UBND TỈNH BẮC NINH	**ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH**
SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO	**NĂM HỌC: 2018-2019**
	Môn thi: Toán – Lớp 8
ĐỀ CHÍNH THỨC	**Thời gian làm bài: 150 phút (*Không kể giao đề*)**

Câu 1. (2,0 điểm)

Cho ba số a,b,c khác nhau đôi một và khác 0, đồng thời thỏa mãn diều kiện $\frac{a+b}{c}=\frac{b+c}{a}=\frac{c+a}{b}$. Tính giá trị của biểu thức: $A=\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right)$

Câu 2. (4,0 điểm)

1) Giải phương trình: $\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x+1}-\frac{2}{(x+1)^2}=2$
2) Cho hai đa thức $P(x)=x^5-5x^3+4x+1, Q(x)=2x^2+x-1$. Gọi x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 là các nghiệm của $P(x)$. Tính giá trị của $Q(x_1).Q(x_2).Q(x_3).Q(x_4).Q(x_5)$

Câu 3. (4,0 điểm)

1) Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho n^2+2 là ước số của n^6+206.
2) Cho a,b,c là các số nguyên khác 0, $a\neq c$ sao cho $\frac{a^2+b^2}{b^2+c^2}=\frac{a}{c}$. Chứng minh rằng $a^2+b^2+c^2$ không phải là số nguyên tố.

Câu 4. (7,0 điểm)

1) Cho hình vuông $ABCD$, gọi M là điểm bất kỳ trên cạnh BC. Trong nửa mặt phẳng bờ AB chứa C, dựng hình vuông $AMHN$. Qua M dựng đường thẳng d song song với AB, d cắt AH tại E. Đường thẳng AH cắt DC tại F.
   a) Chứng minh rằng $BM=ND$.
   b) Tứ giác $EMFN$ là hình gì
   c) Chứng minh chu vi tam giác MFC không đổi khi M thay đổi trên BC
2) Cho tam giác ABC có $\widehat{BAC}=90^0, \widehat{ABC}=20^0$. Các điểm E và F lần lượt nằm trên các cạnh AC, AB sao cho $\widehat{ABE}=10^0$ và $\widehat{ACF}=30^0$. Tính $\widehat{CFE}$

Câu 5. (3,0 điểm)

1) Cho các số thực $a,b,c\geq 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{2a-1}+\frac{1}{2b-1}+\frac{1}{2c-1}+3\geq\frac{4}{a+b}+\frac{4}{b+c}+\frac{4}{c+a}$$

2) Cho hình vuông $ABCD$ và 9 đường thẳng cùng có tính chất là mỗi đường thẳng chia hình vuông $ABCD$ thành hai tứ giác có tỉ số diện tích bằng $\frac{2}{3}$. Chứng minh rằng có ít nhất 3 đường thẳng trong số đó cùng đi qua một điểm.

ĐÁP ÁN

Câu 1.

Nếu $a+b+c=0$ thì $a+b=-c, b+c=-a, c+a=-b$

Do đó, $\frac{a+b}{c}=\frac{b+c}{a}=\frac{c+a}{b}=-1 \Rightarrow A=\frac{a+b}{c}.\frac{b+c}{a}.\frac{c+a}{b}=-1$

Nếu $a+b+c\neq 0$ thì $\frac{a+b}{c}=\frac{b+c}{a}=\frac{c+a}{b}=\frac{a+b+b+c+c+a}{c+a+b}=2$

Do đó, $a+b=2c, b+c=2a, c+a=2b \Rightarrow a=b=c$, trái giả thiết

Vậy $A=-1$

Câu 2.

