

MỤC LỤC

Nội dung	Trang
A. Mở đầu	1
I. Lí do chọn đề tài	1
II. Mục đích nghiên cứu	1
III. Đối tượng nghiên cứu	1
IV. Phương pháp nghiên cứu	1
B. Nội dung SKKN	2
I) KIẾN THỨC CƠ BẢN ĐỂ GIẢI QUYẾT DẠNG TOÁN NÀY	2
II) CÁC BÀI TOÁN ĐIỂN HÌNH SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP	3
1. Hàm đặc trưng có dạng hàm số đa thức bậc 2, bậc 3, bậc 4	3
2. Hàm đặc trưng có dạng hàm số chứa căn thức	10
3. Sử dụng phương pháp thế, cộng đại số sau đó kết hợp với phương pháp hàm số	15
IV. Hiệu quả do sáng kiến đem lại	18
V. Đề xuất, kiến nghị	18
Danh mục các tài liệu tham khảo	20

A. MỞ ĐẦU

I. LÍ DO CHỌN ĐỀ TÀI

Trong những năm gần đây, các đề thi đại học và học sinh giỏi luôn xuất hiện bài toán giải hệ với độ khó ngày càng tăng. Một trong những loại hệ hay gặp trong các kỳ thi và gây cho học sinh khó khăn khi tiếp cận là loại hệ trong đó có sử dụng phương pháp hàm số.

Do vậy, việc cần tìm ra một con đường ngắn nhất, lựa chọn hàm số thích hợp, thực hiện các thao tác đơn giản, tiết kiệm tối đa thời gian để giải toán là một vấn đề tôi luôn trăn trở.

Trong bài viết này tôi muốn trình bày một số kinh nghiệm tư duy áp dụng để tìm con đường khai thông nhằm giải quyết bài toán một cách gọn gàng. Bằng việc sử dụng một số bài toán ở mức độ thi đại học và thi học sinh giỏi làm ví dụ minh họa, tôi đi sâu vào việc phân tích các khả năng tiếp cận lời giải, dẫn ra những cách giải tương ứng, đưa ra những phân tích, nhận xét phù hợp, để từ đó học sinh có thể nắm bắt được ý tưởng, con đường tư duy mà mỗi người làm toán cần rèn luyện khi đứng trước một bài toán giải hệ.

II) MỤC ĐÍCH NGHIÊN CỨU

- Rèn luyện kỹ năng sử dụng phương pháp hàm số để giải hệ.
- Rèn luyện tư duy logic, khả năng nhìn nhận, đánh giá chung nhằm tìm ra con đường hợp lý để có định hướng nhằm đưa ra giải pháp tốt nhất khi gặp một bài toán cụ thể.
- Rèn luyện các kỹ năng tổng hợp về tư duy và kỹ xảo toán học.

III) ĐỐI TƯỢNG NGHIÊN CỨU:

- Các bài toán giải hệ có thể sử dụng phương pháp hàm số để giải quyết
- Các dạng toán về hệ trong các kì thi HSG và Đại học trong những năm gần đây.

IV) PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU:

- Nghiên cứu xây dựng cơ sở lý thuyết giải bài toán hệ bằng phương pháp hàm số
- Nghiên cứu khả năng áp dụng trên cơ sở thực tiễn tiếp thu của các đối tượng học sinh đã và đang được truyền thụ.

B. NỘI DUNG SÁNG KIẾN KINH NGHIỆM

I) KIẾN THỨC CƠ BẢN ĐỂ GIẢI QUYẾT DẠNG TOÁN NÀY

- **Tính chất 1:** Giả sử hàm số $y = f(x)$ đồng biến (nghịch biến) trên miền D và $u, v \in D$, khi đó $f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v$.
- **Tính chất 2:** Nếu hàm số $y = f(x)$ **đồng biến** trên D và $y = g(x)$ là **hàm hằng** hoặc là một hàm số **nghịch biến** trên D thì phương trình $f(x) = g(x)$ có nhiều nhất một nghiệm thuộc khoảng D .
- Khi gặp hệ có dạng
$$\begin{cases} f(x) = f(y) & (1) \\ g(x; y) = 0 & (2) \end{cases}$$

Xét hàm số $y = f(t)$, ta thường gặp trường hợp hàm số liên tục trong tập xác định của nó.

Nếu hàm số $y = f(t)$ đơn điệu, thì từ (1) suy ra $x = y$. Khi đó bài toán đưa về giải phương trình (2) theo ẩn x (hoặc y).

Nếu hàm số $y = f(t)$ có một cực trị tại $t = a$ thì nó thay đổi chiều biến thiên một lần khi qua a . Từ (1) suy ra $x = y$ hoặc x, y nằm về hai phía của a .

- Vận dụng linh hoạt các định lý, tính chất trên, từ một phương trình ẩn x , ta sẽ đưa hai vế về dạng $f[h(x)] = f[g(x)]$

II) CÁC BÀI TOÁN ĐIỂN HÌNH SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP

1. Hàm đặc trưng có dạng hàm số đa thức bậc 2, bậc 3, bậc 4

Bài 1. Giải hệ :

$$\begin{cases} (4x^2 + 1)x + (y - 3)\sqrt{5 - 2y} = 0 & (1) \\ 4x^2 + y^2 + 2\sqrt{3 - 4x} = 7 & (2) \end{cases}$$

Phân tích: Ta nhận thấy khó có thể bắt đầu với phương trình (2), để ý đến phương trình (1), $4x^2 + 1$ là biểu thức bậc hai của x và $y - 3$ có thể coi là biểu thức bậc hai của $\sqrt{5 - 2y}$. Nếu đặt $t = \sqrt{5 - 2y}$ thì

$$(y - 3)\sqrt{5 - 2y} = \left(\frac{5 - t^2}{2} - 3 \right) t = \frac{-1}{2}(t^2 + 1)t$$

Biểu thức $(t^2 + 1)t$ có hình thức giống với $(4x^2 + 1)2x$, do vậy ta sẽ biến đổi (1) về dạng $f(u) = f(v)$. Để đưa về dạng này ta thường “cô lập” biến, do vậy sẽ chuyển $(y - 3)\sqrt{5 - 2y}$ sang vế phải của (1).

