

A. MỞ ĐẦU

I. LÝ DO CHỌN ĐỀ TÀI.

Trong chương trình toán học phổ thông, Hệ phương trình là một phần nội dung quan trọng, thường xuyên gặp trong các đề thi học sinh giỏi các cấp và đề thi đại học trước đây và trong ma trận đề thi THPT quốc gia năm 2015 cũng có nội dung này.

Hệ phương trình ở sách giáo khoa (đặc biệt ở chương trình sách giáo khoa cơ bản) đưa ra lượng bài tập quá ít, quá đơn giản so với yêu cầu phải giải được các bài toán đòi hỏi ở cấp độ tư duy vận dụng cao ở các đề thi học sinh giỏi các cấp, của đề thi đại học trước đến nay.

Với mong muốn cung cấp cho học sinh một số kỹ thuật xử lý hệ phương trình cũng như cách nhìn nhận, quan sát các dấu hiệu để có thể quy “lạ” về quen, đặc biệt tạo cho học sinh niềm đam mê – sáng tạo trong học toán. Vì vậy tôi đã chọn đề tài “*Thế biến – kỹ năng tạo niềm đam mê sáng tạo cho học sinh thông qua bài toán giải hệ phương trình*” để nghiên cứu.

II. MỤC ĐÍCH NGHIÊN CỨU

Tìm hiểu những khó khăn và thuận lợi của học sinh khi tiếp cận các bài toán hệ phương trình từ đó đề xuất các biện pháp giúp các em nhìn nhận các định hướng, các dấu hiệu tiếp cận cách giải bài toán. Phát triển tư duy khái quát hóa, tương tự hóa, lật ngược vấn đề, quy lạ về quen, tư duy sáng tạo của học sinh...

III. ĐỐI TƯỢNG VÀ PHẠM VI NGHIÊN CỨU

- Học sinh khối 10 THPT
- Đội tuyển HSG khối 11 THPT
- Học sinh khối 12 THPT ôn thi vào các trường Đại học
- Giáo viên giảng dạy môn Toán bậc THPT

IV. KẾ HOẠCH NGHIÊN CỨU

TT	Thời gian	Nội dung công việc	Sản phẩm
1	15/9/2015 đến 15/10/2015	Chọn đề tài, Viết đề cương nghiên cứu.	Bản đề cương chi tiết.
2	15/10/2015 đến 5/11/ 2015	- Khảo sát thực trạng, tổng hợp số liệu thực tế. - Nghiên cứu tài liệu	- Số liệu khảo sát đã xử lý. - Tập hợp tài liệu.
3	5/11/2015 đến 15/3/2016	- Trao đổi các đồng nghiệp, đề xuất các biện pháp, các sáng kiến. - Áp dụng thử nghiệm - Viết báo cáo.	- Tập hợp ý kiến đóng góp của đồng nghiệp. - Kết quả thử nghiệm. - Bản nháp báo cáo
4	15/3/2016 đến 15/5/ 2016	- Hoàn thiện báo cáo	- Báo cáo chính thức

V. PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU

- Tìm kiếm tài liệu tham khảo từ các nguồn khác nhau liên quan đến hệ phương trình. phương pháp dạy học môn toán và những sáng kiến kinh nghiệm của các giáo viên khác thuộc bộ môn Toán THPT.
- Trao đổi với các đồng nghiệp để đề xuất biện pháp thực hiện.
- Giảng dạy các tiết bài tập toán tại lớp 10B2. Ôn thi HSG cho đội tuyển. Ôn thi kỳ thi THPT Quốc gia tại lớp 12A2 của trường THPT đang làm việc để thu thập thông tin thực tế.

B. NỘI DUNG

I. THỰC TRẠNG CỦA ĐỀ TÀI.

Trường THPT nơi tôi đang công tác là một trường nằm trên xã bãi ngang vì vậy việc học tập và phân đầu của các em học sinh chưa thực sự được quan tâm từ các bậc học dưới THPT vì vậy kiến thức cơ sở về môn Toán của các em hầu hết tập trung ở mức độ trung bình.

Khi chưa áp dụng những nghiên cứu trong đề tài để dạy học giải bài tập về hệ phương trình, các em thường thụ động trong việc tiếp cận bài toán và phụ thuộc nhiều vào những kiến thức được giáo viên cung cấp chứ chưa ý thức tìm tòi, sáng tạo cũng như tạo được niềm vui, sự hưng phấn khi làm toán.