2.1 Điều kiện $x\neq 0; x\neq -1$

$$\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x+1}-\frac{2}{(x+1)^2}=2 \Leftrightarrow 1-\frac{1}{x^2}+1-\frac{3}{x+1}+\frac{2}{(x+1)^2}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-1}{x^2}+\frac{(x+1)^2-3(x+1)+2}{(x+1)^2}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+1)(x-1)}{x^2}+\frac{x(x-1)}{(x+1)^2}=0 \Leftrightarrow (x-1)\left[\frac{x+1}{x^2}+\frac{x}{(x+1)^2}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left[(x+1)^3+x^3\right]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\frac{-1}{2} \end{array}\right.(tm)$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{1;\frac{-1}{2}\right\}$

2.2

Ta có : $P(x) = x^5 - 5x^3 + 4x + 1 = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)(x - x_5)$

$Q(x) = 2\left(\frac{1}{2} - x\right)(-1 - x)$

Do đó

$$Q(x_1).Q(x_2).Q(x_3).Q(x_4).Q(x_5)$$
$$= 2^5.\left[\left(\frac{1}{2} - x_1\right)\left(\frac{1}{2} - x_2\right)\left(\frac{1}{2} - x_3\right)\left(\frac{1}{2} - x_4\right)\left(\frac{1}{2} - x^5\right)\right]$$
$$\times\left[(-1 - x_1)(-1 - x_2)(-1 - x_3)(-1 - x_4)(-1 - x_5)\right]$$
$$= 32.P\left(\frac{1}{2}\right).P(-1) = 32.\left(\frac{1}{32} - \frac{5}{8} + 2 + 1\right)(-1 + 5 - 4 + 1) = 77$$

Câu 3.

3.1

$n^2 + 2$ là ước số của $n^6 + 206 \Leftrightarrow \frac{n^6 + 206}{n^2 + 2} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{n^6 + 8 + 198}{n^2 + 2} \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow n^4 + 2n^2 + 4 + \frac{198}{n^2 + 2} \in \mathbb{Z}$

Điều nảy xảy ra khi $n^2 + 2$ là ước nguyên dương của $198 = 2.3^2.11$ gồm:

$2;3;6;9;11;18;22;33;66;99;198$

Từ đó ta tìm được $n \in \{1;2;3;4;8;14\}$

3.2

Ta có: $\frac{a^2 + b^2}{b^2 + c^2} = \frac{a}{c} \Leftrightarrow (a - c)(b^2 - ac) = 0 \Rightarrow b^2 = ac$

Mà $a^2 + b^2 + c^2 = a^2 + ac + c^2 = a^2 + 2ac + c^2 - b^2 = (a + c)^2 - b^2 = (a + c + b)(a + c - b)$

Ta thấy $a^2 + b^2 + c^2 > 3$ do đó nếu $a^2 + b^2 + c^2$ là các số nguyên tố thì xảy ra các trường hợp sau:

$1) a+c-b=1; a+c+b=a^2+b^2+c^2 \Rightarrow a^2+b^2+c^2=2a+2c-1$

$\Rightarrow (a-1)^2+(c-1)^2+b^2=1 \Rightarrow a=c=1, b=\pm 1 \qquad (ktm)$

$2) a+c+b=1, a+c-b=a^2+b^2+c^2 \Rightarrow a^2+b^2+c^2=2a+2c-1$

$\Rightarrow (a-1)^2+(c-1)^2+b^2=1 \Rightarrow a=c=1, b=\pm 1 \qquad (ktm)$

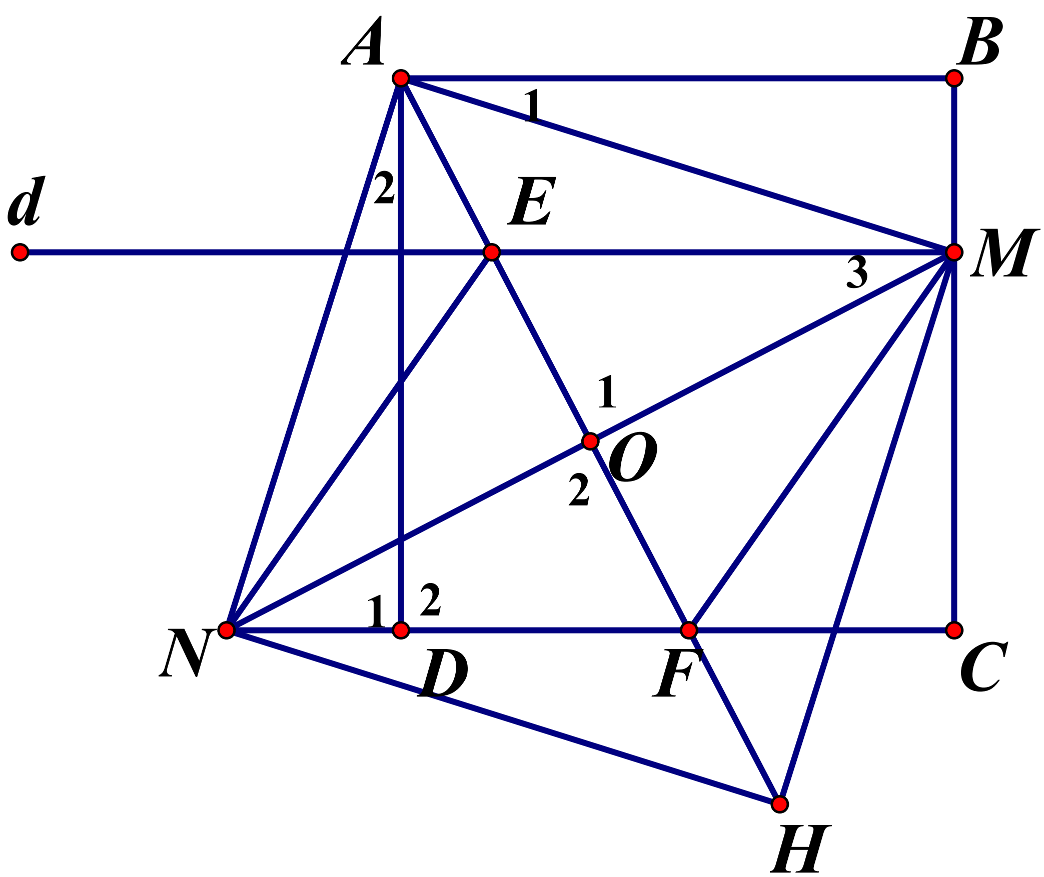
$3) a+c+b=-1, a+c-b=-\left(a^2+b^2+c^2\right) \Rightarrow a^2+b^2+c^2=-2a-2c-1$

$\Rightarrow (a+1)^2+(c+1)^2+b^2=1 \Rightarrow a=c=-1, b=\pm 1 \qquad (ktm)$

$4) a+c-b=-1, a+c+b=-\left(a^2+b^2+c^2\right) \Rightarrow a^2+b^2+c^2=-2a-2c-1$

$\Rightarrow (a+1)^2+(c+1)^2+b^2=1 \Rightarrow a=c=-1, b=\pm 1 \qquad (ktm)$

Câu 4.



4.1

a) Do ABCD là hình vuông nên $\Rightarrow \widehat{A_1}+\widehat{MAD}=90^0 (1)$

mà $AMHN$ là hình vuông $\Rightarrow \widehat{A_2}+\widehat{MAD}=90^0\ (2)$

Từ $(1);(2)$ suy ra $\widehat{A_1}=\widehat{A_2}$

Do đó, $\Delta AND=\Delta AMB(c.g.c)\Rightarrow \widehat{B}=\widehat{D_1}=90^0$ và $BM=ND$

b) Do $ABCD$ là hình vuông $\Rightarrow \widehat{D_2}=90^0$

$\Rightarrow \widehat{NDC}=\widehat{D_1}+\widehat{D_2}=90^0+90^0=180^0\Rightarrow N,D,C$ thẳng hàng

Gọi O là giao điểm hai đường chéo AH,MN của hình vuông $AMHN$.

$\Rightarrow O$ là tâm đối xứng của hình vuông $AMHN$

$\Rightarrow AH$ là đường trung trực đoạn MN, mà $E,F\in AH$

$\Rightarrow EN=EM$ và $FM=FN\quad (3)$

$\Delta EOM=\Delta FON\left(OM=ON;\widehat{N_1}=\widehat{M_3}\right)\Rightarrow \widehat{O_1}=\widehat{O_2}\Rightarrow EM=FN\quad (4)$

Từ $(3);(4)\Rightarrow EM=NE=NF=FM\Rightarrow MEMF$ là hình thoi (5)

c) Từ (5) suy ra $FM=FN=FD+DN$

Mà $DN=MB\Rightarrow MF=DF+BM$

Gọi chu vi tam giác MCF là p và cạnh hình vuông là a

Ta có:

$P=MC+CF+MF=MC+CF+BM+DF$ (Vì $MF=DF+MB$)

$=(MC+MB)+(CF+FD)=BC+CD=a+a=2a$

Do đó, chu vi tam giác MCF không đổi khi M thay đổi trên BC

4.2

Xét ΔABC có $\widehat{BAC}=90^0,\widehat{ABC}=20^0\Rightarrow \widehat{ACB}=70^0$

ΔACF có $\widehat{CAF}=90^0,\widehat{ACF}=30^0\Rightarrow FC=2.AF$

Gọi D là trung điểm của BC và G là điểm trên AB sao cho $GD \perp BC$.

Khi đó, $\Delta ABC \sim \Delta DBG \Rightarrow \dfrac{BD}{BG} = \dfrac{BA}{BC}$

$\widehat{GCB} = \widehat{GBC} = 20^0 \Rightarrow \widehat{GCF} = 20^0$

Do đó CG và BE lần lượt là tia phân giác của $\widehat{BCF}$ và $\widehat{ABC}$ nên:

$\dfrac{FC}{FG} = \dfrac{BC}{BG}; \dfrac{BA}{BC} = \dfrac{AE}{EC}$

Do đó, $\dfrac{AF}{FG} = \dfrac{\frac{1}{2}FC}{FG} = \dfrac{\frac{1}{2}BC}{BG} = \dfrac{BD}{BG} = \dfrac{BA}{BC} = \dfrac{AE}{EC} \Rightarrow \dfrac{AF}{FG} = \dfrac{AE}{EC}$

Từ đó suy ra $CG // EF$ (Định lý Talet đảo)$\Rightarrow \widehat{CFE} = \widehat{GCF} = 20^0$

Câu 5.

5.1

Ta có: $(a-1)^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 \geq 2a - 1 \Rightarrow \dfrac{1}{2a-1} \geq \dfrac{1}{a^2}$

Nên $VT \geq \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2} + 3$

Ta lại có: $\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} \geq \dfrac{2}{ab} \geq \dfrac{8}{(a+b)^2}; \dfrac{8}{(a+b)^2} + 2 \geq \dfrac{8}{a+b} \Rightarrow \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + 2 \geq \dfrac{8}{a+b}$

Tương tự: $\dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2} + 2 \geq \dfrac{8}{b+c}; \dfrac{1}{c^2} + \dfrac{1}{a^2} + 2 \geq \dfrac{8}{c+a}$

Suy ra: $\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2} + 3 \geq \dfrac{4}{a+b} + \dfrac{4}{b+c} + \dfrac{4}{c+a}$

Do vậy, $\dfrac{1}{2a-1} + \dfrac{1}{2b-1} + \dfrac{1}{2c-1} + 3 \geq \dfrac{4}{a+b} + \dfrac{4}{b+c} + \dfrac{4}{c+a}$

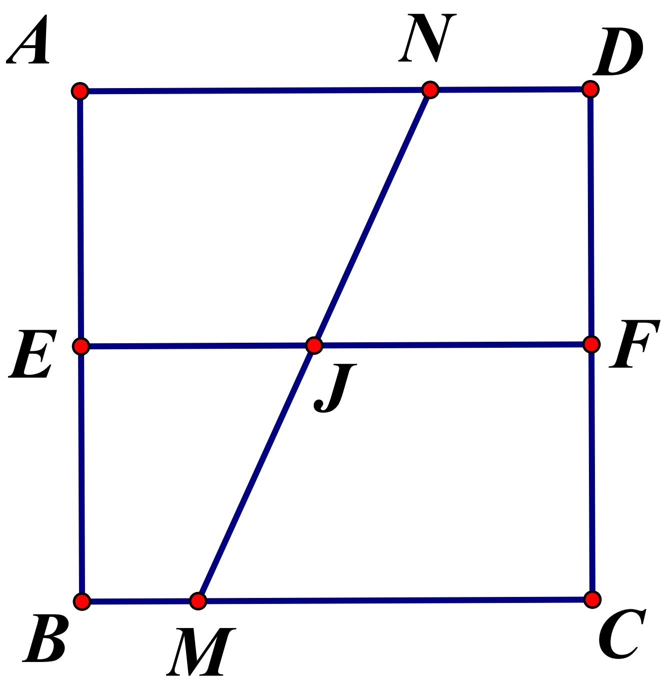
Dấu $"="$ xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$

