ĐỀ 75

HSG TOÁN 9 QUẢNG NGÃI 2023-2024

Câu 1.(4,0 điểm)

1) Tìm tất cả các bộ ba số nguyên tố khác nhau (a;b;c) sao cho

$$a.b.c = 3(a + b + c)$$

2) Tìm tất cả các nghiệm nguyên x, y của phương trình

$$4x^2+5y^2+8x+37$$

3) Chứng minh rằng $x^3+2021x$ chia hết cho 6 (với x ∈ Z)

Câu 2.(4,0 điểm)

1) Giải phương trình: $x^2+2022x-2019=2\sqrt{2022x-2021}$

2) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} xy+x+y=3 \\ \dfrac{1}{x^2+2x}+\dfrac{1}{y^2+2y}=\dfrac{2}{3} \end{cases}$

Câu 3.(4,0 điểm)

1) Cho biểu thức A = $\left(\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{xy}+1}+\dfrac{\sqrt{xy}+\sqrt{x}}{1-\sqrt{xy}}+1\right):\left(1-\dfrac{\sqrt{xy}+\sqrt{x}}{\sqrt{xy}-1}-\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{xy}+1}\right)$

a) Rút gọn biểu thức A .

b) Cho $\dfrac{1}{\sqrt{x}}\ \dfrac{+1}{\sqrt{y}}$ ¿ 6. Tìm giá trị lớn nhất của A

2) Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn điều kiện

$$x+y+z+xy+yz+zx=6$$

Chứng minh bất đẳng thức $x^2+y^2+z^2\geq 3$

Câu 4.(7,0 điểm)

1) Một em học sinh có tờ giấy màu hình tam giác ABC có AB = 3cm; AC = 4cm; BC = 5cm. Em muốn cắt ra hình chữ nhật MNPQ sao cho M, N thuộc cạnh BC. P thuộc cạnh AC, Q thuộc cạnh AB . Hãy xác định các kích thước của hình chữ nhật MNPQ để tờ giấy màu cắt ra có diện tích lớn nhất.

2) Cho 3 điểm A, B, C cố định nằm trên một đường thẳng d (B nằm giữa A và C). Vẽ đường tròn tâm O thay đổi nhưng luôn đi qua B và C (O không nằm trên đường thẳng d). Kẻ AM và AN là các tiếp tuyến với đường tròn tâm O (M và N là tiếp điểm). Gọi I là trung điểm của BC, AO

cắt MN tại H và cắt đường tròn tại các điểm P và Q (P nằm giữa A và O), BC cắt MN tại K .

a) Chứng minh 5 điểm O, M, A, N, I cùng nằm trên một đường tròn.

b) Chứng minh điểm K cố định khi đường tròn tâm O thay đổi.

c) Gọi D là trung điểm HQ , từ H kẻ đường thẳng vuông góc với MD cắt đường thẳng MP tại E

Câu 5.(1,0 điểm)

Trong một tam giác có cạnh lớn nhất bằng 2022 đơn vị, người ta lấy 9 điểm phân biệt. Chứng minh rằng luôn tìm được ba điểm tạo thành tam giác có chu vi không vượt q

------- HẾT------

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1.(4,0 điểm)

1) Tìm tất cả các bộ ba số nguyên tố khác nhau (a;b;c) sao cho

a.b.c = 3(a + b + c)

2) Tìm tất cả các nghiệm nguyên x, y của phương trình

$$4x^2+5y^2+8x=37$$

3) Chứng minh rằng $x^3+2021x$ chia hết cho 6 (với x ∈ Z)

Lời giải

1) Do a, b, c là các số nguyên tố khác nhau; giả sử 2≤ a < b < c

Vì a.b.c = 3(a + b + c) ⇒ abc ⋮ 3. Mà a, b, c nguyên tố nên một trong ba số a, b, c phải có một số chia hết cho 3. Nếu a = 3 thì $(b-1)(c-1)=4$ vô lý. Nếu c = 3 thì vô lý a và b nguyên tố nên b ⋮ 3 và b nguyên tố nên b = 3.