Giải: Điều kiện $x \leq \frac{3}{4}; y \leq \frac{5}{2}$. Khi đó (1) $\Leftrightarrow (4x^2 + 1)2x = (5 - 2y + 1)\sqrt{5 - 2y}$ (3)

Xét hàm số $f(t) = (t^2 + 1)t = t^3 + t$, với $t \in \mathbb{R}$

Ta có $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ nên $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ (3) $\Leftrightarrow 2x = \sqrt{5 - 2y}$

Thay $y = \frac{5 - 4x^2}{2}$ vào (2) ta được: $4x^2 + \left(\frac{5}{2} - 2x^2 \right)^2 + 2\sqrt{3 - 4x} - 7 = 0$ (4)

Phân tích: Phương trình (4) trông khá “phức tạp” nên ta định hướng sử dụng phương pháp hàm số để giải quyết

Nhận thấy $x = 0$ và $x = \frac{3}{4}$ không là nghiệm của phương trình (4)

Xét hàm số $g(x) = 4x^2 + \left(\frac{5}{2} - 2x^2 \right)^2 + 2\sqrt{3 - 4x} - 7$ với $x \in \left(0; \frac{3}{4} \right)$, ta có:

$$g'(x) = 8x - 8x \left(\frac{5}{2} - 2x^2 \right) - \frac{4}{\sqrt{3 - 4x}} = 4x(4x^2 - 3) - \frac{4}{\sqrt{3 - 4x}} < 0, \forall x \in \left(0; \frac{3}{4} \right)$$

Do đó $g(x)$ nghịch biến trên $\left(0; \frac{3}{4} \right)$. Mà $g\left(\frac{1}{2} \right) = 0$ nên phương trình (4) có

nghiệm duy nhất $x = \frac{1}{2}$ suy ra $y = 2$. Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x; y) = \left(\frac{1}{2}; 2 \right)$.

Bài 2. Giải hệ
$$\begin{cases} 2x^3 - 4x^2 + 3x - 1 = 2x^3(2 - y)\sqrt{3 - 2y} & (1) \\ \sqrt{x + 2} = \sqrt[3]{14 - x\sqrt{3 - 2y}} + 1 & (2) \end{cases}$$

Phân tích: Ta không thể bắt đầu với phương trình (2) vì khó có sự biến đổi nào hợp lý ở đây. Xét phương trình (1), thực hiện cô lập biến bằng, chia hai vế cho x^3 ta thấy vế trái là bậc ba đối với $\frac{1}{x}$, vế phải là bậc ba đối với $t = \sqrt{3-2y}$, do vậy ta có thể biến đổi đưa về dạng $f(u) = f(v)$.

HD: Điều kiện: $\begin{cases} x \geq -2 \\ y \leq \frac{3}{2} \end{cases}$ Xét thấy $x = 0$ không thỏa mãn hệ, nên chia hai vế của

phương trình (1) cho x^3 ta được:

$$(1) \Leftrightarrow -\frac{1}{x^3} + \frac{3}{x^2} - \frac{4}{x} + 2 = (4-2y)\sqrt{3-2y} \Leftrightarrow \left(1 - \frac{1}{x}\right)^3 + \left(1 - \frac{1}{x}\right) = (\sqrt{3-2y})^3 + \sqrt{3-2y} \quad (3)$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t$, $t \in \mathbb{R}$. Ta có $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$ nên hàm số $f(t)$

Hệ có nghiệm duy nhất $x = 7 \Rightarrow y = \frac{111}{98}$.

Bài 3. (Khối A năm 2012) Giải hệ:
$$\begin{cases} x^3 - 3x^2 - 9x + 22 = y^3 + 3y^2 - 9y \\ x^2 + y^2 - x + y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Phân tích: Hai vế của phương trình đầu đều có dạng bậc 3 (với hai biến x, y), nên ta định hướng đưa phương trình đầu về dạng $f(u) = f(v)$, tuy nhiên hàm đặc trưng lúc đó $f(t) = t^3 - 12t$ không đơn điệu trên $\mathbb{R}$ do đó ta phải chặn biến. Nhìn vào phương trình thứ 2 ta thấy đưa được về $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = 1$

suy ra $\left|x - \frac{1}{2}\right| \leq 1; \left|y + \frac{1}{2}\right| \leq 1$.

Giải: Hệ tương đương với:
$$\begin{cases} (x-1)^3 - 12(x-1) = (y+1)^3 - 12(y+1) & (1) \\ \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = 1 & (2) \end{cases}$$

Từ (2), suy ra
$$\begin{cases} -1 \leq x - \frac{1}{2} \leq 1 \\ -1 \leq y + \frac{1}{2} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{3}{2} \leq x - 1 \leq \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \leq y + 1 \leq \frac{3}{2} \end{cases}$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 - 12t$ trên $\left[-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right]$, ta có $f'(t) = 3(t^2 - 4) < 0$, suy ra $f(t)$

nghịch biến. Do đó $(1) \Leftrightarrow x - 1 = y + 1 \Leftrightarrow y = x - 2$ (3)

Hệ có nghiệm là $(x; y) = \left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right); (x; y) = \left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right)$

Bài 4. Giải hệ
$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 3(x - y^2) + 2 & (1) \\ x^2 + \sqrt{1 - x^2} - 3\sqrt{2y - y^2} + 2 = 0 & (2) \end{cases}$$

Giải: Điều kiện $-1 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 2$.

Ta có $(1) \Leftrightarrow x^3 - 3x = (y - 1)^3 - 3(y - 1)$ (3). Do $0 \leq y \leq 2 \Rightarrow -1 \leq y - 1 \leq 1$

Xét hàm số $f(t) = t^3 - 3t$ với $-1 \leq t \leq 1$, có $f'(t) = 3t^2 - 3 \leq 0, \forall t \in [-1; 1]$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[-1; 1]$.

Do đó $(3) \Leftrightarrow f(x) = f(y - 1) \Leftrightarrow x = y - 1$ hay $y = x + 1$. Thế vào (2) ta được

$$x^2 + \sqrt{1 - x^2} - 3\sqrt{1 - x^2} + 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2 = 2\sqrt{1 - x^2} \Leftrightarrow x^4 + 8x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Với $x = 0 \Rightarrow y = 1$ (t/m điều kiện). Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(x; y) = (0; 1)$.

