Người làm: Nguyễn Thanh Vân

Zalo: Nguyễn Thanh Vân - số đt zalo: 0975674007

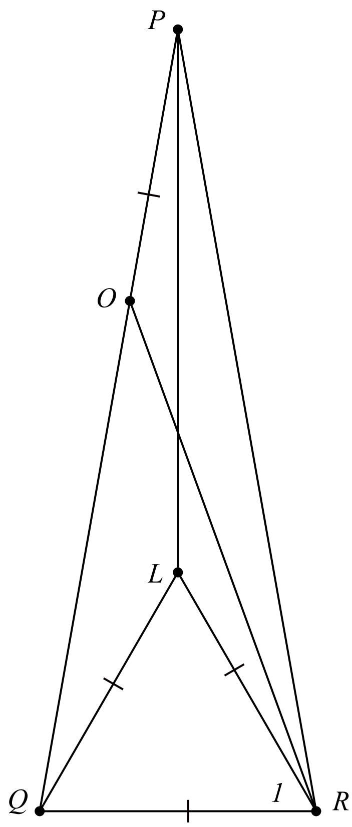
Email: nguyenthanhvan6888@gmail.com

CĐ1: TÍNH SỐ ĐO GÓC – CHỨNG MINH GÓC BẰNG NHAU

Câu 1. **(HSG 7 huyệnHưng Hà, tỉnh, trường THCS Tân Tiến 2022 - 2023)** TRÙNG

Cho ΔPQR cân tại P, có $\widehat{P}=20^\circ$. Trên cạnh PQ lấy điểm O sao cho $OP=QR$. Tính số đo $\widehat{QOR}$.

Lời giải



Vẽ điểm L trong ΔPQR sao cho ΔQLR đều

$\Rightarrow QL=QR=LR$

$\Rightarrow \widehat{R_1}=60^\circ$

Ta có ΔPQR cân tại P, có $\widehat{QPR}=20^\circ$

$\Rightarrow \widehat{PQR}=\widehat{PRQ}=\dfrac{180^\circ-20^\circ}{2}=80^\circ$

$\widehat{PRL} = 20^\circ$

Từ đó tính được

Chứng minh $\Delta PQL = \Delta PRL$ (c.c.c)

$\Rightarrow \widehat{QPL} = \widehat{RPL}$

$\Rightarrow \widehat{QPL} = \widehat{RPL} = \dfrac{\widehat{QPR}}{2} = \dfrac{20^\circ}{2} = 10^\circ$

Xét ΔPOR và ΔRLP có:

$OP = LR\,(= QR)$

$\widehat{OPR} = \widehat{PRL} = 20^\circ$

PR chung

$\Rightarrow \Delta POR = \Delta RLP$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{PRO} = \widehat{RPL} = 10^\circ$

Xét ΔPRO có $\widehat{QOR}$ là góc ngoài nên có: $\widehat{QOR} = \widehat{OPR} + \widehat{PRO} = 20^\circ + 10^\circ = 30^\circ$.

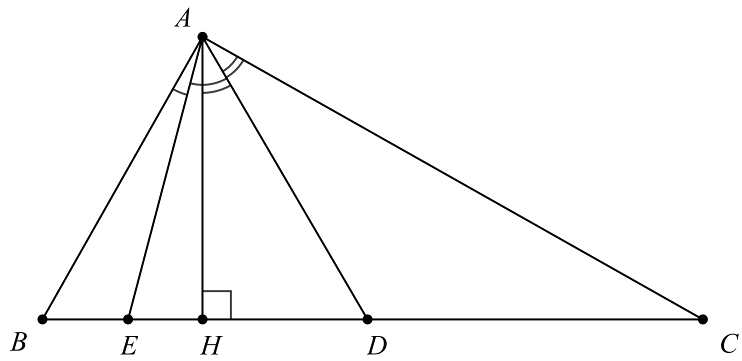
CĐ2: CHỨNG MINH ĐOẠN THẲNG BẰNG NHAU

Câu 1. **(HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh, trường THCS Bùi Hữu Diên 2022 - 2023)**

Cho ΔABC có $\widehat{A}=90^\circ$. Kẻ $AH \perp BC$ $(H \in BC)$. Tia phân giác của $\widehat{HAC}$ cắt cạnh BC ở điểm D và tia phân giác của $\widehat{HAB}$ cắt cạnh BC ở E.

Chứng minh rằng $AB+AC=BC+DE$.

Lời giải



+ Vì $\widehat{B}$ và $\widehat{HAC}$ cùng phụ với $\widehat{BAH}$ nên $\widehat{B}=\widehat{HAC}$

Suy ra $\widehat{AEC}=\widehat{ABC}+\widehat{BAE}=\left(\widehat{HAD}+\widehat{DAC}\right)+\widehat{EAH}=\widehat{EAC}$

Suy ra ΔAEC cân tại $C \Rightarrow AC=CE$ (*)

+ Tương tự chứng minh được $AB=BD$ (**)

+ Từ (*) và (**) $\Rightarrow AB+AC=BD+EC=ED+BC$

CĐ7: BÀI TOÁN CHỨNG MINH TỔNG HỢP

Câu 1. **(HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh, trường THCS Nguyễn Tông Quai 2022 - 2023)**

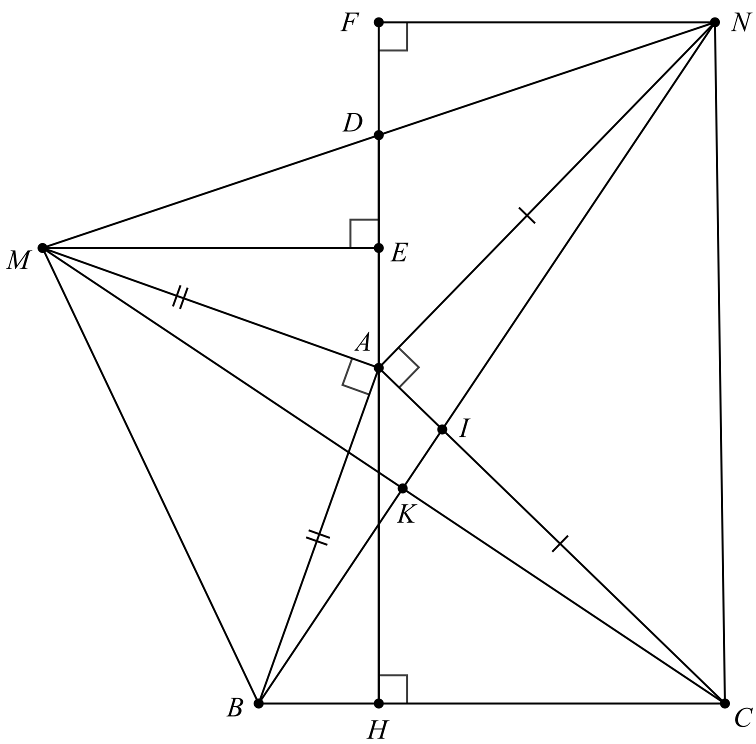
Cho ΔABC có $\widehat{A} < 90^\circ$. Vẽ ra ngoài ΔABC các tam giác vuông cân tại A là ΔABM và ΔACN

a) Chứng minh rằng: $BN = CM$.

b) Chứng minh: $BN \perp CM$.

c) Kẻ $AH \perp BC$ $(H \in BC)$. Chứng minh AH đi qua trung điểm của MN.

