

## PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

### Dạng 1. Xác định giá trị lớn nhất – giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn

✧ **Bước 1:** Hàm số đã cho  $y = f(x)$  xác định và liên tục trên đoạn  $[a; b]$ .

Tìm các điểm  $x_1, x_2, \dots, x_n$  trên khoảng  $(a; b)$ , tại đó  $f'(x) = 0$  hoặc  $f'(x)$  không xác định.

✧ **Bước 2:** Tính  $f(a), f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), f(b)$ .

✧ **Bước 3:** Khi đó:

$$\max_{[a; b]} f(x) = \max \{ f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), f(a), f(b) \}.$$
$$\min_{[a; b]} f(x) = \min \{ f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), f(a), f(b) \}.$$

**Câu 1.** Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $f(x) = 1 + x^2$  trên đoạn  $[0; 2]$ .

**Lời giải**

Do  $0 \leq x^2 \leq 4$  với mọi  $x \in [0; 2]$  nên  $1 \leq 1 + x^2 \leq 5$  với mọi  $x \in [0; 2]$ , tức là  $1 \leq f(x) \leq 5$  với mọi  $x \in [0; 2]$ . Ta có:  $f(2) = 5$  nên  $\max_{[0; 2]} f(x) = 5$ ;  $f(0) = 1$  nên  $\min_{[0; 2]} f(x) = 1$ .

**Câu 2.** Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau:

a)  $y = f(x) = 2x + 3$  trên đoạn  $[-3; 1]$ ;

b)  $y = g(x) = \sqrt{1 - x^2}$ .

**Lời giải**

a) Xét hàm số  $f(x) = 2x + 3$  trên đoạn  $[-3; 1]$ .

Với mọi  $x \in [-3; 1]$ , ta có  $f(x) = 2x + 3 \geq -3$ . Mặt khác  $f(-3) = -3$ . Do đó  $\min_{[-3; 1]} f(x) = -3$ .

Với mọi  $x \in [-3; 1]$ , ta có  $f(x) = 2x + 3 \leq 5$ . Mặt khác  $f(1) = 5$ . Do đó  $\max_{[-3; 1]} f(x) = 5$ .

b) Xét hàm số  $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$ .

Tập xác định:  $D = [-1; 1]$ .

Ta có  $0 \leq g(x) \leq 1$  với mọi  $x \in [-1; 1]$ . Mặt khác  $g(0) = 1$  và  $g(1) = 0$ .

Do đó  $\min_{[-1; 1]} g(x) = 0$  và  $\max_{[-1; 1]} g(x) = 1$ .

**Câu 3.** Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$  trên nửa khoảng  $[-1; +\infty)$ .

**Lời giải**

Ta có:  $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$ .

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 3.$$

Bảng biến thiên của hàm số trên nửa khoảng  $[-1; +\infty)$ :

|         |     |   |    |           |
|---------|-----|---|----|-----------|
| $x$     | -1  | 1 | 3  | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | +   | 0 | -  | 0         |
| $f(x)$  | -17 | 3 | -1 | $+\infty$ |

Từ bảng biến thiên, ta thấy  $\min_{[-1; +\infty)} f(x) = f(-1) = -17$  và hàm số không có giá trị lớn nhất trên  $[-1; +\infty)$ .

**Câu 4.** Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số  $f(x) = x^4 - 8x^2 + 9$  trên đoạn  $[-1; 3]$ .  
**Lời giải**

Ta có:  $f'(x) = 4x^3 - 16x$ ;

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ hoặc } x = 2 \text{ hoặc } x = -2 \text{ (loại vì không thuộc } [-1; 3]);$$

$$f(-1) = 2; f(0) = 9; f(2) = -7; f(3) = 18.$$

Vậy  $\max_{[-1; 3]} f(x) = f(3) = 18$  và  $\min_{[-1; 3]} f(x) = f(2) = -7$ .

**Câu 5.** Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số  $y = f(x) = x + \frac{1}{x} - 7$  trên khoảng  $(0; +\infty)$ .  
**Lời giải**

Trên khoảng  $(0; +\infty)$ , ta có  $y' = f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}$ .

$$y' = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ (do } x \in (0; +\infty)).$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} y = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( x + \frac{1}{x} - 7 \right) = +\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x + \frac{1}{x} - 7 \right) = +\infty.$$

Bảng biến thiên:

|         |           |    |           |
|---------|-----------|----|-----------|
| $x$     | 0         | 1  | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | -         | 0  | +         |
| $f(x)$  | $+\infty$ | -5 | $+\infty$ |

Từ bảng biến thiên, ta có  $f(x) \geq -5, \forall x \in (0; +\infty)$  và  $f(1) = -5$ .

Suy ra trên khoảng  $(0; +\infty)$ , hàm số có giá trị nhỏ nhất là  $-5$  tại  $x = 1$ .

Hàm số  $f(x)$  không có giá trị lớn nhất trên khoảng  $(0; +\infty)$ .

**Câu 6.** Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$  trên đoạn  $[0; 5]$ .  
**Lời giải**

Ta có  $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \notin (0; 5) \\ x = 3 \in (0; 5) \end{cases}$$

Ta có  $f(0) = 5; f(5) = 10; f(3) = -22$

Vậy  $\max_{[0;5]} f(x) = 10, \min_{[0;5]} f(x) = -22$

**Câu 7.** Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm số  $f(x) = \frac{x^2 + 9}{x}$  trên khoảng  $(0; +\infty)$ .  
**Lời giải**

- Xét hàm số  $f(x) = \frac{x^2 + 9}{x}$  với  $x \in (0; +\infty)$ .

- Ta có:  $f'(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2}$ . Khi đó,  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 3$  (do  $x > 0$ ).

Ngoài ra  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Bảng biến thiên của hàm số như sau:

| $x$     | 0         | 3     | $+\infty$ |
|---------|-----------|-------|-----------|
| $f'(x)$ |           | - 0 + |           |
| $f(x)$  | $+\infty$ | 6     | $+\infty$ |

Căn cứ bảng biến thiên, ta có:  $\min_{(0; +\infty)} f(x) = 6$  tại  $x = 3$  và hàm số  $f(x)$  không có giá trị lớn nhất.

**Câu 8.** Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của mỗi hàm số sau:

a)  $f(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1$  trên đoạn  $[-3; 2]$ ;

b)  $g(x) = \frac{\ln x}{x}$  trên đoạn  $[1; 4]$ .