Bài 5. Giải hệ :
$$\begin{cases} y^3 + 3y = (x + 5)\sqrt{x + 2} & (1) \\ 2x^2 + 16 = 3(2y^2 + y\sqrt{x^2 - 2x + 4}) & (2) \end{cases}$$

Giải Điều kiện $x \geq -2, y \in \mathbb{R}$. $(1) \Leftrightarrow y^3 + 3y = \sqrt{(x + 2)^3} + 3\sqrt{x + 2}$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 3t, t \in \mathbb{R}$ có $f'(t) = 3t^2 + 3 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$,

Phương trình (1) có dạng: $f(y) = f(\sqrt{x + 2}) \Leftrightarrow y = \sqrt{x + 2}$

Thay vào (2) ta được $2x^2 + 16 = 3(2(x + 2) + \sqrt{x + 2}\sqrt{x^2 - 2x + 4})$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 6x + 4 = 3\sqrt{x+2}\sqrt{x^2 - 2x + 4} \Leftrightarrow 2(x^2 - 2x + 4) - 2(x+2) = 3\sqrt{x+2}\sqrt{x^2 - 2x + 4}$$

Đặt $u = \sqrt{x+2}, v = \sqrt{x^2 - 2x + 4}, (u \geq 0, v > 0)$ phương trình trở thành

$$2v^2 - 3uv - 2u^2 = 0 \quad (3)$$

Do $v > 0$, chia hai vế phương trình (3) cho v^2 ta được:

$$2\left(\frac{u}{v}\right)^2 + 3\left(\frac{u}{v}\right) - 2 = 0 \Leftrightarrow \frac{u}{v} = \frac{1}{2} \text{ hoặc } \frac{u}{v} = -2.$$

Vậy hệ có nghiệm $(x; y)$ là: $(3 + \sqrt{13}; \sqrt{5 + \sqrt{13}}), (3 - \sqrt{13}; \sqrt{5 - \sqrt{13}})$.

Bài 6. Giải hệ
$$\begin{cases} x^3 - 2y^3 + 3(x - 2y) = 3xy(x - y) & (1) \\ 2x^3 = (1 + 4y - 3x^2)\sqrt{2x+1} & (2) \end{cases}$$

Giải: Điều kiện: $x \geq -\frac{1}{2}$. Phương trình (1) $\Leftrightarrow (x - y)^3 + 3(x - y) = y^3 + 3y \quad (3)$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 3t$, với $t \in \mathbb{R}$.

Ta có $f'(t) = 3t^2 + 3 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ nên $f(t) = t^3 + 3t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Khi đó: (3) có dạng $f(x - y) = f(y) \Leftrightarrow x - y = y \Leftrightarrow x = 2y$.

Thế vào (2) ta được: $2x^3 = (1 + 2x - 3x^2)\sqrt{2x+1} \quad (4)$

Đặt $t = \sqrt{2x+1}, t \geq 0$, khi đó (4) trở thành: $2x^3 = t^3 - 3x^2t \Leftrightarrow 2x^3 + 3x^2t - t^3 = 0$

Vậy hệ đã cho có hai nghiệm $(x; y)$ là: $\left(1 - \sqrt{2}; \frac{1 - \sqrt{2}}{2}\right)$ và $\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{4}; \frac{1 + \sqrt{5}}{8}\right)$

Bài 7. Giải hệ
$$\begin{cases} 2x^3y + y^3 = x^6 + 2x^4 & (1) \\ (x+2)\sqrt{y+1} = (x+1)^2 & (2) \end{cases}$$

Giải: Điều kiện $y \geq -1$. Do $x = 0$ không thỏa mãn nên chia hai vế của phương

trình (1) cho x^3 ta được: $(1) \Leftrightarrow \left(\frac{y}{x}\right)^3 + 2\frac{y}{x} = x^3 + 2x \quad (3)$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 2t, t \in \mathbb{R}$.

Ta có: $f'(t) = 3t^2 + 2 \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

Do đó (3) $\Leftrightarrow f\left(\frac{y}{x}\right) = f(x) \Leftrightarrow \frac{y}{x} = x \Leftrightarrow y = x^2$

Thế $y = x^2$ vào (2) ta được:

$$(x+2)\sqrt{x^2+1} = x^2 + 2x + 1 \Leftrightarrow (x+2)(\sqrt{x^2+1} - x) = 1$$

Ta có $\sqrt{x^2+1} + x > |x| + x \geq 0$ nên nhân hai vế của phương trình trên với $\sqrt{x^2+1} + x$ ta được: $x+2 = \sqrt{x^2+1} + x \Leftrightarrow x^2+1=4 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}$

Vậy hệ có nghiệm: $(x; y) = (-\sqrt{3}; 3), (x; y) = (\sqrt{3}; 3)$.

Bài 8. Giải hệ
$$\begin{cases} y^3 + y = x^3 + 3x^2 + 4x + 2 & (1) \\ \sqrt{1-x^2} - \sqrt{y} = \sqrt{2-y} - 1 & (2) \end{cases}$$

Giải: Điều kiện $-1 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 2$. (1) $\Leftrightarrow (x+1)^3 + x + 1 = y^3 + y$ (3)

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t, t \in \mathbb{R}$ có $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$

Do đó, (3) $\Leftrightarrow f(x+1) = f(y) \Leftrightarrow y = x+1$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x; y) = (0; 1)$.

Bài 9. Giải hệ
$$\begin{cases} \sqrt{3x-1} + 4(2x+1) = \sqrt{y-1} + 3y & (1) \\ (x+y)(2x-y) + 4 = -6x - 3y & (2) \end{cases}$$

Giải : Điều kiện : $x \geq \frac{1}{3}; y \geq 1$. (2) $\Leftrightarrow (x+y+1)(2x-y+4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+1=0 \\ 2x-y+4=0 \end{cases}$

Với $y+x+1=0$ suy ra vô nghiệm vì $x \geq \frac{1}{3}; y \geq 1$.

Với $2x-y+4=0 \Leftrightarrow y=2x+4$, thay vào (1) ta có :

$$\begin{aligned} \sqrt{3x-1} + 4(2x+1) &= \sqrt{2x+3} + 3(2x+4) \Leftrightarrow \\ 2(3x-1) + \sqrt{3x-1} &= 2(2x+3) + \sqrt{2x+3} \quad (3) \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = 2t^2 + t, t \geq 0$ ta có $f'(t) = 4t + 1 > 0, \forall t \geq 0$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[0; +\infty)$.