Lời giải



1) Chứng minh: $AM = AB$ (Vì ΔAMB vuông cân tại A)

$AC = AN$ (Vì ΔANC vuông cân tại A)

$\widehat{MAC} = \widehat{NAB} \left(= 90^\circ + \widehat{BAC}\right)$

Xét ΔAMC và ΔABN có:

$AM = AB$ (cmt)

$AC = AN$ (cmt)

$\widehat{MAC} = \widehat{NAB} \left(= 90^0 + \widehat{BAC}\right)$

$\Rightarrow \Delta AMC = \Delta ABN$ (c.g.c)

$\Rightarrow MC = BN$ (hai cạnh tương ứng)

2) Gọi I là giao điểm của BN và AC, K là giao điểm của BN và MC

Xét ΔKIC và ΔAIN có:

$\widehat{ANI} = \widehat{KCI}$ ($\Delta AMC = \Delta ABN$)

$\widehat{AIN} = \widehat{KIC}$ (đối đỉnh)

Mà $\widehat{KIC} + \widehat{ICK} + \widehat{CKI} = \widehat{AIN} + \widehat{INA} + \widehat{NAI} = 180^\circ$

$\Rightarrow \widehat{IKC} = \widehat{NAI} = 90^\circ$

$\Rightarrow MC \perp BN$

3) Kẻ $ME \perp AH$ tại E, $NF \perp AH$ tại F. Gọi D là giao điểm của MN và AH.

Ta có: $\widehat{BAH} + \widehat{MAE} = 90^\circ \left(\widehat{MAB} = 90^\circ\right)$

Lại có: $\widehat{MAE} + \widehat{AME} = 90^\circ$ nên $\widehat{AME} = \widehat{BAH}$

Xét ΔMAE và ΔABH vuông tại E và H ta có:

$\widehat{AME} = \widehat{BAH}$; $AM = AB$

$\Rightarrow \Delta MAE = \Delta ABH$ (ch-gn) $\Rightarrow ME = AH$

Chứng minh tương tự ta có $\Delta AFN = \Delta CHA \Rightarrow FN = AH$

Xét ΔMED và ΔNFD vuông tại E, F có:

$ME = NF\left(= AH\right)$, $\widehat{EMD} = \widehat{FND}$ (cùng phụ với $\widehat{MDE}$ và $\widehat{FDN}$ mà $\widehat{MDE} = \widehat{FDN}$)

$\Rightarrow \Delta MED = \Delta NFD \Rightarrow MD = ND$ (hai cạnh tương ứng)

$\Rightarrow D$ là trung điểm của MN.

Vậy AH đi qua trung điểm của MN.

Câu 2. **(HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh, trường THCS Minh Khai 2022 - 2023)**

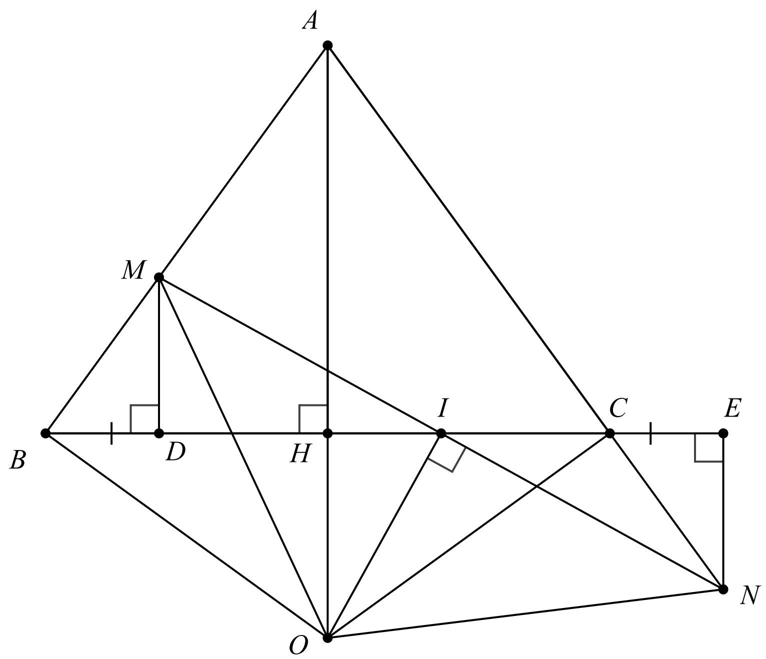
Cho ΔABC cân, $AB = AC$. Trên cạnh BC lấy điểm D, trên tia đối của CB lấy điểm E sao cho $BD = CE$. Các đường thẳng vuông góc với BC kẻ từ D và E cắt AB và AC lần lượt ở M và N. Chứng minh rằng:

a) $DM = EN$.

b) Đường thẳng BC cắt MN tại điểm I là trung điểm của MN.

c) Đường thẳng vuông góc với MN tại I luôn luôn đi qua một điểm cố định khi D thay đổi trên cạnh BC.

Lời giải



a) Ta có $\widehat{ABC} = \widehat{BCA}$ (do ΔABC cân tại A)

Mà $\widehat{ACB} = \widehat{ECN}$ (2 góc đối đỉnh)

$\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{ECN}$

Xét ΔBDM và ΔCEN có

$\widehat{D} = \widehat{E} = 90^\circ$ $(MD \perp BC,\ NE \perp BC)$

$BD = CE$ (gt)

$\widehat{ABC} = \widehat{ECN}$ (cmt)

$\Rightarrow \Delta BDM = \Delta CEN$ (g.c.g)

$\Rightarrow DM = EN$ (2 cạnh tương ứng)

b) Ta có $MD \perp BC$ (gt)

$NE \perp BC$ (gt)

$\Rightarrow MD // NE$

$\Rightarrow \widehat{MDI} = \widehat{INC}$ (2 góc so le trong)

Xét ΔMDI và ΔNEI có:

$\widehat{MDI} = \widehat{INC}$ (cmt)

$MD = NE$ (2 cạnh tương ứng do $\Delta BDM = \Delta CEN$)

$\widehat{IMD} = \widehat{IEN} \left(= 90^\circ\right)$

$\Rightarrow \Delta MDI = \Delta NEI$ (g.c.g)

$\Rightarrow MI = NI$ (2 cạnh tương ứng)

Mà $I \in MN \Rightarrow I$ là trung điểm của MN

$\Rightarrow$ Đường thẳng BC cắt MN tại trung điểm I của MN.

c) Từ A kẻ $AH \perp BC$ $(H \in BC)$

Gọi O là giao điểm của AH với đường thẳng vuông góc với MN kẻ từ I

Ta có $OI \perp BC$ tại I

I là trung điểm của MN

$\Rightarrow OI$ là đường trung trực của đoạn thẳng MN

$\Rightarrow O$ cách đều 2 mút của đoạn thẳng MN

$\Rightarrow OM = ON$

Xét ΔABH vuông tại H và ΔACH vuông tại H có

$AB = AC$ (do ΔABC cân tại A)

AH cạnh chung

$\Rightarrow$ $\Delta OBM = \Delta OCN$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông)

$\Rightarrow$ $\widehat{BAH} = \widehat{CAH}$ (2 góc tương ứng)

Xét ΔOAB và ΔOAC có

OA cạnh chung

$\widehat{BAH} = \widehat{CAH}$ (cmt)

$AB = AC$ (do ΔABC cân tại A)

$\Rightarrow$ $\Delta OAB = \Delta OAC$ (c.g.c)

$\Rightarrow$ $OB = OC$ (2 cạnh tương ứng) và $\widehat{ABO} = \widehat{ACO}$ (2 góc tương ứng) (1)

Xét ΔOBM và ΔOCN có

$OB = OC$ (cmt)

$OM = ON$ (cmt)

$BM = CN$ (2 cạnh tương ứng do $\Delta BDM = \Delta CEN$)

$\Rightarrow$ $\Delta OBM = \Delta OCN$ (c.c.c)

$\Rightarrow$ $\widehat{MBO} = \widehat{NCO}$ (2 góc tương ứng) hay $\widehat{ABO} = \widehat{NCO}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{ACO} = \widehat{NCO}$

Mà $\widehat{ACO} + \widehat{NCO} = 180^\circ$

$\Rightarrow$ $\widehat{ACO} = \widehat{NCO} = 90^\circ$

$\Rightarrow$ $OC \perp AC$

Ta có ΔABC cố định

$\Rightarrow$ A cố định, BC cố định $\Rightarrow$ H cố định; C cố định

$\Rightarrow$ O cố định

Do đó đường thẳng vuông góc với MN tại I luôn đi qua một điểm cố định khi D thay đổi trên cạnh BC.

