

PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Dạng 1. Xác định giá trị lớn nhất – giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn

• **Bước 1:** Hàm số đã cho $y = f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[a; b]$.
Tìm các điểm $x_1, x_2, \dots, x_n$ trên khoảng $(a; b)$, tại đó $f'(x) = 0$ hoặc $f'(x)$ không xác định.
• **Bước 2:** Tính $f(a), f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), f(b)$.
• **Bước 3:** Khi đó:
$$\max_{[a; b]} f(x) = \max \{ f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), f(a), f(b) \}.$$
$$\min_{[a; b]} f(x) = \min \{ f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), f(a), f(b) \}.$$

- Câu 1.** Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = 1 + x^2$ trên đoạn $[0; 2]$.
- Câu 2.** Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau:
a) $y = f(x) = 2x + 3$ trên đoạn $[-3; 1]$;
b) $y = g(x) = \sqrt{1 - x^2}$.
- Câu 3.** Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$ trên nửa khoảng $[-1; +\infty)$.
- Câu 4.** Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^4 - 8x^2 + 9$ trên đoạn $[-1; 3]$.
- Câu 5.** Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x) = x + \frac{1}{x} - 7$ trên khoảng $(0; +\infty)$.
- Câu 6.** Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$ trên đoạn $[0; 5]$.
- Câu 7.** Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm số $f(x) = \frac{x^2 + 9}{x}$ trên khoảng $(0; +\infty)$.
- Câu 8.** Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của mỗi hàm số sau:
a) $f(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1$ trên đoạn $[-3; 2]$;
b) $g(x) = \frac{\ln x}{x}$ trên đoạn $[1; 4]$.
- Câu 9.** (Đề Tham Khảo 2020 Lần 2) Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^4 - 10x^2 + 2$ trên đoạn $[-1; 2]$.
- Câu 10.** (Mã 103 - 2020 Lần 1) Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 30x$ trên đoạn $[2; 19]$.
- Câu 11.** (Mã 110 2017) Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 3$ trên đoạn $[0; \sqrt{3}]$.
- Câu 12.** (Mã 104 2017) Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = x^2 + \frac{2}{x}$ trên đoạn $[\frac{1}{2}; 2]$.
- Câu 13.** (Sở Nam Định-2019) Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sqrt{4 - x^2}$.

Câu 14. (Chuyên ĐHSPhN - 2018) Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \sin x + \cos 2x$ trên $[0; \pi]$

Câu 15. Gọi m là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x - 1 + \frac{4}{x-1}$ trên khoảng $(1; +\infty)$. Tìm m ?

Dạng 2. Định m để GTLN-GTNN của hàm số thỏa mãn điều kiện cho trước

Bước 1. Tìm nghiệm $x_i (i=1, 2, \dots)$ của $y' = 0$ thuộc $[a; b]$

Bước 2. Tính các giá trị $f(x_i); f(a); f(b)$ theo tham số

Bước 3. So sánh các giá trị, suy ra giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất.

Bước 4. Biện luận m theo giả thuyết đề để kết luận

Lưu ý:

♦ Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên đoạn $[a; b]$ thì $\begin{matrix} \text{Max} f(x) = f(b); \\ \text{Min} f(x) = f(a) \end{matrix}$

♦ Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên đoạn $[a; b]$ thì $\begin{matrix} \text{Max} f(x) = f(a); \\ \text{Min} f(x) = f(b) \end{matrix}$

Câu 16. Tìm giá trị dương của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{m^2 x - 1}{x + 2}$ trên đoạn $[1; 3]$ bằng 1.

Câu 17. (Chuyên Bắc Ninh 2019) Gọi A, B lần lượt là giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{x + m^2 + m}{x - 1}$ trên đoạn $[2; 3]$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để $A + B = \frac{13}{2}$.

Câu 18. (THPT Ngô Gia Tự Vĩnh Phúc 2019) Cho hàm số $y = 2x^3 - 3x^2 - m$. Trên $[-1; 1]$ hàm số có giá trị nhỏ nhất là -1. Tính m ?

