrow(y-1)(y+2x-4)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=1\\ y=4-2x\end{array}\right.$$

Với $y=1$ thay vào (2) ta được

$$5x^2-11=\sqrt{x^4+4}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2\geq\dfrac{11}{5}\\ 24x^4-110x^2+117=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x^2=\frac{55+\sqrt{217}}{24}\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{\frac{55+\sqrt{217}}{24}}.$$

Với $y = 4 - 2x$ thay vào (2) ta được $5x^2 + 28 - 14x - 18 = \sqrt{x^4 + 4}$

$$\Leftrightarrow \left(x^2+2x+2\right)+\sqrt{\left(x^2+2x+2\right)\left(x^2-2x+2\right)}-6\left(x^2-2x+2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x^2+2x+2}=2\sqrt{x^2-2x+2}\\ \sqrt{x^2+2x+2}=-3\sqrt{x^2-2x+2}\end{array}\right. \Leftrightarrow x^2+2x+2=4\left(x^2-2x+2\right)$$

$$\Leftrightarrow 3x^2-10x+6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{5-\sqrt{7}}{3}\Rightarrow y=\dfrac{2+2\sqrt{7}}{3}\\ x=\dfrac{5+\sqrt{7}}{3}\Rightarrow y=\dfrac{2-2\sqrt{7}}{3}\end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có bốn nghiệm là:

$$\left(\sqrt{\frac{55+\sqrt{217}}{24}};1\right);\left(-\sqrt{\frac{55+\sqrt{217}}{24}};1\right);\left(\frac{5-\sqrt{7}}{3};\frac{2+2\sqrt{7}}{3}\right);\left(\frac{5+\sqrt{7}}{3};\frac{2-2\sqrt{7}}{3}\right).$$

Câu 3.

Điều kiện: $x > -2; x \neq 0$

$$\begin{cases}8xy+22y+12x+25=\dfrac{1}{x^3}\,(1)\\ y^3+3y=(x+5)\sqrt{x+2}\,(2)\end{cases}$$

Xét pt (2) ta có:

$$y^3+3y=(x+2)\sqrt{x+2}+3\sqrt{x+2}$$

$$\Leftrightarrow y^3-\left(\sqrt{x+2}\right)^3+3\left(y-\sqrt{x+2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(y-\sqrt{x+2}\right)\left(y^2+y\sqrt{x+2}+x+2+3\right)=0$$

$$\Leftrightarrow y=\sqrt{x+2}$$

Thay $y=\sqrt{x+2}\,(y\geq 0)$ vào (1) ta được:

$$8x\sqrt{x+2}+22\sqrt{x+2}+12x+25=\frac{1}{x^3}$$

$$\Leftrightarrow 8(x+2)\sqrt{x+2}+12(x+2)+6\sqrt{x+2}+1=\frac{1}{x^3}$$

$$\Leftrightarrow \left(2\sqrt{x+2}+1\right)^3=\left(\frac{1}{x}\right)^3$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x+2}+1=\frac{1}{x}$$

Từ đó suy ra $0 < x < 1$ ta có phương trình trên tương đương

$$2x\sqrt{x+2}=1-x$$
$$\Rightarrow 4x^2(x+2)=(1-x)^2$$
$$\Leftrightarrow (x+1)^2(4x-1)=0$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{1}{4}$$
$$\Rightarrow y=\sqrt{\frac{1}{4}+2}=\frac{3}{2}\text{ (thỏa đk)}$$

Vậy hệ pt có nghiệm duy nhất $(x;y)=\left(\frac{1}{4};\frac{3}{2}\right)$

Câu 4.

Dễ thấy $y=0$ không là nghiệm của (1). Với $y\neq 0$, ta có:

$$(1)\Leftrightarrow x^2+xy+y^2=3y-1\Rightarrow \begin{cases} x^2+y+1=4y-xy-y^2 \\ x^2+1=3y-xy-y^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2+y+1}{x^2+1}=\frac{y(4-x-y)}{y(3-x-y)}=\frac{x+y-4}{x+y-3} \qquad (3)$$

Từ (2) và (3) $\Rightarrow x+y=\dfrac{x+y-4}{x+y-3}$ (4)

Đặt $x+y=a$. Phương trình (4) trở thành:

$$a=\frac{a-4}{a-3}\Rightarrow a^2-3a=a-4\Leftrightarrow a^2-4a+4=0$$
$$\Leftrightarrow (a-2)^2=0\Leftrightarrow a=2$$
$$\Rightarrow x+y=2\Leftrightarrow y=2-x$$

Thay $y=2-x$ vào (2) được:

$$2=\frac{x^2+2-x+1}{1+x^2}\Leftrightarrow 2+2x^2=x^2-x+3\Leftrightarrow x^2+x-1=0$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\Rightarrow y=\frac{5\mp\sqrt{5}}{2}$$

Thử lại ta thấy $\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2};\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)$ và $\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2};\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)$ là các nghiệm của hệ đã cho.

Vậy …

Câu 5.

Biến đổi được phương trình $x^3+y^3=4x^2+4y^2-12$ về dạng:

$$(x+y)(x^2+y^2-xy)=4x^2+4y^2-12\Leftrightarrow 4(x^2+y^2-xy)=4x^2+4y^2-12$$

Suy ra được: $xy=3$

Qui việc tìm x, y về giải phương trình: $t^2-4t+3=0$

Tìm được 2 cặp nghiệm: (x = 1; y = 3); (x = 3; y = 1);

Câu 6.

$$\begin{cases}(x-y)^2+4=3y-5x+2\sqrt{(x+1)(y-1)} & (1)\\ \dfrac{3xy-5y-6x+11}{\sqrt{x^3+1}}=5 & (2)\end{cases}$$

ĐK: $x\ge -1; y\ge 1$

Đặt $\sqrt{x+1}=a$, $\sqrt{y-1}=b$ $\left(a>0,b\ge 0\right)\Rightarrow x=a^2-1; y=b^2+1$

Phương trình (1) trở thành:

$$(a^2-b^2-2)^2+4=3(b^2+1)-5(a^2-1)+2ab$$
$$\Leftrightarrow (a^2-b^2-2)^2+4-3b^2+5a^2-8-2ab=0$$
$$\Leftrightarrow (a^2-b^2-2)^2+4+4(a^2-b^2-2)+a^2+b^2-2ab=0$$
$$\Leftrightarrow (a^2-b^2)^2+(a-b)^2=0$$
$$\Leftrightarrow (a-b)^2[(a+b)^2+1]=0$$
$$\Leftrightarrow (a-b)^2=0$$
$$\Leftrightarrow a=b$$
$$\Rightarrow \sqrt{x+1}=\sqrt{y-1}\Rightarrow y=x+2 \qquad (3)$$

$$(2)\Rightarrow 3xy-5y-6x+11=5\sqrt{x^3+1} \qquad (4)$$

Thay (3) vào (4) được:

$$3x(x+2)-5(x+2)-6x+11=5\sqrt{x^3+1}$$
$$\Leftrightarrow 3x^2+6x-5x-10-6x+11=5\sqrt{x^3+1}$$
$$\Leftrightarrow 3x^2-5x+1=5\sqrt{x^3+1}$$
$$\Leftrightarrow 3(x^2-x+1)-2(x+1)-5\sqrt{x+1}\sqrt{x^2-x+1}=0$$
$$\Leftrightarrow \left(3\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x^2-x+1}-2\sqrt{x+1}\right)=0$$
$$\Rightarrow \sqrt{x^2-x+1}-2\sqrt{x+1}=0$$
$$\Rightarrow x^2-x+1=4(x+1)$$
$$\Leftrightarrow x^2-5x-3=0$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{5\pm\sqrt{37}}{2}\ \text{(TMĐK)}$$

Với $x=\dfrac{5\pm\sqrt{37}}{2}\Rightarrow y=\dfrac{9\pm\sqrt{37}}{2}$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là

$$\left(x;y\right)\in\left\{\left(\frac{5+\sqrt{37}}{2};\frac{9+\sqrt{37}}{2}\right);\left(\frac{5-\sqrt{37}}{2};\frac{9-\sqrt{37}}{2}\right)\right\}.$$

Câu 7.

Điều kiện: $x+y+3\geq 0$ và $2x+3y+1\geq 0$.

Từ phương trình thứ nhất của hệ, ta có $x+y+3=2x+3y+1$, tức $x=2-2y$.

Từ đây và các điều kiện $x+y+3\geq 0, 2x+3y+1\geq 0$, ta phải có $5-2y\geq 0$ và $5-y\geq 0$, tức $y\leq\frac{5}{2}$.

Bây giờ, thay $x=2-2y$ vào phương trình thứ hai của hệ, ta được:

$(2-2y)(y+1)-4(2-y)+54=0$ hay $-2(y+4)(y-6)=0$.

Do $y\leq\frac{5}{2}$ nên từ đây, ta có $y=-4$ (tương ứng $x=10$). Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x,y)=(10,-4)$.

Câu 8.

$$\begin{cases}x+6y=13\\2x^2=(x+2y-3)(2-x)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=\dfrac{13-x}{6}\\2x^2=\left(x+2.\dfrac{13-x}{6}-3\right)(2-x)\end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y=\dfrac{13-x}{6}\\2x^2=\dfrac{2\left(4-x^2\right)}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=\dfrac{13-x}{6}\\x=\pm 1\end{cases}.$$

Vậy nghiệm $(x;\ y)$ của hệ phương trình là: $(1;\ 2)$, $\left(-1;\ \frac{7}{3}\right)$.

Câu 9.

$$\begin{cases}(3x-y-1)\sqrt{y+1}+3x-1=y\sqrt{3x-y} & (1)\\x^2+y^2=5 & (2)\end{cases}$$

Điều kiện $3x-y\geq 0; y\geq 0$

$$(1)\Leftrightarrow\left(\sqrt{3x-y}-1\right)\left(\sqrt{y+1}+1\right)\left(\sqrt{3x-y}-\sqrt{y+1}+2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}\sqrt{3x-y}-1=0 & (3)\\\sqrt{3x-y}-\sqrt{y+1}+2=0 & (4)\end{array}\right.$$

$(3)\Leftrightarrow y=3x-1$ thế vào (2), ta được

$$x^2+(3x-1)^2=5 \Leftrightarrow 10x^2-6x-4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \Rightarrow y=2 \\ x=-\dfrac{2}{5} \Rightarrow y=-\dfrac{11}{5} \end{array}\right.$$

Loại nghiệm $(x;y)=\left(-\dfrac{2}{5};-\dfrac{11}{5}\right)$

$$(4) \Leftrightarrow \sqrt{3x-y}+\frac{3-y}{2+\sqrt{y+1}}=0 \qquad (5)$$

Từ (2), ta có: $|y| \le \sqrt{5}<3 \Rightarrow 3-y>0 \Rightarrow (5)$ vô nghiệm

Vậy tập nghiệm $S=\{(1;2)\}$

Câu 10.

Điều kiện $x \le 8; y \ge -1; x-y \ge 0$.

Hệ đã cho tương đương $\begin{cases} x-3y-2+\sqrt{(x-y)(y+1)}=0 & (1) \\ 3\sqrt{8-x}-\dfrac{4y}{\sqrt{y+1}+1}=x^2-14y-8 & (2) \end{cases}$

Nhận xét: $y=-1$ và $y=0$ không thỏa mãn, do đó

$(1) \Leftrightarrow \dfrac{x-y}{y+1}+\sqrt{\dfrac{x-y}{y+1}}-2=0 \Leftrightarrow \sqrt{\dfrac{x-y}{y+1}}=1 \Leftrightarrow x=2y+1$. Thế vào (2) ta được phương trình

$$4\sqrt{y+1}-3\sqrt{7-2y}+4y^2-10y-11=0$$

$$\Leftrightarrow 4\left(\sqrt{y+1}-2\right)-3\left(\sqrt{7-2y}-1\right)+4y^2-10y-6=0$$

$$\Leftrightarrow (y-3)\left(\frac{2}{\sqrt{y+1}+2}+\frac{3}{\sqrt{7-2y}+1}+2y+1\right)=0. \ (3)$$

Với $-1<y \le \dfrac{7}{2}$ thì $\dfrac{2}{\sqrt{y+1}+2} \ge \dfrac{2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}; \dfrac{3}{\sqrt{7-2y}+1}>\dfrac{3}{4}; 2y+1>-1$

$$\Rightarrow \frac{2}{\sqrt{y+1}+2}+\frac{3}{\sqrt{7-2y}+1}+2y+1>0.$$

Do đó $(3) \Leftrightarrow y-3=0 \Leftrightarrow y=3$.

$\Rightarrow x=7$ thỏa mãn điều kiện. Vậy nghiệm của hệ là $(x;y)=(7;3)$.

Câu 11.

Điều kiện xác định : $\begin{cases} x \ne 0; x \ne 2 \\ y \ne 0; y \ne 2 \end{cases}$

Từ phương trình (1) ta có: $xy-x-y=-5 \Leftrightarrow (x-1)(y-1)=-4$

Đặt $\begin{cases} x-1=a \\ y-1=b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2-2x=a^2-1 \\ y^2-2y=b^2-1 \\ ab=-4 \end{cases}$

$$\frac{1}{x^2-2x}+\frac{1}{y^2-2y}=\frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{a^2-1}+\frac{1}{b^2-1}=\frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2+b^2-2}{a^2b^2-a^2-b^2+1}=\frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{a^2+b^2-2}{17-a^2-b^2}=\frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow 3\left(a^2+b^2\right)-6=34-2\left(a^2+b^2\right)$$

$$\Leftrightarrow a^2+b^2=8 \Leftrightarrow (a+b)^2-2ab=8$$

$$\Leftrightarrow a+b=8+2ab=8+2(-4)=0$$

$$\Leftrightarrow b=-a \Leftrightarrow 2a^2=8 \Leftrightarrow a=\pm 2$$

$\text{TH1}: \begin{cases} a=-2 \\ b=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=3 \end{cases}$

$\text{TH2}: \begin{cases} a=2 \\ b=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-1 \end{cases}$

Vậy nghiệm của hệ đã cho là $(-1;3)$ và $(3;-1)$

Câu 12.

Đặt S = x + y ≠ 0; P = xy ≠ 0, ta có: $(2) \Leftrightarrow \begin{cases} S-\dfrac{4S}{P}=3 \\ S+\dfrac{6}{S}=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S^2+5S+6=0 \\ P=\dfrac{4S}{S-3} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} S=-2; P=\dfrac{8}{5} \\ S=-3; P=2 \end{array}\right.$

Khi đó: $S=2;\ P=\dfrac{8}{5}$ khi và chỉ khi x, y là nghiệm của phương trình: $t^2+2t+\dfrac{8}{5}=0$ vô nghiệm ($\Delta'=\dfrac{-3}{5}\le 0$)

S = – 3; P = 2 khi và chỉ khi x, y là nghiệm của phương trinh:

$t^2+3t+2=0 \Leftrightarrow t_1=-1;\ t_2=-2$

Vai trò của x, y trong hệ (2) như nhau, do vậy hệ (2) có hai nghiệm: (x = – 1; y = – 2), (x = – 2; y = – 1)

Câu 13.

Điều kiện xác định : $\begin{cases} x^2-1\ge 0 \\ y^2-1\ge 0 \\ xy+2\ge 0 \\ x,y\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2\ge 1 \\ y^2\ge 1 \\ xy\ge -2 \end{cases}$

Hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=1 \\ \sqrt{x^2-1}+\sqrt{y^2-1}=\sqrt{xy+2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=x^2y^2 (1) \\ x^2+y^2-2+2\sqrt{\left(x^2-1\right)\left(y^2-1\right)}=xy+2 (2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow (2) \Leftrightarrow x^2y^2-2+2\sqrt{x^2y^2-x^2-y^2+1}=xy+2$$

$$\Leftrightarrow x^2y^2=xy+2 \Leftrightarrow (xy)^2-xy-2=0$$

$$\Leftrightarrow (xy-2)(xy+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} xy=2 \quad (tm) \\ xy=-1 \quad (tm) \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} xy=-1 \\ x^2+y^2=1 \Rightarrow (x+y)^2=-1 \quad (ktm) \end{cases} \\ \begin{cases} xy=2 \\ x^2+y^2=4 \Rightarrow (x+y)^2=8 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} xy=2 \\ x+y=-2\sqrt{2} \end{cases} \\ \begin{cases} xy=2 \\ x+y=2\sqrt{2} \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=y=-\sqrt{2} \\ x=y=\sqrt{2} \end{array}\right.$$

Vậy hệ đã cho có 2 nghiệm $(x;y)$ thỏa mãn $\left(\sqrt{2};\sqrt{2}\right);\left(-\sqrt{2};-\sqrt{2}\right)$

Câu 14.

Điều kiện: $x \neq -1; y \neq -1$

$$\begin{cases} x^2+y^2+x+y=(x+1)(y+1) \\ \left(\dfrac{x}{y+1}\right)^2+\left(\dfrac{y}{x+1}\right)^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x+1)+y(y+1)=(x+1)(y+1) \\ \left(\dfrac{x}{y+1}\right)^2+\left(\dfrac{y}{x+1}\right)^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{y+1}+\dfrac{y}{x+1}=1 \\ \left(\dfrac{x}{y+1}\right)^2+\left(\dfrac{y}{x+1}\right)^2=1 \end{cases}$$

Đặt $a=\dfrac{x}{y+1}; b=\dfrac{y}{x+1}$. Khi đó hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} a+b=1 \\ a^2+b^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=1-a \\ 2a^2-2a+1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=1-a \\ 2a(a-1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=1-a \\ \left[\begin{array}{l} a=0 \\ a=1 \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=0 \\ b=1 \end{cases} \\ \begin{cases} a=1 \\ b=0 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \dfrac{x}{y+1}=0 \\ \dfrac{y}{x+1}=1 \end{cases} \\ \begin{cases} \dfrac{x}{y+1}=1 \\ \dfrac{y}{x+1}=0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases} \end{array}\right. \quad (tm)$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x;y)=(1;0)$ hoặc $(x;y)=(0;1)$

Câu 15.

Thay giá trị $m=1$ vào hệ phương trình ta có:

$$(I)\Leftrightarrow\begin{cases}x+2y=4\\2x-3y=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}$$

Vậy với $m=1$ thì hệ phương trình có nghiệm $(x;y)=(2;1)$

a) Ta có $\frac{1}{2}\neq\frac{2}{-3}\Rightarrow(I)$ luôn có nghiệm (x;y) với mọi m

$$(I)\Leftrightarrow\begin{cases}2x+4y=2m+6\\2x-3y=m\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=m+3-2y\\7y=m+6\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=m+3-2y\\y=\dfrac{m+6}{7}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{5m+9}{7}\\y=\dfrac{m+6}{7}\end{cases}$$

Theo đề bài ta có: $P=98\left(x^2+y^2\right)+4m$

$$\Rightarrow P=98.\left(\frac{(5m+9)^2}{49}+\frac{(m+6)^2}{49}\right)+4m$$

$=2(26m^2+102m+117)+4m$

$=52m^2+208m+234$

$=52\left(m^2+4m+4\right)+234-52.2$

$=52(m+2)^2+26\geq 26$

$\Rightarrow MinP=26$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow m+2=0\Leftrightarrow m=-2$

Vậy $m=-2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán

Câu 16.