Câu 3. **(HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh, trường THCS Lưu Khánh Đàm2022 - 2023)**

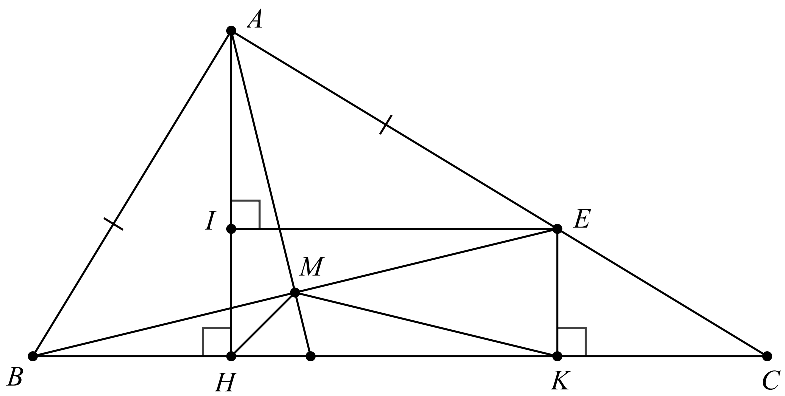
Cho ΔABC vuông tại A $(AB < AC)$, đường cao AH. Trên cạnh AC lấy điểm E sao cho $AE = AB$. Kẻ EI vuông góc với AH tại I, tia phân giác của $\widehat{BAC}$ cắt BE tại M. Chứng minh rằng:

1) ΔABM vuông cân.

2) $AH = EI$.

3) $\widehat{AHM} = 45^\circ$.

Lời giải



1) Theo giả thiết ta có $\widehat{BAC} = 90^\circ$ và $AB = AE \Rightarrow \Delta ABE$ cân tại A.

$\Rightarrow \widehat{ABE} = 45^\circ$

mà $\widehat{MAB} = 45^\circ$ (vì AM là phân giác $\widehat{BAC}$)

$\Rightarrow \Delta ABM$ vuông cân tại M.

2) Xét ΔABH và ΔEAI có:

$\widehat{AHB} = \widehat{AIE} = 90^\circ$

$\widehat{HAB} = \widehat{IEA} \left(= 90^\circ - \widehat{IAE}\right)$

$AB = AE$ (gt)

$\Rightarrow \Delta ABH = \Delta EAI$ (cạnh huyền – góc nhọn)

$\Rightarrow AH = EI$.

3) Vì ΔABE cân tại A, mà AM là đường phân giác của ΔABE

$\Rightarrow AM$ là trung tuyến của $\Delta ABE \Rightarrow M$ là trung điểm của BE

Từ đó suy ra $AM = \frac{1}{2}BE$

- Kẻ EK vuông góc với BC tại K.

Từ đó suy ra $KM = \frac{1}{2}BE \Rightarrow KM = AM$

- c/m được $\Delta IHE = \Delta KEH$ (g.c.g)

$\Rightarrow KH = EI$

Mà $AH = EI \Rightarrow KH = AH$

- c/m được $\Delta AHM = \Delta KHM$ (c.c.c)

$\Rightarrow \widehat{AHM} = \widehat{KHM} = \frac{1}{2}\widehat{AHK} = 45^\circ$

Câu 4. **(HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh, trường THCS Hồng Lĩnh 2022 - 2023)**

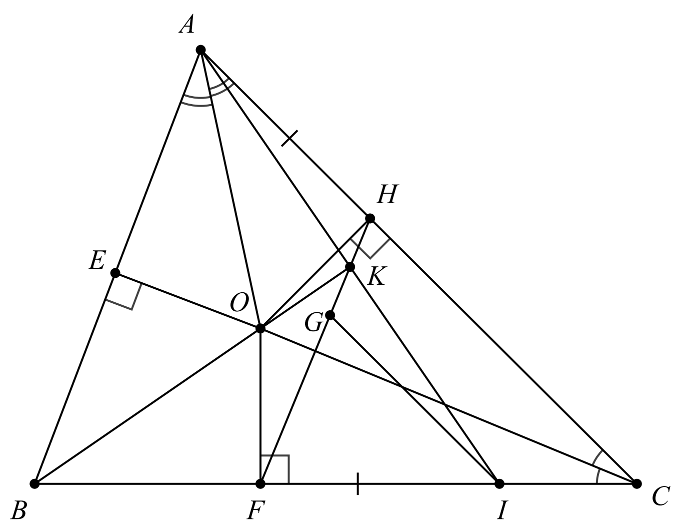
Cho ΔABC có 3 góc nhọn, $AB < AC < BC$. Các tia phân giác của $\widehat{A}$ và $\widehat{C}$ cắt nhau tại O. Từ O kẻ $OF \perp BC$, $OH \perp AC$ $(F \in BC; H \in AC)$. Lấy điểm I trên đoạn FC sao cho $FI = AH$. Gọi K là giao điểm của FH và AI.

a) Chứng minh ΔFCH cân;

b) Chứng minh $AK = KI$;

c) Chứng minh 3 điểm B, O, K thẳng hàng.

Lời giải



a) Chứng minh:

Ta có $\widehat{CHO} = \widehat{CFO} = 90^\circ$ $(OH \perp AC; OF \perp BC)$

+ Xét ΔCHO vuông tại H và ΔCFO vuông tại F có:

OC chung;

$\widehat{HCO} = \widehat{FCO}$ (vì CO là tia phân giác $\widehat{C}$)

Vậy $\Delta CHO = \Delta CFO$ (cạnh huyền – góc nhọn)

$\Rightarrow$ $CH = CF$ (2 cạnh tương ứng của hai tam giác bằng nhau)

Vậy ΔFCH cân tại C (tam giác có 2 cạnh bằng nhau)

b) + Qua I vẽ $IG // AC$ $(G \in FH)$

Ta có ΔFCH cân tại C (cm trên)

$\Rightarrow$ $\widehat{CHF} = \widehat{CFH}$ (2 góc ở đáy của tam giác cân) (1)

Mà $\widehat{CHF} = \widehat{FGI}$ (hai góc đồng vị, $IG // AC$) (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow$ $\widehat{CFH} = \widehat{FGI}$ hay $\widehat{IFG} = \widehat{IGF}$

Vậy ΔIFG cân tại I

$\Rightarrow$ $FI = GI$ (hai cạnh bên của tam giác cân)

Mặt khác $FI = AH$

Nên $GI = AH (= FI)$

Lại có: $\widehat{IGK} = \widehat{AHK}$ (hai góc so le trong, $IG // AC$)

$\Rightarrow$ $\widehat{HAK} = \widehat{GIK}$ (hai góc so le trong, $IG // AC$)

Xét ΔAHK và ΔIGK có:

$\widehat{IGK} = \widehat{AHK}$ (cm trên)