Do đó (3) $\Leftrightarrow f(\sqrt{3x-1}) = f(\sqrt{2x+3}) \Leftrightarrow \sqrt{3x-1} = \sqrt{2x+3} \Leftrightarrow x=4 \Rightarrow y=12$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x; y) = (4; 12)$

Bài 10. Giải hệ
$$\begin{cases} x^3(2+3y)=1 \\ x(y^3-2)=1 \end{cases}$$

Giải

- Với $x = 0$ dễ thấy không thỏa mãn hệ trên.
- Với $x \neq 0$, ta có:
$$\begin{cases} 2+3y=\frac{1}{x^3} \\ y^3-2=\frac{1}{x} \end{cases} \Rightarrow y^3+3y=\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x} \quad (1)$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 3t, t \in \mathbb{R}$ có $f'(t) = 3t^2 + 3 > 0$ với mọi $t \in \mathbb{R}$ nên hàm số

$f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Do đó, (1) có dạng $f(y) = f\left(\frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow y = \frac{1}{x}$.

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x; y)$ là: $(-1; -1), \left(\frac{1}{2}; 2\right)$.

Bài 11. Giải hệ
$$\begin{cases} x^3(3y+55)=64 & (1) \\ xy(y^2+3y+3)=12+51x & (2) \end{cases}$$

Giải: Với $x = 0$ hoặc $y = 0$ thì hệ không được thỏa mãn.

Với $x \neq 0, y \neq 0$, HPT $\Leftrightarrow \begin{cases} 3y+55=\frac{64}{x^3} \\ y^3+3y^2+3y=\frac{12}{x}+51 \end{cases}$

Cộng theo vế lại ta được: $(y+1)^3 + 3(y+1) = \left(\frac{4}{x}\right)^3 + 3 \cdot \frac{4}{x} \quad (3)$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 3t, t \in \mathbb{R}$ có $f'(t) = 3t^2 + 3 > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$

Phương trình (3) có dạng $f(y+1) = f\left(\frac{4}{x}\right) \Leftrightarrow y+1 = \frac{4}{x} \Leftrightarrow xy = 4 - x$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x; y) = (1; 3)$.

Bài 12. Giải hệ
$$\begin{cases} y^3 + 3xy - 17x + 18 = x^3 - 3x^2 + 13y - 9 & (1) \\ x^2 + y^2 + xy - 6y - 5x + 10 = 0 & (2) \end{cases}$$

HD: Nhân hai vế của phương trình (2) với -3 rồi cộng với (1) ta được:

$$y^3 - 17x + 18 - 3x^2 - 3y^2 + 18y + 15x - 30 = x^3 - 3x^2 + 13y - 9$$

$$\Leftrightarrow (y-1)^3 + 2(y-1) = x^3 + 2x \quad (3)$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x; y)$ là: $(1; 2)$ và $\left(\frac{5}{3}; \frac{8}{3}\right)$.

Bài 13. Giải hệ:
$$\begin{cases} (x-y+1)(x+y+1) = 4\sqrt{x+1} - 4\sqrt{y} & (1) \\ x(y-2) = 2 - 2\sqrt{x+1} & (2) \end{cases}$$

Giải. Điều kiện: $x \geq -1, y \geq 0$

Ta có, $(1) \Leftrightarrow (x+1)^2 - 4\sqrt{x+1} = y^2 - 4\sqrt{y} \quad (3)$ Xét hàm số

$$f(t) = t^4 - 4t, t \in [0; +\infty)$$

$$f'(t) = 4t^3 - 4 = 4(t^3 - 1), f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1$$

Bảng biến thiên

t	0	1	$+\infty$
$f'(t)$	-	0	+
$f(t)$	0	-3	$+\infty$

Ta có $(3) \Leftrightarrow f(\sqrt{x+1}) = f(\sqrt{y})$.

Vậy hệ có 2 nghiệm $(x; y): (-1; 0), (0; 1)$.

Bài 14. Giải hệ
$$\begin{cases} x^4 + 2x^3y - 2x^2y^2 - 12xy^3 + 8y^4 + 1 = 0 & (1) \\ y^4 + (x^3 + y)^2 = 1 + x^6 + \sqrt{1 - 2x^3y} & (2) \end{cases}$$

Giải. Điều kiện: $1 - 2x^3y \geq 0$

Ta có: $(2) \Leftrightarrow y^4 + y^2 = 1 - 2x^3y + \sqrt{1 - 2x^3y} \quad (3)$

Xét hàm số: $f(t) = t^2 + t$ với $t \geq 0$, có $f'(t) = 2t + 1 > 0$ với mọi $t \geq 0$

Nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[0; +\infty)$ mà $y^2; \sqrt{1 - 2x^3y} \in [0; +\infty)$ nên:

$$(3) \Leftrightarrow f(y^2) = f(\sqrt{1-2x^3y}) \Leftrightarrow y^2 = \sqrt{1-2x^3y} \Leftrightarrow y^4 + 2x^3y = 1 \quad (4)$$

$$\text{Thay } 1 = y^4 + 2x^3y \text{ vào (1) ta được: } x^4 + 4x^3y - 2x^2y^2 - 12xy^3 + 9y^4 = 0 \quad (5)$$

Do $y = 0$ không thỏa mãn nên chia hai vế phương trình (5) cho y^4 ta được:

$$\left(\frac{x}{y}\right)^4 + 4\left(\frac{x}{y}\right)^3 - 2\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 12\left(\frac{x}{y}\right) + 9 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{y} - 1\right)^2 \cdot \left(\frac{x}{y} + 3\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x = -3y \end{cases}$$

$$\text{Với } x = y, \text{ thay vào (4) ta có: } 3x^4 = 1 \Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$$

$$\text{Với } x = -3y, \text{ cũng từ (4) ta có: } -53y^4 = 1 \text{ (vô nghiệm)}$$

$$\text{Vậy hệ đã cho có nghiệm } (x; y) \text{ là: } \left(\frac{1}{\sqrt[4]{3}}; \frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt[4]{3}}; -\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right).$$

2. Hàm đặc trưng có dạng hàm số chứa căn thức

Bài 1. Giải hệ
$$\begin{cases} x^3(4y^2 + 1) + 2(x^2 + 1)\sqrt{x} = 6 & (1) \\ x^2y(2 + 2\sqrt{4y^2 + 1}) = x + \sqrt{x^2 + 1} & (2) \end{cases}$$

Phân tích: Trong phương trình (2) có hai biểu thức có cùng dạng là $\sqrt{4y^2 + 1}$ và $\sqrt{x^2 + 1}$ nên gợi ý cho ta sử dụng phương pháp hàm số đưa về dạng $f(u) = f(v)$. Đến đây ta “cô lập biến” bằng cách chia hai vế của (2) cho x^2 .