Đặt $\begin{cases}u=x+y\\v=xy\end{cases}\left(DK:u^2\geq 4v\right)$

$$\Rightarrow\begin{cases}u^2-2v=5\\u+v=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}25-10v+v^2-2v=5\\u=5-v\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}v^2-12v+20=0\\u=5-v\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}v=10\\v=2\end{array}\right.\\u=5-v\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}u=3\\v=2\end{cases}(tm)\\\begin{cases}u=-5\\v=10\end{cases}(ktm)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1;y=2\\x=2;y=1\end{array}\right.$$

Vậy tập nghiệm của hệ đã cho là $(1;2);(2;1)$

Câu 17.

$$\begin{cases} x^2+4y^2=2 \\ (x-2y)(1-2xy)=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4xy+4y^2=2(1-2xy) \\ (x-2y)(1-2xy)=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2y)^2=2.(1-2xy) \\ (x-2y).(1-2xy)=4 \end{cases}$$

Đặt $\begin{cases} a=x-2y \\ b=1-2xy \end{cases}$. Khi đó ta có hệ phương trình tương đương:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2=2b \\ ab=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=\dfrac{a^2}{2} \\ a.\dfrac{a^2}{2}=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-2y=2 \\ 1-2xy=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2+2y \\ 1-2(2+2y)y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2+2y \\ 4y^2+4y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=\left(1;\dfrac{-1}{2}\right)$

Câu 18.

$$x^3-y^3+3x^2+6x-3y+4=0 \Leftrightarrow [(x+1)^3-y^3]+3(x+1)-3y=0$$

$$(x+1-y)[(x+1)^2+(x+1)y+y^2+3]=0 \Leftrightarrow y=x+1$$

Với $y=x+1$ thế vào $x^2+y^2-3x=1$ ta có $2x^2-x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$

Vậy hệ có hai nghiệm là $(0;1);\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right)$

Câu 19.

$$\begin{cases} x^2+y^2+x+y=18 \\ xy(x+1)(y+1)=72 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2-2xy+(x+y)=18 \\ xy(xy+x+y+1)=72 \end{cases}$$

Đặt $x+y=a, xy=b$ ta có hệ đã cho trở thành:

$$\begin{cases} a^2+a-2b=18 \\ b(a+b+1)=72 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=\dfrac{a^2+a-18}{2} (1) \\ \dfrac{a^2+a-18}{2}\left(a+\dfrac{a^2+a-18}{2}+1\right)=72 (2) \end{cases}$$

$$(2) \Leftrightarrow \left(a^2+a-18\right)\left(a^2+3a-16\right)=288$$

$$\Leftrightarrow \left[\left(a^2+2a-17\right)-\left(a+1\right)\right].\left[\left(a^2+2a-17\right)+\left(a+1\right)\right]=288$$

$$\Leftrightarrow \left(a^2+2a-17\right)^2-\left(a+1\right)^2=288$$

$$\Leftrightarrow a^4+4a^3+4a^2-68a-34a^2+289-a^2-2a-1=288$$

$$\Leftrightarrow a^4+4a^3-31a^2-70a+288=288$$

$$\Leftrightarrow a\left(a^3+4a^2-31a-70\right)=0$$

$$\Leftrightarrow a\left(a^3-5a^2+9a^2-45a+14a-70\right)=0$$

$$\Leftrightarrow a\left(a-5\right)\left(a^2+9a+14\right)=0$$

$$\Leftrightarrow a\left(a-5\right)\left(a+2\right)\left(a+7\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=0 \Rightarrow b=-9 \\ a=5 \Rightarrow b=6 \\ a=-2 \Rightarrow b=-8 \\ a=-7 \Rightarrow b=12 \end{array}\right.$$

+) Với $\begin{cases} a=0 \\ b=-9 \end{cases}$ ta có hai số x, y là nghiệm của phương trình

$$X^2-0X-9=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} X=3 \\ X=-3 \end{array}\right.$$

Vậy ta được hai nghiệm của hệ phương trình $\left(x;y\right)=\left\{\left(3;-3\right);\left(-3;3\right)\right\}$

+)Với $\begin{cases} a=5 \\ b=6 \end{cases}$ ta có hai số x, y là nghiệm của phương trình $X^2-5X+6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} X=2 \\ X=3 \end{array}\right.$

Vậy ta được hai nghiệm của hệ phương trình $\left\{\left(3;2\right);\left(2;3\right)\right\}$

+)Với $\begin{cases} a=-2 \\ b=-8 \end{cases}$ ta có hai số x, y là nghiệm của phương trình

$$X^2+2X-8=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} X=2 \\ X=-4 \end{array}\right.$$

Vậy ta được hai nghiệm của hệ phương trình $\left\{\left(-4;2\right);\left(2;-4\right)\right\}$

+)Với $\begin{cases} a=-7 \\ b=12 \end{cases}$ ta có hai số x,y là nghiệm của phương trình

$$X^2+7X+12=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} X=-3 \\ X=4 \end{array}\right.$$

Vậy ta được hai nghiệm của hệ phương trình $(x;y)=\{(-3;-4);(-4;-3)\}$

Vậy ta hai nghiệm của hệ phương trình

$(x;y)=\{(-3;-4);(-4;-3);(-4;2);(2;-4);(3;2);(2;3);(3;-3);(-3;3)\}$

Câu 20.

Xét $x=0$ không là nghiệm của hệ đã cho

Xét $x\neq 0$ ta có phương trình (1) tương đương với :

$$x^2-xy=6 \Leftrightarrow x-y=\frac{6}{x} \Rightarrow x-\frac{6}{x}=y$$

Thay vào phương trình (2) ta được:

$$3x^2+2x\left(x-\frac{6}{x}\right)-3\left(x-\frac{6}{x}\right)^2=30$$

$$\Leftrightarrow 3x^2+2x^2-12-3x^2+36-\frac{108}{x^4}-30=0$$

$$\Leftrightarrow 2x^4-6x^2-108=0$$

$$\Leftrightarrow (x^2-9)(x^2+6)=0$$

$$\Leftrightarrow x^2-9=0 \quad (\text{Vì} \quad x^2+6>0)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \Rightarrow y=1 \\ x=-3 \Rightarrow y=-1 \end{array}\right.$$

Vậy hệ đã cho có các nghiệm là $(3;1);(-3;-1)$

Câu 21.

$x^2-x-y^2+y=0 \Leftrightarrow (x-y)(x+y-1)=0 \Leftrightarrow x=y$ hoặc $x+y-1=0$

+ Với $x=y$ thay vào pt thứ hai ta được: $x^2+2x-3=0 \Leftrightarrow x=1$ hoặc $x=-3$.

Suy ra được: $(x;y)=(1;1)$ hoặc $(x;y)=(-3;-3)$

+ Với $x+y-1=0 \Leftrightarrow y=1-x$ thay vào pt thứ hai ta được:

$x^2+2x-3=0 \Leftrightarrow x=1$ hoặc $x=-3$.

Suy ra được: $(x;y)=(1;0)$ hoặc $(x;y)=(-3;4)$

Vậy hệ phương trình đã cho có 4 nghiệm: $(1;1),(-3;-3),(1;0),(-3;4)$.

Câu 22.

Ta có hệ phương trình $\begin{cases} 3x^2+xy-4x+2y=2 \\ x(x+1)+y(y+1)=4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2+xy-4x+2y=2 \\ x^2+x+y^2+y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x+y^2+y=4 & (1) \\ 2x^2-y^2+xy-5x+y=-2 & (*) \end{cases}$

$\Rightarrow (*) \Leftrightarrow 2x^2+x(y-5)-(y^2-y-2)=0 \quad (**)$

Coi đây là phương trình bậc hai ẩn x và y là tham số:

$\Delta=(y-5)^2+4.2(y^2-y-2)=9y^2-18y+9=9(y-1)^2\geq 0\forall y$

Phương trình (**) có hai nghiệm: $\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{5-y+3(y+1)}{4}=\dfrac{2+2y}{4}=\dfrac{y+1}{2} \\ x=\dfrac{5-y-3(y-1)}{4}=\dfrac{8-4y}{4}=2-y \end{array}\right.$

$+)x=\dfrac{y+1}{2}\Rightarrow(1)\Leftrightarrow\left(\dfrac{y+1}{2}\right)^2+\dfrac{y+1}{2}+y^2+y=4$

$\Leftrightarrow y^2+2y+1+2y+2+4y^2+4y-16=0$

$\Leftrightarrow 5y^2+8y-13=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1\Rightarrow x=1 \\ y=\dfrac{-13}{5}\Rightarrow x=\dfrac{-4}{5} \end{array}\right.$

$+)\quad x=2-y\Rightarrow(1)\Leftrightarrow(2-y)^2+2-y+y^2+y=4$

$\Leftrightarrow 4-4y+y^2+2-y+y^2+y-4=0$

$\Leftrightarrow 2y^2-4y+2=0$

$\Leftrightarrow y=1$

$\Rightarrow x=2-1=1$

Vậy các nghiệm của hệ đã cho là $(1;1);\left(\dfrac{-13}{5};\dfrac{-4}{5}\right)$

Câu 23.

$\begin{cases} (x+3)(x-1)=(y-2)(x+3)(1) \\ (x-1)\sqrt{y^2-5y+8}=(y-2)^2 \qquad (2) \end{cases}$

$(1)\Leftrightarrow(x+3)[(x-1)-(y-2)]=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x+3=0 \\ x-1=y-2 \end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=y-1 \end{array}\right.$

+) Với $x=-3$ thay vào phương trình (2) ta có: $-4\sqrt{y^2-5y+8}=(y-2)^2$

(vô nghiệm vì $VT<0;VP\geq 0$)

+) Với $x=y-1$ thay vào phương trình (2) ta có:

$$\left(y-2\right)\sqrt{y^2-5y+8}=\left(y-2\right)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} y-2=0 \Leftrightarrow y=2 & (3) \\ \sqrt{y^2-5y+8}=y-2 & (4) \end{array}\right.$$

$$(3) \Rightarrow x=y-1=2-1=1 \Rightarrow \left(x;y\right)=\left(1;2\right)$$

$$\left(4\right) \Leftrightarrow \begin{cases} y-2 \geq 0 \\ y^2-5y+8=y^2-4y+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 2 \\ y=4 \quad (tm) \end{cases} \Rightarrow x=4-1=3 \Rightarrow \left(x;y\right)=\left(3;4\right)$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là : $\left(x;y\right)=\left\{\left(1;2\right);\left(3;4\right)\right\}$

Câu 24.

Ta có:

$$\begin{cases} x^2-2x+2y-3=0 \\ 16x^2-8xy+y^4-2y+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x+1=4-2y \\ 16x^2-8xy^2+y^4=4-2y \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^2-2x+1=16x^2-8xy^2+y^4$$

$$\Leftrightarrow \left(x-1\right)^2=\left(4x-y^2\right)^2$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=4x-y^2 \\ x-1=y^2-4x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{y^2-1}{3} \\ x=\dfrac{y^2+1}{5} \end{array}\right.$$

TH1: $x=\dfrac{y^2-1}{3}$

$$\Rightarrow \frac{y^4-2y^2+1}{9}-\frac{2\left(y^2-1\right)}{3}+2y-3=0$$

$$\Leftrightarrow y^4-2y^2+1-6y^2+6+18y-27=0$$

$$\Leftrightarrow y^4-8y^2+18y-20=0$$

$$\Leftrightarrow \left(y-2\right)\left(y^3+2y^2-4y+10\right)=0$$

$$\Rightarrow y=2 \Rightarrow x=1$$

TH2: $x=\dfrac{y^2+1}{5}$

$$\Rightarrow \frac{y^4+2y^2+1}{25}-\frac{2(y^2+1)}{5}+2y-3=0$$

$$\Leftrightarrow y^4+2y^2+1-10y^2-10+50y-75=0$$

$$\Leftrightarrow y^4-8y^2+50y-84=0$$

$$\Leftrightarrow \left(y-2\right)\left(y^3+2y^2-4y+42\right)=0$$

$$\Rightarrow y=2 \Rightarrow x=1$$

Vậy nghiệm nguyên duy nhất của hệ đã cho là $\left(1;2\right)$

Câu 25.

Ta có phương trình (2) tương đương với:

$x^3-6x^2+12x-8+y^3=1 \Leftrightarrow (x-2)^3+y^3=1$

Hệ đã cho trở thành:

$$\begin{cases} x^2+y^2+3=4x \\ x^3+12x+y^3=6x^2+9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2+y^2=1 \\ (x-2)^3+y^3=1 \end{cases}$$

Đặt $x-2=z$ ta có: $\begin{cases} y^2+z^2=1 \Rightarrow (y+z)^2-2yz=1 \\ y^3+z^3=1 \Rightarrow (y+z)(y^2-yz+z^2)=(y+z)(1-yz)=1 \end{cases}$

Đặt $\begin{cases} a=y+z \\ b=yz \end{cases}$ ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} a^2-2b=1 \\ a(1-b)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=\dfrac{a^2-1}{2} \\ a\left(1-\dfrac{a^2-1}{2}\right)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=\dfrac{a^2-1}{2} \\ 2a-a^2+1=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=\dfrac{a^2-1}{2} \\ a^2-2a+1=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b=\dfrac{a^2-1}{2} \\ a=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y+z=1 \\ yz=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y,z \text{ là hai nghiệm của phương trình}: x^2-x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=0 \\ z=1 \Rightarrow x=3 \end{cases} \\ \begin{cases} y=1 \\ z=0 \Rightarrow x=2 \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy hệ phương trình có tập nghiệm $(3;0);(2;1)$

Câu 26.

Ta có: $(1) \Leftrightarrow \left(x+\sqrt{x^2+2x+2}+1\right)\left(\sqrt{y^2+1}+y\right)\left(\sqrt{y^2+1}-y\right)=\left(\sqrt{y^2+1}-y\right)$

(Do $\sqrt{y^2+1}-y \neq 0$ với mọi y)

$$\Leftrightarrow x+1+\sqrt{(x+1)^2+1}=-y+\sqrt{y^2+1}$$

$$\Leftrightarrow x+y+1+\frac{(x+1)^2-y^2}{\sqrt{(x+1)^2+1}+\sqrt{y^2+1}}=0$$

$$\Leftrightarrow (x+y+1)\left(1+\frac{x+1-y}{\sqrt{(x+1)^2+1}+\sqrt{y^2+1}}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+y+1=0 \\ \sqrt{(x+1)^2+1}+(x+1)+\sqrt{y^2+1}-y=0 \ (3) \end{array}\right.$$

Do $\sqrt{(x+1)^2+1}>|x+1|\geq x+1,\ \forall x$ và $\sqrt{y^2+1}>|y|\geq -y,\ \forall y$ nên (3) vô nghiệm.

Thay y = - x - 1 vào (2) tìm được nghiệm $\left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-\dfrac{4}{3} \end{array}\right.$

Với x = 1 $\Rightarrow$ y = -2; x = $-\dfrac{4}{3}\Rightarrow y=\dfrac{1}{3}$. Vậy hệ có nghiệm (1;-2), $\left(-\dfrac{4}{3};\dfrac{1}{3}\right)$.

Câu 27.

Ta có: $2x^2+xy-y^2-5x+y+2=0\Leftrightarrow y^2-(x+1)y-2x^2+5x-2=0$

$$\Leftrightarrow\left[y-\frac{x+1}{2}\right]^2-\left[\frac{(x+1)^2}{4}+2x^2-5x+2\right]=0$$

$$\Leftrightarrow\left[y-\frac{x+1}{2}\right]^2-\frac{9x^2-18x+9}{4}=0\Leftrightarrow\left[y-\frac{x+1}{2}\right]^2-\left(\frac{3x-3}{2}\right)^2=0$$

$$\Leftrightarrow\left(y-\frac{x+1}{2}-\frac{3x-3}{2}\right)\left(y-\frac{x+1}{2}+\frac{3x-3}{2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow(y-2x+1)(y+x-2)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} y-2x+1=0 \\ y+x-2=0 \end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} y=2x-1 \\ y=2-x \end{array}\right..$$

✍ Trường hợp $y=2x-1$, thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$x^2+(2x-1)^2+x+2x-1-4=0\Leftrightarrow 5x^2-x-4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-\dfrac{4}{5} \end{array}\right..$$

Trường hợp này hệ đã cho có hai nghiệm: $(x;y)=(1;1),(x;y)=\left(-\dfrac{4}{5};-\dfrac{13}{5}\right)$.

✍ Trường hợp $y=2-x$, thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$x^2+(2-x)^2+x+2-x-4=0\Leftrightarrow 2x^2-4x+2=0\Leftrightarrow x=1.$$

Trường hợp này hệ đã cho có một nghiệm: $(x;y)=(1;1)$.

Vậy hệ đã cho có hai nghiệm: $(x;y)=(1;1),(x;y)=\left(-\dfrac{4}{5};-\dfrac{13}{5}\right)$.

Câu 28.

Điều kiện $2x-y-9\geq 0$, ta có $\begin{cases}\sqrt{2x-y-9}-36+x^2=0 & (1)\\ y^2-xy+9=0 & (2)\end{cases}$

Phương trình (2) $\Leftrightarrow\ (2y-x)^2=x^2-36$

Suy ra (1) $\Leftrightarrow \sqrt{2x-y-9}+\left(2y-x\right)^2=0 \Rightarrow \begin{cases} 2x-y-9=0 \\ 2y-x=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=6 \\ y=3 \end{cases}$ thỏa điều kiện. Vậy hệ phương trình có nghiệm $\begin{cases} x=6 \\ y=3 \end{cases}$.

Câu 29.

Lấy phương trình (2) trừ đi phương trình (1) ta được:

$$y^5-y^3=x^3+y^2-1$$
$$\Leftrightarrow y^3.\left(y^2-1\right)-\left(y^2-1\right)=x^3$$
$$\Leftrightarrow \left(y^2-1\right).\left(y^3-1\right)=x^3$$
$$\Leftrightarrow \left(1-y^2\right)\left(1-y^3\right)=x^3 (*)$$

Mà từ (1) $\Rightarrow x^2=1-y^3$

Kết hợp với (1) và (*) ta được: $\begin{cases} x^2=1-y^3 \\ x=1-y^2 \end{cases}$

$$\left(1\right)\Leftrightarrow \left(1-y^2\right)^2=1-y^3$$
$$\Leftrightarrow \left(1-y\right)^2.\left(1+y\right)^2=\left(1-y\right)\left(1+y+y^2\right)$$
$$\Leftrightarrow \left(1-y\right).\left[\left(1+y\right)^2\left(1-y\right)-1-y-y^2\right]=0$$
$$\Leftrightarrow \left(1-y\right).\left(1+y-y^2-y^3-1-y-y^2\right)=0$$
$$\Leftrightarrow \left(1-y\right).\left(-2y^2-y^3\right)=0$$
$$\Leftrightarrow \left(1-y\right).y^2.\left(-2-y\right)=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=0 \\ y=-2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases} \\ \begin{cases} y=-2 \\ x=-3 \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy hệ phương trình có tập nghiệm $S=\left\{\left(-2;-3\right);\left(0;1\right);\left(1;0\right)\right\}$

Câu 30.

+) Điều kiện $x\ge \dfrac{6}{5}, y\le \dfrac{16}{3}$

+) $x^2-xy-x+3y-6=0\Leftrightarrow \left(x-3\right)\left(x-y+2\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ y=x+2 \end{array}\right.$

+) Với $x=3$ thay vào phương trình $\sqrt{5x-6}+\sqrt{16-3y}=2x^2-2x+y-4$, ta được

$\sqrt{16-3y}=y+5 \Leftrightarrow \begin{cases} y^2+13y+9=0 \\ y\ge -5 \end{cases} \Leftrightarrow y=\dfrac{-13+\sqrt{133}}{2}$.