Câu 19. (THPT Bạch Đằng Quảng Ninh 2019) Cho hàm số $y = \frac{1 - m \sin x}{\cos x + 2}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[0; 10]$ để giá trị nhỏ nhất của hàm số nhỏ hơn -2?

Câu 20. (Mã 101-2022) Cho hàm số $f(x) = (m-1)x^4 - 2mx^2 + 1$ với m là tham số thực. Nếu $\min_{[0;3]} f(x) = f(2)$ thì $\max_{[0;3]} f(x)$ bằng bao nhiêu?

Dạng 3. Định m để GTLN-GTNN của hàm số chứa dấu giá trị tuyệt đối thỏa mãn điều kiện cho trước

Dạng 1: Tìm m để $\max_{[\alpha; \beta]} y = |f(x) + m| = a \quad (a > 0)$.

Phương pháp:

Cách 1: Trước tiên tìm $\max_{[\alpha; \beta]} f(x) = K; \quad \min_{[\alpha; \beta]} f(x) = k \quad (K > k)$.

Kiểm tra $\max \{ |m+K|, |m+k| \} \geq \frac{|m+K| + |m+k|}{2} \geq \frac{|m+K-m-k|}{2} = \frac{|K-k|}{2}$.

TH1: $\frac{|K-k|}{2} \leq a$. Để $\max_{[\alpha; \beta]} y = a \Leftrightarrow \begin{cases} m+k = -a \\ m+K = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -a-k \\ m = a-K \end{cases} \Rightarrow m \in [-a-k; a-K]$.

$$\frac{|K - k|}{2} > a \Rightarrow m \in \emptyset.$$

TH2:

Cách 2: Xét trường hợp

$$\text{TH1: } \text{Max} = |m + K| \Leftrightarrow \begin{cases} |m + K| = a \\ |m + K| \geq |m + k| \end{cases}$$

$$\text{TH2: } \text{Max} = |m + k| \Leftrightarrow \begin{cases} |m + k| = a \\ |m + k| \geq |m + K| \end{cases}$$

Dạng 2: Tìm m để $\min_{[a; \beta]} y = |f(x) + m| = a \quad (a > 0).$

Phương pháp:

$$\text{Trước tiên tìm } \max_{[a; \beta]} f(x) = K; \quad \min_{[a; \beta]} f(x) = k \quad (K > k).$$

$$\text{Để } \min_{[a; \beta]} y = a \Leftrightarrow \begin{cases} m + k = a \\ m + k > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} m + K = -a \\ m + K < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = a - k \\ m > -k \end{cases} \vee \begin{cases} m = -a - K \\ m < -K \end{cases}. \text{ Vậy } m \in S_1 \cup S_2.$$

Dạng 3: Tìm m để $\max_{[a; \beta]} y = |f(x) + m|$ không vượt quá giá trị M cho trước.

$$\text{Phương pháp: Trước tiên tìm } \max_{[a; \beta]} f(x) = K; \quad \min_{[a; \beta]} f(x) = k \quad (K > k).$$

$$\text{Để } \max_{[a; \beta]} y \leq M \Leftrightarrow \begin{cases} m + k \geq -M \\ m + K \leq M \end{cases} \Leftrightarrow -M - k \leq m \leq M - K.$$

Dạng 4: Tìm m để $\min_{[a; \beta]} y = |f(x) + m|$ không vượt quá giá trị a cho trước.

$$\text{Phương pháp: Trước tiên tìm } \max_{[a; \beta]} f(x) = K; \quad \min_{[a; \beta]} f(x) = k \quad (K > k).$$

Để

$$\min_{[a; \beta]} y \leq a \Leftrightarrow \begin{cases} m + k \leq a \\ m + k \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} m + K \geq -a \\ m + K \leq 0 \end{cases} \vee (m + K)(m + k) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq a - k \\ m \geq -k \end{cases} \vee \begin{cases} m \geq -a - K \\ m \leq -K \end{cases} \vee -K < m < K$$

Dạng 5: Tìm m để $\max_{[a; b]} y = |f(x) + m|$ đạt min.