Với b = 3, ta có 3ac = 3(a + c +3) ⇔ ac = a + c +3

$$\Leftrightarrow (a-1)(c-1)=4 \Rightarrow \begin{cases} a-1=1 \\ c-1=4 \end{cases} \Leftrightarrow a=2;c=5$$

Vậy (a, b, c) = (2;3;5)

Hoán vị bộ 3 số này ta có tất cả các bộ 3 số khác nhau thỏa mãn điều kiện a, b, c = 3(a + b + c)

2) Ta có $4x^2+5y^2+8x=37 \Leftrightarrow 4(x^2+2x+1)=41-5y^2$

$\Leftrightarrow 4(x+1)^2=41-5y^2 \Rightarrow (41-5y^2)\vdots 2 \Leftrightarrow y^2$ là số nguyên lẻ

Mà $4(x+1)^2 \geq 0 \Rightarrow (41-5y^2)\geq 0 \Leftrightarrow y^2\in\{1;3;5;7\}$ suy ra $y^2=1$. Từ đó tìm được $x=2, x=-4$

Thử lại và trả lời các nghiệm (2,1); $(2,-1)$; $(-4,1)$; $(-4,-1)$

3) Ta có: $x^3+2021x=x(x^2-1)+2022x=(x-1)x(x+1)+2022x$

Mà $(x-1)x(x+1)\vdots 6$ (tích 3 số nguyên liên tiếp) và $2022x\vdots 6$ (do 2022 ⋮ 6)

Nên $(x-1)x(x+1)+2022x\vdots 6$ hay $x^3+2021x\vdots 6$

Câu 2.(4,0 điểm)

1) Giải phương trình: $x^2+2022x-2019=2\sqrt{2022x-2021}$

2) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} xy+x+y=3 \\ \dfrac{1}{x^2+2x}+\dfrac{1}{y^2+2y}=\dfrac{2}{3} \end{cases}$

Lời giải

1) $x^2+2022x-2019=2\sqrt{2022x-2021}$. Điều kiện x ≥ $\frac{2021}{2022}$

Phương trình đã cho tương đương với

$$x^2-2x+1+2022x-2021-2\sqrt{2022x-2021}+1=0$$

$\Leftrightarrow$ $(x-1)^2+\left(\sqrt{2022x-2021}-1\right)^2=0$

$\Leftrightarrow$ $\begin{cases} x-1=0 \\ \sqrt{2022x-2021}-1=0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} x=1 \\ 2022x-2021=1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow$ x = 1 (thỏa mãn điều kiện)

Vậy x = 1 là nghiệm của phương trình đã cho

2)

Điều kiện $\begin{cases} x^2+2x\neq 0 \\ y^2+2y\neq 0 \end{cases}$

Ta có

$\begin{cases} xy+x+y=3 \\ \frac{1}{x^2+2x}+\frac{1}{y^2+2y}=\frac{2}{3} \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} (x+1)(y+1)=4 \\ \frac{1}{(x+1)^2-1}+\frac{1}{(y+1)^2-1}=\frac{2}{3} \end{cases}$

Đặt u = x + 1, v = y + 1

Hệ phương trình trở thành $\begin{cases} uv=4 \\ \frac{1}{u^2-1}+\frac{1}{v^2-1}=\frac{2}{3} \end{cases}$ Điều kiện $\begin{cases} u\neq \pm 1 \\ v\neq \pm 1 \end{cases}$ (*)

Khi đó $\begin{cases} uv=4 \\ 3(u^2+v^2-2)=2(u^2v^2-u^2-v^2+1) \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} uv=4 \\ u^2+v^2=8 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} uv=4 \\ u+v=\pm 4 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ $\left[\begin{array}{l} u=v=2 \\ u=v=-2 \end{array}\right.$ $\Leftrightarrow$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-3 \\ y=-3 \end{cases} \end{array}\right.$ (thỏa mãn điều kiện)

Từ đó suy ra nghiệm của hệ phương trình là (1;1); $(-3;-3)$

Câu 3.(4,0 điểm)

1) Cho biểu thức A = $\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{xy}+1}+\frac{\sqrt{xy}+\sqrt{x}}{1-\sqrt{xy}}+1\right):\left(1-\frac{\sqrt{xy}+\sqrt{x}}{\sqrt{xy}-1}-\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{xy}+1}\right)$

a) Rút gọn biểu thức A .

b) Cho $\frac{1}{\sqrt{x}}\frac{+1}{\sqrt{y}}$ ¿ 6. Tìm giá trị lớn nhất của A

2) Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn điều kiện

$$x+y+z+xy+yz+zx=6$$

Chứng minh bất đẳng thức $x^2+y^2+z^2\geq 3$

Lời giải

1)

a) Điều kiện: x > 0; y > 0; $\sqrt{xy}\neq 1$

A = $\frac{(\sqrt{x}+1)(1-\sqrt{xy})+(\sqrt{xy}+\sqrt{x})(\sqrt{xy}+1)+(\sqrt{xy}+1)(1-\sqrt{xy})}{(\sqrt{xy}+1)(1-\sqrt{xy})}$