**Lời giải**

a) Ta có:  $f'(x) = x^2 - 4x + 3$ . Khi đó, trên khoảng  $(-3; 2), f'(x) = 0$  khi  $x = 1$ .

$$\bullet f(1) = \frac{7}{3}, f(-3) = -35, f(2) = \frac{5}{3}$$

Vậy  $\max_{[-3; 2]} f(x) = \frac{7}{3}$  tại  $x = 1$ ,

$\min_{[-3; 2]} f(x) = -35$  tại  $x = -3$

b) - Ta có:  $g'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$ . Khi đó, trên khoảng  $(1; 4), g'(x) = 0$  khi  $x = e$ .

$$\bullet g(1)=0, g(e)=\frac{1}{e}, g(4)=\frac{\ln 4}{4}=\frac{\ln 2}{2}$$

$$\text{Vậy } \max_{[1;4]} g(x)=\frac{1}{e} \text{ tại } x=e, \min_{[1;4]} g(x)=0 \text{ tại } x=1$$

**Câu 9. (Đề Tham Khảo 2020 Lần 2)** Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số  $f(x)=x^4-10x^2+2$  trên đoạn  $[-1;2]$

**Lời giải**

Hàm số đã cho liên tục trên đoạn  $[-1;2]$ .

$$\text{Ta có: } f'(x)=4x^3-20x, f'(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\pm\sqrt{5} \end{cases}$$

Xét hàm số trên đoạn  $[-1;2]$  có:  $f(-1)=-7; f(0)=2; f(2)=-22$

$$\text{Vậy } \min_{x \in [-1;2]} f(x)=-22$$

**Câu 10. (Mã 103 - 2020 Lần 1)** Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số  $f(x)=x^3-30x$  trên đoạn  $[2;19]$

**Lời giải**

$$\text{Ta có } f'(x)=3x^2-30 \Rightarrow f'(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2-30=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=\sqrt{10} \text{ (n)} \\ x=-\sqrt{10} \text{ (l)} \end{cases}$$

Khi đó  $f(2)=-52$ ;  $f(\sqrt{10})=-20\sqrt{10}$  và  $f(19)=6289$

$$\text{Vậy } \min_{x \in [2;19]} f(x)=f(\sqrt{10})=-20\sqrt{10}$$

**Câu 11. (Mã 110 2017)** Tìm giá trị lớn nhất  $M$  của hàm số  $y=x^4-2x^2+3$  trên đoạn  $[0;\sqrt{3}]$ .

**Lời giải**

**Chọn A**

$$\text{Ta có: } y'=4x^3-4x=4x(x^2-1)$$

$$y'=0 \Leftrightarrow 4x(x^2-1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \\ x=-1 \text{ (l)} \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } y(0)=3; y(1)=2; y(\sqrt{3})=6$$

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số  $y=x^4-2x^2+3$  trên đoạn  $[0;\sqrt{3}]$  là  $M=y(\sqrt{3})=6$

**Câu 12. (Mã 104 2017)** Tìm giá trị nhỏ nhất  $m$  của hàm số  $y=x^2+\frac{2}{x}$  trên đoạn  $[\frac{1}{2};2]$ .

**Lời giải**

Đặt  $y = f(x) = x^2 + \frac{2}{x}$ .

Ta có  $y' = 2x - \frac{2}{x^2} = \frac{2x^3 - 2}{x^2}$ ,  $y' = 0 \Rightarrow x = 1 \in \left[\frac{1}{2}; 2\right]$ .

Khi đó  $f(1) = 3, f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{17}{4}, f(2) = 5$ .

Vậy  $m = \min_{\left[\frac{1}{2}; 2\right]} f(x) = f(1) = 3$ .

**Câu 13. (Sở Nam Định-2019)** Tìm giá trị lớn nhất của hàm số  $y = \sqrt{4 - x^2}$

**Lời giải**

• Tập xác định:  $D = [-2; 2]$

• Ta có:  $y' = \frac{-x}{\sqrt{4 - x^2}} \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \in (-2; 2)$

• Ta có:  $\begin{cases} y(-2) = y(2) = 0 \\ y(0) = 2 \end{cases} \Rightarrow \max_{[-2; 2]} y = 2$ .

**Câu 14. (Chuyên ĐHS PHN - 2018)** Tìm giá trị lớn nhất của hàm số  $f(x) = \sin x + \cos 2x$  trên  $[0; \pi]$

**Lời giải**

$f(x) = \sin x + \cos 2x = \sin x + 1 - 2\sin^2 x$

Đặt  $\sin x = t$  ( $0 \leq t \leq 1$ )

$f(t) = -2t^2 + t + 1$ ,  $f'(t) = -4t + 1$

$f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{4}$

$f(0) = 1$ ,  $f(1) = 0$ ,  $f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{9}{8}$

Vậy  $\max_{[0; 1]} f(x) = \frac{9}{8}$ .

**Câu 15.** Gọi  $m$  là giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = x - 1 + \frac{4}{x - 1}$  trên khoảng  $(1; +\infty)$ . Tìm  $m$ ?

**Lời giải**

Tập xác định  $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ .

$y' = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x - 1)^2}$ ,  $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$ .

Bảng biến thiên:

|      |           |      |     |           |           |           |
|------|-----------|------|-----|-----------|-----------|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $-1$ | $1$ | $3$       | $+\infty$ |           |
| $y'$ | $+$       | $0$  | $-$ | $-$       | $0$       | $+$       |
| $y$  |           |      |     | $+\infty$ | $4$       | $+\infty$ |

$$\Rightarrow m = \min_{(1;+\infty)} y = 4 \text{ khi } x = 3$$

## Dạng 2. Định m để GTLN-GTNN của hàm số thỏa mãn điều kiện cho trước

**Bước 1.** Tìm nghiệm  $x_i (i=1,2,\dots)$  của  $y' = 0$  thuộc  $[a; b]$

**Bước 2.** Tính các giá trị  $f(x_i); f(a); f(b)$  theo tham số

**Bước 3.** So sánh các giá trị, suy ra giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất.

**Bước 4.** Biện luận m theo giả thuyết đề để kết luận

**Lưu ý:**

- Hàm số  $y = f(x)$  đồng biến trên đoạn  $[a; b]$  thì  $\begin{matrix} \text{Max} \\ [a;b] \end{matrix} f(x) = f(b); \begin{matrix} \text{Min} \\ [a;b] \end{matrix} f(x) = f(a)$
- Hàm số  $y = f(x)$  nghịch biến trên đoạn  $[a; b]$  thì  $\begin{matrix} \text{Max} \\ [a;b] \end{matrix} f(x) = f(a); \begin{matrix} \text{Min} \\ [a;b] \end{matrix} f(x) = f(b)$

**Câu 16.** Tìm giá trị dương của tham số  $m$  để giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = \frac{m^2 x - 1}{x + 2}$  trên đoạn  $[1; 3]$  bằng 1.