+) $y=x+2$ thay vào phương trình $\sqrt{5x-6}+\sqrt{16-3y}=2x^2-2x+y-4$, ta được

$\sqrt{5x-6}+\sqrt{10-3x}=2x^2-x-2 \Leftrightarrow \left(\sqrt{5x-6}-2\right)+\left(\sqrt{10-3x}-2\right)=2x^2-x-6$

$\Leftrightarrow \dfrac{5(x-2)}{\sqrt{5x-6}+2}-\dfrac{3(x-2)}{\sqrt{10-3x}+2}-(x-2)(2x+3)=0$

$\Leftrightarrow (x-2)\left(\dfrac{5}{\sqrt{5x-6}+2}-\dfrac{3}{\sqrt{10-3x}+2}-2x-3\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ \dfrac{5}{\sqrt{5x-6}+2}-\dfrac{3}{\sqrt{10-3x}+2}-2x-3=0 \end{array}\right.$

+) Với $x=2 \Rightarrow y=4$ (thỏa mãn)

+) Vì $\dfrac{6}{5}\le x\le \dfrac{10}{3} \Rightarrow \sqrt{5x-6}+2\ge 2 \Rightarrow \dfrac{5}{\sqrt{5x-6}+2}\le \dfrac{5}{2} \Rightarrow \dfrac{5}{\sqrt{5x-6}+2}-3<0$

$\dfrac{6}{5}\le x\le \dfrac{10}{3} \Rightarrow -\dfrac{3}{\sqrt{10-3x}+2}-2x<0$

Do đó phương trình $\dfrac{5}{\sqrt{5x-6}+2}-\dfrac{3}{\sqrt{10-3x}+2}-2x-3=0$ vô nghiệm

Vậy hệ phương trình có tập nghiệm là $\left\{(2;4);\left(3;\dfrac{-13+\sqrt{133}}{2}\right)\right\}$

Câu 31.

$$\begin{cases} 8x^3+\dfrac{27}{y^3}=18 \\ \dfrac{4x^2}{y}+\dfrac{6x}{y^2}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2x)^3+\left(\dfrac{3}{y}\right)^3=18 \\ 2x.\dfrac{3}{y}\left(2x+\dfrac{3}{y}\right)=3 \end{cases}.$$

Đặt $a=2x$; $b=\dfrac{3}{y}$. Ta có $\begin{cases} a^3+b^3=18 \\ ab(a+b)=3 \end{cases} \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=3 \\ ab=1 \end{cases}$

Giải tìm được $\left(a=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2};b=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$ hoặc $\left(a=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2};b=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$

Tìm được nghiệm $(x;y)$ của hệ là $\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{4};\dfrac{6}{3-\sqrt{5}}\right);\left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{4};\dfrac{6}{3+\sqrt{5}}\right)$

Câu 32.

ĐKXĐ: $x+y\ge 0$. Từ phương trình thứ nhất ta được:

$$x^2+2y=xy+2x$$
$$\Leftrightarrow x(x-2)+y(2-x)=0$$
$$\Leftrightarrow (x-2)(x-y)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=y \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow x=2 \Rightarrow \sqrt{2+y}=2y-2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2+y=(2y-2)^2 \\ y\ge 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y^2-9y+2=0 \\ y\ge 1 \end{cases} \Leftrightarrow y=2$$

$$x=y \Rightarrow \sqrt{2y}=y^2-2 \Leftrightarrow \begin{cases} y^2\ge 2 \\ 2y=y^4-4y^2+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2\ge 2 \\ (y-2)(y^3+2y^2-2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=2$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất $(2;2)$

Câu 33.

Điều kiện: $\begin{cases} y(x-y-1)+x\ge 0 \\ 8-x\ge 0 \\ y+1\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 8 \\ y\ge -1 \\ y(x-y-1)+x\ge 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} x-3y-2+\sqrt{y(x-y-1)+x}=0 & (1) \\ 3\sqrt{8-x}-\dfrac{4y}{\sqrt{y+1}+1}=x^2-14y-8 & (2) \end{cases}$$

Ta có: $(1) \Leftrightarrow \sqrt{y(x-y-1)+x}=-(x-3y-2)$

$$\Leftrightarrow \sqrt{xy-y^2-y+x}=-(x-3y-2)$$
$$\Leftrightarrow -\sqrt{(x-y)(y+1)}=x-3y-2 \qquad (*)$$

Đặt $(*) \Leftrightarrow t(x-y)+k(y+1)=x-3y-2$

$$\Leftrightarrow tx+(k-t)y+k=x-3y-2$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ k-t=-3 \\ k=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ k=-2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (*) \Leftrightarrow \sqrt{(x-y)(y+1)}=(x-y)-2(y+1)$$
$$\Leftrightarrow (x-y)-2(y+1)+\sqrt{(x-y)(y+1)}=0 \qquad (**)$$

+)TH1: $y=-1 \Rightarrow (**) \Leftrightarrow x=-1$

Khi đó $(2) \Leftrightarrow 3\sqrt{8+1}-\dfrac{4(-1)}{\sqrt{(-1)+1}+1}=(-1)^2-14.(-1)-8$

$\Leftrightarrow 3.3+4=7$ (vô lý)

+)TH2: Chia cả 2 vế của phương trình (**) cho $y+1$ ta được:

$$(**)\Leftrightarrow\left(\frac{x-y}{y+1}\right)^2-2+\sqrt{\frac{x-y}{y+1}}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}\sqrt{\frac{x-y}{y+1}}=1 & (tm)\\ \sqrt{\frac{x-y}{y+1}}=-2 & (ktm)\end{array}\right.\Leftrightarrow x-y=y+1\Leftrightarrow y=\frac{x-1}{2}$$

Khi đó ta có:

$$(2)\Leftrightarrow 3\sqrt{8-x}-\frac{4.\frac{x-1}{2}}{\sqrt{\frac{x-1}{2}+1}+1}=x^2-14.\frac{x-1}{2}-8$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{8-x}-\frac{2(x-1)}{\sqrt{\frac{x+1}{2}}+1}-x^2+7x+1=0$$

Đặt $f(x)=3\sqrt{8-x}-\frac{2(x-1)}{\sqrt{\frac{x+1}{2}}+1}-x^2+7x+1$

Ta có: $f(-1)=6$; $f(8)=-11+\sqrt{2}\Rightarrow f(-1).f(8)=-66+36\sqrt{2}<0$

$\Rightarrow (3)$ có ít nhất một nghiệm trong đoạn $[-1;8]$

Lại có: $f(7)=0\Rightarrow x=7$ là nghiệm của (3) $\Rightarrow y=\frac{7-1}{2}=3$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x;y)=(7;3)$

Câu 34.

Hệ viết lại thành $\begin{cases}(x-2y)+xy=2\\ (x-2y)^2+4xy=4\end{cases}$

Đặt $\begin{cases}a=x-2y\\ b=xy\end{cases}$ khi đó ta có hệ $\begin{cases}a+b=2\\ a^2+4b=4\end{cases}$

Giải hệ phương trình ta được a = 2 và b = 0.

Với $\begin{cases}a=2\\ b=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-2y=2\\ xy=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=0\\ y=-1\end{cases}\vee\begin{cases}x=2\\ y=0\end{cases}$

Câu 35.

ĐK: $x\neq 0; y\neq 0$.

Ta có $\begin{cases} xy-\dfrac{x}{y}=\dfrac{16}{3} \\ xy-\dfrac{y}{x}=\dfrac{9}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy-\dfrac{x}{y}=\dfrac{16}{3} & (1) \\ \dfrac{y}{x}-\dfrac{x}{y}=\dfrac{5}{6} & (2) \end{cases}$

Giải (2) $\Leftrightarrow 6y^2-6x^2=5xy \Leftrightarrow (2x+3y)(3x-2y)=0$.

* Nếu $2x+3y=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{-3y}{2}$.

Thay vào (1) ta được $y.\dfrac{-3y}{2}+\dfrac{3}{2}=\dfrac{16}{3}$.

$\Leftrightarrow \dfrac{-3y^2}{2}=\dfrac{23}{6}$ (phương trình vô nghiệm).

* Nếu $3x-2y=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{2y}{3}$.

Thay vào (1) ta được $y^2=9 \Leftrightarrow y=\pm 3$.

+ Với $y=3 \Rightarrow x=2$ (TM).

+ Với $y=-3 \Rightarrow x=-2$ (TM).

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm: $(x;y)=(2;3);(x;y)=(-2;-3)$.

Câu 36.

Điều kiện xác định: $x\ge -2$

Phương trình (2) tương đương với:

$$\Leftrightarrow (x+2)^3+(x+2)=y^3+y$$
$$\Leftrightarrow (x+2-y)\left[x^2+4x+4+y(x+2)+y^2+1\right]=0$$
$$\Leftrightarrow (x-y+2)\left[\left(\frac{x}{2}+y+1\right)^2+\frac{3}{4}(x+2)^2+1\right]=0$$
$$\Leftrightarrow x-y+2=0\left(\text{do}\left(\frac{x}{2}+y+1\right)^2+\frac{3}{4}(x+2)^2+1\ge 1\right)$$

$y=x+2$

Thay vào phương trình (1) ta được: $4\sqrt{y}+2\sqrt{3(y+2)}=3y^2-3y+10$

Áp dụng BĐT Co si ta có

$VT=2\sqrt{2y.2}+2\sqrt{3(y+2)}\le 2y+2+3+y+2=3y+7$

$VP=3y^2-3y+10-(3y+7)=3y^2-6y+3=3(y-1)^2\ge 0$

Như vậy phương trình có nghiệm duy nhất

$\Leftrightarrow y-1=0 \Leftrightarrow y=1 \Rightarrow x=y-2=1-2=-1\,(tm)$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x;y)=(-1;1)$

Câu 37.

$$\begin{cases}x^2+4y^2=2\\(x-2y)(1-2xy)=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2+4y^2=2\\(x-2y)(2-4xy)=8\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x^2+4y^2=2\\(x-2y)(x^2+4y^2-4xy)=8\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x^2+4y^2=2\\(x-2y)^3=8\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2+4y^2=2\\x=2+2y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}8y^2+8y+2=0\\x=2+2y\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}y=-\dfrac{1}{2}\\x=1\end{cases}$$

Câu 38.

Ta có:

$$\begin{cases}(x^2+1)(y^2+1)=10\\(x+y)(xy-1)=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2+y^2+(xy)^2+1=10\\(x+y)(xy-1)=3\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(x+y)^2-2xy+(xy)^2+1=10\\(x+y)(xy-1)=3\end{cases}$$

Đặt $\begin{cases}x+y=u\\xy-1=v\end{cases}$ thì hệ phương trình trên:

$$\Leftrightarrow \begin{cases}u^2+v^2=10\\uv=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(u+v)^2-2uv=10\\uv=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(u+v)^2=16\\uv=3\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}u+v=4\\u+v=-4\end{array}\right.\\uv=3\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}u+v=4\\uv=3\end{cases}\\ \begin{cases}u+v=-4\\uv=3\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}u=1,v=3\\u=3,v=1\\u=-1,v=-3\\u=-3,v=-1\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+y=1\\xy-1=3\end{cases}\\\begin{cases}x+y=3\\xy-1=1\end{cases}\\\begin{cases}x+y=-1\\xy-1=-3\end{cases}\\\begin{cases}x+y=-3\\xy-1=-1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+y=1\\xy=4\end{cases}\\\begin{cases}x+y=3\\xy=2\end{cases}\\\begin{cases}x+y=-1\\xy=-2\end{cases}\\\begin{cases}x+y=-3\\xy=0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}VN\\x=2;y=1\\x=1;y=2\\x=1;y=-2\\x=-2;y=1\\x=0;y=3\\x=-3;y=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=2;y=1\\x=1;y=2\\x=1;y=-2\\x=-2;y=1\\x=0;y=3\\x=-3;y=0\end{array}\right.$$

Vậy hệ phương trình có tập nghiệm $S=\{(1;2);(2;1);(1;-2);(-2;1);(0;3);(-3;0)\}$

Câu 39.

$$\begin{cases}2x^2-y^2-xy+x-y=0 & (1)\\\sqrt{2x+y-2}+2-2x=0 & (2)\end{cases}$$

Điều kiện: $2x+y\ge 2$

(1) $\Leftrightarrow (x-y)(2x+y)+(x-y)=0 \Leftrightarrow (x-y)(2x+y+1)=0$

$\Leftrightarrow x=y$ vì $2x+y+1>0$ do $2x+y\ge 2$.

Thế $y=x$ vào (2) ta được $\sqrt{3x-2}=2x-2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x\ge 1\\4x^2-11x+6=0\end{cases} \Leftrightarrow x=2.$$

Với $x=2 \Rightarrow y=2$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất $(x;y)=(2;2)$.

Câu 40.

$$\begin{cases}x^2+y^2=2y+1 & (1)\\xy=x+1 & (2)\end{cases}$$

Với $x=0$, phương trình (2) trở thành $0=1$ (vô lí).

Với $x\ne 0$, ta có:

$$\begin{cases}x^2+y^2=2y+1\\xy=x+1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2+y^2-2y+1=2\\y=1+\dfrac{1}{x}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2+(y-1)^2=2\\y-1=\dfrac{1}{x}\end{cases}$$

$$\Rightarrow x^2+\left(\frac{1}{x}\right)^2=2 \Leftrightarrow x^4+1=2x^2 \text{ (do } x\ne 0)$$

$$\Leftrightarrow (x^2-1)^2=0 \Leftrightarrow x^2-1=0 \Leftrightarrow x=\pm 1$$

Với $x=1 \Rightarrow y=1+\frac{1}{1} \Leftrightarrow y=2$

Với $x=-1 \Rightarrow y=1+\frac{1}{-1} \Leftrightarrow y=0$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x,y)\in\{(1;2),(-1;0)\}$.

Câu 41.

$$\begin{cases} 2x^2+xy=y^2-3y+2 & (1) \\ x^2-y^2=3 & (2) \end{cases}$$

Từ (1) ta có $y^2-y(x+3)+2-2x^2=0$. Ta xem là phương trình bậc hai theo biến *y* (*x* là tham số).

$\Delta=(x+3)^2-4(2-2x^2)=x^2+6x+9-8+8x^2=9x^2+6x+1=(3x+1)^2\ge 0$.

Suy ra phương trình có 2 nghiệm là $y=\frac{x+3+3x+1}{2}=2x+2$ và

$y=\frac{x+3-3x-1}{2}=-x+1$.

+ Nếu $y=2x+2$. Thay vào phương trình (2) ta được

$x^2-(2x+2)^2=3 \Leftrightarrow x^2-4x^2-8x-4=3 \Leftrightarrow -3x^2-8x-7=0$ (phương trình vô nghiệm).

+ Nếu $y=-x+1$. Thay vào phương trình (2) ta được

$x^2-(-x+1)^2=3 \Leftrightarrow 2x-1=3 \Leftrightarrow x=2 \Rightarrow y=-1$.

Vậy tập nghiệm $S=\{(2;-1)\}$.

Câu 42.

Điều kiện xác định của hệ phương trình là $x\in R; y\in R$. Biến đổi hệ phương trình đã cho ta được

$$\begin{cases} (x+y)^2=xy+3y-1 \\ x+y=\frac{x^2+y+1}{1+x^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2+1=xy+3y \\ x+y=\frac{y}{1+x^2}+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+xy+y^2-3y+1=0 \\ x+y-1=\frac{y}{1+x^2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+1+y(x+y-3)=0 \\ x+y-1=\frac{y}{1+x^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+\frac{y(x+y-3)}{x^2+1}=0 \\ x+y-1=\frac{y}{1+x^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+\frac{y(x+y-1-2)}{x^2+1}=0 \\ x+y-1=\frac{y}{1+x^2} \end{cases}$$

Đặt $a=x+y-1; b=\frac{y}{1+x^2}$, khi đó ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases}1+b(a-2)=0\\a=b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1+a(a-2)=0\\a=b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2-2a+1=0\\a=b\end{cases}\Leftrightarrow a=b=1$$

Đến đây ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}x+y-1=1\\\dfrac{y}{1+x^2}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=2-x\\y=x^2+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=2-x\\x^2+x-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2};y=\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}\\x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2};y=\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}\end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm là

$$(x;y)=\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2};\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right),\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2};\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)$$

Câu 43. $\begin{cases}x^3+4y=y^3+16x\\1+y^2=5(1+x^2)\end{cases}$ (I)

– Xét x = 0, hệ (I) trở thành $\begin{cases}4y=y^3\\y^2=4\end{cases}$ <=> $y=\pm2$

– Xét x ≠ 0, đặt $\dfrac{y}{x}=t$ <=> $y=xt$. Hệ (I) trở thành

$$\begin{cases}x^3+4xt=x^3t^3+16x\\1+x^2t^2=5(1+x^2)\end{cases}<=>\begin{cases}x^3(t^3-1)=4xt-16x\\x^2(t^2-5)=4\end{cases}<=>\begin{cases}x^3(t^3-1)=4x(t-4)(1)\\4=x^2(t^2-5)(2)\end{cases}$$

Nhân từng vế của (1) và (2), ta được phương trình hệ quả

$4x^3(t^3-1)=4x^3(t-4)(t^2-5)$

<=> $t^3-1=t^3-4t^2-5t+20$ (Do $x\neq0$)

<=> $4t^2+5t-21=0$

$$<=>\left[\begin{array}{l}t=-3\\t=\dfrac{7}{4}\end{array}\right.$$

+ Với t = – 3, thay vào (2) được $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm1$.

x = 1 thì y = –3, thử lại (1;–3) là một nghiệm của (I)

x = –1 thì y = 3, thử lại (–1;3) là một nghiệm của (I)

+ Với $t=\dfrac{7}{4}$, thay vào (2) được $x^2=-\dfrac{64}{31}$ (loại)

Vậy hệ (I) có các nghiệm (0;2), (0;–2), (1;–3), (–1;3).

Câu 44.

Điều kiện: $\begin{cases} x>0 \\ y>0 \\ x+3\ge 0 \\ x^2+3x\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ y>0 \end{cases}$

$$(1)\Leftrightarrow \frac{y-x}{y\sqrt{x}}=(x-y)(x+2y)\Leftrightarrow (x-y)\left(x+2y+\frac{1}{y\sqrt{x}}\right)=0\Leftrightarrow x=y$$

do $x+2y+\dfrac{1}{y\sqrt{x}}>0,\forall x,y>0$

Thay $y=x$ vào phương trình (2) ta được:

$$(\sqrt{x+3}-\sqrt{x})(1+\sqrt{x^2+3x})=3\Leftrightarrow 1+\sqrt{x^2+3x}=\frac{3}{\sqrt{x+3}-\sqrt{x}}$$

$$\Leftrightarrow 1+\sqrt{x^2+3x}=\sqrt{x+3}+\sqrt{x}\Leftrightarrow \sqrt{x+3}.\sqrt{x}-\sqrt{x+3}-\sqrt{x}+1=0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x}-1)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x+3}=1 \\ \sqrt{x}=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2(L) \\ x=1(tm) \end{array}\right. \Rightarrow x=y=1$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất (1;1)

Câu 45.

Điều kiện $\begin{cases} x\ge 1 \\ x^2-xy^2+1\ge 0 \end{cases}$, kết hợp với phương trình (1), ta có $y>0$.

Từ (1), ta có

$$4\sqrt{x+1}-xy\sqrt{y^2+4}=0\Leftrightarrow 4\sqrt{x+1}=xy\sqrt{y^2+4}$$

$$\Leftrightarrow 16(x+1)=x^2y^2(y^2+4)\Leftrightarrow (y^4+4y^2)x^2-16x-16=0.$$

Giải phương trình theo ẩn x ta được $x=\dfrac{4}{y^2}$ hoặc $x=\dfrac{-4}{y^2+4}<0$ (loại).