Giải: Điều kiện $x \geq 0$. Nhận thấy $x = 0$ không thỏa mãn hệ, chia 2 vế của (2)

$$\text{cho } x^3 \text{ ta được: } (2y) + 2y\sqrt{(2y)^2 + 1} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} \quad (3)$$

Xét hàm số $f(t) = t + t\sqrt{t^2 + 1}$ với $t \in \mathbb{R}$. Ta có

$$f'(t) = 1 + \sqrt{t^2 + 1} + \frac{t^2}{\sqrt{t^2 + 1}} > 0, \forall t \in \mathbb{R}$$

Nên $f(t)$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$. Do đó, (3) $\Leftrightarrow 2y = \frac{1}{x}$

$$\text{Thế vào phương trình (1) ta được: } g(x) = x + x^3 + 2(x^2 + 1)\sqrt{x} = 6 \quad (4)$$

Ta có $g'(x) = 1 + 3x^2 + 4x\sqrt{x} + \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x}} > 0, \forall x > 0$

Nên hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$, mà có $g(1) = 6$ nên phương trình (4)

có nghiệm duy nhất $x = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{2}$. Vậy, hệ đã cho có nghiệm $(x; y) = \left(1; \frac{1}{2}\right)$.

Bài 2. (ĐH-A13) Giải hệ
$$\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt[4]{x-1} - \sqrt{y^4+2} = y & (1) \\ x^2 + 2x(y-1) + y^2 - 6y + 1 = 0 & (2) \end{cases}$$

Giải: ĐK $x \geq 1$. Coi (2) là phương trình bậc hai ẩn x , điều kiện để tồn tại x là

$$\Delta' = (y-1)^2 - y^2 + 6y - 1 = 4y \geq 0 \Leftrightarrow y \geq 0$$

Đặt $u = \sqrt[4]{x-1}$, suy ra $u \geq 0$. Phương trình (1) $\Leftrightarrow \sqrt{u^4+2} + u = \sqrt{y^4+2} + y$ (3)

Xét $f(t) = \sqrt{t^4+2} + t$, với $t \geq 0$. Ta có $f'(t) = \frac{2t^3}{\sqrt{t^4+2}} + 1 > 0, \forall t \geq 0$

Do đó phương trình (3) tương đương với $y = u$, nghĩa là $x = y^4 + 1$.

Thay vào phương trình (2) ta được: $y(y^7 + 2y^4 + y - 4) = 0$ (4)

Hàm $g(y) = y^7 + 2y^4 + y - 4$ có $g'(y) = 7y^6 + 8y^3 + 1 > 0$ với $\forall y \geq 0$.

Mà $g(1) = 0$, nên (4) có hai nghiệm không âm là $y = 0$ và $y = 1$

Với $y = 0$ ta được nghiệm $(x; y) = (1; 0)$; với $y = 1$ ta được nghiệm $(x; y) = (2; 1)$

Vậy nghiệm $(x; y)$ của hệ đã cho là $(1; 0)$ và $(2; 1)$.

Bài 3. Giải hệ
$$\begin{cases} (\sqrt{x^2+1} + x)(\sqrt{y^2+1} + y) = 1 & (1) \\ 4\sqrt{x+2} + \sqrt{22-3x} = y^2 + 8 & (2) \end{cases}$$

Giải: Điều kiện: $-2 \leq x \leq \frac{22}{3}$. Do $\sqrt{1+y^2} - y > \sqrt{y^2} - y = -y + |y| \geq 0, \forall y \in \mathbb{R}$

Nên nhân hai vế của phương trình (1) với $\sqrt{1+y^2} - y$ ta được

$$(1) \Leftrightarrow x + \sqrt{1+x^2} = (-y) + \sqrt{(-y)^2 + 1} \quad (3)$$

Xét hàm số $h(t) = t + \sqrt{t^2 + 1}, t \in \mathbb{R}$

Ta có $h'(t) = 1 + \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} = \frac{\sqrt{t^2+1}+t}{\sqrt{t^2+1}} > \frac{|t|+t}{\sqrt{t^2+1}} \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}$

Suy ra hàm số $h(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó (3) $\Leftrightarrow x = -y$. Thay vào (2) ta có; $4\sqrt{x+2} + \sqrt{22-3x} = x^2 + 8$

Nhẩm được nghiệm $x = 2$, thực hiện nhân liên hợp ta thu được nghiệm $x = 2$ và

$$\frac{4}{\sqrt{x+2}+2} - \frac{3}{\sqrt{22-3x}+4} = x+2 \quad (*)$$

đặt $VT = f(x); VP = g(x)$

Ta có: $f'(x) = \frac{-4}{2\sqrt{x+2} \cdot (2+\sqrt{x+2})^2} - \frac{9}{2\sqrt{22-3x} \cdot (2+\sqrt{22-3x})^2} < 0$ và

$g'(x) = 1 > 0$ với $\forall x \in \left(-2; \frac{22}{3}\right)$.

Suy ra $f(x)$ nghịch biến, $g(x)$ đồng biến trên $\left[-2; \frac{22}{3}\right]$

Mà $f(-1) = g(-1) = 1$ suy ra phương trình (*) có nghiệm duy nhất $x = -1$

Vậy nghiệm $(x; y)$ của hệ đã cho: $(2; -2), (-1; 2)$

Bài 4. Giải hệ:
$$\begin{cases} 2(x-2)\sqrt{x+6} = 6-y & (1) \\ (x-2)\sqrt{y+2} = \sqrt{y+1}\sqrt{x^2-4x+5} & (2) \end{cases}$$

Giải: Điều kiện: $x \geq -6; y \geq -1$.

