TRƯỜNG THPT CHUYÊN HẠ LONG
QUẢNG NINH

ĐỀ ĐỀ XUẤT KỲ THI CHỌN HSG
KHU VỰC DH&ĐBBB LẦN XIV NĂM 2023
Môn Toán lớp: 10
(Thời gian: 180 phút không kể thời gian giao đề)

Câu 1. Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sao cho

$$f\left(\left(f(x)\right)^2+y\right)=x^2+f\left(y\right),\forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Câu 2. Cho a,b,c là các số thực dương, chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{b^2-bc+c^2}+\frac{b^3}{c^2-ca+a^2}+\frac{c^3}{a^2-ab+b^2}\ge\frac{3\left(ab+bc+ca\right)}{a+b+c}$$

Câu 3. Cho tam giác ABC cố định có $AB>AC>BC$ nội tiếp $\left(O\right)$. Một điểm D nằm trên cung BC không chứa A. Đường tròn $\left(B,BD\right)$ cắt đoạn AB tại F; đường tròn $\left(C,CD\right)$ cắt đoạn AC tại E. M là trung điểm của đoạn EF.

(a) Chứng minh rằng khi D dịch chuyển trên cung BC không chứa A thì M dịch chuyển trên một đường tròn cố định.

(b) EF cắt BC tại N; AM cắt $\left(O\right)$ tại điểm thứ hai là R. Đường tròn ngoại tiếp tam giác RMN cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF tại điểm X nằm trong tam giác ABC. Chứng minh rằng X dịch chuyển trên một đường thẳng cố định khi D dịch chuyển.

Câu 4. Với mỗi số nguyên dương $n>1$ không chia hết cho 6; ta xét r_n là số dư của $\left(-2\right)^n$ khi chia cho n. Tìm giá trị nhỏ nhất của r_n.

Câu 5. Với n là số nguyên dương, tính giá trị biểu thức

$$\sum_{k=n}^{2n}\frac{C_k^n}{2^k}.$$

********************** Hết **********************

ĐÁP ÁN VÀ BIỂU ĐIỂM

<table>
<tr><th>Câu</th><th>Lời giải</th><th>Điểm</th></tr>
<tr><td>Câu 1</td><td>

$$f\left(\left(f(x)\right)^2+y\right)=x^2+f\left(y\right),\forall x,y\in\mathbb{R}.\ (1)$$

Giả sử tồn tại hàm f thỏa mãn đề bài.

- Nếu $f\left(x_1\right)=f\left(x_2\right)$, thì dễ thấy ${x_1}^2={x_2}^2$ hay $x_1=\pm x_2$. (4)
- Xét hàm $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ được xác định bởi: $g\left(x\right)=\begin{cases}\left(f\left(\sqrt{x}\right)\right)^2, x>0\\ 0, x=0\\ -g\left(-x\right), x<0\end{cases}$, khi đó từ

(1) suy ra $f\left(\left(f\left(\sqrt{x}\right)\right)^2+y\right)=x+f\left(y\right),\forall x>0,\forall y$ nên

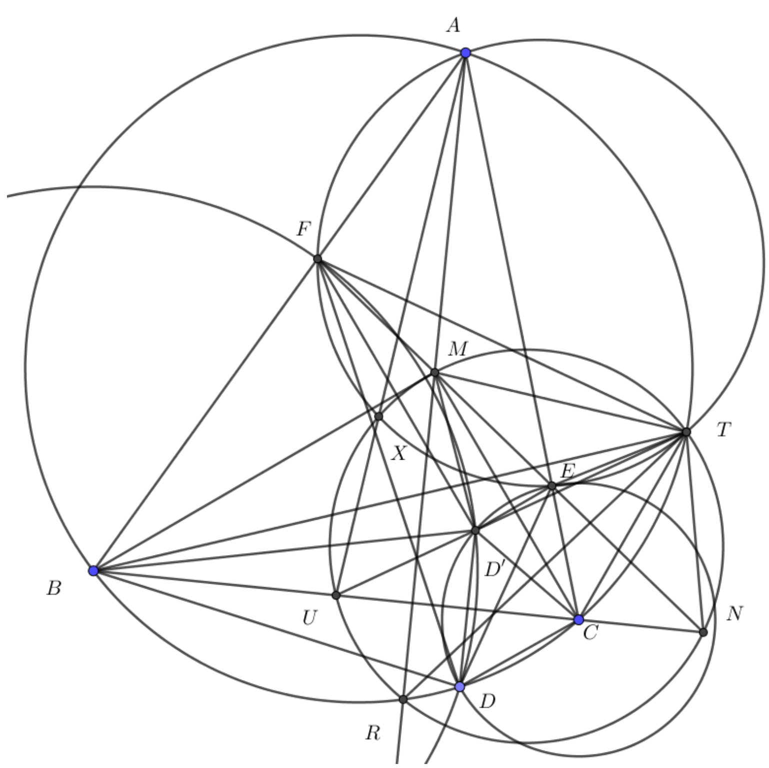
$$f\left(g\left(x\right)+y\right)=x+f(y),\forall x>0,\forall y\ (2)$$