: $\frac{(\sqrt{xy}+1)(1-\sqrt{xy})+(\sqrt{xy}+\sqrt{x})(\sqrt{xy}+1)-(\sqrt{x}+1)(1-\sqrt{xy})}{(\sqrt{xy}+1)(1-\sqrt{xy})}$

$= \frac{(\sqrt{x}+1)(1-\sqrt{xy})+(\sqrt{xy}+\sqrt{x})(\sqrt{xy}+1)+(\sqrt{xy}+1)(1-\sqrt{xy})}{(\sqrt{xy}+1)(1-\sqrt{xy})+(\sqrt{xy}+\sqrt{x})(\sqrt{xy}+1)-(\sqrt{x}+1)(1-\sqrt{xy})}$

$= \frac{\sqrt{x}-x\sqrt{y}+1-\sqrt{xy}+xy+\sqrt{xy}+x\sqrt{y}+\sqrt{x}+\sqrt{xy}-xy+1-\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}-xy+1-\sqrt{xy}+xy+\sqrt{xy}+x\sqrt{y}+\sqrt{x}-\sqrt{x}+x\sqrt{y}-1+\sqrt{xy}}$

$= \frac{1+\sqrt{x}}{x\sqrt{y}+\sqrt{xy}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{xy}}$

Vậy với x > 0; y > 0; $\sqrt{xy}\neq 1$ thì A = $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{xy}}$

b) Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có: $\frac{1}{\sqrt{x}}\frac{+1}{\sqrt{y}} \geq 2\sqrt{\frac{1}{\sqrt{xy}}} \Leftrightarrow 6 \geq 2\sqrt{\frac{1}{\sqrt{xy}}}$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{xy}} \leq 9$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}}$ ¿ $\frac{1}{\sqrt{y}}$ ¿$3 \Leftrightarrow x=y=\frac{1}{9}$

2) Ta có $x^2+1\geq 2x$; $y^2+1\geq 2y$; $z^2+1\geq 2z$ với mọi x, y, z

Do đó, $x^2+y^2\geq 2xy$; $y^2+z^2\geq 2yz$; $x^2+z^2\geq 2zx$ với mọi x, y, z

Cộng các bất đẳng thức trên vế theo vế ta được

$3(x^2+y^2+z^2) + 3\geq 2(x+y+z+xy+yz+z+zx)$

$\Leftrightarrow$ $3(x^2+y^2+z^2) + 3\geq 12$ (vì $x+y+z+xy+yz+z+zx = 6$)

$\Leftrightarrow$ $x^2+y^2+z^2\geq 3$

Câu 4.(7,0 điểm)

1) Một em học sinh có tờ giấy màu hình tam giác ABC có AB = 3cm; AC = 4cm; BC = 5cm. Em muốn cắt ra hình chữ nhật MNPQ sao cho M, N thuộc cạnh BC. P thuộc cạnh AC, Q thuộc cạnh AB . Hãy xác định các kích thước của hình chữ nhật MNPQ để tờ giấy màu cắt ra có diện tích lớn nhất.

2) Cho 3 điểm A, B, C cố định nằm trên một đường thẳng d (B nằm giữa A và C). Vẽ đường tròn tâm O thay đổi nhưng luôn đi qua B và C (O không nằm trên đường thẳng d). Kẻ AM và AN là các tiếp tuyến với đường tròn tâm O (M và N là tiếp điểm). Gọi I là trung điểm của BC, AO cắt MN tại H và cắt đường tròn tại các điểm P và Q (P nằm giữa A và O), BC cắt MN tại K .