(2) $\Leftrightarrow \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+5}} = \frac{\sqrt{y+1}}{\sqrt{y+2}} \Leftrightarrow \frac{x-2}{\sqrt{(x-2)^2+1}} = \frac{\sqrt{y+1}}{\sqrt{(\sqrt{y+1})^2+1}} \quad (3)$

Xét hàm số $f(t) = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}, t \in \mathbb{R}$, có $f'(t) = \frac{1}{(t^2+1)\sqrt{t^2+1}} > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ nên hàm số

$f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó, (3) $\Leftrightarrow f(x-2) = f(\sqrt{y+1}) \Leftrightarrow x-2 = \sqrt{y+1} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ y = x^2 - 4x + 3 \end{cases}$

Thay vào (1) ta được

$$2(x-2)\sqrt{x+6} = -x^2 + 4x + 3 \Leftrightarrow 2(x-2)(\sqrt{x+6} - 3) = -x^2 - 2x + 15$$

$$\Leftrightarrow 2(x-2)\frac{x-3}{\sqrt{x+6}+3} = -(x-3)(x+5) \Leftrightarrow (x-3)\left(\frac{2x-4}{\sqrt{x+6}+3} + x+5\right) = 0$$

Do $x \geq 2$ nên $\frac{2x-4}{\sqrt{x+6}+3} + x+5 \geq 7$ nên phương trình trên chỉ có nghiệm $x=3$,

suy ra $y=0$. Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x; y) = (3; 0)$.

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x; y)$ là $(1; 3); \left(2; \frac{3}{2}\right)$

Bài 5. Giải hệ

$$\begin{cases} (x + \sqrt{x^2 + 1})(y + \sqrt{y^2 + 1}) = 1 & (1) \\ y + \frac{y}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{35}{12} & (2) \end{cases}$$

Giải : Điều kiện $x^2 > 1$. Do $\sqrt{y^2 + 1} - y > \sqrt{y^2} - y \geq 0$, nên

$$(1) \Leftrightarrow (x + \sqrt{x^2 + 1})(y + \sqrt{y^2 + 1})(\sqrt{y^2 + 1} - y) = \sqrt{y^2 + 1} - y$$

$$\Leftrightarrow x + \sqrt{x^2 + 1} = (-y) + \sqrt{(-y)^2 + 1} \quad (3)$$

Xét $f(t) = t + \sqrt{t^2 + 1}, t \in \mathbb{R}$, ta có

$$f'(t) = 1 + \frac{t}{\sqrt{t^2 + 1}} = \frac{\sqrt{t^2 + 1} + t}{\sqrt{t^2 + 1}} > \frac{|t| + t}{\sqrt{t^2 + 1}} \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}$$

$$(3) \Leftrightarrow f(x) = f(-y) \Leftrightarrow x = -y$$

Thay vào (2) ta được: $y + \frac{y}{\sqrt{y^2 - 1}} = \frac{35}{12} \quad (4)$

Ta thấy phương trình (4) có nghiệm thì $\begin{cases} y > 0 \\ y^2 > 1 \end{cases} \Rightarrow y > 1$. Khi đó,

$$(4) \Leftrightarrow y^2 + \frac{2y^2}{\sqrt{y^2 - 1}} + \frac{y^2}{y^2 - 1} = \frac{1125}{144} \Leftrightarrow \frac{y^4}{y^2 - 1} + \frac{2y^2}{\sqrt{y^2 - 1}} - \frac{1125}{144} = 0$$

Đặt $t = \frac{y^2}{\sqrt{y^2 - 1}} (t > 0)$. Vậy hệ có nghiệm $(x; y) = \left(\frac{-5}{4}; \frac{5}{4}\right); (x; y) = \left(\frac{-5}{3}; \frac{5}{3}\right)$.

Bài tập tương tự:

1. Giải hệ $\begin{cases} (x^2 + 1)x + (y - 4)\sqrt{3 - y} = 0 \\ 22x^2 + 9y^2 + 18\sqrt{4 - 3x} = 76 \end{cases}$ Đáp số: (1; 2)

2. $\begin{cases} 2x^2 + 3 = (4x^2 - 2x^2y)\sqrt{3 - 2y} + \frac{4x^2 + 1}{x} & (1) \\ (2x + 1)\sqrt{2 - \sqrt{3 - 2y}} = x + 2 + \sqrt[3]{2x^2 + x^3} & (2) \end{cases}$ Đáp số: $\left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}; \frac{3 + \sqrt{5}}{4} \right)$

3. $\begin{cases} x^2 - y^2 + 1 = 2(\sqrt{y} - \sqrt{x + 1} - x) & (1) \\ \sqrt{x + 1} + \sqrt{y - 3} + x - y = 2 \end{cases}$

HD: (1) $\Leftrightarrow f(x + 1) = f(y)$, với $f(t) = t^2 + 2\sqrt{t}$. Đáp số: $(x; y) = (3; 4)$.

4. $\begin{cases} \sqrt{x - 2} - \sqrt{3 - y} = y^2 - x^2 + 4x - 6y + 5 & (1) \\ \sqrt{2x + 3} + \sqrt{4y + 1} = 6 \end{cases}$

HD: (1) $\Leftrightarrow f(\sqrt{x - 2}) = f(\sqrt{3 - y})$, Đáp số: $\{ (3; 2), (-1; 6) \}$.

5. $\begin{cases} \sqrt{x + 1} + \sqrt{x + 3} + \sqrt{x + 5} = \sqrt{y - 1} + \sqrt{y - 3} + \sqrt{y - 5} \\ x + y + x^2 + y^2 = 80 \end{cases}$

Đáp số: $\left(\frac{5\sqrt{5} - 7}{2}; \frac{5\sqrt{5} + 5}{2} \right)$

6. $\begin{cases} x^6 + 9x^2 + 10 + 3y^2 = y^3 + 12y \\ 2y - 6x - 6 + \sqrt{y(x + 1)} = 0 \end{cases}$

Đáp số: $(x; y) = \left(\frac{9 + \sqrt{161}}{8}; \frac{153 + 9\sqrt{161}}{32} \right) \left(\frac{9 - \sqrt{161}}{8}; \frac{153 - 9\sqrt{161}}{32} \right)$

7. $\begin{cases} x - y = \frac{1}{x^2 + 1} - \frac{1}{y^2 + 1} \\ 2y^3 + x^2 + y = (x^2 + 6y + 6)\sqrt{y + 1} \end{cases}$ Đáp số: (3; 3)

8. $\begin{cases} (x + \sqrt{x^2 + 1})(y + \sqrt{y^2 + 1}) = 1 & (1) \\ x^2 + \sqrt{3 - x} = 2y^2 - 4\sqrt{2 - y} + 5 & (2) \end{cases}$ Đáp số: (-1; 1), (2; -2).