**Lời giải**

Tập xác định:  $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ .

$$y' = \frac{2m^2 + 1}{(x + 2)^2} > 0, \forall x \neq -2$$

Ta có:

Hàm số đồng biến trên đoạn  $[1; 3]$  nên  $\max_{[1;3]} y = y(3) \Leftrightarrow \frac{3m^2 - 1}{5} = 1 \Leftrightarrow m = \sqrt{2}$  (vì  $m > 0$ ).

**Câu 17. (Chuyên Bắc Ninh 2019)** Gọi  $A, B$  lần lượt là giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số  $y = \frac{x + m^2 + m}{x - 1}$  trên đoạn  $[2; 3]$ . Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để  $A + B = \frac{13}{2}$ .

**Lời giải**

Xét hàm số  $y = \frac{x + m^2 + m}{x - 1}$  trên đoạn  $[2; 3]$ .

$$y' = \frac{-m^2 - m - 1}{(x - 1)^2} < 0 \quad \forall x \in [2; 3] \Rightarrow A = f(3) = \frac{m^2 + m + 3}{2}, B = f(2) = \frac{m^2 + m + 2}{1}$$

$$A+B=\frac{13}{2} \Leftrightarrow \frac{m^2+m+3}{2} + \frac{m^2+m+2}{1} = \frac{13}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} m=1 \\ m=-2 \end{cases}$$

**Câu 18.** (THPT Ngô Gia Tự Vĩnh Phúc 2019) Cho hàm số  $y=2x^3-3x^2-m$ . Trên  $[-1;1]$  hàm số có giá trị nhỏ nhất là  $-1$ . Tính  $m$ ?

**Lời giải**

Xét  $[-1;1]$  có  $y'=6x^2-6x$ .

$$y'=0 \Leftrightarrow 6x^2-6x=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \in [-1;1] \\ x=1 \in [-1;1] \end{cases}$$

Khi đó

$$y(-1)=-5-m; \quad y(0)=-m; \quad y(1)=-1-m$$

Ta thấy  $-5-m < -1-m < -m$  nên  $\min_{[-1;1]} y = -5-m$

Theo bài ra ta có  $\min_{[-1;1]} y = -1$  nên  $-5-m = -1 \Leftrightarrow m = -4$ .

**Câu 19.** (THPT Bạch Đằng Quảng Ninh 2019) Cho hàm số  $y = \frac{1-m\sin x}{\cos x+2}$ . Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  thuộc đoạn  $[0;10]$  để giá trị nhỏ nhất của hàm số nhỏ hơn  $-2$ ?

**Lời giải**

Tập xác định:  $D=\mathbb{R}$ .

Ta có:  $y = \frac{1-m\sin x}{\cos x+2} \Leftrightarrow y\cos x + m\sin x = 1-2y$

Phương trình có nghiệm khi và chỉ khi:  $y^2+m^2 \geq 1-4y+4y^2 \Leftrightarrow 3y^2-4y+1-m^2 \leq 0$

$$\Leftrightarrow \frac{2-\sqrt{1+3m^2}}{3} \leq y \leq \frac{2+\sqrt{1+3m^2}}{3}$$

$$\begin{cases} \min_{x \in \mathbb{R}} y = \frac{2-\sqrt{1+3m^2}}{3} < -2 \\ m \in [0;10] \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{1+3m^2} > 8 \\ m \in [0;10] \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m^2 > 63 \\ m \in [0;10] \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 > 21 \\ m \in [0;10] \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Theo đề bài, ta có:

$$\Leftrightarrow m \in \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

Vậy có 6 giá trị nguyên của tham số  $m$  thỏa yêu cầu bài toán.

**Câu 20.** (Mã 101-2022) Cho hàm số  $f(x)=(m-1)x^4-2mx^2+1$  với  $m$  là tham số thực. Nếu  $\min_{[0;3]} f(x) = f(2)$  thì  $\max_{[0;3]} f(x)$  bằng bao nhiêu?

## Lời giải

Ta có:

$$f'(x) = 4(m-1)x^3 - 4mx = 4x((m-1)x^2 - m)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = \frac{m}{m-1} \end{cases} \quad (m=1 \text{ không thỏa yêu cầu bài toán})$$

$$\text{Vì } \min_{[0;3]} f(x) = f(2) \Rightarrow x=2 \text{ là nghiệm của } f'(x) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{m}{m-1} = 4 \Rightarrow m = 4m - 4 \Rightarrow m = \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{3}x^4 - \frac{8}{3}x^2 + 1$$

$$f(0) = 1, f(3) = \frac{81}{3} - \frac{72}{3} + \frac{3}{3} = \frac{12}{3} = 4$$

$$\text{Vậy } \max_{[0;3]} f(x) = 4$$

### Dạng 3. Định m để GTLN-GTNN của hàm số chứa dấu giá trị tuyệt đối thỏa mãn điều kiện cho trước

**Dạng 1:** Tìm  $m$  để  $\max_{[\alpha;\beta]} y = |f(x) + m| = a \quad (a > 0)$ .

**Phương pháp:**

**Cách 1:** Trước tiên tìm  $\max_{[\alpha;\beta]} f(x) = K; \quad \min_{[\alpha;\beta]} f(x) = k \quad (K > k)$ .

Kiểm tra  $\max \{ |m+K|, |m+k| \} \geq \frac{|m+K| + |m+k|}{2} \geq \frac{|m+K - m-k|}{2} = \frac{|K-k|}{2}$ .

**TH1:**  $\frac{|K-k|}{2} \leq a$ . Để  $\max_{[\alpha;\beta]} y = a \Leftrightarrow \begin{cases} m+k = -a \\ m+K = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -a-k \\ m = a-K \end{cases} \Rightarrow m \in \{-a-k; a-K\}$ .