Điều đáng lo ngại là các em được tham gia các lớp ôn thi Đại học cao đẳng đã được nhà trường chọn lựa từ các em có học lực trung bình khá trở lên. Trao đổi với các em tác giả nhận thấy đa số các em chỉ cố gắng nắm được các dạng hệ cơ bản để phục vụ cho các phần toán khác, đối với các bài toán ở mức độ tư duy vận dụng hay vận dụng cao thì các em lúng túng, không có định hướng giải và từ đó các em gần như chấp nhận buông xuôi đối với các loại hệ này.

II. CƠ SỞ LÝ THUYẾT

1. Phương trình bậc bốn.

a) *Phương trình bậc bốn dạng trùng phương:* $ax^4 + bx^2 + c = 0$; ($a \neq 0$).

Phương pháp giải: Đặt $t = x^2 \Rightarrow PT : at^2 + bt + c = 0$.

b) *Phương trình bậc bốn dạng:* $(x - a)^2 + (x - b)^2 = c$

Phương pháp giải: Đặt $t = x - \frac{a+b}{2}$, đưa phương trình về dạng phương trình trùng phương ẩn t.

c) Phương trình bậc bốn dạng hồi quy: $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$; ($a \neq 0$)

với a, b, c, d, e là các hệ số thỏa mãn điều kiện: $\frac{e}{a} = \left(\frac{d}{b}\right)^2$.

Phương pháp giải: Kiểm tra riêng với trường hợp $x = 0$.

Xét $x \neq 0$, phương trình tương đương: $a\left(x^2 + \frac{e}{ax^2}\right) + b\left(x + \frac{d}{bx}\right) + c = 0$

$$\Leftrightarrow a\left(x + \frac{d}{bx}\right)^2 + b\left(x + \frac{d}{bx}\right) + c - \frac{2ad}{b} = 0 \Rightarrow \text{Đặt } t = \left(x + \frac{d}{bx}\right).$$

d) Phương trình bậc bốn có thể giải được bằng đưa về phương trình trùng phương:

Phương pháp giải: Xét phương trình: $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ với điều kiện hệ $\begin{cases} f'(x) = 0 \\ f''(x) = 0 \end{cases}$ có nghiệm $x = \alpha$.

Đặt $x = t + \alpha$ thì phương trình đưa về phương trình bậc 4 trùng phương dạng: $at^4 + (6a\alpha^2 + 3b\alpha + c)t^2 + f(\alpha) = 0$

e) Phương pháp giải phương trình bậc 4 dạng tổng quát:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0.$$

Định hướng 1: Nhẩm nghiệm và phân tích thành nhân tử.

Định hướng 2: Kiểm tra điều kiện phương trình hồi quy.

Định hướng 3: Kiểm tra điều kiện đưa về phương trình trùng phương.

Định hướng 4: Thêm bớt nhóm về dạng hiệu hai bình phương.

Định hướng 5: Sử dụng phương pháp hệ số bất định:

Phân tích: $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0 \Leftrightarrow (Ax^2 + Bx + C)(Dx^2 + Ex + F) = 0$.

Bằng phương pháp hệ số bất định, và nhẩm nghiệm nguyên của hệ để tìm A, B, C, D, E, F.

2. Phương trình bậc cao

Xét phương trình : $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0 \quad (1) \quad \text{với}$
 $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$

Nếu ta nhẩm được nghiệm của phương trình là x_0

Thì ta có thể phân tích: $(x - x_0)P(x) = 0$ với $P(x)$ là đa thức:

Để tính hệ số của đa thức $P(x)$ ta lập bảng như sau:

	a_n	a_{n-1}	...	a_1	a_0
x_0	a_n	b_{n-1}	...	b_1	0

Ta có : $b_{n-1} = a_n x_0 + a_{n-1}$

$$b_{n-2} = b_{n-1} x_0 + a_{n-2}$$

.....

$$b_1 = b_2 x_0 + a_1$$

$$b_1 x_0 + a_0 = 0$$

Khi đó ta có $(1) \Leftrightarrow (x - x_0)(a_n x^{n-1} + b_{n-1} x^{n-2} + \dots + b_2 x + b_1) = 0$

Chú ý: Một số cách nhẩm nghiệm

Nếu $a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0 = 0$ phương trình có nghiệm $x = 1$

Nếu $a_n - a_{n-1} + \dots + (-1)^k a_{n-k} + \dots + (-1)^{n-1} a_1 + (-1)^n a_0 = 0$ phương trình có nghiệm $x = -1$

Nghiệm nguyên của phương trình nếu có là ước của a_0 ; Nghiệm hữu tỉ $x = \frac{p}{q}$ của phương trình có p là ước của hệ số a_0 và q là ước của hệ số a_n

3. Các hệ phương trình cơ bản.

a) Hệ phương trình có một phương trình là phương trình bậc nhất.

