**CHUYÊN ĐỀ 23: GIỚI HẠN.**

**Tên FB: Chien Nguyen. Email:chienhoanghoatham@gmail.com**

**🗸.Dạng 2: Tìm giới hạn bằng cách dùng lượng liên hợp**

✝❶**\_Tóm tắt lý thuyết cơ bản:**

**🞠*. Quy tắc L’Hoopital :***

**Nếu  Thì **

**🞠*. Các công thức thường dùng trong nhân liên hợp:***

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Biểu thức** | **Biểu thức liên hợp** | **Tích** |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |

✝❷**\_Phương pháp Casio:**

**①. Quy ước các giới hạn vô định.**

* 
* 
* 
* 
* 

**②. Lệnh CASIO: *Calc, Solve***

**🗵\_ Bài tập minh họa trong các đề đã thi của BGD.**

|  |
| --- |
| **Câu 1: (Chuyên Lam Sơn-KSCL-lần 2-2018-2019)** Biết rằng , ( tối giản) . Tổng  có giá trị là  **A. .** **B. .** **C. .** **D. .** |

**Lời giải**

|  |  |
| --- | --- |
| **①\_Quy trình bấm máy.**   * **Nhập hàm số:**      * **Calc  rồi chia đáp án cho  ta được :**      * **Nhận thấy đáp án xấp xỉ  nên ta suy ra  và .** * **Vậy chọn D.** | **②\_Bài học kinh nghiệm**   * **Nhận thấy nếu bấm thông thường thì đáp án sẽ không hữu tỉ nhưng nếu chia cho  sẽ ra hữu tỉ do đó ta chia giới hạn cho .** * **Ước lượng được giới hạn cần tìm.** |

|  |
| --- |
| **Câu 2: (Chuyên Lam Sơn-KSCL-lần 2-2018-2019)** Biết  trong đó *a* là số nguyên, *b* là số nguyên tố. Ta có tổng  bằng:  **A. .** **B. .** **C. .** **D. .** |

**Lời giải**

|  |  |
| --- | --- |
| **①\_Quy trình bấm máy.**   * **Nhập hàm số:**      * **Calc  rồi bình phương đáp án ta được :** * **Nhận thấy đáp án xấp xỉ  nên ta suy ra  và .** * **Vậy chọn C.** | **②\_Bài học kinh nghiệm**   * **Nhận thấy nếu bấm thông thường thì đáp án sẽ không hữu tỉ nhưng nếu bình phương sẽ ra hữu tỉ do đó ta bình phương giới hạn.** * **Ước lượng được giới hạn cần tìm.** |

|  |
| --- |
| **Câu 3: (THTT** **Số** **4-487** **tháng** **1** **năm** **2017-2018)** Cho hàm số ,  là tham số. Tìm giá trị của  để hàm số có giới hạn tại .  **A.**  **B.**  **C.**  **D.** |

**Lời giải**

|  |  |
| --- | --- |
| **Hàm số có giới hạn tại  khi**  **①\_Quy trình bấm máy.**   * **Nhập phương trình:**      * **Solve   ta được :** * **Suy ra** * **Vậy chọn B.** | **②\_Bài học kinh nghiệm**   * **Nhận thấy hàm số có giới hạn tại  khi** * **Khi nhập vào máy tính nhập  ,** * **Vì  nên khi Solve ta chọn** |

|  |
| --- |
| **Câu 4: [DS11.C4.2.D03.b]** Cho  là hai số nguyên thỏa mãn  và . Mệnh đề nào dưới đây **sai**?  **A.**  **B.**  **C.**  **D.** |

**Lời giải**

|  |  |
| --- | --- |
| * **Theo đề bài ta có :** * **Dựa vào bảng giá trị, chọn các cặp (a ;b) nguyên sao cho khi thay vào 4 đáp án có 3 mệnh đề đúng và 1 mệnh đề sai**   **①\_Quy trình bấm máy.**   * **Mode 8** * **Nhập hàm**     **Start :-10 End :10 Step : 1**     * **Suy ra** * **Vậy chọn A.** | **②\_Bài học kinh nghiệm**   * **Khi có hai tham số nên đưa về 1 tham số nhưng trong bài này nếu đưa về một tham số sẽ không tính được.** * **Có thể dựa theo giả thiết và đáp án để giải bài toán.** |

|  |
| --- |
| **Câu 5: [DS11.C4.2.D03.c]** Cho biết  có kết quả là một số thực. Giá trị của biểu thức  bằng?  **A.**  **B.**  **C.**  **D.** |

**Lời giải**

|  |  |
| --- | --- |
| * **Giới hạn là số thực**   **(I)**   * **Theo quy tắc L’Hopital ta có** * **Giới hạn là số thực**   **(II)**  **Từ (I) và (II) ta có :**    **①\_Quy trình bấm máy.**   * **Nhập phương trình**     **Shift solve**  **Ta có :**     * **Suy ra**      * **Vậy chọn B.** | **②\_Bài học kinh nghiệm**   * **Hạn chế khi dùng quy tắc L’Hopital là hs phải học đạo hàm rồi** * **là số thực và  thì  .**   **.** |

**#Lời giải**

**Chọn B**

. Tập xác định:

Ta có: ; suy ra 

Giới hạn: ; 

Bảng biến thiên:



Vậy hàm số đồng biến trên khoảng .