**TH2:**  $\frac{|K-k|}{2} > a \Rightarrow m \in \emptyset$ .

**Cách 2:** Xét trường hợp

**TH1:**  $\text{Max} = |m+K| \Leftrightarrow \begin{cases} |m+K| = a \\ |m+K| \geq |m+k| \end{cases}$

**TH2:**  $\text{Max} = |m+k| \Leftrightarrow \begin{cases} |m+k| = a \\ |m+k| \geq |m+K| \end{cases}$

**Dạng 2:** Tìm  $m$  để  $\min_{[\alpha;\beta]} y = |f(x) + m| = a \quad (a > 0)$ .

**Phương pháp:**

Trước tiên tìm  $\max_{[\alpha;\beta]} f(x) = K; \quad \min_{[\alpha;\beta]} f(x) = k \quad (K > k).$

$$\text{Để } \min_{[\alpha;\beta]} y = a \Leftrightarrow \begin{cases} m+k = a \\ m+k > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} m+K = -a \\ m+K < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = a-k \\ m > -k \end{cases} \vee \begin{cases} m = -a-K \\ m < -K \end{cases}. \text{ Vậy } m \in S_1 \cup S_2.$$

**Dạng 3:** Tìm  $m$  để  $\max_{[\alpha;\beta]} y = |f(x) + m|$  không vượt quá giá trị  $M$  cho trước.

**Phương pháp:** Trước tiên tìm  $\max_{[\alpha;\beta]} f(x) = K; \quad \min_{[\alpha;\beta]} f(x) = k \quad (K > k).$

$$\text{Để } \max_{[\alpha;\beta]} y \leq M \Rightarrow \begin{cases} m+k \geq -M \\ m+K \leq M \end{cases} \Leftrightarrow -M-k \leq m \leq M-K.$$

**Dạng 4:** Tìm  $m$  để  $\min_{[\alpha;\beta]} y = |f(x) + m|$  không vượt quá giá trị  $a$  cho trước.

**Phương pháp:** Trước tiên tìm  $\max_{[\alpha;\beta]} f(x) = K; \quad \min_{[\alpha;\beta]} f(x) = k \quad (K > k).$

$$\text{Để } \min_{[\alpha;\beta]} y \leq a \Leftrightarrow \begin{cases} m+k \leq a \\ m+k \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} m+K \geq -a \\ m+K \leq 0 \end{cases} \vee (m+K)(m+k) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq a-k \\ m \geq -k \end{cases} \vee \begin{cases} m \geq -a-K \\ m \leq -K \end{cases} \vee -K < m < K$$

**Dạng 5:** Tìm  $m$  để  $\max_{[a;b]} y = |f(x) + m|$  đạt min.

**Phương pháp:**

Trước tiên tìm  $\max_{[a;b]} f(x) = K; \quad \min_{[a;b]} f(x) = k \quad (K > k).$

$$\text{Đề hỏi tìm } m \Rightarrow m = -\frac{K+k}{2}. \quad \text{Đề hỏi tìm min của } \max_{[a;b]} y \Rightarrow \text{ giá trị này là } \frac{K-k}{2}.$$

**Dạng 6:** Tìm  $m$  để  $\min_{[a;b]} y = |f(x) + m|$  đạt min.

**Phương pháp:** Trước tiên tìm  $\max_{[a;b]} f(x) = K; \quad \min_{[a;b]} f(x) = k \quad (K > k).$

$$\text{Đề hỏi tìm } m \Rightarrow (m+K)(m+k) \leq 0 \Leftrightarrow -K \leq m \leq -k. \quad \text{Đề hỏi tìm min của } \min_{[a;b]} y \Rightarrow \text{ giá trị này là } 0.$$

**Dạng 7:** Cho hàm số  $y = |f(x) + m|$ . Tìm  $m$  để  $\max_{[a;b]} y \leq h \cdot \min_{[a;b]} y \quad (h > 0)$  hoặc  $\text{Min} + \text{max} =$

**Phương pháp:** Trước tiên tìm  $\max_{[a;b]} f(x) = K; \quad \min_{[a;b]} f(x) = k \quad (K > k).$

$$\text{TH1: } |K+m| \leq h|k+m| - \frac{|K+m| \geq |k+m|}{K+m \text{ cùng dấu } k+m} \longrightarrow m \in S_1.$$

$$\text{TH2: } |k+m| \leq h|K+m| - \frac{|k+m| \geq |K+m|}{K+m \text{ cùng dấu } k+m} \longrightarrow m \in S_2.$$

Vậy  $m \in S_1 \cup S_2$ .

**Dạng 8:** Cho hàm số  $y = |f(x) + m|$ .

**Phương pháp:** Trước tiên tìm  $\max_{[a;b]} f(x) = K; \quad \min_{[a;b]} f(x) = k \quad (K > k)$ .

**BT1:** Tìm  $m$  để  $\min_{[a;b]} y + \max_{[a;b]} y = \alpha \Leftrightarrow |m + K| + |m + k| = \alpha$

**BT2:** Tìm  $m$  để  $\min_{[a;b]} y \cdot \max_{[a;b]} y = \beta \Leftrightarrow |m + K| \cdot |m + k| = \beta$

**Câu 21. (Đề Minh Họa 2020 Lần 1)** Gọi  $S$  là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  sao cho giá trị lớn nhất của hàm số  $f(x) = |x^3 - 3x + m|$  trên đoạn  $[0; 3]$  bằng 16. Tính tổng tất cả các phần tử của  $S$

**Lời giải**

Xét  $u = x^3 - 3x + m$  trên đoạn  $[0; 3]$  có  $u' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \in [0; 3]$

$$\max_{[0;3]} u = \max \{u(0), u(1), u(3)\} = \max \{m, m-2, m+18\} = m+18$$

$$\min_{[0;3]} u = \min \{u(0), u(1), u(3)\} = \min \{m, m-2, m+18\} = m-2$$

Khi đó

$$\max_{[0;3]} f(x) = \max \{|m-2|, |m+18|\} = 16 \Leftrightarrow \begin{cases} |m+18| = 16 \\ |m+18|^3 - |m-2| \\ |m-2| = 16 \\ |m-2|^3 - |m+18| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -2 \\ m = -14 \end{cases}$$

Suy ra

Do đó tổng tất cả các phần tử của  $S$  bằng  $-16$ .

**Câu 22. (THPT Nguyễn Huệ 2018)** Cho hàm số  $y = |x^2 + 2x + a - 4|$  ( $a$  là tham số). Tìm  $a$  để giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn  $[-2; 1]$  đạt giá trị nhỏ nhất

**Lời giải**

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên đoạn  $[-2; 1]$ .

$$\text{Ta có: } y = |x^2 + 2x + a - 4| = |(x+1)^2 + a - 5| \quad (*)$$

$$\text{Đặt } t = (x+1)^2, x \in [-2; 1] \Rightarrow a \in [0; 4]$$

Lúc đó hàm số trở thành:  $f(t) = |t + a - 5|$  với  $t \in [0; 4]$ .

$$\text{Nên } \max_{x \in [-2; 1]} y = \max_{t \in [0; 4]} f(t) = \max_{t \in [0; 4]} \{f(0); f(4)\} = \max_{t \in [0; 4]} \{|a-5|; |a-1|\}$$

$$\geq \frac{|a-1| + |a-5|}{2} \geq \frac{|a-1+5-a|}{2} = 2$$

Đẳng thức xảy ra khi  $|a - 1| = |a - 5| = 2 \Leftrightarrow a = 3$ .