Hệ có dạng :
$$\begin{cases} ax + by + c = 0 & (1) \\ F(x; y) = 0 & (2) \end{cases} \Rightarrow \text{Phương pháp giải : Rút một ẩn}$$
 từ phương trình (1) thế vào phương trình (2).

b) Hệ phương trình đối xứng kiểu 1.

Hệ có dạng :
$$\begin{cases} F(x; y) = 0 \\ G(x; y) = 0 \end{cases} \text{ với } F(x; y); G(x; y) \text{ là các biểu thức đối xứng với}$$
 hai ẩn x, y

$\Rightarrow$ **Phương pháp giải** : Đặt $\begin{cases} S = x + y \\ P = xy \end{cases}$ với điều kiện $S^2 \geq 4P$, giải tìm S, P khi đó x, y là hai nghiệm của phương trình bậc hai : $X^2 - SX + P = 0$

c) Hệ đối xứng kiểu 2: Hệ có dạng :
$$\begin{cases} F(x; y) = 0 \\ G(x; y) = 0 \end{cases} \text{ với } F(x; y) = G(y; x)$$

$\Rightarrow$ **Phương pháp giải** : Trừ vế theo vế các phương trình trong hệ ta được một phương trình có nhân tử chung $(x - y)$ hoặc có thể đánh giá được $x = y$.

d) Hệ phương trình có yếu tố đẳng cấp.

+ Hệ phương trình có một phương trình đẳng cấp.

Hệ có dạng : $\begin{cases} F(x; y) = 0 \\ G(x; y) = 0 \end{cases}$ với $F(x; y) = 0$ là một phương trình đẳng cấp $\Rightarrow$

Phương pháp giải : Giải phương trình đẳng cấp tìm x theo y thế vào phương trình còn lại.

+ *Hệ phương trình đẳng cấp tổng quát :*

Hệ có dạng : $\begin{cases} A(x; y) = B(x; y) \\ F(x; y) = G(x; y) \end{cases}$ với $A(x; y); B(x; y); F(x; y); G(x; y)$ là

các biểu thức đẳng cấp với hai ẩn x, y.

$\Rightarrow$ **Phương pháp giải :** Nâng lũy thừa các phương trình trong hệ với số mũ thích hợp rồi tiến hành nhân vế theo vế hoặc nhân chéo vế các phương trình để đưa về hệ có một phương trình đẳng cấp.

III. NỘI DUNG ĐỀ TÀI.

Trong những năm gần đây các bài toán về hệ phương trình thường xuyên xuất hiện trong các đề thi học sinh giỏi các cấp, đề thi đại học và cả trong ma trận đề thi THPT quốc gia năm 2015. Các bài toán này được yêu cầu ở mức độ tư duy vận dụng cấp độ cao chứ không còn là các bài toán về các hệ phương trình cơ bản. Điều này làm cho học sinh gặp rất nhiều khó khăn cho học sinh, đặc biệt tinh thần học tập, tính tư duy – sáng tạo của học sinh trong bài toán giải hệ ngày càng có dấu hiệu đi xuống. Xuất phát từ yêu cầu thực tiễn đó, trong phần này tôi muốn được nêu lên quan điểm dạy học sinh cách nghiên cứu, tìm tòi các xu hướng phát triển của bài toán hệ phương trình từ các hệ phương trình cơ bản (đã nêu trong mục IV) để qua đó các em nắm được các dấu hiệu, hình thành các kỹ thuật giải các hệ phương trình ở mức độ vận dụng cao và tạo nên hứng thú học tập cho học sinh

Ví dụ: Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x^3 - y^3 + 2x^2 + y^2 + 3 = 0 & (1) \\ x^2 + 2y^2 + 4x - 4y + 1 = 0 & (2) \end{cases}$

Giải :

Lấy phương trình (1) cộng với phương trình (2) về theo về ta có :

$$x^3 + 3x^2 + 4x + 4 - y^3 + 3y^2 - 4y = 0 \Leftrightarrow (x+1)^3 + (x+1) = (y-1)^3 + (y-1) \quad (*)$$

Xét hàm số : $f(t) = t^3 + t$. Ta có $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow f(t)$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$, do đó $(*) \Leftrightarrow f(x+1) = f(y-1) \Leftrightarrow x+1 = y-1 \Leftrightarrow x = y-2$ (3)

Thay (3) vào (2) ta có : $(y-2)^2 + 2y^2 + 4(y-2) - 4y + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow 3y^2 - 4y - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{2 - \sqrt{13}}{3} \\ y = \frac{2 + \sqrt{13}}{3} \end{cases}$$

