

Bài 1. (4 điểm)

1. Cho x, y thỏa mãn $y(x+y) \neq 0$ và $x^2 - xy = 2y^2$. Tính $A = \frac{3x - y}{x + y}$
2. Tính $B = \frac{2.1+1}{[1.(1+1)]^2} + \frac{2.2+1}{[2.(2+1)]^2} + \frac{2.3+1}{[3.(3+1)]^2} + \dots + \frac{2.99+1}{[99.(99+1)]^2}$

Bài 2. (4 điểm)

- 1) Tìm a, b sao cho $f(x) = ax^3 + bx^2 + 10x - 4$ chia hết cho đa thức $g(x) = x^2 + x - 2$

- 2) Tìm số nguyên a sao cho $a^4 + 4$ là số nguyên tố

Bài 3. (3 điểm)

Giải phương trình: $\frac{x}{x^2 + 4x + 4} + \frac{5x}{x^2 + 4} = -2$

Bài 4. (4 điểm)

Cho hình thoi ABCD có góc $\angle ABC = 60^\circ$. Hai đường chéo cắt nhau tại O, E thuộc tia BC sao cho BE bằng ba phần tư BC, AE cắt CD tại F. Trên đoạn thẳng AB và CD lần lượt lấy hai điểm G và H sao cho CG song song với FH

- 1) Chứng minh rằng : $BG.DH = \frac{3}{4}BC^2$
- 2) Tính số đo góc GOH

Bài 5. (3 điểm)

Cho tam giác ABC, ba điểm M, N, P lần lượt thuộc các cạnh BC, CA, AB sao cho $\frac{BM}{BC} = \frac{CN}{CA} = \frac{AP}{AB}$ & $\frac{BM}{BC} < \frac{1}{2}$. Chứng minh rằng hai tam giác ABC và MNP có cùng trọng tâm.

Bài 6. (2 điểm)

Cho các số dương x, y, z thỏa mãn điều kiện $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x^3}{y+2z} + \frac{y^3}{z+2x} + \frac{z^3}{x+2y} \geq \frac{1}{3}$$

ĐÁP ÁN

Bài 1.

$$1) \text{ Từ } y(x+y) \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} x+y \neq 0 \\ y \neq 0 \end{cases}$$

$$x^2 - xy = 2y^2 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow (x+y)(x-2y) = 0$$

Vì $x+y \neq 0$ nên $x-2y=0 \Leftrightarrow x=2y$

$$\text{Ta có: } A = \frac{3 \cdot 2y - y}{2y + y} = \frac{5y}{3y} = \frac{5}{3}$$

$$2) \text{ Với } n \geq 1, \text{ ta có: } \frac{2n+1}{[n(n+1)]^2} = \frac{(n+1)^2 - n^2}{(n+1)^2 \cdot n^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}$$

Áp dụng vào bài toán ta có:

$$B = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{99^2} - \frac{1}{100^2} = 1 - \frac{1}{100^2} = \frac{9999}{10000}$$

Bài 2.

$$1) \text{ Ta có: } g(x) = x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$$

Vì $f(x) = ax^3 + bx^2 + 10x - 4$ chia hết cho đa thức $g(x) = x^2 + x - 2$. Nên tồn tại một đa thức $q(x)$ sao cho $f(x) = g(x) \cdot q(x)$

$$\Rightarrow ax^3 + bx^2 + 10x - 4 = (x+2)(x-1)q(x)$$

$$\text{Với } x=1 \Rightarrow a+b+6=0 \Rightarrow b = -a-6 \quad (1)$$

$$\text{Với } x=-2 \Rightarrow 2a-b+6=0 \quad (2)$$

Thay (1) vào (2) ta có: $a=2$ & $b=4$

$$2) \text{ Ta có: } a^4 + 4 = (a^2 - 2a + 2)(a^2 + 2a + 2)$$

$$\text{Vì } a \in \mathbb{C} \Rightarrow a^2 - 2a + 2 \in \mathbb{C}; a^2 + 2a + 2 \in \mathbb{C}$$

$$\text{Có } a^2 + 2a + 2 = (a+1)^2 + 1 \geq 1 \quad \forall a$$

Và $a^2 - 2a + 2 = (a - 1)^2 + 1 \geq 1 \quad \forall a$

Vậy $a^2 + 4$ là số nguyên tố thì $a^2 + 2a + 2 = 1$ hoặc $a^2 - 2a + 2 = 1$

Nếu $a^2 - 2a + 2 = 1 \Rightarrow a = 1$ thử lại thấy thỏa mãn

Nếu $a^2 + 2a + 2 = 1 \Rightarrow a = -1$ thử lại thấy thỏa mãn.