Do đó giá trị nhỏ nhất của  $\max_{t \in [0;4]} f(t)$  là 2 khi  $a = 3$ .

**Câu 23. (Chuyên Nguyễn Thị Minh Khai - Sóc Trăng - 2018)** Gọi  $S$  là tập hợp tất cả các giá trị của tham số  $m$  sao cho giá trị lớn nhất của hàm số  $y = |x^3 - 3x^2 - 9x + m|$  trên đoạn  $[-2; 4]$  bằng 16. Số phần tử của  $S$  là bao nhiêu?

**Lời giải**

Xét hàm số  $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + m$  trên đoạn  $[-2; 4]$ .

$$f' = 3x^2 - 6x - 9; f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases} \text{ (thỏa mãn).}$$

$$f(-2) = -2 + m; f(-1) = 5 + m; f(3) = -27 + m; f(4) = -20 + m$$

$$\Rightarrow \min_{[-2;4]} f(x) = m - 27; \max_{[-2;4]} f(x) = m + 5 \Rightarrow \max_{[-2;4]} |f(x)| = \max\{|m - 27|; |m + 5|\}$$

+) Trường hợp 1: Nếu  $|m - 27| \leq |m + 5|$  (\*)

$$\Rightarrow \max_{[-2;4]} |f(x)| = |m + 5| \Rightarrow |m + 5| = 16 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 11 \\ m = -21 \end{cases} \text{ . Đối chiếu điều kiện (*)} \Rightarrow m = 11$$

+) Trường hợp 2: Nếu  $|m - 27| > |m + 5|$  (\*\*)

$$\Rightarrow \max_{[-2;4]} |f(x)| = |m - 27| \Rightarrow |m - 27| = 16 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 43 \\ m = 11 \end{cases} \text{ (Không thỏa mãn điều kiện (**)).}$$

Vậy  $S = \{11\} \Rightarrow S$  có 1 phần tử.

**Câu 24. (Chuyên Lương Văn Chánh - Phú Yên - 2020)** Gọi  $S$  là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số thực  $m$  sao cho giá trị lớn nhất của hàm số  $y = \left| \frac{1}{4}x^4 - 14x^2 + 48x + m - 30 \right|$  trên đoạn  $[0; 2]$  không vượt quá 30. Tổng giá trị các phần tử của tập hợp  $S$  bằng bao nhiêu?

**Lời giải**

Đặt  $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 14x^2 + 48x + m - 30$  là hàm số xác định và liên tục trên  $[0; 2]$ .

Với mọi  $x \in [0; 2]$  ta có  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 28x + 48 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ .

Suy ra  $\max_{[0;2]} |f(x)| = \max\{|f(0)|; |f(2)|\}$ .

$$\max_{[0;2]} |f(x)| \leq 30 \Leftrightarrow \begin{cases} |m-30| \leq 30 \\ |m+14| \leq |m-30| \\ |m+14| \leq 30 \\ |m-30| \leq |m+14| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |m-30| \leq 30 \\ |m+14| \leq 30 \end{cases}$$

Theo đề

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -30 \leq m-30 \leq 30 \\ -30 \leq m+14 \leq 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq m \leq 60 \\ -44 \leq m \leq 16 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 16$$

Do  $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in S = \{0; 1; 2; \dots; 16\}$ . Vậy tổng tất cả 17 giá trị trong tập  $S$  là 136.

**Câu 25. (Đại Học Hà Tĩnh - 2020)** Có bao nhiêu giá trị của tham số  $m$  để giá trị nhỏ nhất của hàm số  $f(x) = |e^{2x} - 4e^x + m|$  trên đoạn  $[0; \ln 4]$  bằng 6?

**Lời giải**

Đặt  $t = e^x$ , vì  $x \in [0; \ln 4] \Rightarrow t \in [1; 4]$ .

Khi đó yêu cầu bài toán trở thành tìm  $m$  để giá trị nhỏ nhất của hàm số  $f(t) = |t^2 - 4t + m|$  trên đoạn  $[1; 4]$  bằng 6.

Đặt  $s = t^2 - 4t$ , vì  $t \in [1; 4] \Rightarrow s \in [-4; 0]$ .

Xét hàm số  $g(s) = s + m$  với  $s \in [-4; 0]$  suy ra hàm số  $g(s)$  đồng biến trên đoạn  $[-4; 0]$ .

Khi đó giá trị nhỏ nhất của  $f(s) = |s + m|$ ,  $s \in [-4; 0]$  chỉ đạt tại các đầu mút.

$$\text{TH1: } \begin{cases} \min_{[-4;0]} f(s) = |m-4| = 6 \\ |m| > |m-4| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=10 \\ m=-2 \\ |m| > |m-4| \end{cases} \Leftrightarrow m=10 \quad \text{thỏa mãn.}$$

$$\text{TH2: } \begin{cases} \min_{[-4;0]} f(s) = |m| = 6 \\ |m| < |m-4| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=6 \\ m=-6 \\ |m| > |m-4| \end{cases} \Leftrightarrow m=-6 \quad \text{thỏa mãn.}$$

Vậy có 2 giá trị của tham số  $m$  thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Câu 26.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như hình dưới đây. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số  $g(x) = f(4x - x^2) + \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x + \frac{1}{3}$  trên đoạn  $[1; 3]$ .

|      |           |   |   |   |   |   |           |
|------|-----------|---|---|---|---|---|-----------|
| $x$  | $-\infty$ |   | 0 |   | 4 |   | $+\infty$ |
| $y'$ |           | - | 0 | + | 0 | - |           |
| $y$  | $+\infty$ |   |   |   | 5 |   |           |

**Lời giải**

$$g(x) = f(4x - x^2) \cdot (4 - 2x) + x^2 - 6x + 8 = 2(2 - x) \cdot f(4x - x^2) + \frac{4 - x^2}{2}$$

Ta có

Xét thấy  $x \in [1; 3] \Rightarrow 3 \leq 4x - x^2 \leq 4 \Rightarrow f(4x - x^2) > 0$

Mặt khác  $\frac{4 - x^2}{2} > 0 \quad x \in [1; 3]$

Suy ra  $g(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$

$$g(1) = f(3) + \frac{19}{3} < f(4) + \frac{17}{3} = 5 + \frac{17}{3} = \frac{32}{3}$$

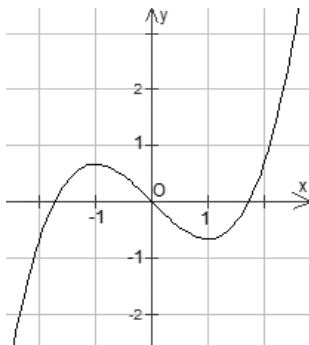
$$g(3) = f(3) + \frac{19}{3} < f(4) + \frac{19}{3} = 5 + \frac{19}{3} = \frac{34}{3}$$

$$g(2) = 5 + 7 = 12.$$

$$\Rightarrow g(1) < g(3) < g(2)$$

Vậy  $\max_{[1;3]} g(x) = 12$  tại  $x = 2$ .