Với $y = \frac{2 - \sqrt{13}}{3}$, ta có $x = \frac{-4 - \sqrt{13}}{3}$

Với $y = \frac{2 + \sqrt{13}}{3}$, ta có $x = \frac{-4 + \sqrt{13}}{3}$

Vậy hệ phương trình có (2) nghiệm : $\begin{cases} x = \frac{-4 - \sqrt{13}}{3} \\ y = \frac{2 - \sqrt{13}}{3} \end{cases}; \begin{cases} x = \frac{-4 + \sqrt{13}}{3} \\ y = \frac{2 + \sqrt{13}}{3} \end{cases}$

Chú ý : Với học sinh khối 10, khối 11 khi chưa học phương pháp hàm số ta có thể giải phương trình (*) như sau : $(*) \Leftrightarrow (x+1)^3 - (y-1)^3 + (x-y+2) = 0$

$$\Leftrightarrow (x-y+2)((x+1)^2 + (x+1)(y-1) + (y-1)^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow x-y+2 = 0 \Leftrightarrow x = y-2$$

(3).

Trong lời giải của bài toán thì điểm mấu chốt của bài toán là phải thấy được mối liên hệ giữa hai phương trình trong hệ đặc biệt là các đại lượng trong các phương trình có dấu hiệu của hằng đẳng thức $(a + b)^3$ và $(a - b)^3$ để có thể cộng vế theo vế các phương trình, nhóm các hằng đẳng thức từ đó tìm ra lời giải. Để có thể giúp học sinh có thể thấy được điều này ta có thể có các hướng khai thác như sau :

1. Tập cho học sinh làm quen với kỹ năng thế biến để sáng tạo ra các bài toán mới từ các hệ phương trình đã giải được.

Trong quá trình dạy học hệ phương trình, tôi thường xuyên hướng dẫn học sinh cách tạo ra một hệ phương trình mới từ một hệ phương trình giải được bằng phương pháp thế biến. Với cách làm này tôi nhận thấy tạo được sự hứng thú cho học sinh, các em thay nhau sáng tạo các bài toán mới và thách đố nhau giải rất sôi nổi. Không những thế, quá trình này còn giúp các em rèn luyện cách nhìn nhận ra bản chất về dấu hiệu của các phương pháp giải hệ phương trình đặc biệt là phương pháp đặt ẩn phụ.

Quy trình xây dựng hệ phương trình mới bằng kỹ năng thế biến :

Bước 1 : Chọn một hệ phương trình giải được (hệ cơ bản).

Bước 2 : Chọn biến để thực hiện phép thế biến (*Lưu ý : Biến được chọn để thế biến phải là tạo ra các hệ cơ bản giải được với các nghiệm của phương trình trong bước 1).*

Bước 3 : Tiến hành biến đổi, thu gọn để tạo ra hệ phương trình mới.

Bài toán 1.1 : Giải hệ phương trình :
$$\begin{cases} x + y(x + 1) = -\frac{5}{4} \\ x^2 + y = -\frac{5}{4} \end{cases}$$

Giải :

$$\text{Ta có : } \begin{cases} x + y(x+1) = -\frac{5}{4} \\ x^2 + y = -\frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{5}{4} - x^2 \\ x^3 + x^2 + \frac{x}{4} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{5}{4} - x^2 \\ x(2x+1)^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = -\frac{3}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = -\frac{5}{4} \end{cases}$$

$$\text{Vậy hệ có hai nghiệm : } \begin{cases} x = 0 \\ y = -\frac{5}{4} \end{cases} ; \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

Nhận xét: Nếu với hệ phương trình này chúng ta cho học sinh thực hiện phép thế biến x bởi $x^2 + y$ và thế biến y bởi xy ta có hệ:

$$\begin{cases} x^2 + y + xy(x^2 + y + 1) = -\frac{5}{4} \\ (x^2 + y)^2 + xy = -\frac{5}{4} \end{cases}$$

Thực hiện khai triển và thu gọn các phương trình trong hệ ta có hệ phương trình sau :

$$\textbf{Bài toán 1.2 :} \text{ Giải hệ phương trình : } \begin{cases} x^2 + y + x^3y + x^2y + xy = -\frac{5}{4} \\ x^4 + y^2 + xy(1 + 2x) = -\frac{5}{4} \end{cases}$$

(Đề thi đại học khối A năm 2008)

