

Câu 1. (4 điểm) Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

1) $x^2 + 2014x + 2013$

2) $x(x+2)(x^2+2x+2)+1$

Câu 2. (4 điểm)

1) Tìm a, b biết $\frac{1+2a}{15} = \frac{3b}{23+7a} = \frac{7-3a}{20}$

2) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = x^2 + 2y^2 + 2xy + 2x - 4y + 2013$

Câu 3. (4 điểm)

1) Cho $a_1, a_2, \dots, a_{2013}$ là các số tự nhiên có tổng cộng bằng 2013^{2014}

Chứng minh rằng: $B = a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_{2013}^3$ chia hết cho 3.

2) Cho a và b là các số tự nhiên thỏa mãn $2a^2 + a = 3b^2 + b$

Chứng minh rằng: $a - b$ và $3a + 3b + 1$ là các số chính phương.

Câu 4. (6 điểm)

Cho tam giác ABC . Gọi I là một điểm di chuyển trên cạnh BC . Qua I , kẻ đường thẳng song song với cạnh AC cắt cạnh AB tại M . Qua I , kẻ đường thẳng song song với cạnh AB cắt cạnh AC tại N

1) Gọi O là trung điểm của AI . Chứng minh rằng ba điểm M, O, N thẳng hàng

2) Kẻ MH, NK, AD vuông góc với BC lần lượt tại H, K, D . Chứng minh rằng $MH + NK = AD$

3) Tìm vị trí của điểm I để MN song song với BC .

Câu 5. (2 điểm)

Cho $a < b < c < d$ và $x = (a+b)(c+d), y = (a+c)(b+d), z = (a+d)(b+c)$

Sắp xếp theo thứ tự giảm dần của x, y, z

ĐÁP ÁN

Câu 1.

$$\begin{aligned} 1) \quad & x^2 + 2014x + 2013 \\ & = x^2 + 2013x + x + 2013 \\ & = x(x + 2013) + (x + 2013) = (x + 1)(x + 2013) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad & x(x + 2)(x^2 + 2x + 2) + 1 \\ & = (x^2 + 2x)(x^2 + 2x + 2) + 1 \\ & = (x^2 + 2x)^2 + 2(x^2 + 2x) + 1 \\ & = (x^2 + 2x + 1)^2 = (x + 1)^4 \end{aligned}$$

Câu 2.

$$1) \quad \text{Từ } \frac{1 + 2a}{15} = \frac{7 - 3a}{20} \Rightarrow 20(1 + 2a) = 15(7 - 3a) \Rightarrow a = 1$$

$$\text{Thay } a = 1 \text{ vào tỉ lệ thức } \frac{1 + 2a}{15} = \frac{3b}{23 + 7a} \text{ ta được: } \frac{1 + 2 \cdot 1}{15} = \frac{3b}{23 + 7 \cdot 1} \Rightarrow b = 2$$

Vậy $a = 1, b = 2$

2) Ta có:

$$\begin{aligned} A = x^2 + 2y^2 + 2xy + 2x - 4y + 2013 & = x^2 + 2x(y + 1) + y^2 + 2y + 1 + y^2 - 6y + 9 + 2003 \\ & = (x + y + 1)^2 + (y - 3)^2 + 2003 \end{aligned}$$

Nhận thấy với mọi x, y ta có: $(x + y + 1)^2 \geq 0; (y - 3)^2 \geq 0 \Rightarrow A \geq 2003$

Dấu "=" xảy ra khi $x = -4, y = 3$

Vậy Giá trị nhỏ nhất của A là 2003 đạt được khi $x = -4, y = 3$

Câu 3.

1) Dễ thấy $a^3 - a = a(a + 1)(a - 1)$ là tích của 3 số tự nhiên liên tiếp nên chia hết cho 3

$$\begin{aligned} \text{Xét hiệu } B - (a_1 + a_2 + \dots + a_{2013}) & = (a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_{2013}^3) - (a_1 + a_2 + \dots + a_{2013}) \\ & = (a_1^3 - a_1) + (a_2^3 - a_2) + \dots + (a_{2013}^3 - a_{2013}) \end{aligned}$$

chia hết cho 3

Mà $a_1, a_2, \dots, a_{2013}$ là các số tự nhiên có tổng bằng 2013^{2014}

Do vậy B chia hết cho 3.

$$2) \quad \text{Từ } 2a^2 + a = 3b^2 + b \text{ có } (a - b)(3a + 3b + 1) = a^2$$