Với $x=\dfrac{4}{y^2}\Leftrightarrow xy^2=4$ thế vào phương trình (2), ta được : $\sqrt{x^2-3}+3\sqrt{x-1}=4$

Điều kiện $x\ge\sqrt{3}$, ta có

$$\sqrt{x^2-3}+3\sqrt{x-1}=4$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2-3}-1\right)+3\left(\sqrt{x-1}-1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-4}{\sqrt{x^2-3}+1}+\frac{3(x-2)}{\sqrt{x-1}+1}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left(\frac{x+2}{\sqrt{x^2-3}+1}+\frac{3}{\sqrt{x-1}+1}\right)=0$$

$\Leftrightarrow x-2=0$ (vì $\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2-3}+1}+\dfrac{3}{\sqrt{x-1}+1}>0$) $\Leftrightarrow x=2.$

Với $x=2$ ta có $\begin{cases} y^2=2 \\ y>0 \end{cases} \Leftrightarrow y=\sqrt{2}$. Kết hợp với điều kiện trên, hệ phương trình có nghiệm $\left(2;\sqrt{2}\right)$.

Câu 46.

Điều kiện : $x \neq 0; y \neq 0$.

Viết lại hệ : $\begin{cases} \left(x+\dfrac{1}{x}\right)+\left(y+\dfrac{1}{y}\right)=-4 \\ \left(x+\dfrac{1}{x}\right).\left(y+\dfrac{1}{y}\right)=4 \end{cases}$

Đặt : $u=x+\dfrac{1}{x}$; $v=y+\dfrac{1}{y}$, ta có hệ : $\begin{cases} u+v=-4 \\ uv=4 \end{cases}$

Giải ra được : $u=-2; v=-2$.

Giải ra được : x = –1 ; y = –1. Hệ đã cho có nghiệm : (x ; y) = (–1 ; –1).

Câu 47.

$$\begin{cases} x^2-2xy+x-2y+3=0 \quad (1) \\ y^2-x^2+2xy+2x-2=0 \quad (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-4xy+2x-4y+6=0 \\ y^2-x^2+2xy+2x-2=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^2+y^2-2xy+4x-4y+4=0$$

$$\Leftrightarrow (x-y+2)^2=0$$

$\Leftrightarrow y=x+2$. Thay vào pt (1) ta được

$$x^2+5x+1=0 \Leftrightarrow x=\frac{-5\pm\sqrt{21}}{2}$$

Vậy hệ có hai nghiệm $(x;y)$ là $\left(\dfrac{-5-\sqrt{21}}{2};\dfrac{-1-\sqrt{21}}{2}\right),\left(\dfrac{-5+\sqrt{21}}{2};\dfrac{-1+\sqrt{21}}{2}\right)$.

Câu 48.

Hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases}\left(x^2+4x\right).\left(4x+y\right)=6\\ \left(x^2+4x\right)+\left(4x+y\right)=-5\end{cases}$$

Suy ra $x^2 + 4x$ và $4x + y$ là 2 nghiệm của phương trình

$$t^2+5x+6=0 \Leftrightarrow (t+2)(t+3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-2\\ t=-3\end{array}\right.$$

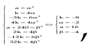
Vậy hệ đã cho tương đương với $\begin{cases}x^2+4x=-2\\ 4x+y=-3\end{cases}$ (I) hoặc $\begin{cases}x^2+4x=-3\\ 4x+y=-2\end{cases}$ (II)

Giải (I): $x^2+4x=-2 \Leftrightarrow (x+2)^2=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2+\sqrt{2} \Rightarrow y=-3-4x=5-4\sqrt{2}\\ x=-2-\sqrt{2} \Rightarrow y=-3-4x=5+4\sqrt{2}\end{array}\right.$

Giải (II): $x^2+4x+3=0 \Leftrightarrow (x+1)(x+3) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \Rightarrow y=-2-4x=2\\ x=-3 \Rightarrow y=-2-4x=10\end{array}\right.$

Vậy hệ đã cho có 4 nghiệm $\left(-2+\sqrt{2};5-4\sqrt{2}\right),\left(-2-\sqrt{2};5+4\sqrt{2}\right),\left(-1;2\right),\left(-3;10\right)$

Câu 49. a) Khi $a=1$, hệ trở thành: $\begin{cases}x+y=3\\ x^2+y^2=5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x+y=3\\ xy=2\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases}x=1\\ y=2\end{cases}\\ \begin{cases}x=2\\ y=1\end{cases}\end{array}\right.$

Vậy với , hệ đã cho có 2 nghiệm $\begin{cases}x=1\\ y=2\end{cases}; \quad \begin{cases}x=2\\ y=1\end{cases}$

b) $\begin{cases}x+y=2a+1\,(1)\\ x^2+y^2=2a^2+4a-1\,(2)\end{cases}$ Từ (1) ta có: $y=2a+1-x$

Thay vào (2) ta có: $x^2-\left(2a+1\right)x+a^2+1=0$ (3)

Hệ có nghiệm $\Leftrightarrow$ (3) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta \geq 0 \Leftrightarrow 4a-3 \geq 0 \Leftrightarrow a \geq \dfrac{3}{4}$.

Với $a \geq \dfrac{3}{4}$ hệ đã cho có nghiệm. Khi đó, từ hệ đã cho ta có:

$$xy=a^2+1$$

Vì $a \geq \dfrac{3}{4}$ nên $a^2+1 \geq \dfrac{25}{16}$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=\dfrac{3}{4}$.

Vậy $\min(xy)=\dfrac{25}{16}$

Câu 50.

Ta có: $\begin{cases} x^2+xy-2y^2=0 & (1) \\ xy+3y^2+x=3 & (2) \end{cases}$

Phương trình (1) $\Leftrightarrow \left(x^2-y^2\right)+y\left(x-y\right)=0 \Leftrightarrow \left(x-y\right)\left(x+2y\right)=0$,

ta được $x = y$ hoặc $x = -2y$

* Với $x = y$, từ (2) ta có: $4x^2+x-3=0$, ta được $x_1=-1, x_2=\frac{3}{4}$.

Khi đó, $x_1=y_1=-1, x_2=y_2=\frac{3}{4}$.

* Với $x = -2y$, từ (2) ta có $y^2-2y-3=0$, ta được $y_1=-1, y_2=3$

Nếu $y=-1 \Rightarrow x=2$. Nếu $y=3 \Rightarrow x=-6$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm (x; y) là: (-1; -1); $\left(\frac{3}{4};\frac{3}{4}\right)$; (2; -1); (-6; 3).

Câu 51.

a. Giải hệ đã cho khi $m=-3$

Ta được hệ phương trình $\begin{cases} -2x+2y=-12 \\ x-5y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x+y=-6 \\ x-5y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=7 \\ y=1 \end{cases}$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x;y)$ với $(7;1)$

b. Điều kiện có nghiệm của phương trình

$$\frac{m+1}{1} \neq \frac{-(m+1)}{m-2} \Leftrightarrow (m+1)(m-2) \neq -(m+1)$$

$$\Leftrightarrow (m+1)(m-2)+(m+1) \neq 0 \Leftrightarrow (m+1)(m-1) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m+1 \neq 0 \\ m-1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -1 \\ m \neq 1 \end{cases}$$

Vậy phương trình có nghiệm khi $m \neq -1$ và $m \neq 1$

Giải hệ phương trình $\begin{cases} (m+1)x-(m+1)y=4m \\ x+(m-2)y=2 \end{cases}$ khi $\begin{cases} m \neq -1 \\ m \neq 1 \end{cases}$

$$\begin{cases} (m+1)x-(m+1)y=4m \\ x+(m-2)y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=\frac{4m}{m+1} \\ x+(m-2)y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y+\frac{4m}{m+1} \\ y=\frac{-2}{m+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{4m-2}{m+1} \\ y=\frac{-2}{m+1} \end{cases}.$$

Vậy hệ có nghiệm (x; y) với $\left(\frac{4m-2}{m+1};\frac{-2}{m+1}\right)$

Câu 52.

Từ $y-|x|=3 \Leftrightarrow y-3=|x| \Rightarrow y-3\geq 0 \Rightarrow |y-3|=y-3$

$$\begin{cases}|x|+|y-3|=1\\ y-|x|=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}|x|+y-3=1\\ y-|x|=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}|x|+y=4\\ y-|x|=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2|x|=1\\ y=|x|+3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\pm\dfrac{1}{2}\\ y=\dfrac{7}{2}\end{cases} \text{(nhận)}$$

Vậy hệ phương trình có 2 nghiệm (x; y): $\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{7}{2}\right),\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{7}{2}\right)$

Câu 53. 1. Khi m = 2 ta có hệ phương trình: $\begin{cases}x+y=2\\ 2x+y=3\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x=1\\ x+y=2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x=1\\ y=1\end{cases}$$

Vậy với m = 2 hệ phương trình có nghiệm duy nhất: $\begin{cases}x=1\\ y=1\end{cases}$

2. Ta có hệ: $\begin{cases}(m-1)x+y=2\\ mx+y=m+1\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x=m+1-2\\ mx+y=m+1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x=m-1\\ y=-m(m-1)+m+1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x=m-1\\ y=-m^2+2m+1\end{cases}$$

Vậy với mọi giá trị của m, hệ phương trình có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases}x=m-1\\ y=-m^2+2m+1\end{cases}$$

Khi đó: $2x + y = -m^2 + 4m - 1$

$= 3 - (m-2)^2 \leq 3$ đúng $\forall m$ vì $(m-2)^2 \geq 0$

Vậy với mọi giá trị của m, hệ phương trình có nghiệm duy nhất (x; y) thoả mãn $2x + y \leq 3$.

Câu 54.

Ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 2y - 2xy + z^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 - z \\ 2xy = z^2 + 2(x + y) - 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 - z \\ 2xy \ = z^2 - 2z + 1 = (1 - z)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 2xy = (x + y)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = 0 \Rightarrow z = 1.$$

Vậy hệ phương trình chỉ có 1 cặp nghiệm duy nhất: (x ;y ;z) = (0 ;0; 1).

Câu 55.

Điều kiện : $y \geq 0$.

$(1) \Leftrightarrow (x - y)(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y \\ x = \pm 1 \end{array}\right.$.

+/Nếu $x = \pm 1$ thay vào phương trình (2) ta có : $\sqrt{y} - 1 = 0 \Leftrightarrow y = 1$.

+/Nếu $x = y \geq 0$

Khi đó (2) $\Leftrightarrow \sqrt{2(x^4 + 1)} - 4\sqrt{x} + 2 = 0$ (3)

do $2(x^4 + 1) \geq 2.2\sqrt{x^4.1} = 4x^2 \Rightarrow \sqrt{2(x^4 + 1)} \geq 2|x| = 2x$.

nên $VT(3) \geq 2(x - 2\sqrt{x} + 1) = 2(\sqrt{x} - 1)^2 \geq 0$.

Do đó Pt (3) $\Leftrightarrow \begin{cases} x^4 = 1 \\ \sqrt{x} - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = 1$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}; \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$

Câu 56.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 - z \\ 2xy = z^2 - 2(x + y) - 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 - z \\ 2xy = z^2 - 2z + 1 = (1 - z)^2 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow 2xy = (x + y)^2$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 0$

$\Leftrightarrow x = y = 0; z = 1$

Hệ pt có nghiệm duy nhất: (x,y,z)=(0,0,1)

Câu 57.

Điều kiện: $xy \geq 0$

Đặt $a = x + y,\ b = \sqrt{xy}\ \ (b \geq 0)$. Ta có hệ $\begin{cases} a = 3 + b \\ a^2 - 2b^2 = 18 \end{cases}$

Thế $a = 3 + b$ vào phương trình còn lại ta được: $(3+b)^2 - 2b^2 = 18$

$\Leftrightarrow b^2 - 6b + 9 = 0 \Leftrightarrow b = 3$

Do đó $(a;b) = (6;3)$. Ta được hệ $\begin{cases} x + y = 6 \\ \sqrt{xy} = 3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 6 \\ xy = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \end{cases}$ (thỏa mãn điều kiện).Vậy hệ có nghiệm $(x;y) = (3;3)$

Câu 58. Cộng theo vế hai phương trình của hệ ta được: $(2x + 3y)^2 = 25$

Ta có 2 hệ:

$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$ và $\begin{cases} 2x + 3y = -5 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$

Giải ra và kết luận

Câu 59.

.

$$\begin{cases} (x+\sqrt{x^2+2012})(y+\sqrt{y^2+2012}) = 2012 & (1) \\ x^2 + z^2 - 4(y+z) + 8 = 0 & (2) \end{cases}$$

$(1) \Leftrightarrow \left(x + \sqrt{x^2+2012}\right)\left(y + \sqrt{y^2+2012}\right)\left(\sqrt{y^2+2012} - y\right) = 2012\left(\sqrt{y^2+2012} - y\right)$ (Do $\sqrt{y^2+2012} - y \neq 0 \forall y$)

$\Leftrightarrow \left(x + \sqrt{x^2+2012}\right)2012 = 2012\left(\sqrt{y^2+2012} - y\right) \Leftrightarrow x + \sqrt{x^2+2012} = \sqrt{y^2+2012} - y$

$\Leftrightarrow x + y = \sqrt{y^2+2012} - \sqrt{x^2+2012}$

$\Leftrightarrow x + y = \dfrac{\left(\sqrt{y^2+2012} - \sqrt{x^2+2012}\right)\left(\sqrt{y^2+2012} + \sqrt{x^2+2012}\right)}{\sqrt{y^2+2012} + \sqrt{x^2+2012}}$

$\Leftrightarrow x + y = \dfrac{y^2 - x^2}{\sqrt{y^2+2012} + \sqrt{x^2+2012}} \Leftrightarrow (x+y)\dfrac{\sqrt{y^2+2012} - y + \sqrt{x^2+2012} + x}{\sqrt{y^2+2012} + \sqrt{x^2+2012}} = 0$

Do $\left.\begin{array}{l} \sqrt{y^2+2012} > |y| \geq y \forall y \\ \sqrt{x^2+2012} > |x| \geq -x \forall x \end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt{y^2+2012} - y + \sqrt{x^2+2012} + x > 0 \Rightarrow y = -x$

Thay y = -x vào(2)$\Rightarrow x^2 + z^2 + 4x - 4z + 8 = 0 \Leftrightarrow (x+2)^2 + (z-2)^2 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(x+2)^2=0\\(z-2)^2=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-2\\z=2\end{cases} \Rightarrow y=-x=2$$

Vậy hệ có nghiệm (x;y;z)=(-2;2;2).

Câu 60.

$$\begin{cases}x^2+y^2+xy=3 \ (1)\\ xy+3x^2=4 \quad (2)\end{cases}$$

Từ (2) $\Rightarrow$ x $\neq$ 0. Từ đó $y=\dfrac{4-3x^2}{x}$, thay vào (1) ta có:

$$x^2+\left(\frac{4-3x^2}{x}\right)^2+x.\frac{4-3x^2}{x}=3$$

$$\Leftrightarrow 7x^4-23x^2+16=0$$

Giải ra ta được $x^2=1$ hoặc $x^2=\dfrac{16}{7}$

Từ $x^2=1\Leftrightarrow x=\pm1\Rightarrow y=\pm1$; $x^2=\dfrac{16}{7}\Leftrightarrow x=\pm\dfrac{4\sqrt{7}}{7}\Rightarrow y=\mp\dfrac{5\sqrt{7}}{7}$

Vậy hệ có nghiệm (x; y) là (1; 1); (-1; -1); $\left(\dfrac{4\sqrt{7}}{7};\dfrac{-5\sqrt{7}}{7}\right)$; $\left(\dfrac{-4\sqrt{7}}{7};\dfrac{5\sqrt{7}}{7}\right)$

Câu 61.

ĐK: $\Leftrightarrow \begin{cases}x>0\\y>0\end{cases}$ (*)

Từ pt (1) suy ra $(y-x)\left(x+2y+\dfrac{1}{y\sqrt{x}}\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}y=x\\x+2y+\dfrac{1}{y\sqrt{x}}=0\end{array}\right.$

+) Với $y=x$ thay vào (2) ta được

$$(\sqrt{x+3}-\sqrt{x})(1+\sqrt{x^2+3x})=3 \Leftrightarrow 1+\sqrt{x^2+3x}=\sqrt{x+3}+\sqrt{x} \Leftrightarrow (\sqrt{x+3}-1)(\sqrt{x}-1)=0$$

(nhân hai vế pt với $\sqrt{x+3}+\sqrt{x}$) (Ta cũng có thể đặt $t=\sqrt{x+3}-\sqrt{x}$ rồi bình phương hai vế)

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x+3}=1\\\sqrt{x}=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-2 \ (L)\\x=1\Rightarrow y=1\end{array}\right.$$

+) Vì $x>0;y>0$ nên $x+2y+\dfrac{1}{y\sqrt{x}}=0$ vô nghiệm

Vậy nghiệm của hpt là: $(x;y)=(1;1)$.

Câu 62.

+) Ta có $PT(1) \Leftrightarrow 2x^2 + xy + 4xy + 2y^2 - 4x - 2y = 10xy - 4x - 2y$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 5xy + 2y^2 = 0 \Leftrightarrow \left(2x^2 - 4xy\right) + (2y^2 - xy) = 0 \Leftrightarrow 2x(x-2y) - y(x-2y) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2y)(2x-y) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 2y = 0 \\ 2x - y = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2y \\ y = 2x \end{array}\right.$$

+) Trường hợp 1: $x = 2y$, kết hợp với phương trình (2) ta có hệ $\begin{cases} x = 2y \\ x^2 - 7y = -3 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ 4y^2 - 7y + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \dfrac{3}{4} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x = \dfrac{3}{4} \\ y = \dfrac{3}{2} \end{cases} \end{array}\right.$$

+) Trường hợp 2: $y = 2x$, kết hợp với phương trình (2) ta có hệ $\begin{cases} y = 2x \\ x^2 - 7y = -3 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ x^2 - 14x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ \left[\begin{array}{l} x = 7 + \sqrt{46} \\ x = 7 - \sqrt{46} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 7 + \sqrt{46} \\ y = 14 + 2\sqrt{46} \end{cases} \\ \begin{cases} x = 7 - \sqrt{46} \\ y = 14 - 2\sqrt{46} \end{cases} \end{array}\right.$$

+) Kết luận: Hệ phương trình có 4 nghiệm:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}, \begin{cases} x = \dfrac{3}{4} \\ y = \dfrac{3}{2} \end{cases}, \begin{cases} x = 7 + \sqrt{46} \\ y = 14 + 2\sqrt{46} \end{cases}; \begin{cases} x = 7 - \sqrt{46} \\ y = 14 - 2\sqrt{46} \end{cases}.$$

Câu 63.

a) Khi m = $\sqrt{2}$ ta có hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{2}x - y = 2 \\ 3x + \sqrt{2}y = 5 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \sqrt{2}y = 2\sqrt{2} \\ 3x + \sqrt{2}y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2\sqrt{2} + 5}{5} \\ y = \sqrt{2}x - 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2\sqrt{2}+5}{5} \\ y = \dfrac{5\sqrt{2}-6}{5} \end{cases}$$

b) Giải tìm được: $x = \dfrac{2m+5}{m^2+3}$; $y = \dfrac{5m-6}{m^2+3}$

Thay vào hệ thức $x + y = 1 - \dfrac{m^2}{m^2+3}$; ta được $\dfrac{2m+5}{m^2+3} + \dfrac{5m-6}{m^2+3} = 1 - \dfrac{m^2}{m^2+3}$

Giải tìm được $m = \dfrac{4}{7}$

Câu 64.