Giải :

$$\text{Ta có : } \begin{cases} x^2 + y + x^3y + x^2y + xy = -\frac{5}{4} \\ x^4 + y^2 + xy(1 + 2x) = -\frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y + xy(x^2 + y + 1) = -\frac{5}{4} \\ (x^2 + y)^2 + xy = -\frac{5}{4} \end{cases}$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x^2 + y \\ v = xy \end{cases} \text{ ta có hệ : } \begin{cases} u + v(u + 1) = -\frac{5}{4} \\ u^2 + v = -\frac{5}{4} \end{cases} \text{ (đây là bài toán 1.1).}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} u = -\frac{1}{2} \\ v = -\frac{3}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} u = 0 \\ v = -\frac{5}{4} \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{TH1 : Nếu } \begin{cases} u = 0 \\ v = -\frac{5}{4} \end{cases}, \text{ ta có : } \begin{cases} x^2 + y = 0 \\ xy = -\frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x^2 \\ x^3 = \frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt[3]{\frac{5}{4}} \\ y = -\sqrt[3]{\frac{25}{16}} \end{cases}$$

$$\text{TH2 : Nếu } \begin{cases} u = -\frac{1}{2} \\ v = -\frac{3}{2} \end{cases}, \text{ ta có : } \begin{cases} x^2 + y = -\frac{1}{2} \\ xy = -\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = -\frac{3}{2} \\ 2x^3 + x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\text{Vậy hệ phương trình có hai nghiệm : } \begin{cases} x = 1 \\ y = -\frac{3}{2} \end{cases}; \begin{cases} x = \sqrt[3]{\frac{5}{4}} \\ y = -\sqrt[3]{\frac{25}{16}} \end{cases}$$

Nhận xét:- Việc giải hệ này điểm mấu chốt là học sinh phải nhìn nhận được hằng đẳng thức $(x^2 + y)^2$, chính điều này định hướng cho học sinh nhìn nhận được ở cả hai phương trình trong hệ đều có chung các đại lượng $x^2 + y$; xy , từ đó đưa ra lời giải.

- Khi học sinh đã được làm quen nhiều với phép thế biến thì các em sẽ hiểu được bản chất của các dấu hiệu về các hằng đẳng thức có thể là sự khai triển của phép thế biến của x^2 ; x^3 ; y^2 ; y^3 ... bởi một đại lượng nào đó vì vậy một cách rất tự nhiên các em sẽ thử nhóm các hằng đẳng thức này để xem tìm lại đại lượng được thế và từ đó hình thành “**phương pháp đặt ẩn phụ để giải hệ phương trình**”.

Bài toán 1.3: Giải hệ phương trình :
$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x^2 + y - 2 = 0 \end{cases}$$

Giải :

$$\text{Ta có : } \begin{cases} x + y = 0 \\ x^2 + y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ x^2 - x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \\ x = 2 \\ y = -2 \end{cases}$$

$$\text{Vậy hệ có hai nghiệm : } \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases} ; \begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \end{cases}$$

Trong hệ phương trình trên nếu ta thực hiện phép thế biến x bởi $\left(x + \frac{y}{x}\right)$ và

$$y \text{ bởi } y - 3 \text{ ta được hệ phương trình mới : } \begin{cases} x + \frac{y}{x} + y - 3 = 0 \\ \left(x + \frac{y}{x}\right)^2 + y - 5 = 0 \end{cases}$$

Thực hiện khai triển và quy đồng mẫu số ta có hệ phương trình sau.

Bài toán 1.4 : Giải hệ phương trình :
$$\begin{cases} x^2 + xy - 3x + y = 0 \\ x^4 + 3x^2y - 5x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

Giải :

Cách 1 :

$$\text{Ta có : } \begin{cases} x^2 + xy - 3x + y = 0 \\ x^4 + 3x^2y - 5x^2 + y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y + xy - 3x = 0 & (1) \\ (x^2 + y)^2 + x^2y - 5x^2 = 0 & (2) \end{cases}$$

Từ phương trình (1) ta có $x^2 + y = x(3 - y)$ thay vào phương trình (2) ta có :

$$x^2(y - 3)^2 + x^2(y - 5) = 0 \Leftrightarrow x^2(y^2 - 5y + 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y^2 - 5y + 4 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Với } x = 0, \text{ kết hợp với (1) ta có } \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\text{Với } y^2 - 5y + 4 = 0 \text{ kết hợp với (1) ta có } \begin{cases} x^2 + y + xy - 3x = 0 \\ y^2 - 5y + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có 2 nghiệm : (0; 0); (1; 1) .