**🗵\_ Bài tập áp dụng rèn luyện trong các đề thi thử năm 2019. *(10-15 câu)***

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **3NB** | **4TH** | **2VD** | **1VDC** |

|  |
| --- |
| **Câu 1: (THPT NGUYỄN TRÃI-THANH HOÁ - Lần 1.Năm 2018&2019)** Giới hạn , với  và là phân số tối giản. Giá trị của  là  **A.**  **B.**  **C.**  **D.** |

**Lời giải**

|  |  |
| --- | --- |
| **①\_Quy trình bấm máy.**   * **Nhập hàm**     **Calc**  **Ta có :**     * **Suy ra : Đáp án gần bằng** * **Vậy chọn A.** | **②\_Bài học kinh nghiệm**   * **Ước lượng được giới hạn cần tìm.** |

|  |
| --- |
| **Câu 2: [DS11.C4.2.D03.b]** Biết  ( là phân số tối giản). Tình .  **A.**  **B.**  **C.**  **D.** |

**Lời giải**

|  |  |
| --- | --- |
| **①\_Quy trình bấm máy.**   * **Nhập hàm**     **Calc**  **Ta có :**     * **Suy ra : Đáp án gần bằng** * **Vậy chọn A.** | **②\_Bài học kinh nghiệm**   * **Ước lượng được giới hạn cần tìm.** |

|  |
| --- |
| **Câu 3: (TTHT Lần 4)**Giới hạn  bằng  (Phân số tối giản). Giá trị thực của  là  **A.**  **B.**  **C.**  **D.** |

**Lời giải**

|  |  |
| --- | --- |
| **①\_Quy trình bấm máy.**   * **Nhập hàm**     **Calc**  **Ta có :**     * **Suy ra : Đáp án gần bằng** * **Vậy chọn A.** | **②\_Bài học kinh nghiệm**   * **Ước lượng được giới hạn cần tìm.** |

|  |
| --- |
| **Câu 4: (HSG Bắc Ninh)** Cho . Khi đó giá trị  là  **A.**  **B.**  **C.**  **D.** |

**Lời giải**

|  |  |
| --- | --- |
| **①\_Quy trình bấm máy.**   * **Nhập phương trình**     **Shift Solve  ;**  **Ta có :**     * **Suy ra : Đáp án gần bằng** * **Vậy chọn D.** | **②\_Bài học kinh nghiệm**   * **Khi tính giới hạn tại  thực ra là calc tại các giá trị gần đúng của** * **Ước lượng được giới hạn cần tìm.** |

|  |
| --- |
| **Câu 5: (THPT Chuyên Vĩnh Phúc - lần 1 - 2017 - 2018 - BTN)** Cho thì giá trị của  là một nghiệm của phương trình nào trong các phương trình sau?    **A.**  **B.**  **C.**  **D.** |

**Lời giải**

|  |  |
| --- | --- |
| **①\_Quy trình bấm máy.**   * **Nhập phương trình**     **Shift Solve  ;**  **Ta có :**     * **Suy ra :  Thử vào các phương trình thấy  là nghiệm của pt** * **Vậy chọn D.** | **②\_Bài học kinh nghiệm**   * **Khi tính giới hạn tại  thực ra là calc tại các giá trị gần đúng của** * **Ước lượng được giới hạn cần tìm.** |

**#Lời giải**

**Chọn B**

. Tập xác định:

Ta có: ; suy ra 

Giới hạn: ; 

Bảng biến thiên:



Vậy hàm số đồng biến trên khoảng .

|  |
| --- |
| **Câu 6: (Sở GD Cần Thơ-Đề 324-2018) [1D4-0.0-2]** Cho biết . Giá trị của  bằng  **A.**  **B.**  **C.**  **D.** |

**Lời giải**

|  |  |
| --- | --- |
| **①\_Quy trình bấm máy.**   * **Nhập phương trình**     **Shift Solve  ;**  **Ta có :**     * **Suy ra : Đáp án gần bằng** * **Vậy chọn B.** | **②\_Bài học kinh nghiệm**  **②\_Bài học kinh nghiệm**   * **Khi tính giới hạn tại  thực ra là calc tại các giá trị gần đúng của** * **Ước lượng được giới hạn cần tìm.** |

|  |
| --- |
| **Câu 7: (THPT CHUYÊN LAM SƠN THANH HÓA NĂM 2018-2019 LẦN 01)** Cho hàm số .Xác định a để hàm số liên tục trên ?  **A.**  **B.**  **C.**  **D.** |