**Câu 27.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm cấp 2 trên  $\mathbb{R}$ , hàm số  $y = f'(x)$  có đồ thị như hình vẽ bên.



Tìm giá trị lớn nhất của hàm số  $y = f\left(\frac{\sin x + \sqrt{3} \cos x}{2}\right)$  trên đoạn  $\left[-\frac{5\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right]$

**Lời giải**

Đặt  $t = \frac{\sin x + \sqrt{3} \cos x}{2} = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ .

Vì  $x \in \left[-\frac{5\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right] \Rightarrow x + \frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow t \in [-1; 1]$ .

Dựa vào đồ thị của hàm số  $f'(x)$ , ta có bảng biến thiên

|         |         |        |        |
|---------|---------|--------|--------|
| $t$     | -1      | 0      | 1      |
| $f'(t)$ | +       | 0      | -      |
| $f(t)$  | $f(-1)$ | $f(0)$ | $f(1)$ |

Ta có:  $\max_{\left[-\frac{5\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right]} f\left(\frac{\sin x + \sqrt{3} \cos x}{2}\right) = \max_{[-1;1]} f(t) \Leftrightarrow t=0 \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3}$

Vậy  $\max_{\left[-\frac{5\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right]} f\left(\frac{\sin x + \sqrt{3} \cos x}{2}\right) = f\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

**Câu 28. (Chuyên Thoại Ngọc Hầu - An Giang - 2021)** Cho hai hàm số  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$  và  $g(x) = x + \frac{4}{x^2}$ . Trên đoạn  $[1; 4]$ , hai hàm số  $f(x)$  và  $g(x)$  có cùng giá trị nhỏ nhất và đạt tại cùng một điểm. Biết rằng điểm  $A(1; 4)$  thuộc đồ thị của hàm số  $f(x)$ . Tìm giá trị lớn nhất của hàm số  $f(x)$  trên đoạn  $[1; 4]$ .

**Lời giải**

Ta có:  $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$ ;  $g'(x) = 1 - \frac{8}{x^3}$

Xét  $g'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{8}{x^3} = 0 \Leftrightarrow x = 2$

Ta có:  $g(1) = 5$ ;  $g(2) = 3$ ;  $g(4) = \frac{17}{4} \Rightarrow \min_{[1;4]} g(x) = 3$  tại  $x = 2$ .

$$\Rightarrow \begin{cases} f'(2) = 0 \\ -\frac{2a}{6} = 2 \\ f(2) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12 + 4a + b = 0 \\ a = -6 \\ 8 + 4a + 2b + c = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -6 \\ b = 12 \\ c = -5 \end{cases}$$

Khi đó,  $f'(x) = 3x^2 - 12x + 12 = 3(x - 4)^2 \geq 0$

$\Rightarrow f(x)$  đồng biến trên  $\mathbb{R} \Rightarrow \max_{[1;4]} f(x) = f(4) = 11$

**Câu 29. (Chuyên Bắc Giang - 2021)** Cho hàm số  $f(x) = x^3 - 3x + 1$ . Có bao nhiêu giá trị nguyên của  $m$  để giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = |f(2\sin x + 1) + m|$  không vượt quá 10?

**Lời giải**

Đặt  $t = 2\sin x + 1$ ,  $t \in [-1; 3]$

Xét hàm số  $g(t) = f(t) + m = t^3 - 3t + 1 + m$ ,  $t \in [-1; 3]$

$g'(t) = 3t^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow t = \pm 1$

$\max_{[-1;3]} g(t) = g(3) = m + 19$

$\min_{[-1;3]} g(t) = g(1) = m - 1$

+ **TH1**: Nếu  $m + 19 > m - 1 > 0 (m > 1)$

Để thỏa mãn YCBT thì  $m - 1 \leq 10 \Leftrightarrow m \leq 11 \Rightarrow 1 < m \leq 11$  (1)

+ **TH2**: Nếu  $0 > m + 19 > m - 1 (m < -19)$

Để thỏa mãn YCBT thì  $m + 19 \geq -10 \Leftrightarrow m \geq -29 \Rightarrow -29 \leq m < -19$  (2)

+ **TH3**: Nếu  $m - 1 \leq 0 \leq m + 19 \Leftrightarrow -19 \leq m \leq 1$  thì  $\min y = 0$  (hiển nhiên đúng) (3)

Từ (1),(2),(3) suy ra  $-29 \leq m \leq 11$

Vậy có 41 số nguyên thỏa mãn.

**Câu 30. (THPT Đô Lương – Nghệ An – 2022)** Hàm số  $f(x) = 10^x + x$  và  $g(x) = x^3 - mx^2 + (m^2 + 1)x - 2$ . Gọi  $M$  là giá trị lớn nhất của hàm số  $y = g(x + f(x))$  trên đoạn  $[0; 1]$ . Khi  $M$  đạt giá trị nhỏ nhất thì giá trị của  $m$  bằng?

**Lời giải**

Ta có:  $f'(x) = 10^x \ln 10 + 1 > 0, \forall x$

$g'(x) = 3x^2 - 2mx + (m^2 + 1) > 0, \forall x$  do  $\Delta' = -2m^2 - 3 < 0$ .

$y = g(x + f(x)) = g(10^x + 2x)$ .

$y' = [g(10^x + 2x)]' = (10^x \ln 10 + 2) \cdot g'(10^x + 2x) > 0, \forall x \in [0; 1]$ .

Hàm số đạt giá trị lớn nhất tại  $x = 1$  khi đó

$M = \max_{[0; 1]} y = y(1) = g(12) = 12^3 - m \cdot 12^2 + (m^2 + 1) \cdot 12 - 2$

$= 12m^2 - 144m + 1738 = 12(m - 6)^2 + 1306 \geq 1306$

$M$  đạt giá trị nhỏ nhất khi  $m = 6$ .