Cách 2:

$$\text{Nhận xét, } x = 0 \text{ thì hệ có nghiệm } \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Với $x \neq 0$ ta chia hai vế của phương trình đầu cho x và chia hai vế của phương trình thứ hai cho x^2 ta được hệ mới như sau :

$$\begin{cases} x + \frac{x}{y} + y - 3 = 0 \\ x^2 + \frac{y^2}{x^2} + 3y - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{y}{x} + y - 3 = 0 \\ \left(x + \frac{y}{x}\right)^2 + y - 5 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Đến đây ta đặt } \begin{cases} u = x + \frac{y}{x} \\ v = y - 3 \end{cases} \text{ Khi đó hệ trở thành } \begin{cases} u + v = 0 \\ u^2 + v - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = -1 \\ v = 1 \\ u = 2 \\ v = -2 \end{cases}$$

$$\text{Với } \begin{cases} u = -1 \\ v = 1 \end{cases}, \text{ ta có : } \begin{cases} x + \frac{y}{x} = -1 \\ y - 3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x + 4 = 0 \\ y = 4 \end{cases} \text{ (Vô nghiệm)}$$

$$\text{Với } \begin{cases} u = 2 \\ v = -2 \end{cases}, \text{ ta có : } \begin{cases} x + \frac{y}{x} = 2 \\ y - 3 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 1 = 0 \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có 2 nghiệm : (0; 0); (1; 1) .

Nhận xét : Điểm mấu chốt của lời giải trên là trước khi tiến hành đặt ẩn phụ thì ta phải thực hiện phép chia hai vế của các phương trình trong hệ với một đại lượng “ đặc biệt ” thích hợp. Đối với học sinh đã làm quen với phép thế biến dạng phân thức các em sẽ nhận ra được đại lượng “ đặc biệt ” này có được khi thực hiện phép thế biến và quy đồng mẫu số vì vậy trong các hệ loại này đại lượng “ đặc biệt ” này thường ở dạng cô lập một mình ở một vế của phương trình, hoặc ở dạng tích của nó với một đại lượng chung, hoặc xuất hiện nhiều hơn trong phương trình khi đã khai triển và chuyển vế hoàn toàn. Ta xét ví dụ sau :

Bài toán 1.5 : Giải hệ phương trình :
$$\begin{cases} x^3(3y + 55) = 64 \\ xy(y^2 + 3y + 3) = 12 + 51x \end{cases}$$

Nhận xét : Trong hệ phương trình này, theo phân tích trên nhận xét x là hạng tử “ đặc biệt ” vì nó ở dạng tích với các hạng tử còn lại vì vậy có thể tiến hành thử chia hai vế các phương trình trong hệ.

Giải :

Nhận xét : $x = 0$ hệ vô nghiệm.

$$\text{Với } x \neq 0, \text{ Ta có : } \begin{cases} x^3(3y+55)=64 \\ xy(y^2+3y+3)=12+51x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{4}{x}\right)^3=3(y+1)+52 \\ (y+1)^3=3\frac{4}{x}+52 \end{cases}$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u=\frac{4}{x} \\ v=y+1 \end{cases}, \text{ hệ trở thành } \begin{cases} u^3=3v+52 \\ v^3=3u+52 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (u-v)(u^2+uv+v^2+3)=0 \\ u^3=3v+52 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=v \\ u^3-3u-52=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=4 \\ v=4 \end{cases}$$

$$\text{Với } \begin{cases} u=4 \\ v=4 \end{cases}, \text{ ta có } \begin{cases} \frac{4}{x}=4 \\ y+1=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}$$

$$\text{Vậy hệ có nghiệm duy nhất } \begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}$$

Như vậy một hệ phương trình giải bằng phương pháp đặt ẩn phụ thường có nguồn gốc từ một hệ phương trình cơ bản kết hợp với phương pháp thế biến. Do đó tùy theo biến được thế để có các dấu hiệu và định hướng nhận dạng về phương pháp đặt ẩn phụ. Các dấu hiệu đó có thể là:

- Các dấu hiệu của các hằng đẳng thức: Các dấu hiệu này có thể là nguồn gốc của phép thế biến chẳng hạn thế biến x bởi $f(x)$ khi đó x^2 biến thành $f^2(x)$ và khi khai triển thu gọn còn sót lại các dấu hiệu hằng đẳng thức để có thể nhóm lại và đặt ẩn phụ.

- Hệ có chứa căn thức, có thể là của phép đổi biến có chứa căn: $\Rightarrow$ có thể xem xét việc đặt ẩn phụ bằng căn thức.

- Một số hệ trước khi tiến hành đặt ẩn phụ thường phải tiến hành chia về các phương trình trong hệ cho một đại lượng phù hợp. Nguyên nhân là phép thế biến ban đầu được sử dụng là thế biến có chứa phân thức.

2. Thực hiện phép thế biến kết hợp với các phép biến đổi đại số.

Ngoài việc thực hiện các phép thế biến, trong quá trình hướng dẫn học sinh sáng tạo các hệ phương trình, ta có thể hướng dẫn các em kết hợp với các phép biến đổi đại số khác như phép cộng đại số, phép nhân...