$GI = AH$ (cm trên)

$\widehat{HAK} = \widehat{GIK}$ (cm trên)

$\Rightarrow$ $\Delta AHK = \Delta IGK$ (g.c.g)

$\Rightarrow AK = KI$ (2 cạnh tương ứng của 2 tam giác bằng nhau)

c) Vẽ $OE \perp AB$ tại E

+ Xét ΔOAE vuông tại E và ΔOAH vuông tại H có:

OA chung;

$\widehat{OAE} = \widehat{OAH}$ (vì AO là tia phân giác $\widehat{A}$)

Vậy $\Delta OAE = \Delta OAH$ (cạnh huyền – góc nhọn)

$\Rightarrow OE = OH$ (2 cạnh tương ứng của 2 tam giác bằng nhau)

Lại có $OH = OF$ (vì $\Delta CHO = \Delta CFO$)

$\Rightarrow OE = OF$

+ Xét ΔOBE vuông tại E và ΔOBF vuông tại F có:

OB chung;

$OE = OF$ (cm trên)

$\Rightarrow \Delta OBE = \Delta OBF$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông)

$\Rightarrow \widehat{OBE} = \widehat{OBF}$ (hai góc tương ứng của hai tam giác bằng nhau)

Mà tia BO nằm giữa hai tia BE, BF

$\Rightarrow BO$ là tia phân giác của $\widehat{EBF}$ hay BO là tia phân giác của $\widehat{ABC}$ (*)

Ta có $BA = BE + AE$; $BI = BF + FI$; $BE = BF$ (vì $\Delta OBE = \Delta OBF$); $AE = AH$ (vì $\Delta OAE = \Delta OAH$); $AH = FI$ (giả thiết)

Do đó $BA = BI$

Nối B với K.

Xét ΔBKA và ΔBKI có:

$BA = BI$ (cm trên)

$KA = KI$ (cm trên)

BK là cạnh chung

$\Rightarrow \Delta BKA = \Delta BKI$ (c.c.c)

$\Rightarrow \widehat{ABK} = \widehat{IBK}$ (hai góc tương ứng của hai tam giác bằng nhau)

Mà tia BK nằm giữa hai tia BA, BC

Do đó BK là tia phân giác của $\widehat{ABC}$ (* *)

Từ (*) và (* *) $\Rightarrow$ tia BK và tia BO trùng nhau

Hay B, O, K là 3 điểm thẳng hàng.

Câu 5. **(HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh, trường THCS Dân Chủ 2022 - 2023)**

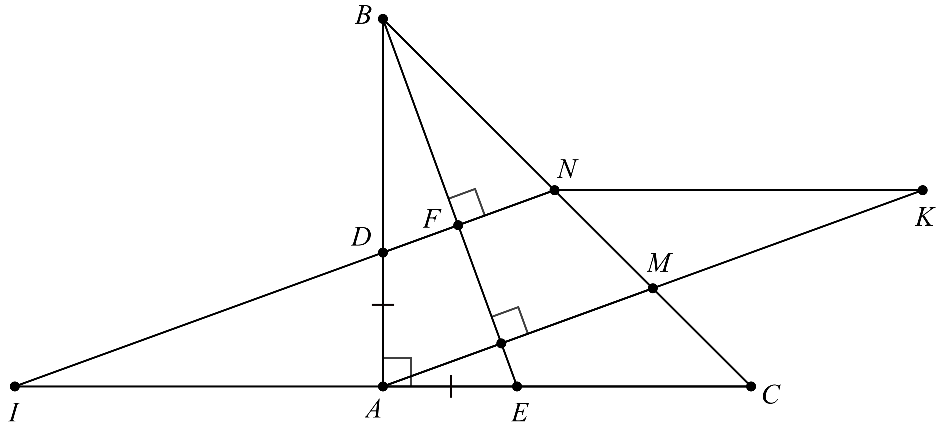
Cho ΔABC vuông tại A, $AB = AC$. Trên AB và AC lần lượt lấy điểm D và E sao cho $AD = AE$. Qua A và D kẻ đường vuông góc với BE cắt BC lần lượt tại M và N. Tia ND cắt tia CA tại I. Chứng minh rằng:

a) A là trung điểm của CI.

b) $CM = MN$.

c) $AM = \frac{1}{2} NI.$

Lời giải



a) Gọi F là giao điểm của DN với BE.

Xét ΔADI vuông tại A có: $\widehat{IDA} + \hat{I} = 90^\circ$ (định lí)

Xét ΔFIE vuông tại F có: $\hat{I} + \widehat{FEI} = 90^\circ$ (định lí)

$\Rightarrow \widehat{IDA} = \widehat{FEI}$

Xét ΔABE vuông tại A và ΔADI vuông tại A có:

$AE = AD$ (gt)

$\widehat{IDA} = \widehat{FEI}$ (chứng minh trên)

$\Rightarrow \Delta ABE = \Delta AID$ (cạnh góc vuông- góc nhọn kề)

$\Rightarrow AB = AI$ (hai cạnh tương ứng)

Mà $AB = AC$ (gt)

$\Rightarrow AC = AI$

Vậy: A là trung điểm của CI.

b) Ta có: $BE \perp DN; BE \perp MA$ (gt)

$\Rightarrow DN // AM$ (Quan hệ giữa tính vuông góc với tính song song)

Hay $NI // AM$

Từ N kẻ đường thẳng song song với AC cắt AM tại K.

Chứng minh được: $\Delta ANI = \Delta NAK$ (g.c.g)

$\Rightarrow AI = NK$ (hai cạnh tương ứng)

Mà $AC = AI$ (chứng minh trên)

$\Rightarrow AC = NK$

Chứng minh được: $\Delta MNK = \Delta MCA$ (g.c.g)

$\Rightarrow MN = MC$ (hai cạnh tương ứng)

c) Ta có: $\Delta MNK = \Delta MCA$ (chứng minh trên)

$\Rightarrow MK = MA$ (hai cạnh tương ứng)

Do đó: M là trung điểm của AK

Nên: $AM = \frac{1}{2}AK.$

Mà $AK = NI$ ($\Delta ANI = \Delta NAK$ - chứng minh trên)

Do đó: $AM = \frac{1}{2}NI.$

Câu 6. **(HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh, trường THCS Duyên Hải 2022 - 2023)**

Cho ΔABC có ba góc nhọn $(AB < AC)$. Vẽ về phía ngoài ΔABC các tam giác đều ΔABD và ΔACE. Gọi I là giao của CD và BE, K là giao của AB và DC.