Phương pháp:

$$\text{Trước tiên tìm } \max_{[a; b]} f(x) = K; \quad \min_{[a; b]} f(x) = k \quad (K > k).$$

$$\text{Đề hỏi tìm } m \Rightarrow m = -\frac{K + k}{2}. \quad \text{Đề hỏi tìm min của } \max_{[a; b]} y \Rightarrow \text{ giá trị này là } \frac{K - k}{2}.$$

Dạng 6: Tìm m để $\min_{[a; b]} y = |f(x) + m|$ đạt min.

Phương pháp: Trước tiên tìm $\max_{[a;b]} f(x) = K; \quad \min_{[a;b]} f(x) = k \quad (K > k).$

Đề hỏi tìm $m \Rightarrow (m+K)(m+k) \leq 0 \Leftrightarrow -K \leq m \leq -k$. Đề hỏi tìm min của $\min_{[a;b]} y \Rightarrow$ giá trị này là 0.

Dạng 7: Cho hàm số $y = |f(x) + m|$. Tìm m để $\max_{[a;b]} y \leq h \cdot \min_{[a;b]} y \quad (h > 0)$ hoặc $\text{Min} + \text{max} =$

Phương pháp: Trước tiên tìm $\max_{[a;b]} f(x) = K; \quad \min_{[a;b]} f(x) = k \quad (K > k).$

TH1: $|K+m| \leq h|k+m| - \frac{|K+m| \cdot |k+m|}{K+m \text{ cùng dấu } k+m} \rightarrow m \in S_1.$

TH2: $|k+m| \leq h|K+m| - \frac{|k+m| \cdot |K+m|}{K+m \text{ cùng dấu } k+m} \rightarrow m \in S_2.$

Vậy $m \in S_1 \cup S_2.$

Dạng 8: Cho hàm số $y = |f(x) + m|$.

Phương pháp: Trước tiên tìm $\max_{[a;b]} f(x) = K; \quad \min_{[a;b]} f(x) = k \quad (K > k).$

BT1: Tìm m để $\min_{[a;b]} y + \max_{[a;b]} y = \alpha \Leftrightarrow |m+K| + |m+k| = \alpha$

BT2: Tìm m để $\min_{[a;b]} y \cdot \max_{[a;b]} y = \beta \Leftrightarrow |m+K| \cdot |m+k| = \beta$

Câu 21. (Đề Minh Họa 2020 Lần 1) Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = |x^3 - 3x + m|$ trên đoạn $[0; 3]$ bằng 16. Tính tổng tất cả các phần tử của S

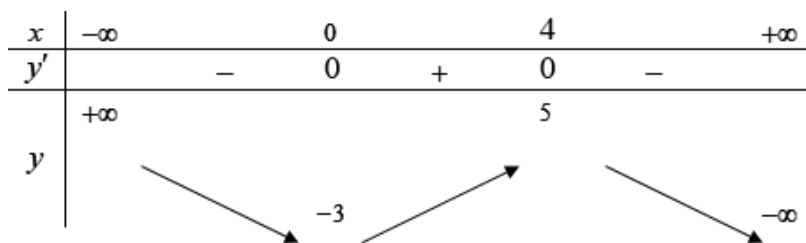
Câu 22. (THPT Nguyễn Huệ 2018) Cho hàm số $y = |x^2 + 2x + a - 4|$ (a là tham số). Tìm a để giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-2; 1]$ đạt giá trị nhỏ nhất

Câu 23. (Chuyên Nguyễn Thị Minh Khai - Sóc Trăng - 2018) Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x^3 - 3x^2 - 9x + m|$ trên đoạn $[-2; 4]$ bằng 16. Số phần tử của S là bao nhiêu?

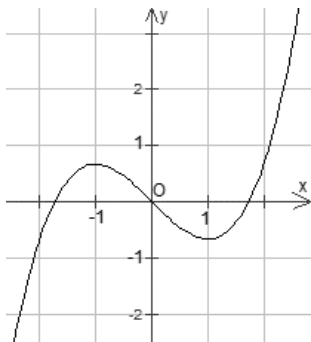
Câu 24. (Chuyên Lương Văn Chánh - Phú Yên - 2020) Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số thực m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = \left| \frac{1}{4}x^4 - 14x^2 + 48x + m - 30 \right|$ trên đoạn $[0; 2]$ không vượt quá 30. Tổng giá trị các phần tử của tập hợp S bằng bao nhiêu?