Chẳng hạn, từ hệ phương trình $\begin{cases} x + y = 0 \\ x^2 + y - 2 = 0 \end{cases}$, thực hiện phép thế biến x bởi $\left(x + \frac{y}{x}\right)$ và y bởi $y - 3$, quy đồng và rút gọn ta được hệ :

$$\begin{cases} x^2 + xy - 3x + y = 0 & (1) \\ x^4 + 3x^2y - 5x^2 + y^2 = 0 & (2) \end{cases}$$

Tiếp tục rút x^2 ở phương trình (1) thế vào phương trình (2) ta có hệ phương trình sau :

Bài toán 2.1 : Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x^2 + xy - 3x + y = 0 & (1) \\ x^4 + 3x^2y + 5xy + y^2 - 15x + 5y = 0 & (2) \end{cases}$$

Nhận xét : Để giải được hệ phương trình này, trước hết học sinh phải nhìn nhận được ở phương trình (1) và phương trình (2) có bộ phận chung là $xy - 3x + y$ để từ đó định hướng thế đại lượng này hoặc tiến hành thực hiện phép cộng đại số để triệt tiêu đại lượng này ở phương trình (2).

Giải :

$$\text{Ta có : } \begin{cases} x^2 + xy - 3x + y = 0 \\ x^4 + 3x^2y + 5xy + y^2 - 15x + 5y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + xy - 3x + y = 0 \\ x^4 + 3x^2y - 5x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Nhận xét, } x = 0 \text{ thì hệ có nghiệm } \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Với $x \neq 0$ ta chia hai vế của phương trình đầu cho x và chia hai vế của phương trình thứ hai cho x^2 ta được hệ mới như sau :

$$\begin{cases} x + \frac{x}{y} + y - 3 = 0 \\ x^2 + \frac{y^2}{x^2} + 3y - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{y}{x} + y - 3 = 0 \\ \left(x + \frac{y}{x}\right)^2 + y - 5 = 0 \end{cases}$$

Đến đây ta đặt $\begin{cases} u = x + \frac{y}{x} \\ v = y - 3 \end{cases}$ Khi đó hệ trở thành $\begin{cases} u + v = 0 \\ u^2 + v - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = -1 \\ v = 1 \\ u = 2 \\ v = -2 \end{cases}$

Với $\begin{cases} u = -1 \\ v = 1 \end{cases}$, ta có : $\begin{cases} x + \frac{y}{x} = -1 \\ y - 3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x + 4 = 0 \\ y = 4 \end{cases}$ (Vô nghiệm)

Với $\begin{cases} u = 2 \\ v = -2 \end{cases}$, ta có : $\begin{cases} x + \frac{y}{x} = 2 \\ y - 3 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 1 = 0 \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$

Vậy hệ phương trình đã cho có 2 nghiệm : (0; 0); (1; 1) .

Bài toán 2.2 : Giải hệ phương trình sau : $\begin{cases} \frac{x^2}{(y+2)^2} + \frac{y^2}{(x+1)^2} = 8 & (1) \\ 8x + 4y + 3xy + 8 = 0 & (2) \end{cases} \quad (I)$

Giải:

Đk: $x \neq 1; y \neq 2 (*)$

Với ĐK (*) ta có:

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{x}{y+2}\right)^2 + \left(\frac{y}{x+1}\right)^2 = 8 \\ 4(x+1)(y+2) = xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{x}{y+2}\right)^2 + \left(\frac{y}{x+1}\right)^2 = 8 \\ \frac{x}{y+2} \cdot \frac{y}{x+1} = 4 \end{cases}$$

$$\text{Đặt } \frac{x}{y+2} = a; \frac{y}{x+1} = b$$

Ta có hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 8 \\ ab = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+b)^2 = 16 \\ ab = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} a+b=4 \\ ab=4 \end{cases} \\ \begin{cases} a+b=-4 \\ ab=4 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} a=2 \\ b=2 \end{cases} \\ \begin{cases} a=-2 \\ b=-2 \end{cases} \end{cases}$$

$$* \text{ Với } \begin{cases} a=2 \\ b=2 \end{cases} \text{ ta có: } \begin{cases} \frac{x}{y+2} = 2 \\ \frac{y}{x+1} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y=4 \\ 2x-y=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-8}{3} \\ y = \frac{-10}{3} \end{cases} (tm)$$

$$* \text{ Với } \begin{cases} a=-2 \\ b=-2 \end{cases} \text{ ta có: } \begin{cases} \frac{x}{y+2} = -2 \\ \frac{y}{x+1} = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y=-4 \\ 2x+y=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-2 \end{cases} (\text{Loại})$$

$$\text{Vậy nghiệm của hệ phương trình là: } \left(\frac{-8}{3}; \frac{-10}{3} \right).$$

Nhận xét: Qua các ví dụ trên ta sẽ làm cho học sinh thấy được quá trình tạo ra hệ phương trình mới bằng phương pháp thế, phương pháp cộng đại số, phương pháp nhân về theo về... Từ đó hình thành cho các em thói quen quan sát mối liên hệ giữa các “đại lượng chung” giữa hai phương trình để có thể định hướng về phương pháp kết hợp hai phương trình với nhau để giải hệ từ đó hình thành các kỹ thuật sử dụng “**phương pháp thế**”, kỹ thuật sử dụng “**cộng, trừ, và nhân theo về các phương trình của hệ**”.