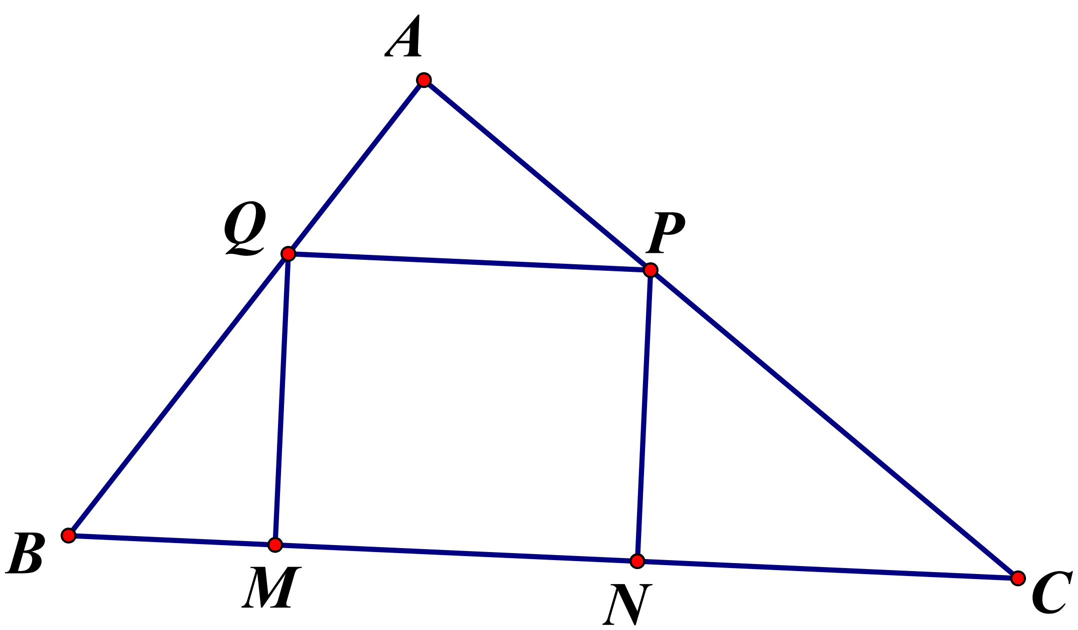
a) Chứng minh 5 điểm O, M, A, N, I cùng nằm trên một đường tròn.

b) Chứng minh điểm K cố định khi đường tròn tâm O thay đổi.

c) Gọi D là trung điểm HQ , từ H kẻ đường thẳng vuông góc với MD cắt đường thẳng MP tại E

Lời giải

1)



Tam giác ABC có AB = 3cm; AC = 4cm; BC = 5cm. Nên là tam giác vuông tại A (Định lý Pytago đảo)

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên BC và PQ.

Tam giác ABC vuông tại A nên AH = $\frac{AB.AC}{BC} = \frac{12}{5}$ cm

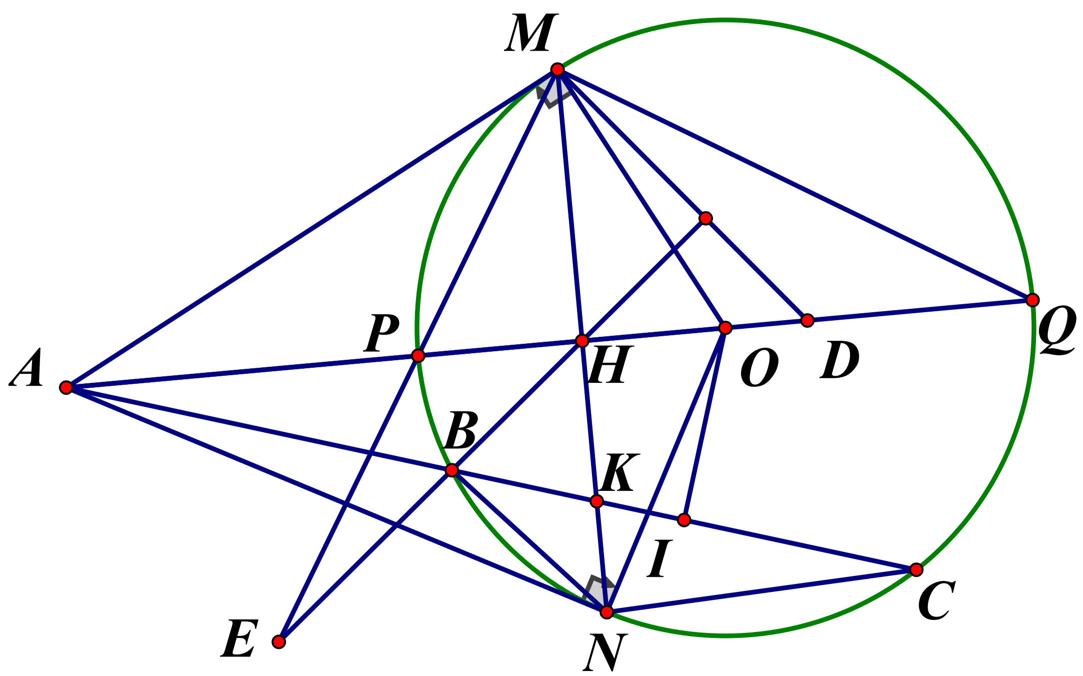
Đặt PN = x, PQ = y. Vì △APQ đồng dạng △ACB suy ra

