|  |  |
| --- | --- |
| *Hướng dẫn chấm gồm 06 trang*  | **KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CÁC TRƯỜNG THPT CHUYÊN****KHU VỰC DUYÊN HẢI VÀ ĐỒNG BẰNG BẮC BỘ****LẦN THỨ XIV, NĂM 2023****HƯỚNG DẪN CHẤM CHẤM MÔN: TOÁN HỌC - LỚP 11** |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Bài**  | **Nội dung trình bày** | **Điểm** |
| **Bài 1** | Cho dãy số (an) xác định bởi  a) Chứng minh dãy số (an) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó. b) Đặt  với mỗi số nguyên dương n. Tìm (phần nguyên của ). | **4,0** |
| **1a** | Chứng minh dãy số (an) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.  | **2,0** |
|  | Ta có  | 0,5 |
| Mặt khác   | 0,5 |
| Do đó chứng minh bằng quy nạp theo n ta có  suy ra (an) bị chặn dưới bởi 0. | 0,5 |
| Vậy Do đó từ (1) a(a-1)2=0 vậy a =0  | 0,5 |
| **1b** | Đặt  với mỗi số nguyên dương n. Tìm (phần nguyên của ). | **2,0** |
|  | Ta có  | 0,5 |
|  | 0,5 |
|  | 0,5 |
| 0<  | 0,5 |
| **Bài 2** | Tìm tất cả các hàm số , biết rằng  là hàm số chẵn và thỏa mãn: với mọi . | **4,0** |
|  | Xét PT : , (1)Từ (1) cho , ta có:  với mọi  | 0,5 |
|  | Nếu  thì  với mọi . Khi đó  không thỏa mãn (1). Do đó   | 0,5 |
| Từ (1) thay  bởi  và  bởi , ta được:, (2) | 0,5 |
|  | Từ (1) thay  bởi  và  bởi , ta được:, (3) | 0,5 |
|  | Vì là hàm số chẵn nên viết (3) lại như sau:, (4) | 0,5 |
| Lấy (4) trừ (2) vế theo vế ta được: với mọi  | 0,5 |
| Suy ra:  với mọi .  | 0,5 |
| Thử lại ta thấy  thỏa mãn yêu cầu đề bài. | 0,5 |
| **Bài 3** |  | **4,0** |
|  |
| **3a** |  | **2,0** |
|  | Ta có Suy ra  hay  đối xứng với  qua  | 0,5 |
| Ta có . Kết hợp với   là đường trung trực của  | 0,5 |
| Ta có  tứ giác  nội tiếp mà  cắt  tại  là đường kính của   | 0,5 |
| Mặt khác   cùng vuông góc với  nên  tứ giác  là hình bình hành. Vậy  đi qua trung điểm của  | 0,5 |
| **3b** |  | **2,0** |
|  |  |  |
| Gọi  là chân đường cao kẻ từ của tam giác ,  là các giao điểm của với đường tròn ,( thuộc cung ,  thuộc cung ), cắt  tại điểm thứ hai ,  cắt  tại . Ta có :  , Xét phép nghịch đảo  tâm  tỷ số  thì  nên .  | 0,5 |
| Lại có  nên . Ta có  nên  thì  suy ra  thẳng hàng. Chứng minh tương tự ta có thẳng hàng. | 0,5 |
| Hai tam giác  và  có ( vì ) nên đồng dạng , do đó  suy ra đường tròn tâm  bán kính  trực giao với đường tròn .Gọi  là giao điểm thứ hai của  với đường tròn  thì   hay , tương tự  Ta có  nội tiếp nên  suy ra  có phương tích với hai đường tròn bằng nhau nên .  | 0,5 |
| Gọi . Áp dụng định lý Brocard cho tứ giác  nội tiếp đường tròn  ta có  là trực tâm tam giác suy ra  là trực tâm tam giác .Vậy ba đường đồng quy tại . | 0,5 |
| **Bài 4** | Giả sử phương trình:  với các hệ số nguyên a,b,c có ba nghiệm nguyên là . Chứng minh rằng: chia hết cho 1579.  | **4,0** |
|  | Phương trình viết lại , đặt  | 0,5 |
|  | Áp dụng định lí Farmat nhỏ, ta có nên  | 0,5 |
| Nếu  thì bài toán được chứng minh xong.  | 0,5 |
| Nếukhông chia hết cho 1579 thì ta được: | 0,5 |
|  |
|  |  | 0,5 |
|  | 0,5 |
| Từ đó suy ra  mà  nên  | 0,5 |
| Do đó . Vậy chia hết cho 1579. | 0,5 |
| **Bài 5** | Tìm độ dài bé nhất của cạnh một tam giác đều, sao cho ta có thể đặt vào bên trong tam giác này ba đĩa tròn có bán kính lần lượt là 2, 3, 4 mà ba đĩa tròn này từng đôi một không có phần nào chồng lên nhau( tức là phần trong của các đĩa không có điểm chung). | **4,0** |
|  | Giả sử trong tam giác đều ABC có đặt hai đĩa tròn có bán kính 3 và 4, với phần trong không có điểm chung. Lúc đó, rõ ràng tồn tại một đường thẳng d tách chúng ra. Đường thẳng này chia tam giác ABC thành 1 tam giác và 1 tứ giác hoặc 2 tam giác. Trong cả 2 trường hợp, ta đều dịch chuyển hai đĩa sao cho chúng tiếp xúc với hai cạnh của tam giác ABC(như hình 1).  | 0,5 |
| Giả sử đĩa thứ nhất tiếp xúc với hai cạnh góc A, đĩa thứ hai tiếp xúc với hai cạnh góc B, ta dịch chuyển cạnh BC song song với chính nó, cho đến khi hai đĩa tiếp xúc với nhau như hình 2.   | 0,5 |
| Từ đó ta nhận được tam giác A1B1C1 có cạnh ngắn hơn cạnh tam giác ABC mà trong tam giác này có đặt 2 đĩa bán kính 3 và bán kính 4 với phần trong không có điểm chung. | 0,5 |
| Đặt A1B1 = x, gọi I là tâm của tam giác đều A1B1C1, ta có , vì đĩa bán kính 4 nội tiếp trong tam giác đều A1B1C1 nên , do đó , tức là .  | 0,5 |
|  |
|  | Ta lại có,  | 0,5 |
| Áp đụng định lí cosin cho tam giác , ta được | 0,5 |
| Do  nên suy a . Vậy . | 0,5 |
| Ngoài ra khi tam giác đều ABC có cạnh bằng  thì ta đặt được ba đĩa tròn có bán kính 2,3,4 mà chúng đôi một không có phần trong chung. Vậy cạnh của tam giác đều thỏa bài toán là  | 0,5 |

**LƯU Ý CHUNG**

***- Hướng dẫn chấm chỉ trình bày một cách giải với những ý cơ bản phải có. Khi chấm bài học sinh làm theo cách khác nếu đúng và đủ ý thì vẫn cho điểm tối đa.***

***- Điểm toàn bài tính đến 0,5 và không làm tròn.***

***- Với bài hình học nếu thí sinh không vẽ hình phần nào thì không chấm điểm cho phần đó.***