5.2

Các đường thẳng đã cho không thể cắt các cạnh kề nhau của hình vuông, bởi vì nếu thế chúng chia hình vuông thành một tam giác và ngũ giác (chứ không phải chia hình vuông thành hai tứ giác)

Do đó, mỗi đường thẳng (trong số chín đường thẳng) đều cắt hai cạnh đối của hình vuông và không đi qua một đỉnh nào của hình vuông cả.

Giả sử một đường thẳng cắt hai cạnh đối BC và AD tại các điểm M và N

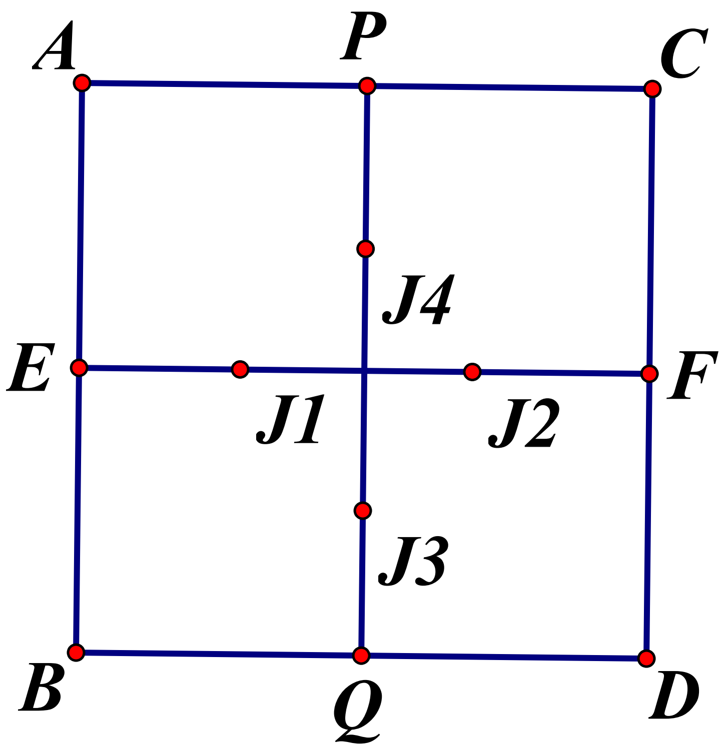


Ta có: $$\frac{S_{ABMN}}{S_{MCND}}=\frac{2}{3}\Leftrightarrow\frac{\frac{1}{2}.AB.(BM+AN)}{\frac{1}{2}CD.(MC+ND)}=\frac{2}{3}\Leftrightarrow\frac{EJ}{JF}=\frac{2}{3}$$

(ở đây E và F là các trung điểm của AB và CD tương ứng)

Gọi E,F,P,Q tương ứng là các trung điểm của AB, CD, BC, AD. Gọi J_1,J_2,J_3,J_4 là các điểm sao cho J_1,J_2 nằm trên EF, J_3,J_4 nằm trên PQ và thỏa mãn:

$$\frac{EJ_1}{J_1F}=\frac{FJ_2}{J_2F}=\frac{PJ_3}{J_3Q}=\frac{QJ_4}{J_4P}=\frac{2}{3}$$



Khi đó từ đó lập luận trên ta suy ra mỗi đường thẳng có tính chất thỏa mãn yêu cầu của đề bài phải đi qua một trong 4 điểm J_1, J_2, J_3, J_4 nói trên. Vì có 9 đường thẳng, nên theo nguyên lý Dirichle phải tồn tại ít nhất một trong 4 điểm J_1, J_2, J_3, J_4 sao cho nó có ít nhất ba trong 9 đường thẳng đã cho đi qua

Vậy có ít nhất 3 đường thẳng trong 9 đường thẳng đã cho đi qua một điểm.