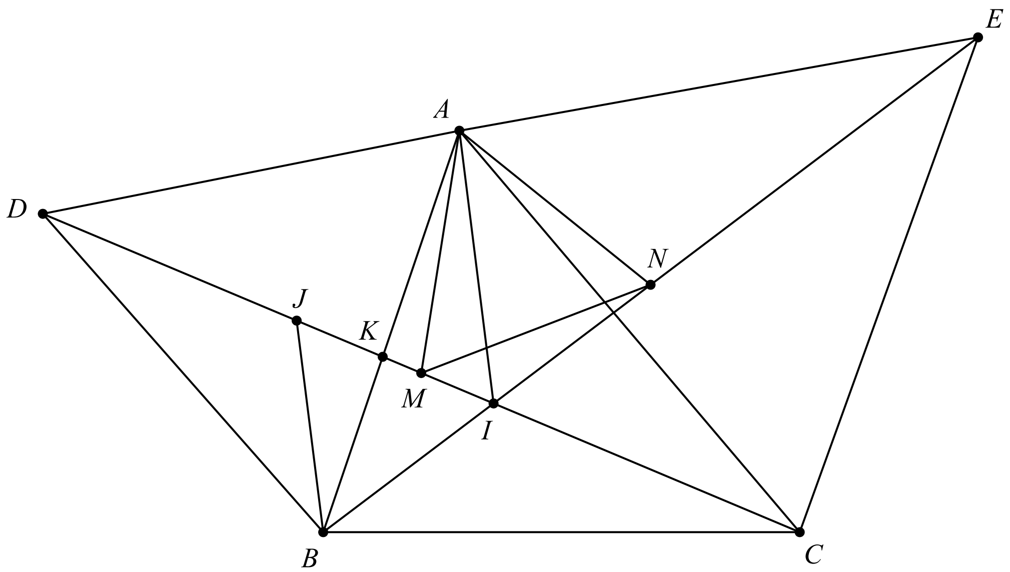
a) Chứng minh rằng: $\Delta ADC = \Delta ABE$.

b) Chứng minh rằng: $\widehat{DIB} = 60^\circ$.

c) Gọi M và N lần lượt là trung điểm của CD và BE. Chứng minh rằng ΔAMN đều.

d) Chứng minh rằng IA là phân giác của $\widehat{EID}$.

Lời giải



a) Ta có $\widehat{DAC} = \widehat{DAB} + \widehat{BAC}$

$\widehat{BAE} = \widehat{EAC} + \widehat{BAC}$

Mà $\widehat{DAB} = \widehat{EAC} = 60^\circ$

$\Rightarrow \widehat{DAC} = \widehat{BAE}$

Xét ΔDAC và ΔBAE

có: $DA = BA$ (ΔABD đều)

$AC = AE$ (ΔAEC đều)

$\widehat{DAC} = \widehat{BAE}$ (chứng minh trên)

$\Rightarrow \Delta DAC = \Delta BAE$ (c.g.c)

b) ΔDBI có $\widehat{DBI}+\widehat{BDI}+\widehat{DIB}=180^\circ$ (tổng ba góc 1 tam giác)

$\Rightarrow \widehat{DBA}+\widehat{ABI}+\widehat{BDI}+\widehat{DIB}=180^\circ$

Mà $\widehat{ABI}=\widehat{ADI}$ $(\Delta DAC=\Delta BAE)$

$\Rightarrow \widehat{DBA}+\widehat{ADI}+\widehat{BDI}+\widehat{DIB}=180^\circ$

$\Rightarrow \widehat{DBA}+\widehat{ADB}+\widehat{DIB}=180^\circ$

$\Rightarrow 60^\circ+60^\circ+\widehat{DIB}=180^\circ$

$\Rightarrow \widehat{DIB}=60^\circ$

c) Từ $\Delta ADC=\Delta ABE$ (câu a) $\Rightarrow$ $CM=EN$ và $\widehat{ACM}=\widehat{AEN}$

$\Rightarrow \Delta ACM=\Delta AEN$ (c.g.c) $\Rightarrow$ $AM=AN$ và $\widehat{CAM}=\widehat{EAN}$

$\Rightarrow \widehat{CAM}+\widehat{CAN}=\widehat{EAN}+\widehat{CAN}$

$\Rightarrow \widehat{MAN}=\widehat{EAC}=60^\circ$

Do đó ΔAMN đều.

d) Trên tia ID lấy điểm J sao cho $IJ=IB$

$\Rightarrow$ ΔBIJ đều (tam giác cân có góc $\widehat{JIB}=60^\circ$)

$\Rightarrow$ $BJ=BI$ và $\widehat{JBI}=\widehat{DBA}=60^\circ$

Mà $\widehat{IBA}+\widehat{JBK}=\widehat{JBD}+\widehat{JBK}=60^\circ$

suy ra $\widehat{IBA}=\widehat{JBD}$, kết hợp $BA=BD$

$\Rightarrow \Delta IBA=\Delta JBD$ (c.g.c) suy ra $\widehat{AIB}=\widehat{DJB}$ (hai góc tương ứng)

Xét tam giác BJI có $\widehat{BJD}$ là góc ngoài tam giác nên $\widehat{BJD}=\widehat{JBI}+\widehat{JIB}=60^\circ+60^\circ=120^\circ$

$\Rightarrow \widehat{AIB}=\widehat{DJB}=120^\circ$ mà $\widehat{BID}=60^\circ$

$\Rightarrow \widehat{DIA}=60^\circ$. Từ đó suy ra IA là phân giác của $\widehat{DIE}$.

Câu 7. **(HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh, trường THCS Trần Đức Thông 2022 - 2023)**

Cho ΔABC nhọn. Kẻ $BF \perp AC$ $(F \in AC)$, kẻ $CK \perp AB$ $(K \in AB)$, BF cắt CK tại H. Gọi M là trung điểm của BC. Trên tia đối của tia MH lấy điểm D sao cho $MD = MH$.

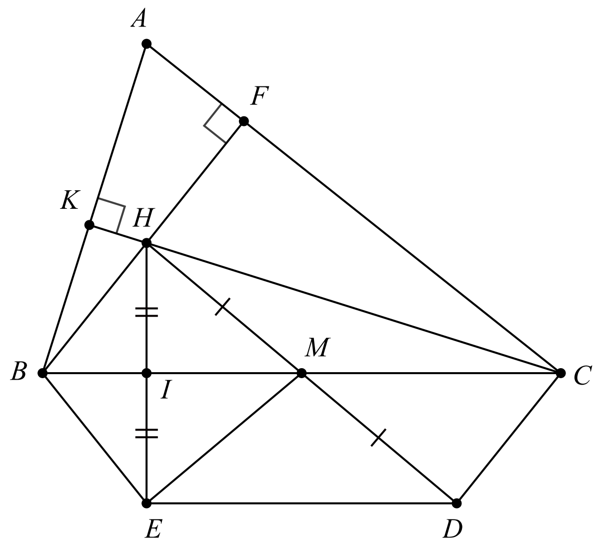
1. Chứng minh $DC // BH$.

2. Từ H kẻ $HI \perp BC$ $(I \in BC)$, trên tia đối của tia IH lấy điểm E sao cho $IE = IH$. Chứng minh rằng:

a) $BE = DC$.

b) $DE // BC$.

Lời giải



1. Chỉ ra $\Delta BMH = \Delta CMD$ (c.g.c)

Suy ra $\widehat{HBM} = \widehat{DCM}$ (hai góc tương ứng)

mà hai góc này ở vị trí so le trong suy ra $CD // BH$

2.

a) Từ $\Delta BMH = \Delta CMD$ (cmt)

Suy ra $CD = BH$ (1)

Chứng minh $\Delta BIH = \Delta BIE$ (c.g.c)

Suy ra $BE = BH$ (2)

Từ (1) và (2) $CD = BE$

b) Chứng minh $\Delta MIH = \Delta MIE$ (c.g.c)

Suy ra $MH = ME$, mà $MH = MD$ (gt) nên $ME = MD$

Vì $ME = MH$ suy ra ΔMEH cân tại M

Suy ra $\widehat{MHE} = \widehat{MEH}$ (3)

Vì $MD = ME$ suy ra ΔMDE cân tại M

Suy ra $\widehat{MDE} = \widehat{MED}$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $\widehat{MEH} + \widehat{MDE} = \widehat{MEH} + \widehat{MED} = \widehat{DEH}$

Trong ΔHDE có $\widehat{MHE} + \widehat{MDE} + \widehat{DEH} = 180^\circ$ (Tổng ba góc trong của một tam giác)

$\Rightarrow 2.\widehat{DEH} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{DEH} = 90^\circ$

Suy ra $DE \perp HE$

Mà $BC \perp HE$ nên $DE // BC$.