- Biến đổi (2): $\forall u,v>0,\forall y$:

$$f\left(g\left(u\right)+g\left(v\right)+y\right)=u+f\left(g\left(v\right)+y\right)=u+v+g\left(y\right)=f\left(g\left(u+v\right)+y\right)$$

Từ đó theo (4) suy ra $g\left(u\right)+g\left(v\right)+y=\pm\left(g\left(u+v\right)+y\right),\forall u,v>0,\forall y$. Ta thấy phải tồn tại ít nhất một giá trị y để $g\left(u\right)+g\left(v\right)+y=\left(g\left(u+v\right)+y\right),\forall u,v>0$, nên g cộng tính, mà $g\left(x\right)\geq 0,\forall x>0$ nên $g\left(x\right)=cx,\forall x>0$, với $c\geq 0$; kết hợp với định nghĩa của g ta được $g\left(x\right)=cx,\forall x\in\mathbb{R}.$, hay $f\left(x\right)=\pm\sqrt{c}.x,\forall x\in\mathbb{R}$. Từ đó suy ra $f\left(cx^2+y\right)=x^2+f\left(y\right)\forall x,y\in\mathbb{R},$ đến đây chia các trường hợp của f, ta được kết quả cuối cùng $c=1, f\left(x\right)=x,\forall x\in\mathbb{R}$

</td><td>4 điểm</td></tr>
</table>

Câu 2	$$\frac{a^3}{b^2-bc+c^2}+\frac{b^3}{c^2-ca+a^2}+\frac{c^3}{a^2-ab+b^2}\ge\frac{3(ab+bc+ca)}{a+b+c}$$ Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwartz: $$\frac{a^3}{b^2-bc+c^2}+\frac{b^3}{c^2-ca+a^2}+\frac{c^3}{a^2-ab+b^2}$$ $$=\frac{a^4}{a\left(b^2-bc+c^2\right)}+\frac{b^4}{b\left(c^2-ca+a^2\right)}+\frac{c^4}{c\left(a^2-ab+b^2\right)}$$ $$\ge\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2-3abc}$$ Ta chứng minh $$\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2-3abc}\ge a+b+c$$ $$\Leftrightarrow a^2(a-b)(a-c)+b^2(b-c)(b-a)+c^2(c-a)(c-b)\ge 0$$ Đây là bất đẳng thức Schur. Cuối cùng thì $a+b+c\ge\frac{3(ab+bc+ca)}{a+b+c}$, ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.	4 điểm
Câu 3		2 điểm

	Lấy D' đối xứng với D qua BC. Khi đó: $BD'=BF=BD;CD'=CE=CD$ và suy ra B,C lần lượt là tâm ngoại tiếp tam giác $\Delta D'ED;\Delta D'FD$. Ta chứng minh $ED'F=90^0$ Ta có biến đổi: $$ED'F=360^0-BD'F-CD'E-CD'B$$ $$=360^0-\left(90^0-FDD'\right)-\left(90^0-EDD'\right)-CDB$$ $$=180^0+FDE-CDB=180^0-BDF-CDE$$ $$=90^0-BDF+90^0-CDE=\frac{DBF+ECD}{2}=90^0$$ Do đó nên $ED'F=90^0$. Mặt khác M là trung điểm của EF nên $MD'=ME=MF$. Lại có : $BD'=BE$ $\Rightarrow \Delta MBD'=\Delta MBF(c.c.c)\Rightarrow BMF=BMD'$ Suy ra MB là phân giác của $D'MF$. Tương tự CM là phân giác của EMD'. Do đó nên $BMC=90^0\Rightarrow M$ dịch chuyển trên đường tròn đường kính CB cố định.	
	Gọi T là giao điểm khác A của $\left(AEF\right)$ và $\left(O\right)$ Khi đó T là điểm Miquel của tứ giác toàn phần $EFCB.AN$ và do đó nên $T\in(ECN)$ Gọi U là trung điểm của BC. (*) Trước hết ta chứng minh M,N,T,R,U cùng thuộc 1 đường tròn. Thật vậy, ta có biến đổi góc: $$MRT=ART=ACT=ECT=ENT=MNT$$ Suy ra M,R,N,T cùng thuộc 1 đường tròn. Bởi T là giao điểm khác A của $\left(AEF\right)$ và $\left(O\right)$ nên ta có : $$TFE=TAE=TAC=TBC$$ $$TEF=180^0-TEN=180^0-TCN=TCB$$	2 điểm