$\frac{PQ}{CB} = \frac{AK}{AH} = \frac{AH-x}{AH} = 1\frac{-x}{AH} \Leftrightarrow \frac{y}{5} = 1\frac{-5}{12}x \Rightarrow y=5-\frac{25}{12}x$

$S_{MNPQ}=x.y=5x-\frac{25}{12}x^2 = 3-\frac{25}{12}\left(x-\frac{6}{5}\right)^2 \leq 3$

Vậy giá trị lớn nhất của S_{MNPQ}bằng 3 khi $x=\frac{6}{5}$ cm và $y=\frac{5}{2}$ cm

2)



a) Do I là trung điểm của BC (dây BC không đi qua O)⇒ OI⊥BC⇒ $\widehat{OIA}$ = 90⁰

Ta có $\widehat{AMO}$ = 90⁰ (do AM là tiếp tuyến (O))

$\widehat{ANO}$ = 90⁰ (do AN là tiếp tuyến (O))

Suy ra 5 điểm O, M, A, N, I cùng thuộc đường tròn đường kính OA

b) Vì AM, AN là hai tiếp tuyến (O) cắt nhau tại A nên OA là tia phân giác $\widehat{MON}$ mà $\triangle OMN$ cân tại O nên OA ⊥ MN. Ta có △ABN đồng dạng △ANC (vì $\widehat{ANB} = \widehat{ACN} = \frac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{NB}$ và $\widehat{CAN}$ chung) suy ra $\frac{AB}{AN} = \frac{AN}{AC} \Rightarrow$ AB.AC = AN^2

Ta có $\triangle$ANO vuông tại N đường cao NH nên ta có AH.AO = AN^2

Suy ra AB.AC = AH.AO

Ta có $\triangle$AHK đồng dạng $\triangle$AIO (vì $\widehat{AHK} = \widehat{AIO} = 90^0$ và $\widehat{OAI}$ chung)

$\Rightarrow \frac{AH}{AI} = \frac{AK}{AO} \Rightarrow$ AI.AK = AH.AO $\Rightarrow$ AI.AK = AB.AC

$\Rightarrow$ AK = $\frac{AB.AC}{AI}$ Ta có A, B, C cố định nên I cố định suy ra AK không đổi; mà A cố định và K thuộc BC suy ra K cố định)

c) Ta có $\widehat{PMQ} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Xét $\triangle PMH$ và $\triangle$QDM có $\widehat{MEH} = \widehat{DMQ}$ (cùng phụ với DMP), $\widehat{EMH} = \widehat{MQD}$ (cùng phụ với MPO). Vậy $\triangle$MHE đồng dạng $\triangle$QDM $\Rightarrow \frac{ME}{MQ} = \frac{MH}{DQ}$

Ta có $\triangle$PMH đồng dạng $\triangle$MQH (vì MPH = QMH; MHP = QHM = 90^0)

$\Rightarrow \frac{MP}{MQ} = \frac{MH}{HQ} = \frac{MH}{2DQ} \Rightarrow \frac{MP}{MQ} = \frac{1}{2}\frac{ME}{MQ}$

$\Rightarrow$ ME = 2MP $\Rightarrow$ P là trung điểm ME.

Câu 5.(1,0 điểm)

Trong một tam giác có cạnh lớn nhất bằng 2022 đơn vị, người ta lấy 9 điểm phân biệt. Chứng minh rằng luôn tìm được ba điểm tạo thành tam giác có chu vi không vượt q

Lời giải

Giả sử tam giác đã cho là tam giác ABC có cạnh lớn nhất bằng 2022 đơn vị. Chia tam giác đã cho thành 4 tam giác không có điểm trong chung bằng việc vẽ các đường trung bình của nó. Khi đó cạnh lớn nhất trong các tam giác nhỏ bằng 1011 đơn vị. Lấy 9 điểm phân biệt nằm tam giác đã cho, nghĩa là nằm trong 4 hình tam giác nhỏ, theo nguyên tắc Dirichlet phải tồn tại ít nhất 3 điểm nằm trong cùng một tam giác nhỏ, mà tam giác này có chu vi không vượt quá 3033 đơn vị. Vì vậy 3 điểm này tạo thành tam giác có chu vi không vượt quá 3033 đơn vị.

------- HẾT------