**Câu 31. (Chuyên Hà Tĩnh 2022)** Cho hàm số bậc ba  $y = f(x)$  có bảng biến thiên của hàm số  $g(x) = f(x - 1) + 2$  như sau

|         |           |   |   |           |   |           |
|---------|-----------|---|---|-----------|---|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | 1 | 3 | $+\infty$ |   |           |
| $g'(x)$ |           | - | 0 | +         | 0 | -         |
| $g(x)$  | $+\infty$ |   |   | 4         |   | $-\infty$ |

Tìm giá trị lớn nhất của hàm số  $y = f(-|\sqrt{3} \sin x - \cos x| + 2) + 2 \cos 2x + 4 \sin x - 1$

**Lời giải**

$y = f(-|\sqrt{3} \sin x - \cos x| + 2) + 2 \cos 2x + 4 \sin x - 1$

$= f(-|\sqrt{3} \sin x - \cos x| + 2) + 2 - (2 \sin x - 1)^2$

$\leq f(-|\sqrt{3} \sin x - \cos x| + 2) + 2$

$$2 \sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

$$\text{Đặt } t - 1 = -|\sqrt{3} \sin x - \cos x| + 2 \Leftrightarrow |\sqrt{3} \sin x - \cos x| = 3 - t$$

$$\text{Mà } 0 \leq |\sqrt{3} \sin x - \cos x| \leq 2 \text{ nên } 0 \leq 3 - t \leq 2 \Leftrightarrow 1 \leq t \leq 3$$

$$g(t) = f(t - 1) + 2 \leq 4$$

$$g(t) = 4 \Leftrightarrow t = 3 \Leftrightarrow \sqrt{3} \sin x - \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi$$

$$\text{Vậy } y_{\max} = 4 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k2\pi$$

**Dạng 4. Dùng phương pháp hàm số để tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức**

**Câu 32. (Chuyên Bắc Giang 2019)** Cho  $x, y$  là các số thực thỏa mãn  $x + y = \sqrt{x - 1} + \sqrt{2y + 2}$ . Gọi  $M, m$  lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của  $P = x^2 + y^2 + 2(x + 1)(y + 1) + 8\sqrt{4 - x - y}$ . Tính giá trị  $M + m$

**Lời giải**

$$(x + y)^2 = (\sqrt{x - 1} + \sqrt{2}\sqrt{y + 1})^2 \leq 3(x + y) \Leftrightarrow 0 \leq x + y \leq 3$$

$$P = x^2 + y^2 + 2(x + 1)(y + 1) + 8\sqrt{4 - x - y} = (x + y)^2 + 2(x + y) + 2 + 8\sqrt{4 - (x + y)}$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{4 - (x + y)}, t \in [1; 2]$$

$$\text{Ta có: } f(t) = (4 - t^2)^2 + 2(4 - t^2) + 2 + 8t = t^4 - 10t^2 + 8t + 26$$

$$f'(t) = 4t^3 - 20t + 8$$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t^2 + 2t - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \in [1; 2] \\ t = -1 + \sqrt{2} \notin [1; 2] \\ t = -1 - \sqrt{2} \notin [1; 2] \end{cases}$$

$$f(1) = 25; f(2) = 18$$

$$\text{Suy ra } m = \min_{[1; 2]} f(t) = f(2) = 18; M = \max_{[1; 2]} f(t) = f(1) = 25$$

$$\text{Vậy } M + m = 43$$

**Câu 33. (Chuyên Hà Tĩnh - 2019)** Cho các số thực  $x, y$  thay đổi thỏa mãn  $x^2 + y^2 - xy = 1$  và hàm số  $Q = f\left(\frac{5x - y + 2}{x + y + 4}\right)$ . Tính tổng  $M + m$  của  $M, m$  tương ứng là GTLN và GTNN của  $f(t) = 2t^3 - 3t^2 + 1$ .

**Lời giải**

Đặt  $t = \frac{5x - y + 2}{x + y + 4}$ . Theo giả thiết,  $x^2 - xy + y^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{3}{4}(x - y)^2 + \frac{1}{4}(x + y)^2 = 1$

nên ta đặt 
$$\begin{cases} \cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}(x - y) \\ \sin \varphi = \frac{1}{2}(x + y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = \frac{2}{\sqrt{3}} \cos \varphi \\ x + y = 2 \sin \varphi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{3}} \cos \varphi + \sin \varphi \\ y = -\frac{1}{\sqrt{3}} \cos \varphi + \sin \varphi \end{cases} \quad (0 \leq \varphi \leq 2\pi)$$

Khi đó,  $t = \frac{2\sqrt{3} \cos \varphi + 4 \sin \varphi + 2}{2 \sin \varphi + 4} \Leftrightarrow (t - 2) \cdot \sin \varphi - \sqrt{3} \cdot \cos \varphi = 1 - 2t \quad (1)$

Phương trình (1) có nghiệm  $\Leftrightarrow (t - 2)^2 + (-\sqrt{3})^2 \geq (1 - 2t)^2 \Leftrightarrow 3t^2 - 6 \leq 0 \Leftrightarrow -\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$

Xét hàm số  $Q = f(t) = 2t^3 - 3t^2 + 1, t \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$

$f'(t) = 6t^2 - 6t$ . Cho  $f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}] \\ t = 1 \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}] \end{cases}$

$f(-\sqrt{2}) = -5 - 4\sqrt{2}; f(0) = 1; f(1) = 0; f(\sqrt{2}) = -5 + 4\sqrt{2}$

$$\Rightarrow \begin{cases} M = \max Q = \max_{[-\sqrt{2}; \sqrt{2}]} f(t) = f(0) = 1 \\ m = \min Q = \min_{[-\sqrt{2}; \sqrt{2}]} f(t) = f(-\sqrt{2}) = -5 - 4\sqrt{2} \end{cases}$$

Vậy  $M + m = -4 - 4\sqrt{2}$ .

**Câu 34. (THPT Trần Nhân Tông 2018)** Cho hai số thực  $x, y$  thỏa mãn:  $9x^3 + (2 - y\sqrt{3xy - 5})x + \sqrt{3xy - 5} = 0$

Tìm giá trị nhỏ nhất của  $P = x^3 + y^3 + 6xy + 3(3x^2 + 1)(x + y - 2)$

**Lời giải**

$$9x^3 + (2 - y\sqrt{3xy - 5})x + \sqrt{3xy - 5} = 0$$

Ta có

$$\Leftrightarrow 27x^3 + 6x = (3xy - 5)\sqrt{3xy - 5} + 2\sqrt{3xy - 5}$$

Xét hàm  $f(t) = t^3 + 2t$  với  $t \in (0; +\infty)$

có  $f'(t) = 3t^2 + 2 > 0 \forall t \in (0; +\infty)$  nên hàm số liên tục và đồng biến trên  $(0; +\infty)$ .

Khi đó ta có  $3x = \sqrt{3xy - 5} \Rightarrow x \geq 0$  và  $9x^2 = 3xy - 5$ .