Với điều kiện $x, y < 9$, hệ đã cho là: $\begin{cases} x^2 + 9 = (9-y)^2 & (1) \\ y^2 + 9 = (9-x)^2 & (2) \end{cases}$

Lấy (1) trừ (2) theo vế ta được: $(x-y)(x+y-9) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y \\ y = 9 - x \end{array}\right.$.

+ Với $x = y$, thế vào (1) ta được: $18x - 72 = 0 \Leftrightarrow x = y = 4$.

+ Với $y = 9 - x$, thế vào (2) thì phương trình vô nghiệm.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất : $(x;y) = (4;4)$.

Câu 65.

Hệ phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} 2xy + (x+2y) = 20 \\ \dfrac{x+2y}{xy} = \dfrac{4}{3} \end{cases}$ (Đk $x \neq 0; y \neq 0$)

Đặt $u = x + 2y$; $v = xy \neq 0$ Hệ phương trình có dạng $\begin{cases} u + 2v = 20 \\ 3u = 4v \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u = 8 \\ v = 6 \end{cases}$ Khi đó có hệ phương trình $\begin{cases} x + 2y = 8 & (1) \\ xy = 6 & (2) \end{cases}$

Rút x từ (1) thay vào (2) được $y = 1$ hoặc $y = 3$

Kết luận hệ phương trình có 2 nghiệm $(x;y) = (6;1);(2;3)$

Câu 66.

Điều kiện: $x \geq 3$ và $y \geq -7$

Đặt $u = \sqrt{x-3} \geq 0$, $v = \sqrt{y+7} \geq 0 \Rightarrow x = u^2 + 3$, $y = v^2 - 7$

Ta có hệ phương trình $\begin{cases} u^2 + v^2 = 17 \\ u + v = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u.v = 4 \\ u + v = 5 \end{cases}$

$\Rightarrow$ u, v là nghiệm phương trình $X^2 - 5X + 4 = 0 \Leftrightarrow X = 1$ hoặc $X = 4$

$\Rightarrow$ (u ; v) = (1 ; 4) hoặc (u ; v) = (4 ; 1)

Kết luận: (x ; y) = (4 ; 9); (x ; y) = (19 ; –6)

Câu 67.

$$\begin{cases} x^2+2y+3=y^2+4x \\ x^2+y^2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2-(y-1)^2=0 \\ x^2+y^2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y-1)(x+y-3)=0 \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-y-1=0 \\ x^2+y^2=5 \end{cases} \vee \begin{cases} x+y-3=0 \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$$

+ TH1:

$$\begin{cases} x-y-1=0 \\ x^2+y^2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x-2=0 \\ y=x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \end{cases} \vee \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$$

+ TH1:

$$\begin{cases} x+y-3=0 \\ x^2+y^2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3x+2=0 \\ y=-x+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases} \vee \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$$

+ Kết luận: hệ pt có nghiệm (x;y) là: (-1;-2), (2;1), (1;2).

Câu 68.

Ta có: $\begin{cases} x^2+xy-4x=-6 & (1) \\ y^2+xy=-1 & (2) \end{cases}$

Nếu (x;y) là nghiệm của (2) thì $y \neq 0$.

Do đó: (2) $\Leftrightarrow x=\dfrac{-y^2-1}{y}$ (3)

Thay (3) vào (1) và biến đổi, ta được:

$4y^3 + 7y^2 + 4y + 1 = 0$

$\Leftrightarrow (y + 1)(4y^2 + 3y + 1) = 0$ (thí sinh có thể bỏ qua bước này)

$\Leftrightarrow y = -1$

$y = -1 \Rightarrow x = 2$

Vậy hệ có một nghiệm: (x ; y) = (2 ; −1).

Câu 69.

$$\begin{cases} x^3-\dfrac{6}{y}=2 & (1) \\ 3x-\dfrac{8}{y^3}=-2 & (2) \end{cases}$$

ĐK: $y \neq 0$

Cộng PT (1) với PT (2) ta được

$\Leftrightarrow\left(x^3-\frac{8}{y^3}\right)+\left(3x-\frac{6}{y}\right)=0 \quad \Leftrightarrow\left(x-\frac{2}{y}\right)\left(x^2+\frac{2x}{y}+\frac{4}{y^2}+3\right)=0$

TH1: $x=\frac{2}{y}$ thay vào phương trình (1) ta được:

$\frac{8}{y^3}-\frac{6}{y}=2\Rightarrow 2y^3+6y^2-8=0\Leftrightarrow(y-1)(y+2)^2=0$

$y=1\Rightarrow x=2$; $y=-2\Rightarrow x=-1$

TH2: $\Leftrightarrow\left(x^2+\frac{2x}{y}+\frac{4}{y^2}+3\right)=0\Leftrightarrow\left(x^2+\frac{2x}{y}+\frac{1}{y^2}\right)+\frac{1}{y^2}+3=0$

$\Leftrightarrow\left(x+\frac{1}{y}\right)^2+\frac{1}{y^2}+3=0$ (PT vô nghiệm)

Vậy hệ PT đã cho có nghiệm (x;y) = (2;1), (-1;-2)

Câu 70.

Hệ phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases}(x-1)^2+(y-3)^2=1\\(x-1)(y-3)=(x-1)+(y-3)+1\end{cases}$$

Đặt $a=x-1; b=y-3\cdot$ Ta được hệ phương trình

$$\begin{cases}a^2+b^2=1\\ab=a+b+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(a+b)^2-2ab=1\\ab=a+b+1\end{cases}$$

Đặt $S=a+b; P=ab,$ điều kiện $S^2\geq 4P$. Hệ trên trở thành

$$\begin{cases}S^2-2P=1\\P=S+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}S=-1\\P=0\end{cases}(\textit{thỏa mãn})\text{ hoặc }\begin{cases}S=3\\P=4\end{cases}(\textit{loại})$$

$$\begin{cases}S=-1\\P=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=-1\\ab=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=-1\\b=0\end{cases}\\\begin{cases}a=0\\b=-1\end{cases}\end{array}\right.$$

+) $\begin{cases}a=-1\\b=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-1=-1\\y-3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\y=3\end{cases}$

+) $\begin{cases}a=0\\b=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-1=0\\y-3=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}$

Vậy hệ đã cho có hai nghiệm là (0;3), (1;2)

Câu 71.

3) Cho (x, y) là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x-y=m+1 \\ 2x-3y=m+3 \end{cases}$ (với m là tham số thực).

Tìm m để biểu thức $P=x^2+8y$ đạt giá trị nhỏ nhất.

4) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x^3-y^3=-1 \end{cases}$ (với x, y thuộc R).

(Trích đề HSG tỉnh Đồng Nai năm 2018-2019)

Lời giải

1) Giải: $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x^3-y^3=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)^2+2xy=1 \\ (x-y)^3-3xy(x-y)=-1 \end{cases}$

Đặt $\begin{cases} x-y=S \\ xy=P \end{cases}$

Ta có: $\begin{cases} S^2+2P=1 \\ S^3-3SP=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P=\dfrac{1-S^2}{2} \\ S^3-3S.\dfrac{1-S^2}{2}=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P=\dfrac{1-S^2}{2} \\ 2S^3+3S^3-3S+2=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} P=\dfrac{1-S^2}{2} \\ 5S^3-3S+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P=\dfrac{1-S^2}{2} \\ (S+1)(5S^2-5S+2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P=\dfrac{1-S^2}{2} \\ (S+1)(5S^2-5S+2)=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} P=\dfrac{1-S^2}{2} \\ \left[\begin{array}{l} (S+1)=0 \\ 5S^2-5S+2=0 \ \ (vn) \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P=0 \\ S=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=-1 \\ xy=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} y=0 \\ x=-1 \end{cases} \end{array}\right.$

Câu 72.

Trừ theo vế các phương trình (1) và (2) ta được:

$$\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{y^2+1}\right)+3(x-y)=0 \Leftrightarrow (x-y)\left(\frac{x+y}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}}+3\right)=0$$

$\Leftrightarrow x-y=0$ hoặc $\dfrac{x+y}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}}+3=0$ (*)

Trường hợp 1: $x-y=0 \Leftrightarrow x=y$. Thay $y=x$ vào (1) ta được phương trình:

$$\sqrt{x^2+1}=x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+1=(x+1)^2 \\ x \geq -1 \end{cases}$$

Giải hệ ta được: $x=0 \Rightarrow x=y=0$.

Trường hợp 2: $\dfrac{x+y}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}}+3=0$.

Xét $A=\dfrac{x+y}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}}+3=\dfrac{\left(3\sqrt{x^2+1}+x\right)+\left(3\sqrt{y^2+1}+y\right)}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}}$.

Ta có: $3\sqrt{x^2+1}+x>3\sqrt{x^2}+x=3|x|+x=2|x|+\left(|x|+x\right)\ge 0$.

Tương tự: $3\sqrt{y^2+1}+y>0$

Suy ra: $A>0$. Trường hợp 2 không xảy ra.

Vậy hệ có nghiệm duy nhất: $x=y=0$.

Cách 2 :

$$\begin{cases} x+\sqrt{x^2+1}=2y+1 \\ y+\sqrt{y^2+1}=2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2+1}=2y-x+1 \\ \sqrt{y^2+1}=2x-y+1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2y-x+1\ge 1 & (1) \\ 2x-y+1\ge 1 & (2) \\ x^2+1=4y^2+4y+1-4xy-2x+x^2 & (3) \\ y^2+1=4x^2+4x+1-4xy-2y+y^2 & (4) \end{cases}$$

Trừ theo vế các phương trình (3) và (4) ta được phương trình :

$$(x-y)\left[4(x+y)+6\right]=0 \Leftrightarrow x=y \text{ hoặc } 4(x+y)+6=0 \text{ :}$$

Cộng theo vế các bất phương trình (1) và (2) ta được : $x+y\ge 0$, suy ra trường hợp $4(x+y)+6=0$ không xảy ra.

Trường hợp $x=y$, thay vào (3) ta được: $x=y=0$.

Câu 73.

Ta có $\begin{cases} xy-2x+y=6 \\ (x+1)^2+(y-2)^2=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(y-2)+y-2=4 \\ (x+1)^2+(y-2)^2=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)(y-2)=4 \\ (x+1)^2+(y-2)^2=8 \end{cases}$ (*)

Đặt $a=x+1; b=y-2$ ta có hệ phương trình.

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} a.b=4 \\ a^2+b^2=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a.b=4 \\ (a+b)^2-2ab=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a.b=4 \\ (a+b)^2=16 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a.b=4 \\ \left[\begin{array}{l} a+b=4 \\ a+b=-4 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a.b=4 \\ a+b=4 \end{cases} \\ \begin{cases} a.b=4 \\ a+b=-4 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=2 \\ b=2 \end{cases} \\ \begin{cases} a=-2 \\ b=-2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+1=2 \\ y-2=2 \end{cases} \\ \begin{cases} x+1=-2 \\ y-2=-2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=1 \\ y=4 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-3 \\ y=0 \end{cases} \end{array}\right..$$

Nghiệm của hệ phương trình $S=\left\{(1;4);(-3;0)\right\}$

3. Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) là $x^2=2x+m-1$ hay $x^2-2x-m+1=0$ (1)

(d) và (P) cắt nhau tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi (1) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' = 1-(-m+1) > 0 \Leftrightarrow m > 0$

Do A, B thuộc (P) nên $y_1 = x_1^2; y_2 = x_2^2$. Theo đề bài ta có

$$y_1.y_2 - x_1.x_2 = 12 \Leftrightarrow (x_1.x_2)^2 - x_1.x_2 - 12 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1.x_2 = 4 \\ x_1.x_2 = -3 \end{array}\right.$$

Theo hệ thức Viet ta có : $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1.x_2 = -m+1 \end{cases}$

Nếu $x_1.x_2 = 4$ thì $-m+1 = 4 \Rightarrow m = -3$ (loại).

Nếu $x_1.x_2 = -3$ thì $-m+1 = -3 \Rightarrow m = 4$ (nhận). Vậy $m = 4$ là giá trị cần tìm.

Câu 74.

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3 + 2xy^2 + 12y = 0 & (1) \\ 8y^2 + x^2 = 12 & (2) \end{cases}$

Thế (2) vào PT(1) ta được $x^3 + x^2y + 2xy^2 + 8y^3 = 0$

Nếu $y = 0$ thì từ (1) suy ra $x = 0$ không thỏa mãn PT (2).

Xét $y \neq 0$ PT $(3) \Leftrightarrow \left(\dfrac{x}{y}\right)^3 + \left(\dfrac{x}{y}\right)^2 + 2.\dfrac{x}{y} + 8 = 0$

Đặt $\dfrac{x}{y} = t$ ta được $t^3 + t^2 + 2t + 8 = 0$

$$\Leftrightarrow (t+2)(t^2 - t + 4) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t+2=0 \\ t^2 - t + 4 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow t = -2$$

Với $t = -2 \Rightarrow x = -2y$, thay vào (2) được $y^2 = 1 \Leftrightarrow y = 1 \vee y = -1$

Với $y = 1 \Rightarrow x = -2$

$y = -1 \Rightarrow x = 2$

Vậy hệ phương trình đã cho có 2 nghiệm $(-2;1); (2;-1)$.

Câu 75.

Ta có:

$$\begin{cases} (y-2x)(1-y-x) = 2x^2 - x & (1) \\ x(y-1) + \sqrt[3]{x^2 - y} = 2 & (2) \end{cases}$$

$(1) \Leftrightarrow (y-2x)(1-y) - x(y-2x) - x(2x-1) = 0$

$$\Leftrightarrow (y-2x)(1-y) - x(y-1) = 0 \Leftrightarrow (1-y)(y-x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 1 \\ y = x \end{array}\right..$$

Với $y = 1$, thay vào (2) được: $\sqrt[3]{x^2 - 1} = 2 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 8 \Leftrightarrow x = \pm 3$.

Với $y = x$, thay vào (2) được: $x(x-1)+\sqrt[3]{x^2-x}=2 \Leftrightarrow x^2-x+\sqrt[3]{x^2-x}-2=0.$

Đặt $t=\sqrt[3]{x^2-x}$, phương trình trở thành:

$$t^3+t-2=0 \Leftrightarrow (t-1)(t^2+t+2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t^2+t+2=0 \quad (3) \end{array}\right..$$

Phương trình (3) có $\Delta=-7<0$ nên vô nghiệm.

Do đó $t=1 \Rightarrow x^2-x=1 \Leftrightarrow x^2-x-1=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}.$

Với $x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow y=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Với $x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \Rightarrow y=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Vậy hệ phương trình đã cho có 4 nghiệm:

$$(x;y)\in\left\{(-3;1),(3;1),\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2};\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right),\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2};\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right\}$$

Câu 76.

Điều kiện: $\begin{cases} xy\neq 0 \\ x+y\geq 1 \quad (*) \\ x\geq 0 \end{cases}.$

Phương trình $(1) \Leftrightarrow \dfrac{(x-y)^2-1}{xy}+4-\dfrac{2(x+y-1)}{x+y}=0 \Leftrightarrow \dfrac{(x+y)^2-1}{xy}-\dfrac{2(x+y-1)}{x+y}=0$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+y-1)(x+y+1)}{xy}-\frac{2(x+y-1)}{x+y}=0 \Leftrightarrow (x+y-1)\frac{(x^2+y^2+x+y)}{xy(x+y)}=0$$

$\Leftrightarrow x+y-1=0 \Leftrightarrow y=1-x$ (vì với x, y thỏa mãn đk (*) ta có $x^2+y^2+x+y>0$)

Thay $y=1-x$ vào phương trình thứ (2) của hệ pt ta thu được pt

$$4x^2+5(1-x)-13+6\sqrt{x}=0 \Leftrightarrow 4x^2-5x-8+6\sqrt{x}=0$$

$$\Leftrightarrow 4x^2-4x+1=x-6\sqrt{x}+9 \Leftrightarrow (2x-1)^2=\left(\sqrt{x}-3\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-1=\sqrt{x}-3 \\ 2x-1=3-\sqrt{x} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x+2=\sqrt{x} \\ 4-2x=\sqrt{x} \end{array}\right.$$

+) $2x+2=\sqrt{x} \Leftrightarrow x+\dfrac{7}{4}+\left(\sqrt{x}-\dfrac{1}{2}\right)^2=0$ (phương trình vô nghiệm vì $x\geq 0$).

+) $4-2x=\sqrt{x} \Leftrightarrow \begin{cases} 4-2x\geq 0 \\ (4-2x)^2=x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\leq 2 \\ 4x^2-17x+16=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\leq 2 \\ \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{17+\sqrt{33}}{8} \\ x=\dfrac{17-\sqrt{33}}{8} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{17-\sqrt{33}}{8}.$

Với $x=\frac{17-\sqrt{33}}{8}\Rightarrow y=\frac{\sqrt{33}-9}{8}$ thỏa mãn điều kiện (*).

Vậy hệ pt đã cho có nghiệm $(x;y)$ là: $\left(\frac{17-\sqrt{33}}{8};\frac{\sqrt{33}-9}{8}\right)$.

Câu 77.

2. $\begin{cases}\sqrt{2x-y-1}+\sqrt{3y+1}=\sqrt{x}+\sqrt{x+2y}\\ x^3-3x+2=2y^3-y^2\ (*)\end{cases}$

Điều kiện: $\begin{cases}2x-y-1\ge 0\\ x+2y\ge 0\\ x\ge 0\\ y\ge -\frac{1}{3}\end{cases}$

Nhận xét:

$\sqrt{2x-y-1}+\sqrt{x}=0\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\ y=-1\end{cases}$. Không thỏa mãn điều kiện.

$\sqrt{3y+1}+\sqrt{x+2y}=0\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{2}{3}\\ y=-\frac{1}{3}\end{cases}$. Không thỏa mãn phương trình $(*)$.

Do đó, ta có $\sqrt{2x-y-1}+\sqrt{3y+1}=\sqrt{x}+\sqrt{x+2y}$

$\Leftrightarrow\sqrt{2x-y-1}-\sqrt{x}+\sqrt{3y+1}-\sqrt{x+2y}=0$

$\Leftrightarrow\frac{x-y-1}{\sqrt{2x-y-1}+\sqrt{x}}-\frac{x-y-1}{\sqrt{3y+1}+\sqrt{x+2y}}=0$

$\Leftrightarrow(x-y-1)\left(\frac{1}{\sqrt{2x-y-1}+\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{3y+1}+\sqrt{x+2y}}\right)=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=x-1\\ \sqrt{2x-y-1}+\sqrt{x}=\sqrt{3y+1}+\sqrt{x+2y}\end{array}\right.$

Với $y=x-1$ thay vào phương trình $(*)$ ta có

$(x-1)^2(x+2)=2(x-1)^3-(x-1)^2\Leftrightarrow(x-1)^2(x-5)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=5\end{array}\right.$

$x=1\Rightarrow y=0;x=5\Rightarrow y=4$

Với $\sqrt{2x-y-1}+\sqrt{x}=\sqrt{3y+1}+\sqrt{x+2y}$

Ta có $\begin{cases}\sqrt{2x-y-1}+\sqrt{3y+1}=\sqrt{x}+\sqrt{x+2y}\\ \sqrt{2x-y-1}+\sqrt{x}=\sqrt{3y+1}+\sqrt{x+2y}\end{cases}$

Cộng vế với vế hai phương trình ta được $\sqrt{x}=\sqrt{3y+1}\Leftrightarrow y=\frac{x-1}{3}$

Thay vào $(*)$ ta được $(x-1)^2(x+2)=\frac{2}{27}(x-1)^3-\frac{1}{9}(x-1)^2$

$\Leftrightarrow (x-1)^2(25x+59)=0\Leftrightarrow x=1$ do $(x\ge 0)$.

