Chuyên đề. Chứng minh toán học

Phương pháp 1. Chứng minh trực tiếp

1 Phương pháp

Bài toán. Chứng minh rằng "Nếu P thì Q".
Để thực hiện phương pháp chứng minh trực tiếp, người ta giả sử rằng P là đúng, sau đó sử dụng các qui tắc suy luận hay các định lý để chỉ ra rằng Q là đúng và kết luận P→Q là đúng.

2 Ví dụ minh họa

Ví dụ 1. Chứng minh rằng: Nếu n là số lẻ thì n^2 là số lẻ.

Ví dụ 2. Chứng minh rằng: Với mọi số nguyên dương $n>1$ ta có $n^2>n$

3 Bài tập tự luận

Bài 1. Chứng minh tích của 4 số tự nhiên liên tiếp cộng 1 luôn là số chính phương.

4 Các bài toán thi

Bài 2. [TS10_Chuyên Hùng Vương-Phú Thọ_1999] Chứng minh rằng từ 7 số tự nhiên bất kì, bao giờ cũng chọn được bốn số sao cho tổng của bốn số đó chia hết cho 4.

Phương pháp 2. Phương pháp phản chứng

1 Phương pháp

Bước 1. Giả sử có điều trái với kết luận của bài toán.
Bước 2. Từ điều giả sử trên và từ giả thuyết của bài toán, ta suy ra điều mâu thuẫn với giả thiết hay với các kiến thức đã học.
Bước 3. Khẳng định kết luận của bài toán là đúng.

2 Ví dụ minh họa

Ví dụ 3. Chứng minh rằng "Nếu $3n+2$ là số lẻ thì n là số lẻ".

3 Bài tập tự luận

Bài 3. Chứng minh rằng "$\sqrt{2}$ là số vô tỉ".

Bài 4. Cho 7 đoạn thẳng có độ dài lớn hơn 10 và nhỏ hơn 100. Chứng minh rằng luôn tìm được 3 đoạn để có thể ghép thành một tam giác.

4 Các bài toán thi

Bài 5. [TS10_PTNK Tp. Hồ Chí Minh_2004-2005] Chứng minh rằng từ 8 số nguyên dương tùy ý không lớn hơn 20, luôn chọn được 3 số x, y, z là độ dài ba cạnh của một tam giác.

Phương pháp 3. Phương pháp qui nạp toán học

1 Phương pháp

Bài toán. Chứng minh rằng mệnh đề $P(n)$ đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$

Bước 1: Kiểm tra mệnh đề đúng với $n = 1$.

Bước 2: Giả sử mệnh đề đúng với $n = k \geq 1$ (giả thiết quy nạp).

Bước 3: Sử dụng giải thiết ở bước 2 chứng minh mệnh đề đúng với $n = k + 1$

Chú ý: *Trong trường hợp chứng minh một mệnh đề đúng với mọi số tự nhiên $n \geq p$ (p là số tự nhiên) thì thuật toán là:*

Bước 1: Kiểm tra mệnh đề đúng với $n = p$

Bước 2: Giả sử mệnh đề đúng với $n = k \geq p$ (giả thiết quy nạp)

Bước 3: Cần chứng minh mệnh đề đúng với $n = k + 1$

2 Ví dụ minh họa

Ví dụ 4. Chứng minh rằng với $n \in N^*$ thì $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$

Ví dụ 5. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \geq 2$ thì: $3^n > 3n + 1$

Ví dụ 6. Chứng minh rằng với $n \in \mathbb{N}^*$ thì $n^3 - n$ chia hết cho 3.

3 Bài tập tự luận

Bài 6. Chứng minh rằng rằng với $n \in \mathbb{N}^*$ thì $n^7 - n$ chia hết cho 7.

Bài 7. Chứng minh rằng với $n \in \mathbb{N}^*$ thì $7^n - 1$ chia hết cho 6.

4 Các bài toán thi

Bài 8. Chứng minh rằng số $T_n = 3^{2n+1} + 40n - 67$ chia hết cho 64 với mọi số n nguyên không âm.

Bài 9. [TS10_ĐHSP Hà Nội_2003-2004] Với mỗi số nguyên dương n, đặt $P_n = 1.2.3...n$. Chứng minh rằng

a) $1 + 1.P_1 + 2.P_2 + 3.P_3 + \ldots + n.P_n = P_{n+1}$

b) $\dfrac{1}{P_2} + \dfrac{2}{P_3} + \dfrac{3}{P_4} + \ldots + \dfrac{n-1}{P_n} < 1$

Bài 10. [TS10_Chuyên Lê Quý Đôn-Bình Định_1999-2000] Chứng minh rằng một số có dạng $n^4 - 4n^3 - 4n^2 + 16n$ (với n là số tự nhiên chẵn, lớn hơn 4) thì chia hết cho 384.