	Suy ra $\Delta TEF \sim \Delta TCB(g.g)$. Mặt khác M,U lần lượt là trung điểm của EF,BC Vậy nên $TMN = TME = TUC = TUN$ và suy ra T,M,U,N cùng thuộc 1 đường tròn. Suy ra M,N,T,R,U cùng thuộc 1 đường tròn. (*) Ta chứng minh $X \in AU$ Thật vậy ta chú ý X là giao điểm khác T của (AEF) và (MNR) nên ta có : $$TXU + TXA = 180^0 - TNU + TEA = 180^0 - TNU + TNC = 180^0$$ Suy ra X nằm trên đường thẳng AU cố định.	
Câu4	Đầu tiên ta chứng minh $r_n \geq 3$ Thật vậy, giả sử $r_n < 3$. Khi đó ta có các trường hợp sau: **Trường hợp 1:** $r_n = 0$. Khi đó $n \mid 2^n$. Điều này vô lý do $n > 1$ là số nguyên dương lẻ. **Trường hợp 2:** $r_n = 1$. Khi đó $n \mid 2^n + 1$. Gọi p là ước nguyên tố nhỏ nhất của n. Đặt $h = ord_p(2)$. Khi đó $$h \mid p-1; h \mid 2n \Rightarrow h \mid \gcd(p-1;2n) \Rightarrow h \mid 2 \Rightarrow h = 2 \Rightarrow p = 3$$ Tuy nhiên điều này vô lý do $n > 1$ không chia hết cho 6. **Trường hợp 3:** $r_n = 2$ Khi đó $n \mid 2^n + 2$. Bởi $n > 1$ là số nguyên dương lẻ nên $n \mid 2^{n-1} + 1$ Xét p là một ước nguyên tố bất kỳ của n. Đặt $h = ord_p(2)$. Khi đó từ điều kiện $n \mid 2^{n-1} + 1$, ta có $h \mid 2(n-1)$ nhưng h không là ước của $n-1$. Do đó nên $v_2(h) = v_2(n-1) + 1$. Theo định lý Fermat nhỏ ta có $h \mid p-1$. Do đó nên :	4 điểm

	$p-1 \vdots 2^{v_2(n-1)+1}, \forall p$ là ước nguyên tố của n. Ta thu được $(n-1) \vdots 2^{v_2(n-1)+1}$. Điều này vô lý. Do đó nên $r_n \geq 3$ Ta cũng chú ý thêm $r_5 = 3$ Vậy nên giá trị nhỏ nhất của r_n là bằng 3, đạt được khi $n=5$.	
Câu 5	Đặt $S_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{C_k^n}{2^k}$. Ta có $S_1 = C_1^1 \frac{1}{2^1} + C_2^1 \frac{1}{2^2} = 1$. Viết lại các biểu thức: $S_n = C_n^0 \frac{1}{2^n} + C_{n+1}^1 \frac{1}{2^{n+1}} + C_{n+2}^2 \frac{1}{2^{n+2}} + ... + C_{2n}^n \frac{1}{2^{2n}}$ $S_{n+1} = C_{n+1}^0 \frac{1}{2^{n+1}} + C_{n+2}^1 \frac{1}{2^{n+2}} + C_{n+3}^2 \frac{1}{2^{n+3}} + ... + C_{2n+2}^{n+1} \frac{1}{2^{2n+2}}$ Ta có: $2^{n+1}.S_{n+1} = C_{n+1}^0 + \frac{1}{2} C_{n+2}^1 + \frac{1}{2^2} C_{n+3}^2 + \frac{1}{2^3} C_{n+4}^3 ... + \frac{1}{2^{n+1}} C_{2n+2}^{n+1}$ $= C_n^0 + \frac{1}{2}\left(C_{n+1}^1 + C_{n+1}^0\right) + \frac{1}{2^2}\left(C_{n+2}^2 + C_{n+2}^1\right) + \frac{1}{2^3}\left(C_{n+3}^3 + C_{n+3}^2\right) + ... + \frac{1}{2^{n+1}}\left(C_{2n+1}^{n+1} + C_{2n+1}^n\right)$ $= \left(C_n^0 + \frac{1}{2} C_{n+1}^1 + \frac{1}{2^2} C_{n+2}^2 + ... + \frac{1}{2^{n+1}} C_{2n+1}^{n+1}\right) + \left(\frac{1}{2} C_{n+1}^0 + \frac{1}{2^2} C_{n+2}^1 + \frac{1}{2^3} C_{n+3}^2 + ... + \frac{1}{2^{n+1}} C_{2n+1}^n\right)$ $= 2^n S_n + 2^n S_{n+1} + \frac{1}{2^{n+1}}\left(C_{2n+1}^{n+1} - \frac{1}{2} C_{2n+2}^{n+1}\right)$ $= 2^n S_n + 2^n S_{n+1} + \frac{1}{2^{n+1}}\left(C_{2n+1}^{n+1} - \frac{1}{2}\left(C_{2n+1}^{n+1} + C_{2n+1}^n\right)\right)$ $= 2^n S_n + 2^n S_{n+1}$ Từ đó suy ra $S_{n+1} = S_n = 1$ với mọi n.	4 điểm

Giáo viên ra đề:

- **Nguyễn Việt Dũng (SĐT: 036 333 5566)**
- **Đặng Hồng Như (SĐT: 077 822 6171)**