$$9. \begin{cases} \sqrt{3x} + \sqrt{8y-1} + 2 = 16y^2 + 9x & (1) \\ \sqrt{x-y} + \sqrt{7x-y} + \sqrt{3x-y} = \sqrt{x+7y} + 2\sqrt{x} & (2) \end{cases} \text{Đáp số: } (x; y) = \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{4}\right).$$

$$10. \begin{cases} xy^2(\sqrt{x^2+1}+1) = 3\sqrt{y^2+9} + 3y & (1) \\ (3x-1)\sqrt{x^2y+xy-5} - 4x^3 + 3x^3y - 7x = 0 & (2) \end{cases} \text{Đáp số: } (1; 3); \left(2; \frac{3}{2}\right)$$

$$11. \begin{cases} x^3 - y^3 = 3(x - y^2) + 2 \\ x^2 + \sqrt{1-x^2} - 3\sqrt{2y-y^2} + 2 = 0 \end{cases} \text{Đáp số: } (0; 1)$$

$$12. \begin{cases} x^6 - y^3 + x^2 - 9y^2 - 30 = 28y \\ (y+4)^2 = 5 - x\sqrt{2y+10} \end{cases}$$

$$\text{Đáp số: } (x; y) = (-\sqrt{2}; -1), (\sqrt{\sqrt{3}-1}; 2+\sqrt{3})$$

$$13. \begin{cases} 2^{x+3y+2y^2} + 4 \cdot 2^{x+4y} = 2^{2x+3y} + 4^{(y+1)^2} & (1) \\ 2\sqrt{2x-2y-3} = \frac{2y^2+2y-x+xy}{2y^2+2y-3x+2} & (2) \end{cases}$$

$$\text{Đáp số: } (1; -1), (8; 6), \left(\frac{22-4\sqrt{10}}{9}; \frac{1-\sqrt{10}}{3}\right)$$

$$14. \begin{cases} x^3y - y^4 = 28 \\ x^2y + 2xy^2 + y^3 = 18\sqrt{2} \end{cases} \text{Đáp số: } (2\sqrt{2}; \sqrt{2}).$$

3. Sử dụng phương pháp thế, cộng đại số sau đó kết hợp với phương pháp hàm số

Bài 1. Giải hệ
$$\begin{cases} y - x + 1 + \sqrt{2} = \sqrt{x+1} + \sqrt{2-x} \\ 2x^3 - y^3 + x^2y^2 = 2xy - 3x^2 + 3y \end{cases}$$

Phân tích: Nhìn vào hệ ta thấy khó có thể bắt đầu ở phương trình thứ nhất của hệ. Để ý đến phương trình thứ hai, ta thấy có những cặp hệ số giống nhau: hệ số 2 (trong $2x^3; 2xy$), hệ số 3 (trong $3x^2; 3y$), hệ số 1 (trong $y^3; x^2y^2$) do đó ta sẽ nghĩ đến ghép từng cặp biểu thức có hệ số giống nhau lại để làm xuất hiện nhân tử chung.

Giải: Điều kiện: $-1 \leq x \leq 2$

Ta có (2) $\Leftrightarrow 2x(x^2 - y) + y^2(x^2 - y) + 3(x^2 - y) = 0 \Leftrightarrow (2x + y^2 + 3)(x^2 - y) = 0$

$\Leftrightarrow y = x^2$ (vì $2x + y^2 + 3 > 0$, với mọi $-1 \leq x \leq 2$)

Thay $y = x^2$ vào (1) ta được: $x^2 - x + 1 + \sqrt{2} = \sqrt{x+1} + \sqrt{2-x}$ (3)

Xét hàm số $f(x) = x^2 - x - \sqrt{x+1} - \sqrt{2-x} + 1 + \sqrt{2}$, $x \in [-1; 2]$

Ta có $f'(x) = 2x - 1 - \frac{1}{2\sqrt{x+1}} + \frac{1}{2\sqrt{2-x}}$

Và $f''(x) = 2 + \frac{1}{4(x+1)\sqrt{x+1}} + \frac{1}{4(2-x)\sqrt{2-x}} > 0, \forall x \in (-1; 2)$

Do đó hàm số $f'(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1; 2)$, nên phương trình

$f'(x) = 0$ có nhiều nhất 1 nghiệm. Mặt khác $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, từ đó ta có BBT

x	-1	$\frac{1}{2}$	2	
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$				



Vì $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} + \sqrt{2} - \sqrt{6} < 0$, nên từ bảng biến thiên suy ra phương trình $f(x) = 0$ có nhiều nhất 2 nghiệm, hơn nữa $f(0) = f(1) = 0$, do đó phương trình (3) có 2 nghiệm $x=0; x=1$. Tóm lại hệ đã cho có 2 nghiệm $(0; 0)$ và $(1; 1)$

Bài 2.
$$\begin{cases} xy + 2 = y\sqrt{x^2 + 2} \\ y^2 + 2(x+1)\sqrt{x^2 + 2x + 3} = 2x^2 - 4x. \end{cases}$$

Giải: ĐKXD: $x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R}$.

$xy + 2 = y\sqrt{x^2 + 2} \Leftrightarrow y(\sqrt{x^2 + 2} - x) = 2 \Leftrightarrow y = \frac{2}{\sqrt{x^2 + 2} - x} \Leftrightarrow y = \sqrt{x^2 + 2} + x$ (1).

Thế vào phương trình thứ hai trong hệ, ta có :

$$\left(\sqrt{x^2+2}+x\right)^2+2(x+1)\sqrt{x^2+2x+3}=2x^2-4x$$

$$\Leftrightarrow 1+x\sqrt{x^2+2}+2x+(x+1)\sqrt{x^2+2x+3}=0.$$

$$\Leftrightarrow (x+1)\left[1+\sqrt{(x+1)^2+2}\right]=(-x)\left[1+\sqrt{(-x)^2+2}\right] \quad (*)$$

Xét hàm số $f(t)=t\left(1+\sqrt{t^2+2}\right)$ với $t \in \mathbb{R}$. Ta có

$$f'(t)=1+\sqrt{t^2+2}+\frac{t^2}{\sqrt{t^2+2}}>0, \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow f(t) \text{ đồng biến trên } \mathbb{R}.$$

Mặt khác, phương trình (*) có dạng $f(x+1)=f(-x) \Leftrightarrow x+1=-x \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$.

Vậy hệ đã cho có nghiệm là $(x; y)=\left(-\frac{1}{2}; 1\right)$.