Vậy hệ có các nghiệm $(x;y)=(1;0);(5;4)$.

Cách 2: Bình phương hai vế PT thứ nhất

PT thứ nhất $\Leftrightarrow \sqrt{(2x-y-1)(3y+1)}=\sqrt{x(x+2y)}$

$$\Leftrightarrow x^2-4xy+3y^2-2x+4y+1=0\Leftrightarrow (x-y-1)(x-3y-1)=0.$$

Câu 78.

ĐKXĐ $x,y\ge -\frac{1}{2}$

Ta có $(3x+2y)(y+1)=4-x^2$

$\Leftrightarrow 3xy+3x+2y^2+2y+x^2-4=0\Leftrightarrow x(x+y-1)+2y(x+y-1)+4(x+y-1)=0$

$\Leftrightarrow (x+2y+4)(x+y-1)=0.$

Vì $x,y\ge -\frac{1}{2}$ nên $x+2y+4>0$ và do đó phương trình $\Leftrightarrow x+y-1=0\Leftrightarrow y=1-x$

Thay vào phương trình đầu ta được

$$\sqrt{2x+1}+\sqrt{3-2x}=\frac{4x^2-4x+1}{2}$$

Với ĐKXĐ $-\frac{1}{2}\le x\le \frac{3}{2}$. Đặt

$$\sqrt{2x+1}+\sqrt{3-2x}=t>0\Rightarrow t^2=4+2\sqrt{(2x+1)(3-2x)}$$

$$\Rightarrow \sqrt{-4x^2+4x+3}=\frac{t^2-4}{2}\Rightarrow -4x^2+4x-1=\left(\frac{t^2-1}{2}\right)^2-4\Rightarrow \frac{4x^2-4x+1}{2}=-\frac{t^4-8t^2}{8}$$

Do đó ta có phương trình $t=\frac{t^4-8t^2}{8}\Leftrightarrow t(t^3-8t+8)=0\Leftrightarrow t(t-2)(t^2+2t-4)=0$

Vì $t>0$ nên $t=2$ hoặc $t=\sqrt{5}-1$

Xét $t=2$ ta có $\sqrt{-4x^2+4x+3}=0\Leftrightarrow (2x-3)(2x+1)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{3}{2}\Rightarrow y=-\frac{1}{2}\\ x=-\frac{1}{2}\Rightarrow y=\frac{3}{2}\end{array}\right.$

Xét $t=\sqrt{5}-1$ ta có $\sqrt{-4x^2+4x+3}=\frac{(\sqrt{5}-1)^2-2}{2}\Leftrightarrow \sqrt{-4x^2+4x+3}=1-\sqrt{5}<0$ (Vô lí)

Đối chiếu ĐKXĐ của hệ phương trình ta có hệ phương trình có 2 nghiệm
$\left(-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right);\left(\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right)$

Câu 79.

ĐKXĐ: $x+y\neq 0$

Chia phương trình (1) cho $(x+y)^2$ ta được hệ $\begin{cases}8(x^2+y^2)+4xy+\dfrac{5}{(x+y)^2}=13\\ 2x+\dfrac{1}{x+y}=1\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}5\left[(x+y)^2+\dfrac{1}{(x+y)^2}\right]+3(x-y)^2=13\\ \left(x+y+\dfrac{1}{x+y}\right)+(x-y)=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5\left(x+y+\dfrac{1}{x+y}\right)^2+3(x-y)^2=23\\ \left(x+y+\dfrac{1}{x+y}\right)+(x-y)=1\end{cases}$

Đặt $u=x+y+\dfrac{1}{x+y}, v=x-y$ (ĐK: $|u|\geq 2$), ta có hệ $\begin{cases}5u^2+3v^2=23 & (3)\\ u+v=1 & (4)\end{cases}$

Từ (4) rút $u=1-v$, thế vào (3) ta được

$5u^2+3(1-u)^2=23\Leftrightarrow 4u^2-3u-10=0\Leftrightarrow u=2$ hoặc $u=-\dfrac{5}{4}$.

Trường hợp $u=-\dfrac{5}{4}$ loại vì $|u|<2$.

Với $u=2\Rightarrow v=-1$ (thỏa mãn). Khi đó ta có hệ $\begin{cases}x+y+\dfrac{1}{x+y}=2\\ x-y=-1\end{cases}$

Giải hệ trên bằng cách thế $x=-1+y$ vào phương trình đầu ta được

$2y-1+\dfrac{1}{2y-1}=2\Leftrightarrow y=1$. Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(x,y)=(0;1)$.

Câu 80.

Từ phương trình thứ hai ta có: $x=2-2y$ thế vào phương trình thứ nhất được:

$(m-1)(2-2y)+y=2$

$\Leftrightarrow(2m-3)y=2m-4$ (3)

Hệ có nghiệm x,y là các số nguyên $\Leftrightarrow(3)$ có nghiệm y là số nguyên.

Với $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow 2m-3\neq 0\Rightarrow(3)$ có nghiệm $y=\dfrac{2m-4}{2m-3}$

$=1-\dfrac{1}{2m-3}$

$y\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2m-3=1\\ 2m-3=-1\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=2 \\ m=1 \end{array}\right.$

Vậy có 2 giá trị m thoả mãn là *1; 2*.

Câu 81.

Ta có:

$x^3 = x + y \Rightarrow 2x^3 = 2(x+y) \Rightarrow 2x^3 = (x^2 + y^2 - xy)(x+y)$

$2x^3 = x^3 + y^3 \Rightarrow x^3 = y^3 \Rightarrow x = y$

Thế vào phương trình $x^2 + y^2 - xy = 2 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2} \Rightarrow y = \pm\sqrt{2}$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x,y) = \left\{\left(\sqrt{2};\sqrt{2}\right);\left(-\sqrt{2};-\sqrt{2}\right)\right\}$

Câu 82.

Giải hệ : $\begin{cases} x^2 = 2 + xy^2 & (1) \\ y^2 = 2 + x^2y & (2) \end{cases}$

- Trừ từng vế hai phương trình của hệ ta được ;

$x^2 - y^2 = xy^2 - x^2y \Leftrightarrow (x-y)(xy+x+y) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = y & (3) \\ xy + x + y = 0 & (4) \end{array}\right.$

- Thay y = x từ (3) vào (1) ta được phương trình :

$x^2 = 2 + x^3 \Leftrightarrow (x+1)(x^2 - 2x + 2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 1 - \sqrt{2} \\ x = 1 + \sqrt{2} \end{array}\right.$

Vậy ta được các nghiệm (x; y) là :

$(-1;-1); \quad (1-\sqrt{2};1-\sqrt{2}); \quad (1+\sqrt{2};1+\sqrt{2})$

- Từ (4) suy ra $y = \dfrac{-x}{x+1}$ (vì x = -1 không phải là nghiệm của (4)). Thay y vào (2), ta có : $\dfrac{x^2}{(x+1)^2} = 2 + \dfrac{-x^3}{x+1} \Leftrightarrow x^4 + x^3 - x^2 - 4x - 2 = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 + 2x + 2)(x^2 - x - 1) = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0$ (Vì $x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 + 1 > 0$)

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 - \sqrt{5} \\ x = 1 + \sqrt{5} \end{array}\right.$

- Với $x = 1 - \sqrt{5} \Rightarrow y = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2 - \sqrt{5}} = -3 - \sqrt{5}$. Ta được $(x;y) = (1-\sqrt{5};-3-\sqrt{5})$ là nghiệm của hệ.

- Với $x = 1+\sqrt{5} \Rightarrow y = \dfrac{-\sqrt{5}-1}{2+\sqrt{5}} = -3+\sqrt{5}$. Ta được $(x;y) = (1+\sqrt{5};-3+\sqrt{5})$ là nghiệm của hệ.

Vậy hệ đã cho có 5 nghiệm :

$(-1;-1)$; $(1-\sqrt{2};1-\sqrt{2})$; $(1+\sqrt{2};1+\sqrt{2})$; $(1-\sqrt{5};-3-\sqrt{5})$;

$(1+\sqrt{5};-3+\sqrt{5})$

Câu 83.

$$\begin{cases} x^2 + xy^2 - xy - y^3 = 0(1) \\ 2(x^2+1) - 3\sqrt{x}(y+1) - y = 0(2) \end{cases}$$ ĐK: $x \ge 0$

(1) $\Leftrightarrow (x-y)(x+y^2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-y=0 \\ x+y^2=0 \end{array}\right.$

TH1: $x+y^2=0$, suy ra $x=y=0$ không thỏa mãn hệ.

TH2: x - y = 0 hay y = x thế vào (2) ta được : $2(x^2+1) - 3\sqrt{x}(x+1) - x = 0$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 3x\sqrt{x} - x - 3\sqrt{x} + 2 = 0$

$\Leftrightarrow (\sqrt{x}-2)(2\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x}=2 \\ \sqrt{x}=\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=\dfrac{1}{4}. \end{array}\right.$

Vậy hệ phương trình có nghiệm : $(x;y) = (4;4)$ và $(x;y) = \left(\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{4}\right)$.

Câu 84.

$$\begin{cases} xy^2 + 2x - 4y = -1 \\ x^2y^3 + 2xy^2 - 4x + 3y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy^2 + (2x+1) = 4y \\ (x^2y^2 + 2xy + 1)y - 2(2x+1) = -2y \end{cases} (*)$$

(lưu ý: không nhất thiết biến đổi đưa vế phải của pt thứ hai về $-2y$, có thể $-3y$)

- Xét $y=0$ thay vào hệ (*) ta được: $\begin{cases} 2x+1=0 \\ -2(2x+1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{2}$

Suy ra $\begin{cases} x = -\dfrac{1}{2} \\ y = 0 \end{cases}$ là một nghiệm của hệ.

- Xét $y \ne 0$, hệ phương trình (*) tương đương với hệ:

$$\begin{cases} xy+\dfrac{2x+1}{y}=4 \\ x^2y^2+2xy+1-2\left(\dfrac{2x+1}{y}\right)=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (xy+1)+\dfrac{2x+1}{y}=5 \\ (xy+1)^2-2\left(\dfrac{2x+1}{y}\right)=-2 \end{cases} \quad (**)$$

Đặt $a=xy+1, b=\dfrac{2x+1}{2}$; khi đó hệ phương trình (**) trở thành: $\begin{cases} a+b=5 \\ a^2-2b=-2 \end{cases}$ (***)

+ Giải hệ (***) tìm được: $\begin{cases} a=2 \\ b=3 \end{cases}, \begin{cases} a=-4 \\ b=9 \end{cases}$.

* Với $\begin{cases} a=2 \\ b=3 \end{cases}$ ta có $\begin{cases} xy+1=2 \\ \dfrac{2x+1}{y}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\left(\dfrac{2x+1}{3}\right)=1 \\ y=\dfrac{2x+1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=-\dfrac{3}{2} \\ y=-\dfrac{2}{3} \end{cases}$

* Với $\begin{cases} a=-4 \\ b=9 \end{cases}$ ta có $\begin{cases} xy+1=-4 \\ \dfrac{2x+1}{y}=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\left(\dfrac{2x+1}{9}\right)=-5 \\ y=\dfrac{2x+1}{9} \end{cases}$ (vô nghiệm)

Vậy hệ phương trình đã cho có ba nghiệm: $\begin{cases} x=-\dfrac{1}{2} \\ y=0 \end{cases}, \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}, \begin{cases} x=-\dfrac{3}{2} \\ y=-\dfrac{2}{3} \end{cases}$.

Cách khác:

$$\begin{cases} xy^2+2x-4y=-1 \\ x^2y^3+2xy^2-4x+3y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy^2+(2x+1)=4y \\ x^2y^3+2xy^2-(4x+2)=-3y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2xy^2+(4x+2)=8y \\ x^2y^3+2xy^2-(4x+2)=-3y \end{cases} \Rightarrow x^2y^3+xy^2-5y=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=0 \\ xy=1 \\ xy=-5 \end{array}\right.$$

+ Với $y=0$. Suy ra được $(x;y)=(-\dfrac{1}{2};0)$.

+ Với $xy=1$. Suy ra được $(x;y)=(1;1)$ hoặc $(x;y)=(-\dfrac{3}{2};-\dfrac{2}{3})$.

+ Với $xy=-5$. Trường hợp này không tồn tại cặp $(x;y)$.

Vậy hệ phương trình đã cho có ba nghiệm: $\begin{cases} x=-\dfrac{1}{2} \\ y=0 \end{cases}, \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}, \begin{cases} x=-\dfrac{3}{2} \\ y=-\dfrac{2}{3} \end{cases}$.

Câu 85.

$$\begin{cases} x^2+(y+1)^2 = xy+x+1 \\ 2x^3 = x+y+1 \end{cases} (I) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+(y+1)^2 - x(y+1) = 1 \\ 2x^3 = x+y+1 \end{cases} (II)$$

Đặt $t = y+1$ ta có hệ

$$(II) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+t^2-xt=1 \\ 2x^2 = (x+t)(x^2+t^2-x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+t^2-xt=1 \\ x=t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=t=1 \\ x=t=-1 \end{cases}.$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x;y) = (1;0);(-1;-2)$.

Câu 86.

Điều kiện: $x \ge \dfrac{1}{2}$. Phương trình thứ hai tương đương với

$$2y^4(5x-2)(x-3) = 3(2-5x) \Leftrightarrow (5x-2)\left[2y^4(x-3)+3\right] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{2}{5} \\ 2y^4(x-3)+3=0 \end{array}\right.$$

Với $2y^4(x-3)+3=0$ ta được $y^4 = \dfrac{3}{6-2x} \Rightarrow y^2 = \sqrt{\dfrac{3}{6-2x}}$, khi đó thế vào phương trình thứ nhất ta được $\sqrt{\dfrac{3}{6-2x}}.\sqrt{2x-1}+\sqrt{3} = 5\sqrt{\dfrac{3}{6-2x}} - \sqrt{6x-3}$ hay

$$\sqrt{6x-3}+\sqrt{3(6-2x)} = 5\sqrt{3} - \sqrt{(6x-3)(6-2x)}$$

Với phương trình trên ta nhận thấy có các hướng xử lý như sau

+ Hướng 1. Đặt ẩn phụ $a = \sqrt{6x-3} \ge 0; b = \sqrt{3(6-2x)} \ge 0$. Khi đó ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} a^2+b^2 = 15 \\ a+b = 5\sqrt{3} - \dfrac{ab}{\sqrt{3}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2=15 \\ \sqrt{3}(a+b)+ab = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(a+b)^2 = 45+6ab \\ \sqrt{3}(a+b) = 15-ab \end{cases}$$

Từ hệ trên ta được $45+6ab = (15-ab)^2 \Leftrightarrow (ab)^2 - 36ab+180 = 0$.

Chú ý là $ab \ge 0$ nên từ phương trình trên ta được $ab = 6$ và $ab = 30$.

Với $ab = 30$ ta được $a+b = -5\sqrt{3}$, loại

Với $ab = 6$ ta được $a+b = 3\sqrt{3}$ suy ra $a = 2\sqrt{3}; b = \sqrt{3}$ hoặc $a = \sqrt{3}; b = 2\sqrt{3}$.

Từ $a = 2\sqrt{3}; b = \sqrt{3}$ ta được $\begin{cases} \sqrt{6x-3} = 2\sqrt{3} \\ \sqrt{3(6-2x)} = \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow x = \dfrac{5}{2}$

Từ $a = 2\sqrt{3}; b = \sqrt{3}$ ta được $\begin{cases} \sqrt{6x-3} = \sqrt{3} \\ \sqrt{3(6-2x)} = 2\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow x = 1$

Đây là hệ phương trình đối xứng nên ta có thể giải được hệ trên.

+ Hướng 2. Nhận thấy phương trình có một nghiệm $x=1$ nên ta sử dụng đại lượng liên hợp

$$\sqrt{6x-3}+\sqrt{3(6-2x)}=5\sqrt{3}-\sqrt{(6x-3)(6-2x)}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{6x-3}-\sqrt{3}+\sqrt{3(6-2x)}-2\sqrt{3}=2\sqrt{3}-\sqrt{-12x^2+42x-18}$$
$$\Leftrightarrow \frac{6x-6}{\sqrt{6x-3}+\sqrt{3}}+\frac{6-6x}{\sqrt{3(6-2x)}+2\sqrt{3}}=\frac{12x^2-42x+30}{2\sqrt{3}+\sqrt{-12x^2+42x-18}}$$
$$\Leftrightarrow (6x-6)\left[\frac{1}{\sqrt{6x-3}+\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3(6-2x)}+2\sqrt{3}}-\frac{2x-5}{2\sqrt{3}+\sqrt{-12x^2+42x-18}}\right]=0$$

Xét phương trình $\frac{1}{\sqrt{6x-3}+\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3(6-2x)}+2\sqrt{3}}-\frac{2x-5}{2\sqrt{3}+\sqrt{-12x^2+42x-18}}=0$.

Phương trình trên được viết lại thành.

$$\frac{1}{\sqrt{2x-1}+1}-\frac{1}{\sqrt{6-2x}+2}-\frac{2x-5}{2+\sqrt{-4x^2+14x-6}}=0$$
$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{6-2x}+2-\sqrt{2x-1}-1}{\left(\sqrt{2x-1}+1\right)\left(\sqrt{2x-1}+1\right)}+\frac{5-2x}{2+\sqrt{-4x^2+14x-6}}=0$$
$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{6-2x}-1+2-\sqrt{2x-1}}{\left(\sqrt{2x-1}+1\right)\left(\sqrt{2x-1}+1\right)}+\frac{5-2x}{2+\sqrt{-4x^2+14x-6}}=0$$
$$\Leftrightarrow \frac{\frac{5-2x}{\sqrt{6-2x}+1}+\frac{5-2x}{2+\sqrt{2x-1}}}{\left(\sqrt{2x-1}+1\right)\left(\sqrt{2x-1}+1\right)}+\frac{5-2x}{2+\sqrt{-4x^2+14x-6}}=0$$
$$\Leftrightarrow (5-2x)\left[\frac{\frac{1}{\sqrt{6-2x}+1}+\frac{1}{2+\sqrt{2x-1}}}{\left(\sqrt{2x-1}+1\right)\left(\sqrt{2x-1}+1\right)}+\frac{1}{2+\sqrt{-4x^2+14x-6}}\right]=0\Leftrightarrow x=\frac{5}{2}$$

Từ các kết quả trên ta tìm được nghiệm của hệ phương trình là

$$(x;y)=\left(1;\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right),\left(1;-\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right),\left(\frac{5}{2};\sqrt[4]{3}\right),\left(\frac{5}{2};-\sqrt[4]{3}\right)$$

Câu 87.

Cả hai phương trình đều có hạng tử xy nên ta sẽ tìm cách triệt tiêu, lúc này bài toán có thể giải được. Hệ phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases}2xy-x+y=6\\ xy-y+x=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2xy-x+y=6\\ 2xy-2y+2x=4\end{cases}\Rightarrow 3y-3x=2\Rightarrow y=\frac{2}{3}+x$$

Thế $y=\frac{2}{3}+x$ vào phương trình thứ nhất ta được $x^2+\frac{2}{3}x-\frac{8}{3}=0\Rightarrow x\in\left\{-2;\frac{4}{3}\right\}$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(x;y)=\left(-2;\frac{-4}{3}\right),\left(\frac{4}{3};2\right)$

Câu 88.