Câu 25. (Đại Học Hà Tĩnh - 2020) Có bao nhiêu giá trị của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = |e^{2x} - 4e^x + m|$ trên đoạn $[0; \ln 4]$ bằng 6?

Câu 26. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới đây. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = f(4x - x^2) + \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x + \frac{1}{3}$ trên đoạn $[1; 3]$.



Câu 27. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp 2 trên $\mathbb{R}$, hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = f\left(\frac{\sin x + \sqrt{3} \cos x}{2}\right)$ trên đoạn $\left[-\frac{5\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right]$

Câu 28. (Chuyên Thoại Ngọc Hầu - An Giang - 2021) Cho hai hàm số $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ và $g(x) = x + \frac{4}{x^2}$. Trên đoạn $[1; 4]$, hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ có cùng giá trị nhỏ nhất và đạt tại cùng một điểm. Biết rằng điểm $A(1; 4)$ thuộc đồ thị của hàm số $f(x)$. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[1; 4]$.

Câu 29. (Chuyên Bắc Giang - 2021) Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x + 1$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = |f(2\sin x + 1) + m|$ không vượt quá 10?

Câu 30. (THPT Đô Lương - Nghệ An - 2022) Hàm số $f(x) = 10^x + x$ và $g(x) = x^3 - mx^2 + (m^2 + 1)x - 2$. Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số $y = g(x + f(x))$ trên đoạn $[0; 1]$. Khi M đạt giá trị nhỏ nhất thì giá trị của m bằng?

Câu 31. (Chuyên Hà Tĩnh 2022) Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có bảng biến thiên của hàm số $g(x) = f(x - 1) + 2$ như sau

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$			
$g'(x)$		-	0	+	0	-	
$g(x)$	$+\infty$				4		$-\infty$

Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(-|\sqrt{3} \sin x - \cos x| + 2) + 2 \cos 2x + 4 \sin x - 1$

Dạng 4. Dùng phương pháp hàm số để tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức

Câu 32. (Chuyên Bắc Giang 2019) Cho x, y là các số thực thỏa mãn $x + y = \sqrt{x - 1} + \sqrt{2y + 2}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $P = x^2 + y^2 + 2(x + 1)(y + 1) + 8\sqrt{4 - x - y}$. Tính giá trị $M + m$

- Câu 33. (Chuyên Hà Tĩnh - 2019)** Cho các số thực x, y thay đổi thỏa mãn $x^2 + y^2 - xy = 1$ và hàm số $f(t) = 2t^3 - 3t^2 + 1$. Gọi M, m tương ứng là GTLN và GTNN của $Q = f\left(\frac{5x - y + 2}{x + y + 4}\right)$. Tính tổng $M + m$.
- Câu 34. (THPT Trần Nhân Tông 2018)** Cho hai số thực x, y thỏa mãn: $9x^3 + (2 - y\sqrt{3xy - 5})x + \sqrt{3xy - 5} = 0$.
Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = x^3 + y^3 + 6xy + 3(3x^2 + 1)(x + y - 2)$.
- Câu 35. (THPT Trần Phú - Đà Nẵng - 2018)** Cho hai số thực x, y thỏa mãn: $2y^3 + 7y + 2x\sqrt{1 - x} = 3\sqrt{1 - x} + 3(2y^2 + 1)$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x + 2y$.
- Câu 36. (Chuyên Quốc Học Huế - 2021)** Cho hàm số $y = \frac{x^2 - 2m(m+1)x + 2m^3 + m^2 + 1}{x - m}$ có đồ thị (C_m) (m là tham số thực). Gọi A là điểm thỏa mãn vừa là điểm cực đại của (C_m) ứng với một giá trị m vừa là điểm cực tiểu của (C_m) ứng với giá trị khác của m . Tìm giá trị của a để khoảng cách từ A đến đường thẳng $(d): x - (a+1)y + a = 0$ đạt giá trị lớn nhất là