IV. CÁC BIỆN PHÁP TỔ CHỨC THỰC HIỆN

- Thực hiện trong phạm vi một số buổi chữa bài tập, các buổi học thêm. Thầy giáo đưa ra một số ví dụ về cách thức xây dựng các bài toán mới từ các bài toán cơ bản, sau đó hướng dẫn học sinh tìm tòi để phát hiện các dấu hiệu đặc trưng để tìm ra lời giải.
- Thực hiện tương tự trong các buổi ôn thi THPT quốc gia về chuyên đề hệ phương trình.
- Thực hiện chủ yếu trong các buổi ôn thi học sinh giỏi về chuyên đề hệ phương trình.
- Thực hiện giao nhiệm vụ cho học sinh tự nghiên cứu các bài toán mới, đúc rút kinh nghiệm về các dấu hiệu đặc trưng để định hướng giải các hệ phương trình với sự hướng dẫn, kiểm tra của Thầy giáo.

V. KẾT QUẢ NGHIÊN CỨU.

- Sau khi áp dụng các biện pháp trong đề tài đã cho thấy các biện pháp đã tạo được được sự hứng thú cho học sinh, các em thay nhau sáng tạo các bài toán mới và thách đố nhau giải rất sôi nổi. Có nhiều em đã xây dựng được các bài toán khá hay và mới lạ. Không những thế, quá trình này còn giúp các em rèn luyện cách nhìn nhận ra bản chất về dấu hiệu của các phương pháp giải hệ phương trình.
- Qua khảo sát cho thấy, ở lớp 10 và 12: trên 80% học sinh có thể định hướng đúng về phương pháp giải khi đứng trước hệ phương trình tương tự trong đề tài do giáo viên đưa ra hoặc các bài toán trong các đề thi thử kỳ thi THPT quốc gia của các trường và có khoảng 30% học sinh có thể giải được với thời gian hợp lý ở trên lớp.

Như vậy đề tài “*Thế biến – kỹ năng tạo niềm đam mê sáng tạo cho học sinh thông qua bài toán giải hệ phương trình*” có tác dụng thực tiễn rất lớn trong giảng dạy của giáo viên và quá trình học tập của học sinh.

C. KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ

I. KẾT LUẬN.

- Trong đề tài, tôi đã cung cấp một cách có hệ thống logic quy trình sáng tạo các bài toán hệ phương trình mới từ các hệ phương trình cơ bản. Việc học sinh luyện tập quy các quy trình này rất bổ ích vì các em nắm được nguồn gốc để tạo ra một hệ phương trình tổng quát, từ đó các em sẽ tìm được các dấu hiệu bản chất của các hệ phương trình nhằm tìm đúng định hướng, và thực hiện được lời giải.

- Việc học sinh thực hiện sáng tạo các hệ phương trình mới còn làm tăng sự hứng thú cho các em, kích thích các em sự tự tin, rèn luyện tư duy sáng tạo, tư duy tổng quát hóa, đặc biệt hóa. Góp phần nâng cao chất lượng dạy học toán nói chung.

- Sáng kiến kinh nghiệm có thể làm tài liệu tham khảo cho giáo viên dạy học bộ môn Toán ở trường THPT; cho các em học sinh đang học khối 10 THPT cũng như các em học sinh khối 12 THPT đang ôn thi kỳ thi THPT quốc gia.

II. KIẾN NGHỊ.

- Khi áp dụng sáng kiến kinh nghiệm trong giảng dạy, cần phải chắc chắn rằng học sinh đã nắm được phương pháp giải các dạng hệ cơ bản.

- Đề tài có thể được phát triển thêm ở trong phần phương trình để trở thành tài liệu cho các giáo viên giảng dạy môn Toán ở các trường THPT.

Bản sáng kiến được chuẩn bị nghiêm túc song không tránh khỏi những sai sót. Tác giả xin chân thành cảm ơn ý kiến đóng góp bổ sung quý giám khảo, quý thầy cô và các bạn đọc để đề tài ngày càng được hoàn thiện hơn.