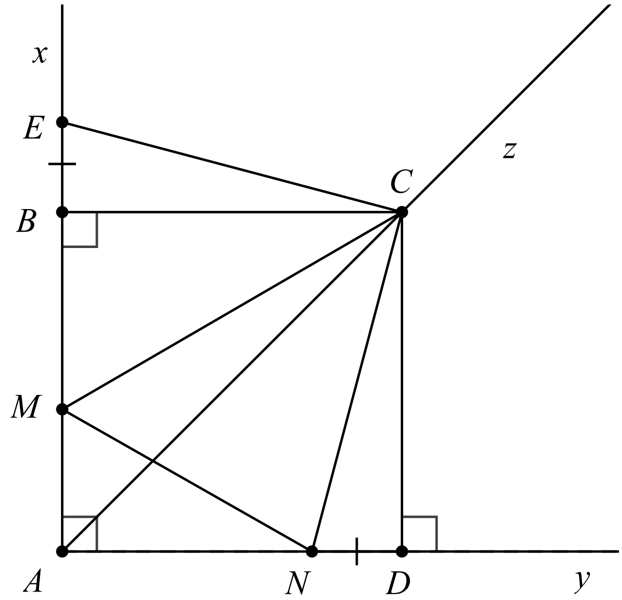
Câu 8. **(HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh, trường THCS Tân Tiến 2022 - 2023)**

Cho góc vuông $\widehat{xAy}$, C là một điểm thuộc tia phân giác Az của $\widehat{xAy}$. Từ C kẻ các đường thẳng vuông góc với Ax và Ay lần lượt tại B, D. Trên các đoạn thẳng AB, AD lần lượt lấy các điểm M, N sao cho chu vi ΔAMN bằng $AB + AD$. Trên tia Bx lấy điểm E sao cho $BE = ND$. Chứng minh rằng:

a) $\Delta CBE = \Delta CDN$

b) MC là tia phân giác của $\widehat{BMN}$.

Lời giải



1. Chứng minh $\Delta ABC = \Delta ADC$ (Cạnh huyền – góc nhọn)

$\Rightarrow BC = DC$ (2 cạnh tương ứng)

Xét ΔCBE và ΔCDN có:

$BE = DN$ (gt)

$\widehat{EBC} = \widehat{NDC} = 90^\circ$

$BC = DC$ (cmt)

$\Rightarrow \Delta CBE = \Delta CDN$ (c.g.c)

2. Ta có $\Delta CBE = \Delta CDN$ (cm câu a)

$\Rightarrow CE = CD$ (2 cạnh tương ứng)

Ta có: $AM + AN + MN = AB + AD$ (gt)

Mà $AB + AD = AM + MB + AN + ND$

Do đó $AM + AN + MN = AM + NB + AN + ND$

$\Rightarrow MN = MB + ND$

Ta lại có: $BE = ND$ (gt)

$\Rightarrow MN = MB + BE \Rightarrow MN = PE$

Xét ΔCME và ΔCMN có:

$ME = MN$ (cmt)

$CE = CD$ (cmt)

CM cạnh chung

$\Rightarrow \Delta CME = \Delta CMN$ (c.c.c) $\Rightarrow \widehat{M_1} = \widehat{M_2}$

$\Rightarrow PC$ là tia phân giác của $\widehat{BMN}$.

Câu 9. **(HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh, trường THCS Kim Trung 2022 - 2023)**

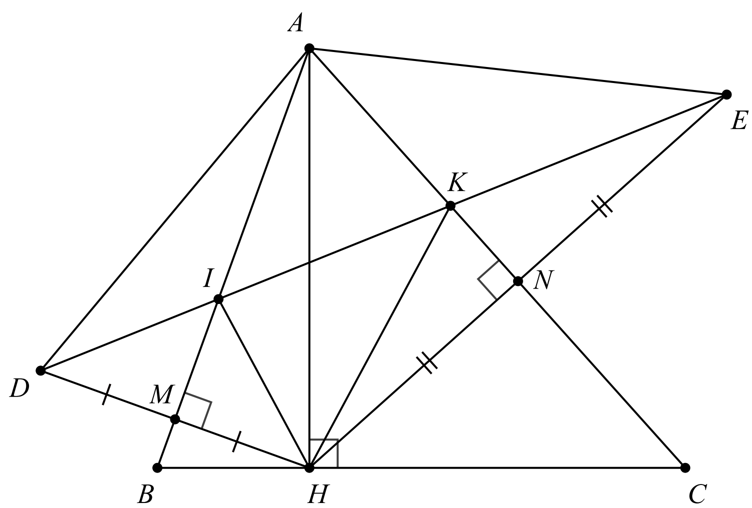
Cho ΔABC nhọn , kẻ $AH \perp BC$ $(H \in BC)$, lấy các điểm D và E ở ngoài tam giác sao cho AB là đường trung trực của HD và AC là đường trung trực của HE. Đoạn thẳng DE cắt cạnh AB ở I và cắt cạnh AC ở K; HD cắt AB ở M và HE cắt AC ở N.

a) Chứng minh: ΔADE cân.

b) Chứng minh: HA là tia phân giác của $\widehat{IHK}$.

c) Chứng minh: $\widehat{BAC} = \widehat{KHC}$.

Lời giải



a)

+) c/m: $\Delta AMH = \Delta AMD$ (c.g.c) $\Rightarrow AH = AD$ (1)

+) c/m: $\Delta ANH = \Delta ANE$ (c.g.c) $\Rightarrow AH = AE$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow AD = AE$

ΔADE có $AD = AE \Rightarrow \Delta ADE$ cân ở A.

b)

+) c/m: $\Delta AIH = \Delta AID$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{AHI} = \widehat{ADI}$ (3)

+) c/m: $\Delta AKH = \Delta AKE$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{AHK} = \widehat{AEK}$ (4)

+) ΔADE cân ở A (cmt) $\Rightarrow \widehat{ADI} = \widehat{AEK}$ (5)

Từ (3), (4), (5) $\Rightarrow \widehat{AHI} = \widehat{AHK} \Rightarrow HA$ là tia phân giác của góc $\widehat{IHK}$

c) Ta có: $\Delta AMH = \Delta AMD$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{MAH} = \widehat{MAD}$

$\Delta ANH = \Delta ANE$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{NAH} = \widehat{NAE}$

Do đó $\widehat{MAH} + \widehat{NAH} = \widehat{MAD} + \widehat{NAE} \Rightarrow \widehat{DAE} = 2.\widehat{MAN} = 2.\widehat{BAC}$

Ta có: $\widehat{ADE} + \widehat{DAE} + \widehat{AED} = 180^0 \Rightarrow 2.\widehat{BAC} + 2.\widehat{AED} = 180^0$

$\Rightarrow \widehat{BAC} + \widehat{AED} = 90^\circ$ (6)

Lại có $AH \perp BC$ nên $\widehat{CHK} + \widehat{KHA} = 90^\circ$ (7)

Mà $\Delta AKH = \Delta AKE$ nên $\widehat{AED} = \widehat{AHK}$ (2 góc tương ứng) (8)

Từ (6); (7); (8) $\Rightarrow \widehat{BAC} = \widehat{CHK}$

Câu 10. **(HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh, trường THCS Bắc Sơn 2022 - 2023)**