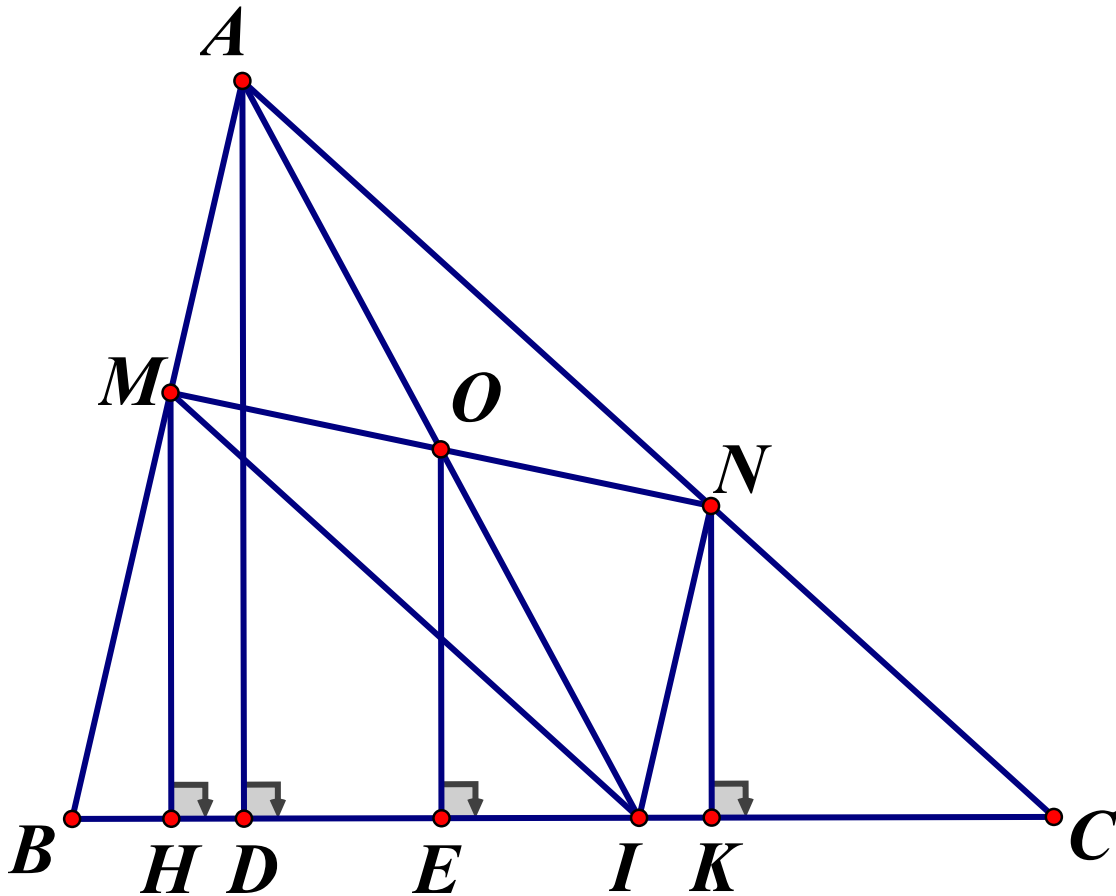
Cũng có : $(a - b)(2a + 2b + 1) = b^2$. Suy ra

$$(a - b)^2 \cdot (2a + 2b + 1)(3a + 3b + 1) = (ab)^2$$

Gọi $(2a + 2b + 1, 3a + 3b + 1) = d$. Chứng minh được $d = 1$

$\Rightarrow 3a + 3b + 1$ là số chính phương $\Rightarrow a + b$ là số chính phương (đpcm)

Câu 4.



1) Ta có: $IM \parallel AC, IN \parallel AB \Rightarrow AMIN$ là hình bình hành

$\Rightarrow MN$ cắt AI tại trung điểm mỗi đường. Mà O là trung điểm AI

$\Rightarrow M, O, N$ thẳng hàng (đpcm)

2) Kẻ OE vuông góc với BC . Chứng minh $MHKN$ là hình thang vuông.

Ta có: O là trung điểm MN mà $OE \parallel MH \parallel NK$. Suy ra OE là đường trung bình của hình thang vuông $MNKH$ nên $MH + NK = 2OE$ (1)

Xét $\triangle ADI$ có O là trung điểm của AI và $OE \parallel AD$. Suy ra OE là đường trung bình của $\triangle ADI$ nên $AD = 2OE$ (2)

Từ (1) và (2) ta có: $MH + NK = AD$ (đpcm)

3) Ta có: $MN // BC \Leftrightarrow MN$ là đường trung bình của ΔABC (do O là trung điểm AI) $\Leftrightarrow I$ là trung điểm BC (Vì $MI // AC, MA = MB$)
 Vậy để MN song song với BC thì I là trung điểm BC.

Câu 5.

Xét hiệu $x - y = (a + b)(c + d) - (a + c)(b + d) = (d - a)(b - c)$

Vì $b > a, b < c$ nên $(d - a)(b - c) < 0$. Suy ra $x < y$ (1)

Xét hiệu $y - z = (a + c)(b + d) - (a + d)(b + c) = (a - b)(d - c)$

Vì $b > a, c < d$ nên $(a - b)(d - c) < 0$. Suy ra $y < z$ (2)

Từ (1) và (2) ta sắp xếp theo thứ tự giảm dần là $z > y > x$