Với  $x = 0$  thì  $0 = -5(l)$ .

với  $x > 0$  thì  $P = x^3 + y^3 + 6xy + 3(3x^2 + 1)(x + y - 2)$

$$= x^3 + y^3 + 6xy + (9x^2 + 3)(x + y - 2)$$

$$= x^3 + y^3 + 6xy + (3xy - 2)(x + y - 2)$$

$$= x^3 + y^3 + 3x^2y + 3xy^2 - 2(x + y) + 4$$

$$= (x + y)^3 - 2(x + y) + 4$$

Mà  $x + y = x + \frac{9x^2 + 5}{3x} = 4x + \frac{5}{3x} \geq 2\sqrt{4x \cdot \frac{5}{3x}} = \frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$ . Đặt  $t = x + y$  thì  $t \geq \frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$ .

Xét  $f(t) = t^3 - 2t + 4$  với  $t \geq \frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$ . Khi đó  $f'(t) = 3t^2 - 2 > 0$  với  $\forall t \geq \frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$ .

Do đó  $f(t) \geq f\left(\frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{3}}\right) = \frac{36 + 296\sqrt{15}}{9}$

Suy ra  $P \geq \frac{36 + 296\sqrt{15}}{9}$ . Vậy GTNN của  $P$  là  $\frac{36 + 296\sqrt{15}}{9}$ .

**Câu 35.** (THPT Trần Phú - Đà Nẵng - 2018) Cho hai số thực  $x, y$  thỏa mãn:  
 $2y^3 + 7y + 2x\sqrt{1-x} = 3\sqrt{1-x} + 3(2y^2 + 1)$ . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức  $P = x + 2y$ .  
**Lời giải**

$$2y^3 + 7y + 2x\sqrt{1-x} = 3\sqrt{1-x} + 3(2y^2 + 1)$$

$$\Leftrightarrow 2(y^3 - 3y^2 + 3y - 1) + (y - 1) = 2(1 - x)\sqrt{1-x} + 3\sqrt{1-x} - 2\sqrt{1-x}$$

$$\Leftrightarrow 2(y - 1)^3 + (y - 1) = 2(\sqrt{1-x})^3 + \sqrt{1-x} \quad (1)$$

Xét hàm số  $f(t) = 2t^3 + t$  trên  $[0; +\infty)$ .

Ta có:  $f'(t) = 6t^2 + 1 > 0$  với  $\forall t \geq 0 \Rightarrow f(t)$  luôn đồng biến trên  $[0; +\infty)$ .

Vậy (1)  $\Leftrightarrow y - 1 = \sqrt{1-x} \Leftrightarrow y = 1 + \sqrt{1-x}$ .

$\Rightarrow P = x + 2y = x + 2 + 2\sqrt{1-x}$  với  $(x \leq 1)$ .

Xét hàm số  $g(x) = 2 + x + 2\sqrt{1-x}$  trên  $(-\infty; 1]$ .

Ta có:  $g'(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-x}} = \frac{\sqrt{1-x} - 1}{\sqrt{1-x}}$ .  $g'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ .

Bảng biến thiên  $g(x)$ :

|         |           |     |     |
|---------|-----------|-----|-----|
| $x$     | $-\infty$ | $0$ | $1$ |
| $g'(x)$ |           | $0$ |     |
| $g(x)$  |           | $4$ |     |

Từ bảng biến thiên của hàm số  $g(x)$  suy ra giá trị lớn nhất của  $P$  là:  $\max_{(-\infty; 1]} g(x) = 4$ .

**Câu 36. (Chuyên Quốc Học Huế - 2021)** Cho hàm số  $y = \frac{x^2 - 2m(m+1)x + 2m^3 + m^2 + 1}{x - m}$  có đồ thị  $(C_m)$  ( $m$  là tham số thực). Gọi  $A$  là điểm thỏa mãn vừa là điểm cực đại của  $(C_m)$  ứng với một giá trị  $m$  vừa là điểm cực tiểu của  $(C_m)$  ứng với giá trị khác của  $m$ . Tìm giá trị của  $a$  để khoảng cách từ  $A$  đến đường thẳng  $(d): x - (a+1)y + a = 0$  đạt giá trị lớn nhất là

**Lời giải**

$$y = \frac{x^2 - 2m(m+1)x + 2m^3 + m^2 + 1}{x - m} = \frac{(x - m)^2 - 2m^2(x - m) + 1}{x - m} \quad (\text{Điều kiện } x \neq m)$$

$$y = f(x) = x - m + \frac{1}{x - m} - 2m^2$$

$$\Rightarrow y' = 1 - \frac{1}{(x - m)^2} = 0 \Leftrightarrow (x - m)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - m = 1 \\ x - m = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = m + 1 \Rightarrow y(m + 1) = 1 + 1 - 2m^2 = 2 - 2m^2 \\ x = m - 1 \Rightarrow y(m - 1) = -1 - 1 - 2m^2 = -2 - 2m^2 \end{cases}$$

Khi đó  $A(x_0, y_0)$  thỏa hệ phương trình

$$\begin{cases} x_0 = m_1 + 1 = m_2 - 1 \\ y_0 = 2 - 2m_1^2 = -2 - 2m_2^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m_1 - m_2 = -2 \\ m_1^2 - m_2^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m_1 - m_2 = -2 \\ (m_1 - m_2)(m_1 + m_2) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m_1 - m_2 = -2 \\ m_1 + m_2 = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m_1 = -\frac{3}{2} \\ m_2 = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = -\frac{1}{2} \\ y_0 = -\frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow A\left(-\frac{1}{2}, -\frac{5}{2}\right)$$

Với  $(d): x - (a+1)y + a = 0$  thì  $d(A; (d)) = \frac{\left| -\frac{1}{2} + \frac{5}{2}(a+1) + a \right|}{\sqrt{a^2 + 2a + 2}} = \frac{\left| \frac{7}{2}a + 2 \right|}{\sqrt{a^2 + 2a + 2}}$

$$g(a) = \frac{(7a+4)^2}{a^2+2a+2} \Rightarrow g'(a) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{4}{7} \\ a = -\frac{10}{3} \end{cases}$$

Xét hàm

Bảng biến thiên

|         |           |                 |                |           |     |
|---------|-----------|-----------------|----------------|-----------|-----|
| $x$     | $-\infty$ | $-\frac{10}{3}$ | $-\frac{4}{7}$ | $+\infty$ |     |
| $f'(x)$ | $+$       | $0$             | $-$            | $0$       | $+$ |
| $f(x)$  | $49$      | $58$            | $0$            | $49$      |     |

$g(x)_{\max}$  tại  $a = -\frac{10}{3}$  nên  $d(A, (d))_{\max}$  tại  $a = -\frac{10}{3}$