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+4y^2+3=4x & (1) \\ x^3+12x+8y^3=6x^2+9 & (2) \end{cases}$.

Ta có: (1) $\Leftrightarrow 9=12x-3x^2-12y^2$, thế vào phương trình (2) và thu gọn ta được:

$x^3+8y^3=3(x^2-4y^2) \Leftrightarrow (x+2y)(x^2-2xy+4y^2-3x+6y)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+2y=0 \\ x^2-2xy+4y^2-3x+6y=0 \end{array}\right.$.

*) TH1: $x+2y=0 \Leftrightarrow y=\frac{-x}{2}$, thế vào phương trình (1) ta được

$2x^2+3=4x \Leftrightarrow 2x^2-4x+3=0$, phương trình vô nghiệm.

*) TH2: $x^2-2xy+4y^2-3x+6y=0$, trừ vế theo vế của phương này với phương trình (1) ta được:

$-2xy-3x+6y-3=-4x \Leftrightarrow 2xy-x-6y+3=0 \Leftrightarrow (x-3)(2y-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ y=\frac{1}{2} \end{array}\right.$

+ Nếu x =3 thay vào phương trình (1) ta được: $4y^2 = 0 \Leftrightarrow y = 0$, cặp (x;y) = (3;0) thoả mãn phương trình (2).

+ Nếu $y=\frac{1}{2}$, thay vào phương trình (1) ta được: $(x - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$, cặp (x;y) = $\left(2;\frac{1}{2}\right)$ thoả mãn phương trình (2).

Vậy nghiệm của hệ đã cho là (x; y) = (3;0) và (x;y) = (2; 1).

Câu 89. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 4x^2+1=y^2-4x \\ x^2+xy+y^2=1 \end{cases}$

28(Trích đề HSG tỉnh Nghệ An năm 2015-2016)

Lời giải

Hệ phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} (2x+1)^2=y^2 \\ x^2+xy+y^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\pm 2x+1 \\ x^2+xy+y^2=1 \end{cases}$

Xét hệ: $\begin{cases} y=2x+1 \\ x^2+xy+y^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2x+1 \\ x^2+x(2x+1)+(2x+1)^2=1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y=2x+1 \\ 7x^2+5x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2x+1 \\ \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-\frac{5}{7} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=-\frac{5}{7} \\ y=-\frac{3}{7} \end{cases}$

Xét hệ: $\begin{cases} y=-2x-1 \\ x^2+xy+y^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2x-1 \\ x^2-x(2x+1)+(2x+1)^2=1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y=-2x-1 \\ 3x^2+3x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2x-1 \\ \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases}$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm (*x;y*) là: (0;1), $\left(-\frac{5}{7};-\frac{3}{7}\right)$, (0;-1), (-1;1)

Câu 90.

Thay (2) vào (1) ta được

$x^3-y^3=\left(y^2-5y^2\right)(4x-y) \Leftrightarrow 21x^3-5x^2y-4xy^2=0$

$$\Leftrightarrow x(7x-4y)(3x+y)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\frac{4}{7}y \\ x=-\frac{y}{3} \end{array}\right.$$

- Với $x=0$ thay vào (2) ta được $y=\pm 2$

- Với $x=\frac{4}{7}y$ thay vào (2) ta được $-\frac{31}{49}y^2=4$ phương trình vô nghiệm

- Với $x=-\frac{y}{3}$ thay vào (2) ta được $y^2=9 \Leftrightarrow y=\pm 3$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm

$(x;y)=(0;2);(0;-2);(-1;3);(1;-3)$

Câu 91.

$\begin{cases} 2x^2+y^2-3xy-4x+3y+2=0 & (1) \\ \sqrt{x^2-y+3}+\sqrt{y-x+1}=2 & (2) \end{cases}$ Điều kiện $\begin{cases} x^2-y+3\ge 0 \\ y-x+1\ge 0 \end{cases}$

$(1) \Leftrightarrow y^2-3(x-1)y+2x^2-4x+2=0$

Tính $\Delta=(x-1)^2 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=x-1 \\ y=2x-2 \end{array}\right.$

Với $y=x-1$ thay vào (2) ta được

$\sqrt{x^2-x+4}=2 \Leftrightarrow x^2-x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=-1(tm) \\ x=0(tm) \end{array}\right.$

Với $y=2x-2$ thay vào (2) ta được

$\sqrt{x^2-2x+5}+\sqrt{x-1}=2 \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+4}+\sqrt{x-1}=2$

Ta có $\sqrt{(x-1)^2+4}+\sqrt{x-1}\ge 2$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=1 \Rightarrow y=0\,(tm)$

Vậy hệ phương trình có các nghiệm $(x;y)=(0;-1);(1;0)$

Câu 92.

Xét hệ phương trình $\begin{cases} 2x^2-y^2+xy+y-5x+2=0 & (1) \\ x^2+y^2+x+y-4=0 & (2) \end{cases}$

PT $(1) \Leftrightarrow 2x^2-y^2+xy+y-5x+2=0 \Leftrightarrow y^2-(x+1)y-2x^2+5x-2=0$

Ta có $\Delta'=(x+1)^2-4(-2x^2+5x-2)=9x^2-18x+9=9(x-1)^2$

Khi đó PT $(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=\dfrac{x+1-3(x-1)}{2} \\ y=\dfrac{x+1+3(x-1)}{2} \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-x+2 \\ y=2x-1 \end{array}\right.$

Với $y=-x+2$, thay vào PT (2) ta được $2x^2-4x+2=0 \Leftrightarrow x=1 \Rightarrow y=1$

Với $y=2x-1$, thay vào PT (2) ta được $5x^2-x-4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-\dfrac{4}{5} \end{array}\right.$

*) $x=1 \Rightarrow y=1$ *) $x=-\dfrac{4}{5} \Rightarrow y=-\dfrac{13}{5}$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(1;1)$ và $\left(-\dfrac{4}{5};-\dfrac{13}{5}\right)$

Câu 93.

Điều kiện $x \ge 1, y \in \mathbb{R}$

$y^2-y\left(\sqrt{x-1}+1\right)+\sqrt{x-1}=0 \Leftrightarrow y^2-y-\sqrt{x-1}\,(y-1)=0 \Leftrightarrow (y-1)\left(y-\sqrt{x-1}\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=\sqrt{x-1} \end{array}\right.$.

Với $y=1$, thay vào (2) ta được

$x^2+1-\sqrt{7x^2-3}=0 \Leftrightarrow x^2+1=\sqrt{7x^2-3} \Leftrightarrow x^4+2x^2+1=7x^2-3$

$\Leftrightarrow x^4-5x^2+4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=1 \\ x^2=4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$ (do điều kiện của x)

Với $y=\sqrt{x-1}$, thay vào (2) ta được $x^2+\sqrt{x-1}-\sqrt{7x^2-3}=0$

$\Leftrightarrow \left(x^2-4\right)+\left(\sqrt{x-1}-1\right)-\left(\sqrt{7x^2-3}-5\right)=0$

$\Leftrightarrow (x-2)(x+2)+\dfrac{x-2}{\sqrt{x-1}+1}-\dfrac{7(x-2)(x+2)}{\sqrt{7x^2-3}+5}=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x+2+\dfrac{1}{\sqrt{x-1}+1}-\dfrac{7(x+2)}{\sqrt{7x^2-3}+5}=0 \end{array}\right.$$

Với $x=2$ suy ra $y=1$.

Ta có $x+2+\dfrac{1}{\sqrt{x-1}+1}-\dfrac{7(x+2)}{\sqrt{7x^2-3}+5}=(x+2)\left(1-\dfrac{7}{\sqrt{7x^2-3}+5}\right)+\dfrac{1}{\sqrt{x-1}+1}$

$$=(x+2)\frac{\sqrt{7x^2-3}-2}{\sqrt{7x^2-3}+5}+\frac{1}{\sqrt{x-1}+1}$$

Với $x\ge 1$ thì $\sqrt{7x^2-3}-2\ge 0 \Rightarrow (x+2)\dfrac{\sqrt{7x^2-3}-2}{\sqrt{7x^2-3}+5}\ge 0$

Suy ra $(x+2)\dfrac{\sqrt{7x^2-3}-2}{\sqrt{7x^2-3}+5}+\dfrac{1}{\sqrt{x-1}+1}>0$

Vậy hệ phương trình có các nghiệm $(1;1),(2;1)$.

Câu 94.

Từ phương trình thứ nhất của hệ ta được $x=5y-20$. Thế vào phương trình thứ hai ta được

$$(5y-19)(10y-39)(15y-59)=(1+3y)\left[1+3y+2(5y-20)^2\right]$$
$$\Leftrightarrow 750y^3-8725y^2+33830y-34719=150y^3-1141y^2+2006y+801$$
$$\Leftrightarrow 600y^3-7584y^2-31824y-44520=0 \Leftrightarrow (y-5)(75y^2-573y+1113)=0$$

Dễ thấy phương trình $75y^2-573y+1113=0$ vô nghiệm

Do đó từ phương trình trên ta được $y-5=0 \Leftrightarrow y=5$ nên $x=5$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất là $(5;5)$.

Cách khác: Khi thực hiện phép thế $x=5y-20$ vào phương trình thứ hai thì ta được phương trình một ẩn, tuy nhiên phương trình khó phân tích. Do đó ta có thể tìm cách phân tích phương trình thứ hai thành tích.

$$(1+x)(1+2x)(1+3x)=(1+3y)(1+3y+2x^2)$$
$$\Leftrightarrow (2x^2+3x+1)(3x+1)=(1+3y)(1+3y+2x^2)$$
$$\Leftrightarrow (3x+1)^2+2x^2(3x+1)=(1+3y)^2+2x^2(3y+1)$$
$$\Leftrightarrow 3(x-y)\left[2+3(x+y)+2x^2\right]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-y=0 \\ 2+3(x+y)+2x^2=0 \end{array}\right.$$

Đến đây ta kết hợp với phương trình thứ nhất để tìm nghiệm.

Trong hai cách trên thì cách thực hiện phép thế dễ thấy hơn nhưng cách phân tích phương trình thứ hai thành tích cho lời giải đơn giản hơn.

Câu 95.

Đặt $a=2x+y-1; b=x-y+1$. Khi đó hệ phương trình viết được lại thành

$$\begin{cases} a^2+b^2=26 \\ a+b+ab=11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2+2ab-2ab=26 \\ ab=11-(a+b) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+b)^2-2\left[11-(a+b)\right]=26 \\ ab=11-(a+b) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a+b)^2+2(a+b)-48=0 \\ ab=11-(a+b) \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a+b=-8; ab=19 \\ a+b=6; ab=5 \end{array}\right.$$

+ Với $\begin{cases} a+b=-8 \\ ab=19 \end{cases}$, hệ vô nghiệm do $(a+b)^2<4ab$.

+ Với $\begin{cases} a+b=6 \\ ab=5 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=1; b=5 \\ a=5; b=1 \end{array}\right.$.

∘ Khi $a=1; b=5$ ta có $\begin{cases} 2x+y-1=1 \\ x-y+1=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-2 \end{cases}$.

∘ Khi $a=5; b=1$ ta có $\begin{cases} 2x+y-1=5 \\ x-y+1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$.

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm là $(2;-2),(2;2)$.

Chú ý. Khi hai phương trình của hệ đều không thể phân tích được thành tích thì ta nhân một trong hai phương trình với một số k rồi cộng theo vế hai phương trình thì được một phương trình bậc hai. Ta cần tìm hằng số k để phương trình phân tích được thành tích. Chẳng hạn ta viết lại hệ phương trình như

$$\begin{cases} 5x^2+2y^2+2xy-2x-4y=24 \\ 3x+(2x+y-1)(x-y+1)=11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2+2y^2+2xy-2x-4y-24=0 \\ 2x^2-y^2-xy+4x+2y-xy-12=0 \end{cases}$$

Khi đó ta thấy nếu nhân phương trình thứ hai với $k=2$ rồi cộng hai phương trình thì ta thu được phương trình $9x^2+6x-48=0$.

Câu 96.

Từ $x+y+z=3$ và $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{3}$ ta được $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{x+y+z}$. Khi đó ta được

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}-\frac{1}{x+y+z}=0 \Leftrightarrow \frac{x+y}{xy}+\frac{x+y}{z(x+y+z)}=0$$

$$\Leftrightarrow (x+y)(xy+zx+yz+z^2)=0 \Leftrightarrow (x+y)(y+z)(z+x)=0$$

+ Xét trường hợp $x+y=0$, khi đó từ $x+y+z=3$ ta được $z=3$.

Cũng từ $x+y=0$ ta được $x=-y$. Thế vào $x^2+y^2+z^2=17$ ta được

$2x^2=8 \Leftrightarrow x=\pm 2$.

Từ đó ta được hai bộ số $(x;y;z)$ thỏa mãn là $(2;-2;3),(-2;2;3)$.

+ Giải các trường hợp $y+z=0$ và $z+x=0$ ta được các bộ số là hoán vị của hai bộ số trên.

Vậy các bộ số $(x;y;z)$ cần tìm là

$(2;-2;3),(-2;2;3),(2;3;-2),(-2;3;2),(3;2;-2),(3;-2;2)$.

Câu 97.

Biến đổi tương đương phương trình ta được $\begin{cases} x^2+xy+zx=48 \\ y^2+xy+yz=12 \\ z^2+zx+yz=84 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x+y+z)=48 \\ y(x+y+z)=12 \\ z(x+y+z)=84 \end{cases}$

Mặt khác cộng theo vế các phương trình của hệ ta được

$(x+y+z)^2=144 \Leftrightarrow x+y+z=\pm 12$.

+ Với $x+y+z=-12$, thế vào phương trình trên ta được $(x;y;z)=(-4;-1;-7)$.

+ Với $x+y+z=12$, thế vào phương trình trên ta được $(x;y;z)=(4;1;7)$.

Thử vào hệ phương trình đã cho ta được các nghiệm của hệ là

$(x;y;z)=(4;1;7),(-4;-1;-7)$.

Câu 99. Ta có: $\begin{cases} x^3-y^3-15y-14=3\cdot(2y^2-x) & (1) \\ 4x^3+6xy+15x+3=0 & (2) \end{cases}$

Ở phương trình (1) ta có:

$$x^3-y^3-15y-14=3\cdot(2y^2-x)$$
$$\Leftrightarrow x^3+3x=y^3+15y+6y^2+14$$
$$\Leftrightarrow x^3+3x=y^3+6y^2+12y+8+3y+6$$
$$\Leftrightarrow x^2+3x=(y+2)^3+3\cdot(y+2)$$
$$\Leftrightarrow x=y+2 \ (*)$$

Từ (2) và (*) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x=y+2 \\ 4x^3+6xy+15x+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2=y \\ 4x^3+6x\cdot(x-2)+15x+3=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2=y \\ 4x^3+6x^2+3x+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2=y \\ 8x^3+12x^2+6x+6=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2x+1)^3=-5 \\ x-2=y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{-1-\sqrt[3]{5}}{2} \\ y=\dfrac{-5-\sqrt[3]{5}}{2} \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $\left(\dfrac{-1-\sqrt[3]{5}}{2};\dfrac{-5-\sqrt[3]{5}}{2}\right)$

Câu 100.

$$\begin{cases} x^2+y^2+xy=2 \\ x^3+y^3=2x+4y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2-xy=2-2xy \\ (x+y)(x^2+y^2-xy)=2x+4y \end{cases} \Rightarrow (x+y)(2-2xy)=2x+4y$$

$$\Leftrightarrow x^2y+xy^2+y=0 \Leftrightarrow y(x^2+xy+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ x^2+xy+1=0 \end{cases}$$

Với $y=0 \Rightarrow x=\pm\sqrt{2}$

Với $x^2+xy+1=0 \Rightarrow x^2+xy=-1 \Rightarrow y^2=\sqrt{3} \Rightarrow y=\pm\sqrt{3} \Rightarrow x^2 \pm \sqrt{3}x+1=0$ phương trình vô nghiệm

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x;y)=(\sqrt{2};0);(-\sqrt{2};0)$

Câu 101.

$$\begin{cases} (x^2-1)y+(y^2-1)x=2(xy-1);(1) \\ 4x^2+y^2+2x-y-6=0;(2) \end{cases}$$

từ PT (1) ta có : $x^2y+xy^2-(x+y)-2(xy-1)=0 \Leftrightarrow (x+y)(xy-1)-2(xy-1)=0$

$$\Leftrightarrow (x+y-2)(xy-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=2-x \\ xy=1 \end{array}\right.$$

thay vào PT (2) giải ra có 5 nghiệm

$$(xy) \in \left\{(1;1);(-0,5;2);\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2};\sqrt{3}+1\right);\left(\frac{-\sqrt{3}-1}{2};1-\sqrt{3}\right);\left(\frac{-4}{5};\frac{14}{5}\right)\right\}$$

Câu 102.

Với x = y = 0 là nghiệm của hệ phương trình

Nhận thấy nếu x $\neq 0$ thì y $\neq 0$ và ngược lại

Xét x $\neq 0$; y $\neq 0$ hệ phương trình tương đương với

$$\begin{cases} \frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=2 \\ (\frac{1}{x}+\frac{1}{y})(1+\frac{1}{xy})=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=2 & (1) \\ (\frac{1}{x}+\frac{1}{y})(2+\frac{2}{xy}) & (2) \end{cases}$$

Thay (1) vào (2) ta được $(\frac{1}{x}+\frac{1}{y})^3=8$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=2 \\ \frac{1}{xy}=1 \end{cases} \Rightarrow x=y=1$$

Vậy hệ có nghiệm (x ; y) là (0 ; 0) ; (1 ; 1)

Câu 103.

a) Khi $m=10$ hệ phương trình có dạng $\begin{cases}10x-2y=2\\2x+10y=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}10x-2y=2\\10x+50y=25\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{15}{52}\\y=\dfrac{23}{52}\end{cases}$

Vậy khi $m=10$ thì hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=\left(\dfrac{15}{52};\dfrac{23}{52}\right)$

b) Ta có: $\begin{cases}mx-2y=2\\2x+my=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=\dfrac{mx-2}{2}\\2x+my=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=\dfrac{mx-2}{2}\\2x+m\dfrac{mx-2}{2}=5\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}y=\dfrac{mx-2}{2}\\(m^2+4)x=2m+10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{2m+10}{m^2+4}\\y=\dfrac{mx-2}{2}\end{cases}$

Vậy hệ phương trình đã cho luôn có nghiệm duy nhất $\begin{cases}x=\dfrac{2m+10}{m^2+4}\\y=\dfrac{mx-2}{2}\end{cases}$

Thay vào hệ thức $x+y-2014=\dfrac{-2015m^2+14m-8056}{m^2+4}$.

Ta được $\dfrac{-2014m^2+7m-8050}{m^2+4}=\dfrac{-2015m^2+14m-8056}{m^2+4}\Leftrightarrow m^2-7m+6=0$

$\Leftrightarrow(m-1)(m-6)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\m=6\end{array}\right.$

Đối chiếu với điều kiện đề bài ta được $m=1;m=6$.

Câu 104.