Bài 3. Giải hệ
$$\begin{cases} \sqrt{x^2+91}=\sqrt{y-2}+y^2 \\ \sqrt{y^2+91}=\sqrt{x-2}+x^2 \end{cases}$$

HD: Điều kiện $x \geq 2; y \geq 2$. Trừ theo vế các phương trình của hệ ta được

$$\sqrt{x^2+91}+\sqrt{x-2}+x^2=\sqrt{y^2+91}+\sqrt{y-2}+y^2 \quad (3)$$

Hàm số $f(t)=\sqrt{t^2+91}+\sqrt{t-2}+t^2, t \geq 2$. **Đáp số:** $(x; y)=(3; 3)$.

Bài tập tương tự

1. Giải hệ :
$$\begin{cases} y^3+3y^2+y+4x^2-22x+21=(2x+1)\sqrt{2x-1} \\ 2x^2-11x+9=2y \end{cases}$$

Đáp số: $(x; y)=(1; 0), (5; 2)$.

2. Giải hệ :
$$\begin{cases} \sqrt{2x+3}+\sqrt{4-y}=4 & (1) \\ \sqrt{2y+3}+\sqrt{4-x}=4 & (2) \end{cases}$$
 Đáp số: $(3; 3), \left(\frac{11}{9}; \frac{11}{9}\right)$.

IV. Hiệu quả do sáng kiến đem lại

Qua áp dụng tại các lớp 12A1, 12A2 và 12A6 ở trường THPT Quảng Xương 3 trong một học kỳ đã mang lại những kết quả thiết thực, cụ thể:

Trong đề thi khảo sát chất lượng 8 tuần đầu học kì I năm học 2015-2016

$$\text{“Giải hệ : } \begin{cases} x\sqrt{x} - y\sqrt{y} + \sqrt{xy} + y - 3\sqrt{y} + 3 = 0, \\ 3x - y + 5\sqrt{x} + \sqrt{y} - \sqrt{xy} = 0 \end{cases} \text{”}$$

Đây là một câu không quá khó, ta chỉ cần cộng theo vế các phương trình của hệ (mục đích là để khử $\sqrt{xy}$) và biến đổi về dạng $f(\sqrt{x}+1)=f(\sqrt{y})$ với $f(t)=t^3+2t$. Tuy nhiên theo thống kê, những học sinh làm được câu này không nhiều, mặc dù nội dung ứng dụng hàm số giải phương trình, hệ đã được tổ chuyên môn thống nhất ngay từ đầu năm và các thầy cô nghiêm túc thực hiện.

	Lớp 12A1	Lớp 12A2	Lớp 12A6	Toàn trường
Số học sinh làm được	7/45	12/47	3/45	32/510
Tỉ lệ	15,6%	25,5%	6,7%	6,3%

Sau khi áp dụng sáng kiến tại 3 lớp 12A1, 12A2, 12A6, trong kỳ thi thử đại học lần 2 của trường THPT Quảng Xương 3 có câu: “Giải hệ :

$$\begin{cases} x^3 - y^3 - 3x^2 + 6x - 3y - 4 = 0 \\ \sqrt{x^2 + 5} + \sqrt{y + 3} = x^2 + 2y - 1 \end{cases} \text{”}$$

tỉ lệ học sinh làm được câu này đã tăng lên rõ rệt mặc dù cách giải quyết hệ này phức tạp hơn

	Lớp 12A1	Lớp 12A2	Lớp 12A6	Toàn trường
Số HS làm được HPT	17/45	25/47	12/45	65/510
Tỉ lệ	37,8%	53,2%	26,7%	12,7

- Các em không còn tâm lý e ngại khi gặp hệ nói riêng và phương trình, bất phương trình, hệ nói chung vì qua sáng kiến các em đã nắm được một cách hệ thống các phương pháp cơ bản giải phương trình còn bất phương trình thì các phương pháp giải cũng tương tự.

V. Đề xuất, kiến nghị

Đối với các nhà quản lý giáo dục, các nhà trường: Tổ chức các chương trình tập huấn bồi dưỡng nghiệp vụ hàng năm cho giáo viên đặc biệt là các

chuyên đề ôn thi đại học. Các chuyên đề khó như phương trình-bất phương trình-hệ, phương pháp tọa độ trong mặt phẳng, bất đẳng thức cần được tập trung nhiều hơn để giúp cho các cơ sở giáo dục, các thầy cô giáo có thêm tư liệu trong việc đào tạo, bồi dưỡng nâng cao năng lực toán học nói riêng và phát triển tư duy cho học sinh nói chung.

Đối với mỗi giáo viên:

- Phải không ngừng tự học, tự trau dồi bản thân để nâng cao trình độ chuyên môn, nghiệp vụ của mình.

- Mỗi dạng toán cần có phương pháp giải riêng, có công thức từ đó hình thành cho học sinh con đường tư duy logic để giải toán, giúp cho các em có cách học, tự học hiệu quả.

- Người thầy cần phải tăng cường kiểm tra, sửa chữa sai sót cho HS, bên cạnh đó cần động viên kịp thời để các em luôn có hứng thú học tập.

- Thầy giáo hướng dẫn cách tự đọc sách cho học sinh, hướng dẫn các em tự tìm tòi qua sách vở, báo toán, các trang web về toán học.

- Người thầy tăng cường luyện tập cho các em các dạng chuyên đề và bộ đề thi để các em có nhiều thời gian tiếp cận và tập dượt với dạng toán thi, từ đó giúp các em có được kết quả học tập ngày càng tốt hơn.

Trên đây là báo cáo sáng kiến của tôi được đúc rút trong quá trình học tập và công tác của mình, chắc chắn sẽ có nhiều thiếu sót. Rất mong nhận được sự đóng góp ý kiến của quý vị và các bạn đồng nghiệp.

Tôi xin chân thành cảm ơn.

Danh mục các tài liệu tham khảo

1. **Phạm Kim Chung, Phạm Chí Tuấn, Lê Đình Mẫn, Ngô Hoàng Toàn.**
Phương trình vô tỷ, NXB Đại học Quốc gia Hà Nội.
2. **Lê Văn Đoàn, Văn Đức Chín.** *Phương trình, bất phương trình & hệ* ,
NXB Đại học Quốc gia Hà Nội.
3. **Báo toán học và tuổi trẻ**
4. Các Website toán học: mathvn.com, k2pi.net, violet.vn,...

**XÁC NHẬN CỦA
THỦ TRƯỞNG ĐƠN VỊ**

Thanh Hóa, ngày 01 tháng 05 năm 2016
Tôi xin cam đoan đây là SKKN của mình
viết, không sao chép nội dung của người khác.

Đỗ Thị Hải Yến