Bài 3.

Điều kiện $x \neq -2$

Với $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình : $\frac{x}{x^2 + 4x + 4} + \frac{5x}{x^2 + 4} = -2$

Với $x \neq 0$ phương trình $\frac{x}{x^2 + 4x + 4} + \frac{5x}{x^2 + 4} = -2$ trở thành:

$$\frac{1}{x + \frac{4}{x} + 4} + \frac{5}{x + \frac{4}{x}} = -2 (*)$$

. Đặt $y = x + \frac{4}{x} + 2$ phương trình (*) trở thành:

$$\frac{1}{y + 2} + \frac{5}{y - 2} = -2$$

Điều kiện : $y \neq \pm 2$

Phương trình trở thành: $y^2 + 3y = 0 \Leftrightarrow y(y + 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = -3 \end{cases}$

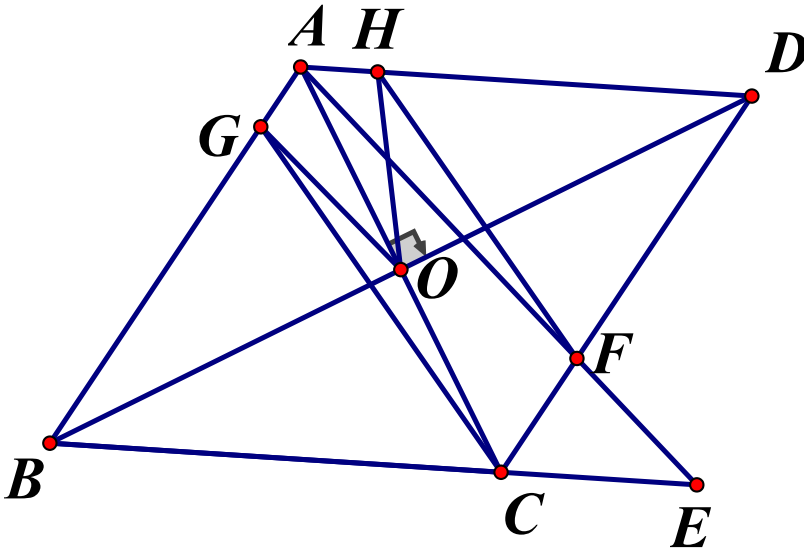
Với $y = 0$ thì $x + \frac{4}{x} + 2 = 0 \Rightarrow x^2 + 2x + 4 = 0 \Rightarrow (x + 1)^2 + 3 = 0 \quad (VN)$

Với $y = -3$ thì

$$x + \frac{4}{x} + 2 = -3 \Rightarrow x^2 + 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x + 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -4 \end{cases} (TMDK)$$

Vậy tập nghiệm phương trình là $S = \{-1; -4\}$

Bài 4.



1) Chứng minh $\triangle BCG \sim \triangle DHF \Rightarrow \frac{BC}{DH} = \frac{BG}{DF} \Rightarrow BC.DF = DH.BG$

Theo định lý Ta let tính được:

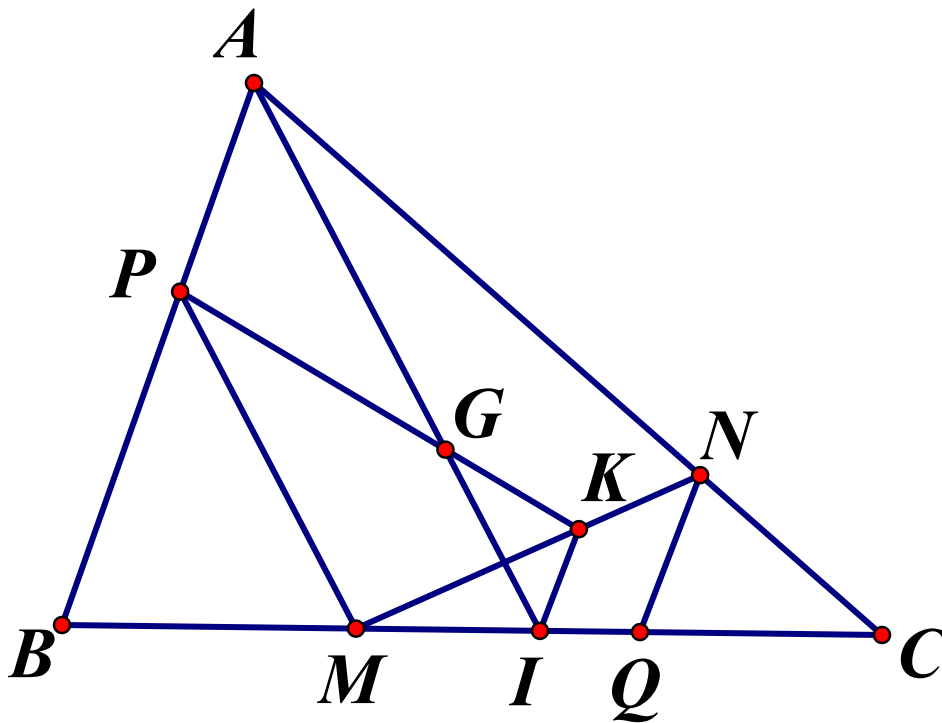
$$DF = \frac{3}{4}DC = \frac{3}{4}BC \Rightarrow BG.DH = \frac{3}{4}BC^2$$

2) Theo định lý Pytago tính được:

$$BO^2 = BC^2 - CO^2 = \frac{3}{4}BC^2 \Rightarrow BG.DH = BO^2 = BO^2 = BO.DO \Rightarrow \frac{BG}{DO} = \frac{BO}{DH}$$

Ta có $\angle BGO = \angle HDO = 30^\circ$. Nên $\triangle BGO \sim \triangle DOH \Rightarrow \angle HO = 30^\circ$

Bài 5.



Qua N kẻ $NQ \parallel AB (Q \in BC)$, theo định lý Talet ta có:

$$\frac{QC}{BC} = \frac{CN}{CA} (gt) \Rightarrow \frac{QC}{BC} = \frac{BM}{BC} \Rightarrow QC = BM$$

$$\frac{QN}{AB} = \frac{CQ}{CB} (gt) \Rightarrow \frac{QN}{AB} = \frac{AP}{AB} \Rightarrow AB = QN$$

Gọi I, K là trung điểm của MQ và MN . Suy ra IK là đường trung bình của tam

giác MNQ , vậy $IK \parallel QN, IK = \frac{QN}{2} \Rightarrow IK \parallel AP; IK = \frac{AP}{2}$

Gọi G là giao điểm của AI và PK , theo Talet ta có: $\frac{GI}{GA} = \frac{GK}{GP} = \frac{KI}{PA} = \frac{1}{2}$

Suy ra G là trọng tâm của tam giác MNP và G là trọng tâm của tam giác ABC

Bài 6.

Ta có: $\frac{9x^3}{y+2z} + x(y+2z) \geq 6x^2; \frac{9y^3}{z+2x} + y(z+2x) \geq 6y^2; \frac{9z^3}{x+2y} + z(x+2y) \geq 6z^2$

Lại có: $(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$

Nên ta có:

$$\frac{9x^3}{y+2z} + \frac{9y^3}{z+2x} + \frac{9z^3}{x+2y} + 3(xy + yz + xz) \geq 6(x^2 + y^2 + z^2)$$

$$\Rightarrow \frac{x^3}{y+2z} + \frac{y^3}{z+2x} + \frac{z^3}{x+2y} \geq \frac{x^2 + y^2 + z^2}{3} = \frac{1}{3}$$

Dấu bằng xảy ra khi $x = y = z = 1$