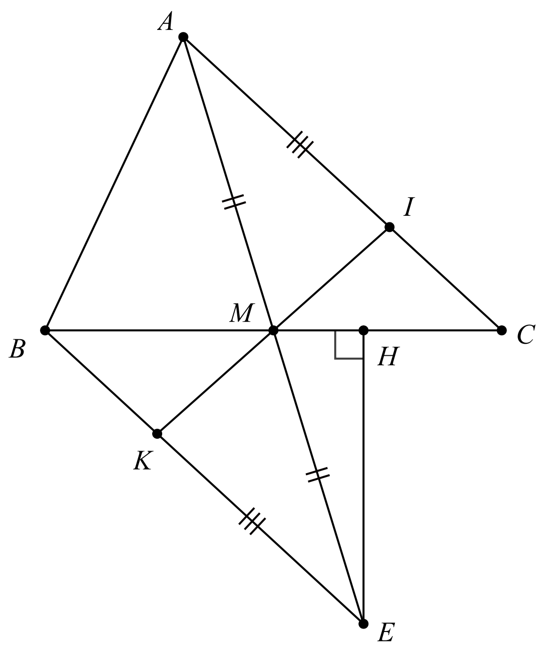
Cho ΔABC, M là trung điểm của BC. Trên tia đối của tia MA lấy điểm E sao cho $ME = MA$. Chứng minh rằng:

a) $AC = EB$ và $AC // BE$.

b) Gọi I là một điểm trên AC, K là một điểm trên EB sao cho $AI = EK$. Chứng minh ba điểm I, M, K thẳng hàng.

c) Từ E kẻ $EH \perp BC$ $(H \in BC)$; biết $\widehat{HBE} = 30^\circ$; $\widehat{MEB} = 40^\circ$. Tính $\widehat{HEM}$ và $\widehat{BME}$?

Lời giải



a) Xét ΔAMC và ΔEMB có:

$AM = EM$ (gt)

$\widehat{AMC} = \widehat{EMB}$ (đối đỉnh)

$MC = MB$ (gt)

Nên $\Delta AMC = \Delta EMB$ (c.g.c)

$\Rightarrow$ $AC = EB$ (hai cạnh tương ứng)

Vì $\Delta AMC = \Delta EMB$

nên $\widehat{MAC} = \widehat{MEB}$ (hai góc tương ứng)

Mà hai góc này ở vị trí so le trong do đường thẳng AE cắt hai đường thẳng AC và BE tạo thành nên $AC // BE$.

b) Xét ΔAMI và ΔEMK có:

$AM = EM$ (gt)

$\widehat{MAI} = \widehat{MEK}$ (vì $\Delta AMC = \Delta EMB$)

$AI = EK$ (gt)

Nên $\Delta AMI = \Delta EMK$ (c.g.c)

Suy ra $\widehat{AMI} = \widehat{EMK}$ (hai góc tương ứng)

Mà $\widehat{AMI}+\widehat{IME}=180^{o}$ (hai góc kề bù)

$\Rightarrow \widehat{EMK}+\widehat{IME}=180^{o}$

hay $\widehat{IMK}=180^{\circ}$.

Vậy ba điểm I; M; K thẳng hàng.

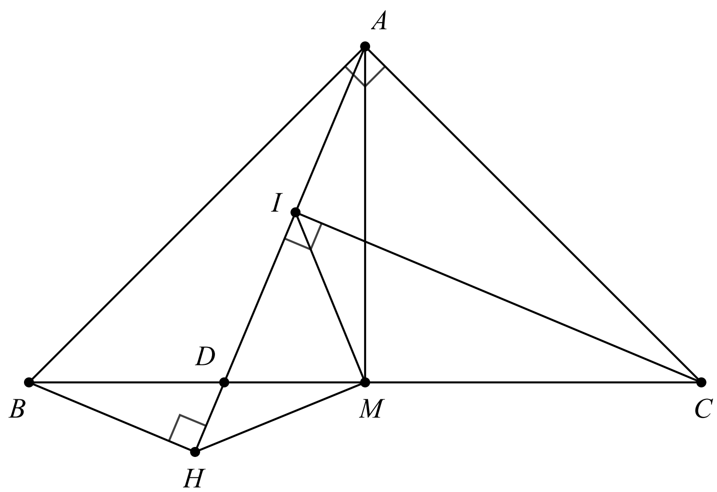
Câu 11. **(HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh, trường THCS Bùi Hữu Diên 2022 - 2023)**

Cho ΔABC vuông cân tại A. Gọi M là trung điểm BC, D là điểm thuộc đoạn BM (D khác B và M). Kẻ các đường thẳng BH, CI lần lượt vuông góc với đường thẳng AD tại H và I. Chứng minh rằng:

a) $\widehat{BAM}=\widehat{ACM}$ và $BH=AI$.

b) ΔMHI vuông cân.

Lời giải



a)

* Chứng minh: $\widehat{BAM}=\widehat{ACM}$

+ Chứng minh được: $\Delta ABM=\Delta ACM$ (c.c.c)

+ Lập luận được: $\widehat{BAM}=\widehat{CAM}=45^{\circ}$

+ ΔABC vuông cân tại A mà M là trung điểm BC nên AM là trung tuyến cũng là đường cao. Do đó ΔAMC vuông ở M.

Từ đó tính được $\widehat{ACM}=45^{\circ}$

$\Rightarrow \widehat{BAM} = \widehat{ACM}$

* Chứng minh: $BH = AI$.

+ Chỉ ra: $\widehat{BAH} = \widehat{ACI}$ (cùng phụ $\widehat{DAC}$)

+ Chứng minh được $\Delta AIC = \Delta BHA$ (Cạnh huyền – góc nhọn)

$\Rightarrow BH = AI$ (2 cạnh tương ứng)

b) ΔMHI vuông cân.

+ Chứng minh được $AM \perp BC$

+ Chứng minh được $AM = MC$

+ Chứng minh được $\widehat{HAM} = \widehat{ICM}$

+ Chứng minh được $\Delta HAM = \Delta ICM$ (c-g-c)

$\Rightarrow HM = MI$ (*)

+ Do $\Delta HAM = \Delta ICM \Rightarrow \widehat{HMA} = \widehat{IMC}$

$\Rightarrow \widehat{HMB} = \widehat{IMA}$ (do $\widehat{AMB} = \widehat{AMC} = 90^\circ$)

+ Lập luận được: $\widehat{HMI} = 90^\circ$ (**)

Từ (*) và (**) $\Rightarrow \Delta MHI$ vuông cân

Câu 12. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh, trường THCS Thai Hưng 2022 - 2023)

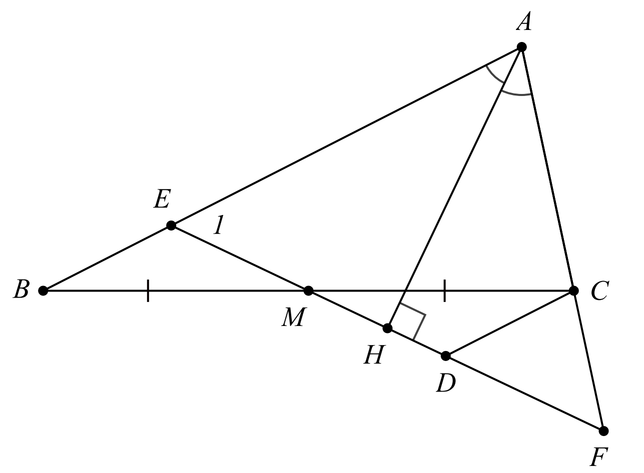
Cho ΔABC $(AB > AC)$, M là trung điểm của cạnh BC, đường thẳng đi qua trung điểm M và vuông góc với tia phân giác của $\widehat{A}$ tại H, cắt các cạnh AB, AC theo thứ tự tại E và F. Chứng minh:

a) $EH = HF$.

b) $2.\widehat{BME} = \widehat{ACB} - \widehat{B}$.

c) $BE = CF$.