**Lời giải**

|  |  |
| --- | --- |
| **①\_Quy trình bấm máy.**   * **Nhập phương trình**     **Shift Solve  ;**  **Ta có :**     * **Suy ra : Đáp án gần bằng** * **Vậy chọn D.** | **②\_Bài học kinh nghiệm**   * **Nhận thấy hàm số có giới hạn tại  khi** * **Khi nhập vào máy tính nhập  ,** * **Vì  nên khi Solve ta chọn** * **Ước lượng được giới hạn cần tìm.** |

|  |
| --- |
| **Câu 8: (THPT Chuyên Võ Nguyên Giáp - QB - Lần 1 - 2017 - 2018 - BTN) [1D4-0.0-3]** Cho các số thực , ,  thỏa mãn  và . Tính  **A.**  **B.**  **C.**  **D.** |

**Lời giải**

|  |  |
| --- | --- |
| **Theo đề bài ta có :**  **Giới hạn là hữu hạn nên**  **Suy ra :   ;**  **Thay vào giới hạn ta có :**    **①\_Quy trình bấm máy.**   * **Nhập phương trình:**     **Shift Solve  ;**  **Ta có :**     * **Suy ra :**   **Vậy chọn B.** | **②\_Bài học kinh nghiệm**   * **Tìm điều kiện để hàm số có giới hạn hữu hạn. kết hợp với giả thiết để tìm các tham số. hoặc đưa giới hạn cần tính về dạng chứa 1 tham số** * **Ước lượng được giới hạn cần tìm.** |

|  |
| --- |
| **Câu 9: [DS11.C4.2.D04.c]** Cho giới hạn  và đường thẳng  đi qua điểm  với . Giá trị của biểu thức  là:  **A.**  **B.**  **C.**  **D.** |

**Lời giải**

|  |  |
| --- | --- |
| **Vì**  đi qua điểm  **nên**    **Thay vào giới hạn ta có :**    **①\_Quy trình bấm máy.**   * **Nhập phương trình:**     **Shift Solve  ;**  **Ta có :**     * **Suy ra :** * **Vậy chọn C.** | **②\_Bài học kinh nghiệm**   * **Kết hợp các kiến thức đã biết để lập phương trình liên hệ giữa các tham số. Từ đó đưa giới hạn cần tính về dạng chứa 1 tham số.** * **Ước lượng được giới hạn cần tìm.** |

|  |
| --- |
| **Câu 10: (SỞ GD&ĐT BẮC GIANG NĂM 2018-2019 LẦN 01)** Cho biết , với . Tập nghiệm của phương trình  trên  có số phần tử là  **A.**  **B.**  **C.**  **D.** |

**Lời giải #Lời giải**

**Chọn B**

. Tập xác định:

Ta có: ; suy ra 

Giới hạn: ; 

Bảng biến thiên:



Vậy hàm số đồng biến trên khoảng .

|  |  |
| --- | --- |
| **Vì** **là hữu hạn nên  là nghiệm phương trình :**    **Theo công thức L’hopital ta có :**    **Vì Vì**  **là hữu hạn nên  là nghiệm phương trình :**    **Thay 2 vào I ta có :**  **①\_Quy trình bấm máy.**   * **Nhập phương trình**     **Shift Solve**  **Ta có :**     * **Suy ra  ;** * **Nhập** * **Calc**      * **Suy ra :** * **Ta có pt**   **Mode 9-2-4 để giải pt**  **Pt vô nghiệm**   * **Vậy chọn A.** | **②\_Bài học kinh nghiệm**   * **Tìm điều kiện để hàm số có giới hạn hữu hạn. kết hợp với giả thiết để tìm các tham số. hoặc đưa giới hạn cần tính về dạng chứa 1 tham số** * **Ước lượng được giới hạn cần tìm.** |

|  |
| --- |
| **Câu 11: (Chuyên KHTN)** Cho hàm số xác định trên  thỏa mãn . Tính giới hạn .  **A.**  **B.**  **C.**  **D.** |

**Lời giải**

|  |  |
| --- | --- |
| **Theo đề bài ta có :**  **Suy ra ta có thể chọn hàm  thỏa mãn giả thiết bài toán. Khi đó bài toán trở thành :**    **①\_Quy trình bấm máy.**   * **Nhập hàm**     **Calc**  **Ta có :**     * **Suy ra : Đáp án gần bằng** * **Vậy chọn A.** | **②\_Bài học kinh nghiệm**   * **Cần biết cách chọn hàm thỏa mãn giả thiết** * **Ước lượng được giới hạn cần tìm.** |