$\begin{cases}3x^2+xy-4x+2y=2\\x(x+1)+y(y+1)=4\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}3x^2+xy-4x+2y-2=0\\x^2+y^2+x+y-4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x^2+xy-y^2-5x+y+2=0\\x^2+y^2+x+y-4=0\end{cases}$

Ta có: $2x^2+xy-y^2-5x+y+2=0\Leftrightarrow(y+x-2)(y-2x+1)=0$

$\Leftrightarrow y=2-x$ hoặc $y=2x-1$

Với $y=2-x$ thay vào (2) ta được: $x^2-2x+1=0$ suy ra $x=1$

Ta được nghiệm (1;1)

$y=2x-1$ thay vào (2) ta được: $5x^2-x-4=0$, suy ra $x=1; x=\dfrac{-4}{5}$

Ta được nghiệm (1;1) và $\left(\dfrac{-4}{5};\dfrac{-13}{5}\right)$

Vậy hệ có nghiệm (1;1) và $(\frac{-4}{5};\frac{-13}{5})$

Câu 105. $\begin{cases} mx+2y=m+1 \\ 2x+my=2m-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2mx+4y=2m+2 \\ 2mx+m^2y=2m^2-m \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (m^2-4)y=2m^2-3m-2=(m-2)(2m+1) \\ 2x+my=2m-1 \end{cases}$$

Để hệ có nghiệm duy nhất thì $m^2-4\neq 0$ hay $m\neq \pm 2$

Vậy với $m\neq \pm 2$ hệ phương trình có nghiệm duy nhất

$$\begin{cases} y=\dfrac{(m-2)(2m+1)}{m^2-4}=\dfrac{2m+1}{m+2}=2-\dfrac{3}{m+2} \\ x=\dfrac{m-1}{m+2}=1-\dfrac{3}{m+2} \end{cases}$$

Để x, y là những số nguyên thì $m+2\in Ư(3)=\{1;-1;3;-3\}$

Vậy: $m+2=\pm 1, \pm 3 \Rightarrow m = -1; -3; 1; -5$

Câu 106.

Từ hệ ta có $x^3(2y+x)=y^3(2x+y)\Leftrightarrow (x^2-y^2)\left(2xy+x^2+y^2\right)=0$

$$\Leftrightarrow (x+y)^3(x-y)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y \\ x=-y \end{array}\right.$$

* Với x = y ta tìm được $(x ; y) = (0; 0); (\sqrt{3};\sqrt{3});(-\sqrt{3};-\sqrt{3})$

* Với x = - y ta tìm được $(x ; y) = (0; 0); (1;-1);(-1;1)$

Vậy hệ phương trình có nghiệm

$(x ; y) = (0; 0); \sqrt{3};\sqrt{3});(-\sqrt{3};-\sqrt{3});(-1;1);(1;-1)$

Câu 107.

Giải hệ $\begin{cases} 4x^3-y^3=x+2y & (1) \\ 52x^2-82xy+21y^2=-9 & (2) \end{cases}$

Nhân vế trái của (1) với vế phải của (2) và nhân vế phải của (1) với vế trái của (2) ta có:

$$(-9)(4x^3-y^3)=(x+2y)(52x^2-82xy+21y^2)$$

$$\Leftrightarrow (-9)(4x^3-y^3)-(x+2y)(52x^2-82xy+21y^2)=0$$

$$\Leftrightarrow 8x^3+2x^2y-13xy^2+3y^3=0$$

$$\Leftrightarrow (8x^3-8xy^2)+(2x^2y-2xy^2)-(3y^3+3y^2x)=0$$

$$\Leftrightarrow 8x(x^2-y^2)+2xy(x-y)-3y^2(x-y)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)(8x^2+10xy-3y^2)=0$$

Biến đổi nhận được phương trình: $(x-y)(4x-y)(2x+3y)=0$

Với $x=y$ tìm được $(x;y)=(0;0)$ (thử vào hệ không thỏa mãn)

$(x;y)=(1;1);(-1;-1)$ (thử vào hệ thấy thỏa mãn)

Với $y=4x$ tìm được $(x;y)=(0;0)$ (thử vào hệ không thỏa mãn)

Với $y=\frac{-2}{3}x$ tìm được $(x;y)=(0;0)$ (thử vào hệ không thỏa mãn)

Vậy hệ có nghiệm $(x;y)=(1;1);(-1;-1)$

Câu 108.

Nhân cả hai vế của (2) với 2 ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}3x^2+2y^2-4xy+x+8y-4=0 \ (1)\\ 2x^2-2y^2+4x+2y-6=0 \qquad (2)\end{cases}$$

Lấy (1) trừ (2) theo vế với vế ta có

$$\left(x^2-4xy+4y^2\right)-3\left(x-2y\right)+2=0 \Leftrightarrow \left(x-2y\right)^2-3\left(x-2y\right)+2=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x-2y-1\right)\left(x-2y-2\right)=0 \Leftrightarrow x=2y+1 \text{ hoặc } x=2y+2.$$

+) Với $x=2y+1$, thế vào (2) và rút gọn ta có $y\left(y+3\right)=0 \Leftrightarrow y=0$ hoặc $y=-3.$

Suy ra $x=1,\ y=0$ hoặc $x=-5,\ y=-3.$

+) Với $x=2y+2$, thế vào (2) và rút gọn ta có $3y^2+13y+5=0 \Leftrightarrow y=\frac{-13+\sqrt{109}}{6}$ hoặc $y=\frac{-13-\sqrt{109}}{6}.$

Suy ra $x=\frac{-7+\sqrt{109}}{3},\ y=\frac{-13+\sqrt{109}}{6}$ hoặc $x=\frac{-7-\sqrt{109}}{3},\ y=\frac{-13-\sqrt{109}}{6}.$

Vậy hệ có 4 nghiệm $x=1,\ y=0;\ x=-5,\ y=-3;$

$$x=\frac{-7+\sqrt{109}}{3},\ y=\frac{-13+\sqrt{109}}{6};\ x=\frac{-7-\sqrt{109}}{3},\ y=\frac{-13-\sqrt{109}}{6}.$$

Câu 109. Từ các phương trình:

$3x-y=6$ ta có $y=3x-6$ $\qquad$ (d_1)

$mx+y=n+3$ ta có $y=-mx+n+3$ $\qquad$ (d_2)

a) Hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi: (d_1) cắt (d_2)

$\Leftrightarrow 3\neq -m$

$\Leftrightarrow m\neq -3$

b) Hệ phương trình đã cho vô nghiệm khi và chỉ khi: : (d_1) // (d_2)

$\Leftrightarrow$ m = -3 và n tùy ý

c) Hệ đã cho có vô số nghiệm khi và chỉ khi: : (d_1) trùng (d_2)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = -3 \\ n + 3 = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -3 \\ n = -9 \end{cases}$$

Câu 110.

$$\begin{cases} x + ay = 1 \\ x - 3ay = 2a + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - ay \\ a(1 - ay) - 3ay = 2a + 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - ay \\ -a(a + 3)y = a + 3 \end{cases}$$

Hệ phương trình vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} a(a+3) = 0 \\ a + 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = 0$

Câu 111.

Cách 1. Với m = 0 hệ có nghiệm duy nhất: $\begin{cases} x = 10 \\ y = 5 \end{cases}$

Với $m \neq 0$ hệ phương trình tương đương với: $\begin{cases} y = \dfrac{-m}{4}x + 5 & \text{(a)} \\ y = \dfrac{-1}{m}x + \dfrac{10}{m} & \text{(b)} \end{cases}$

Dễ thấy (a) và (b) là hai đường thẳng trong hệ tọa độ Oxy, số nghiệm của hệ là số giao điểm của hai đường thẳng (a) và (b).

a) Hệ phương trình đã cho vô nghiệm khi (a) và (b) song song tức là:

$$\begin{cases} \dfrac{-m}{4} = \dfrac{-1}{m} \\ 5 \neq \dfrac{10}{m} \end{cases} \Leftrightarrow m = -2$$

Vậy m = - 2 thì hệ đã cho vô nghiệm.

b) Hệ đã cho có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi (a) và (b) cắt nhau tức là:

$$\frac{-m}{4} \neq \frac{-1}{m} \Leftrightarrow m \neq \pm 2$$

c) Hệ đã cho có vô số nghiệm khi và chỉ khi (a) và (b) trùng nhau tức là:

$$\begin{cases} \dfrac{-m}{4} = \dfrac{-1}{m} \\ 5 = \dfrac{10}{m} \end{cases} \Leftrightarrow m = 2$$

Vậy khi m = 2 hệ đã cho có vô số nghiệm.

Cách 2. từ PT(2) suy ra: x = 10 – my thay vào (1) ta được:

$$y(4-m^2)=20-10m \qquad (3)$$

Ta có số nghiệm của hệ đã cho chính là số nghiệm của Phương trình (3)

a) Hệ đã cho vô nghiệm khi: $\begin{cases}20-10m\neq 0\\ 4-m^2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq 2\\ m=\pm 2\end{cases}\Leftrightarrow m=-2$

Vậy với m = - 2 thì hệ đã cho vô nghiệm.

b) Hệ có nghiệm duy nhất khi: $4-m^2\neq 0\Leftrightarrow m\neq\pm 2$

c) Hệ đã cho vô số nghiệm khi: $\begin{cases}20-10m=0\\ 4-m^2=0\end{cases}\Leftrightarrow m=2$

Câu 112. Giải hệ phương trình với *m* =2

Với *m* = 2, hệ phương trình là:

$$\begin{cases}x+y=5\\ x^2y+y^2x=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=5\\ xy(x+y)=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=5\\ xy=1\end{cases}.$$

Do đó, x, y là nghiệm của phương trình X^2-5X +1= 0

Giải ra ra được $X_1=\frac{5+\sqrt{21}}{2}, X_2=\frac{5-\sqrt{21}}{2}$.

Vậy hpt có hai nghiệm: $\left(\frac{5+\sqrt{21}}{2};\frac{5-\sqrt{21}}{2}\right),\left(\frac{5-\sqrt{21}}{2};\frac{5+\sqrt{21}}{2}\right)$.

b) Chứng minh rằng hệ luôn có nghiệm với mọi *m*

Hệ đã cho viết lại là: $\begin{cases}x+y=2m+1\\ xy(x+y)=(2m+1)(m-1)\end{cases}$

(1) Nếu $m=-\frac{1}{2}$ thì hệ trở thành: $\begin{cases}x+y=0\\ xy(x+y)=0\end{cases}\Leftrightarrow x+y=0\Leftrightarrow\begin{cases}x\in R\\ y=-x\end{cases}$.

Hệ có vô số nghiệm.

(2) Nếu $m\neq-\frac{1}{2}$ thì hệ trở thành: $\begin{cases}x+y=2m+1\\ xy=m-1\end{cases}$

Nên *x*,*y* là nghiệm phương trình: $X^2-(2m+1)X+m-1=0$ (*).

P/t (*) có $\Delta=(2m+1)^2-4(m-1)=4m^2+5>0,\forall m$ nên luôn có nghiệm.

Vậy hệ phương trình luôn có nghiệm với mọi *m*.

Câu 113. Giải hệ phương trình với $m=7$.

Với *m* = *7* ta có: $\begin{cases}2x^2-xy=1\\ 4x^2+4xy-y^2=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{2x^2-1}{x}=y\\ 4x^2+4xy-y^2=7\end{cases}$ (do $x=0$ không thỏa mãn).

$$\Rightarrow 4x^2+4x\frac{2x^2-1}{x}-\left(\frac{2x^2-1}{x}\right)^2=7$$

$$\Leftrightarrow 4x^4+4x^2\left(2x^2-1\right)-\left(2x^2-1\right)^2=7x^2 \Leftrightarrow 8x^4-7x^2-1=0 \Leftrightarrow \left(x^2-1\right)\left(x^2+\frac{1}{8}\right)=0$$

$\Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x=\pm 1.$

Với $x=1 \Rightarrow y=1$.

Với $x=-1 \Rightarrow y=-1$. Vậy hệ phương trình có hai nghiệm $\left(x;y\right)=\left(-1;-1\right),\left(1;1\right)$.

b) Tìm tất cả các giá trị của *m* để hệ phương trình có nghiệm.

Ta có $x=0$ không thỏa mãn suy ra $x \neq 0$.

Rút *y* từ PT thứ nhất rồi thế vào PT thứ hai ta có:

$$4x^2+4x\frac{2x^2-1}{x}-\left(\frac{2x^2-1}{x}\right)^2=m$$

Hệ có nghiệm $\Leftrightarrow 4x^4+4x^2\left(2x^2-1\right)-\left(2x^2-1\right)^2=mx^2$ có nghiệm khác 0.

$\Leftrightarrow 8x^4-mx^2-1=0$ có nghiệm khác 0. Đặt $t=x^2, t\geq 0.$ Thay vào phương trình trên ta được $8t^2-mt-1=0$ (1). Như vậy yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow (1)$ có nghiệm dương.

Dễ thấy phương trình (1) luôn có 2 nghiệm trái dấu do $ac<0$ suy ra (1) luôn có một nghiệm dương. Do đó với mọi số thực m hệ phương trình luôn có nghiệm.

Câu 114.

Bước 1. Tìm điều kiện để hệ đã cho có nghiệm duy nhất.

Từ (2) suy ra: x = m - (m - 1)y. Thế vào x = m - (m - 1)y vào (1) ta được:

$(m-1)(m-(m-1)y)=3m-1 \Leftrightarrow y(m^2-2m)=m^2-4m+3$ (3)

Hệ phương trình có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi (3) có nghiệm duy nhất tức là:

$$m^2-2m\neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ m\neq 2 \end{cases} (*)$$

Bước 2. Tìm m thỏa mãn điều kiện x + y = 2.

Với điều kiện m $\neq 0$ và m $\neq$ 2 hệ đã cho có nghiệm duy nhất là: $\begin{cases} x=\dfrac{3m-2}{m} \\ y=\dfrac{m-2}{m}. \end{cases}$

Với điều kiện x + y = 2 ta có: $\dfrac{3m-2}{m}+\dfrac{m-2}{m}=2 \Leftrightarrow 4m-4=2m \Leftrightarrow m=2$ (**)

Từ (*) và (**) suy ra không tồn tại m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 115.

Từ phương trình thứ 2 suy ra: y = - m – x . Thế vào phương trình thứ nhất ta được:

mx – m – x = -1 $\Rightarrow$ x(m - 1) = m – 1 (*)

Hệ có nghiệm duy nhất phương trình (*) phải có nghiệm duy nhất tức là m $\neq$ 1.

Khi đó, hệ có nghiệm duy nhất là $\begin{cases} x = 1 \\ y = -m-1 \end{cases}$

Ta có: y = x^2 $\Leftrightarrow -m-1=1 \Leftrightarrow m=-2$

Vậy m = - 2 là giá trị cần tìm.

Câu 116.

Ta có: $\begin{cases} 2x-3y=2-a \\ x+2y=3a+1 \end{cases}$ hệ đã cho có nghiệm (x, y) với $\begin{cases} x=a+1 \\ y=a \end{cases}$

Mà T = $\dfrac{y}{x} = \dfrac{a}{a+1} = 1 - \dfrac{1}{a+1}$

Vì a nguyên, để T nguyên thì điều kiện là $\left[\begin{array}{l} a+1=1 \\ a+1=-1 \end{array}\right.$ hay $\left[\begin{array}{l} a=0 \\ a=-2 \end{array}\right.$

Câu 117.

Ta có:

$$\begin{cases} x^3y^2-2x^2y-x^2y^2+2xy+3x-3=0 \quad (1) \\ y^2+x^{2017}=y+3m \quad (2) \end{cases}$$

Ta có (1) $\Leftrightarrow x^3y^2-x^2y^2-2x^2y+2xy+3x-3=0$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left(x^2y^2-2xy+3\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ (xy-1)^2+2=0 \quad (\text{Vô lý}) \end{array}\right.$$

Thay x = 1 vào phương trình (2) ta được $y^2-y-3m+1=0$ (3)

Để phương trình (3) có hai nghiệm phân biệt thì:

$$\Delta=1+4(3m-1)>0 \Leftrightarrow 12m-3>0 \Leftrightarrow m>\frac{1}{4}$$

Theo đề bài: $(x_1+y_2)(x_2+y_1)+3=0 \Leftrightarrow 4+y_1+y_2+y_1y_2=0$ (4)

do $x_1=x_2=1$.

Với $m>\dfrac{1}{4}$ theo hệ thức Vi-ét cho phương trình (3) ta có :

$\begin{cases} y_1+y_2=1 \\ y_1y_2=1-3m \end{cases}$ thay vào (4) ta có: $5+1-3m=0 \Leftrightarrow m=2$ (thỏa mãn)

Kết luận: m = 2.

Câu 118.

a) Khi m = $\sqrt{2}$ ta có hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{2}x - y = 2\\ 3x + \sqrt{2}y = 5\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}2x - \sqrt{2}y = 2\sqrt{2}\\ 3x + \sqrt{2}y = 5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = \dfrac{2\sqrt{2}+5}{5}\\ y = \sqrt{2}x - 2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = \dfrac{2\sqrt{2}+5}{5}\\ y = \dfrac{5\sqrt{2}-6}{5}\end{cases}$$

b) Giải tìm được: $x = \dfrac{2m+5}{m^2+3}$; $y = \dfrac{5m-6}{m^2+3}$

Thay vào hệ thức $x + y = 1 - \dfrac{m^2}{m^2+3}$; ta được $\dfrac{2m+5}{m^2+3} + \dfrac{5m-6}{m^2+3} = 1 - \dfrac{m^2}{m^2+3}$

Giải tìm được $m = \dfrac{4}{7}$

Câu 119. Ta thấy y = 0 không là nghiệm của hệ phương trình đã cho,

ta xét các giá trị $y \neq 0$, chia hai vế của PT thứ nhất cho $y \neq 0$ ta được

$$\begin{cases}\dfrac{x^2+1}{y} + x + y = 4\\ x + y - 2 = \dfrac{y}{x^2+1}\end{cases}$$

Đặt $u = \dfrac{x^2+1}{y}, v = x + y$ ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}u + v = 4\\ u(v-2) = 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}v = 4 - u\\ u(4-u-2) = 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}u = 1\\ v = 3\end{cases}$$

Với $\begin{cases}u = 1\\ v = 3\end{cases}$ ta có $\begin{cases}\dfrac{x^2+1}{y} = 1\\ x + y = 3\end{cases}$ (*)

Giải hệ PT (*) ta được hai nghiệm (-2; 5) , (1; 2)

Vậy hệ PT ban đầu có hai nghiệm (-2; 5) , (1; 2)

Câu 120.

+ Với y = -2 thì hệ phương trình vô nghiệm

+ Với $y \neq -2$, chia hai vế của hai phương trình cho y + 2 ta có

$$\begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{y+2}(x+y+2)=4 \\ \dfrac{x^2+y^2}{y+2}+x+y-2=0 \end{cases}$$

Đặt $a=\dfrac{x^2+y^2}{y+2},\ b=x+y+2$

Khi đó ta có hệ phương trình $\begin{cases} a+b=4 \\ ab=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=4 \\ (a-2)^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=2 \end{cases}$

Do đó $\begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{y+2}=2 \\ x+y+2=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x \\ x^2+x-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1, y=-1 \\ x=-2, y=2 \end{array}\right.$

Kết hợp với điều kiện thì hệ phương trình có hai nghiệm (x; y): (1; -1), (-2; 2)

Mục lục

TỦ SÁCH TOÁN CẤP 2

MỌI Ý KIẾN THẮC MẮC XIN VUI LÒNG GỬI VỀ ĐỊA CHỈ

NGUYỄN QUỐC BẢO

Zalo: 039.373.2038

Tailieumontoan.com@gmail.com

Website: www.facebook.com/baotoanthcs