Lời giải



a) C/m được $\Delta AEH = \Delta AFH$ (g.c.g)

$\Rightarrow EH = HF$ (đpcm)

b) $\Delta AEH = \Delta AFH \Rightarrow \widehat{E_1} = \widehat{F}$

Xét ΔCMF có $\widehat{ACB}$ là góc ngoài $\Rightarrow \widehat{CMF} = \widehat{ACB} - \widehat{F}$

ΔBME có $\widehat{E_1}$ là góc ngoài $\Rightarrow \widehat{BME} = \widehat{E_1} - \widehat{B}$

vậy $\widehat{CMF} + \widehat{BME} = \left(\widehat{ACB} - \widehat{F}\right) + \left(\widehat{E_1} - \widehat{B}\right)$

hay $2.\widehat{BME} = \widehat{ACB} - \widehat{B}$ (đpcm).

c) C/m $\Delta AHE = \Delta AHF$ (g.c.g) $\Rightarrow AE = AF$ và $\widehat{E} = \widehat{F}$.

Từ C vẽ $CD // AB$ $(D \in EF)$

C/m được $\Delta BME = \Delta CMD$ (g.c.g) $\Rightarrow BE = CD$ (1)

Và có $\widehat{E_1} = \widehat{CDF}$ (cặp góc đồng vị)

do đó $\widehat{F} = \widehat{CDF} \Rightarrow \Delta CDF$ cân $\Rightarrow CF = CD$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow BE = CF$

Câu 13. **(HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh, trường THCS Văn Lang 2022 - 2023)**

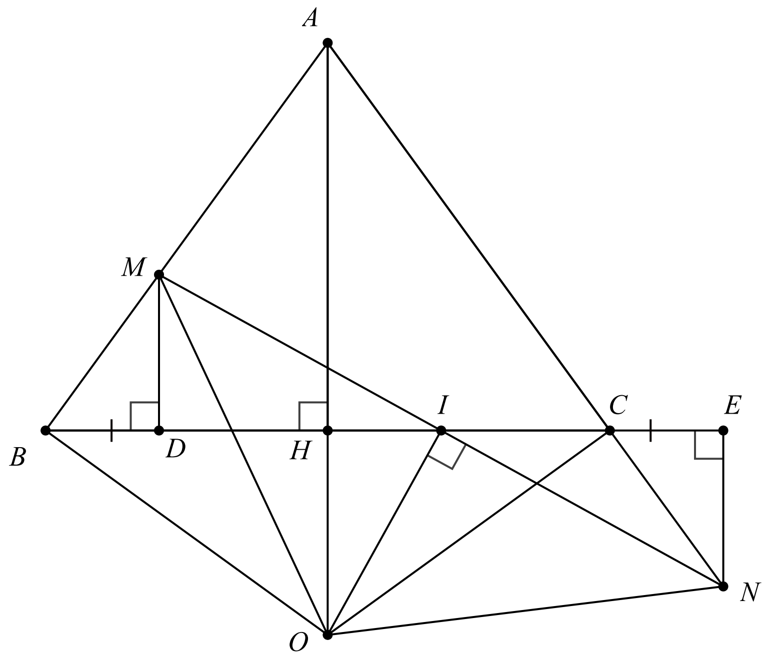
Cho ΔABC cân $(AB = AC)$. Trên cạnh BC lấy điểm D, trên tia đối của tia CB lấy điểm E sao cho $BD = CE$. Các đường thẳng vuông góc với BC kẻ từ D và E cắt AB, AC lần lượt ở M, N. Chứng minh rằng:

a) $DM = EN$.

b) Đường thẳng BC cắt MN tại trung điểm I của MN.

c) Đường thẳng vuông góc với MN tại I luôn đi qua một điểm cố định khi D thay đổi trên cạnh BC.

Lời giải



a) Ta có $\widehat{ABC} = \widehat{BCA}$ (do ΔABC cân tại A)

Mà $\widehat{ACB} = \widehat{ECN}$ (2 góc đối đỉnh)

$\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{ECN}$

Xét ΔBDM và ΔCEN có

$\widehat{D} = \widehat{E} = 90^\circ$ $(MD \perp BC,\ NE \perp BC)$

$BD = CE$ (gt)

$\widehat{ABC} = \widehat{ECN}$ (cmt)

$\Rightarrow \Delta BDM = \Delta CEN$ (g.c.g)

$\Rightarrow DM = EN$ (2 cạnh tương ứng)

b) Ta có $MD \perp BC$ (gt)

$NE \perp BC$ (gt)

$\Rightarrow MD // NE$

$\Rightarrow \widehat{MDI} = \widehat{INC}$ (2 góc so le trong)

Xét ΔMDI và ΔNEI có:

$\widehat{MDI} = \widehat{INC}$ (cmt)

$MD = NE$ (2 cạnh tương ứng do $\Delta BDM = \Delta CEN$)

$\widehat{IMD} = \widehat{IEN} \left(=90^\circ\right)$

$\Rightarrow \Delta MDI = \Delta NEI$ (g.c.g)

$\Rightarrow MI = NI$ (2 cạnh tương ứng)

Mà $I \in MN \Rightarrow I$ là trung điểm của MN

$\Rightarrow$ Đường thẳng BC cắt MN tại trung điểm I của MN.

c) Từ A kẻ $AH \perp BC$ $(H \in BC)$

Gọi O là giao điểm của AH với đường thẳng vuông góc với MN kẻ từ I

Ta có $OI \perp BC$ tại I

I là trung điểm của MN

$\Rightarrow OI$ là đường trung trực của đoạn thẳng MN

$\Rightarrow O$ cách đều 2 mút của đoạn thẳng MN

$\Rightarrow OM = ON$

Xét ΔABH vuông tại H và ΔACH vuông tại H có

$AB = AC$ (do ΔABC cân tại A)

AH cạnh chung

$\Rightarrow \Delta OBM = \Delta OCN$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông)

$\Rightarrow \widehat{BAH} = \widehat{CAH}$ (2 góc tương ứng)

Xét ΔOAB và ΔOAC có

OA cạnh chung

$\widehat{BAH} = \widehat{CAH}$ (cmt)

$AB = AC$ (do ΔABC cân tại A)

$\Rightarrow$ $\Delta OAB = \Delta OAC$ (c.g.c)

$\Rightarrow$ $OB = OC$ (2 cạnh tương ứng) và $\widehat{ABO} = \widehat{ACO}$ (2 góc tương ứng) (1)

Xét ΔOBM và ΔOCN có

$OB = OC$ (cmt)

$OM = ON$ (cmt)

$BM = CN$ (2 cạnh tương ứng do $\Delta BDM = \Delta CEN$)

$\Rightarrow$ $\Delta OBM = \Delta OCN$ (c.c.c)

$\Rightarrow$ $\widehat{MBO} = \widehat{NCO}$ (2 góc tương ứng) hay $\widehat{ABO} = \widehat{NCO}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{ACO} = \widehat{NCO}$

Mà $\widehat{ACO} + \widehat{NCO} = 180^\circ$

$\Rightarrow$ $\widehat{ACO} = \widehat{NCO} = 90^\circ$

$\Rightarrow$ $OC \perp AC$

Ta có ΔABC cố định

$\Rightarrow$ A cố định, BC cố định $\Rightarrow$ H cố định; C cố định

$\Rightarrow$ O cố định

Do đó đường thẳng vuông góc với MN tại I luôn đi qua một điểm cố định khi D thay đổi trên cạnh BC.