✻❂❖✻ LỜI GIẢI VÀ BÌNH LUẬN ✻❂❖✻

CÁC BÀI TOÁN THI CHỌN HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA PTTH

NĂM 2008

NGUYỄN KHẮC MINH
(Cục Khảo thí và Kiểm định CLGD - Bộ GD&ĐT)

✪**BÀI 1.** *Hãy xác định số nghiệm của hệ phương trình (ẩn x, y) sau:*

$$\begin{cases} x^2 + y^3 = 29 \\ \log_3 x.\log_2 y = 1. \end{cases}$$

• **Lời bàn 1.1.** Bài đã ra là trường hợp riêng của bài toán sau:

Bài 1*. *Cho số thực $a \geq 17$. Hãy xác định số nghiệm của hệ phương trình (ẩn x, y) sau:*

$$\begin{cases} x^2 + y^3 = a & (1) \\ \log_3 x.\log_2 y = 1. & (2) \end{cases} \quad (\mathrm{I})$$

Lời giải bài 1*. Dễ thấy, nếu $(x\,;\,y)$ là nghiệm của hệ (I) thì $x > 1, y > 1$ (3)

Tiếp theo, có thể giải bài toán theo một trong hai cách sau:

Cách 1. Đặt $\log_3 x = t$, $t > 0$ (do (3)). Khi đó, $x = 3^t$ và từ phương trình (PT) (2) có $y = 2^{\frac{1}{t}}$. Vì thế, từ PT (1) ta có PT (ẩn t) sau:

$$9^t + 8^{\frac{1}{t}} = a. \quad (4)$$

Dễ thấy số nghiệm của hệ (I) bằng số nghiệm dương của PT (4).

Xét hàm số $f(t) = 9^t + 8^{\frac{1}{t}} - a$ trên $(0\,;\,+\infty)$.

Ta có $f'(t) = 9^t.\ln 9 - \dfrac{8^{\frac{1}{t}}.\ln 8}{t^2}$.

Trên $(0\,;\,+\infty)$, $y = 8^{\frac{1}{t}}.\ln 8$ và $y = \dfrac{1}{t^2}$ là các hàm nghịch biến và chỉ nhận giá trị dương. Vì thế, trên khoảng đó, $y = -\dfrac{8^{\frac{1}{t}}.\ln 8}{t^2}$ là hàm đồng biến. Suy ra, $f'(t)$ là hàm đồng biến trên $(0\,;\,+\infty)$. Hơn nữa, do

$$f'\left(\frac{1}{2}\right).f'(1) = 18(\ln 9 - \ln 2^{256})(\ln 27 - \ln 16) < 0$$

nên $\exists t_0 \in (0\,;\,1)$ sao cho $f'(t_0) = 0$. Do đó, ta có bảng biến thiên sau của hàm $f(t)$ trên $(0\,;\,+\infty)$:

t	0		t_0		1		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0		$+$		
$f(t)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(t_0)$	$\nearrow$	$f(1)$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ đó, với lưu ý rằng $f(1) = 17 - a \leq 0$, suy ra PT (4) có đúng 2 nghiệm dương. Vì vậy, hệ (I) có tất cả 2 nghiệm.

Cách 2. Ta có PT (2) $\Leftrightarrow \ln(x^2).\ln(y^3) = \ln 8.\ln 9$ (2')
Đặt $x^2 = t$, từ PT (1) ta có $y^3 = a - t$.
Thế vào (2') ta được PT (ẩn t) sau:

$$\ln t.\ln(a-t) = \ln 8.\ln 9 \quad (4')$$

Hơn nữa, từ (3) suy ra $1 < t < a - 1$. Do đó, dễ thấy, số nghiệm của hệ (I) chính bằng số nghiệm thuộc khoảng $(1; a-1)$ của PT (4').

Xét hàm số $g(t) = \ln t.\ln(a-t) - \ln 8.\ln 9$ trên $(1; a-1)$. Ta có $g'(t) = \dfrac{\ln(a-t)}{t} - \dfrac{\ln t}{a-t}$.

Trên $(1; a-1)$, $y = \ln(a-t)$ và $y = \dfrac{1}{t}$ là các hàm nghịch biến và chỉ nhận giá trị dương. $y = \ln t$ và $y = \dfrac{1}{a-t}$ là các hàm đồng biến và chỉ nhận giá trị dương Vì thế, $y = \dfrac{\ln(a-t)}{t}$ và $y = -\dfrac{\ln t}{a-t}$ là các hàm nghịch biến trên $(1; a-1)$. Suy ra $g'(t)$ là hàm nghịch biến trên khoảng đó. Hơn nữa, do $g'\left(\frac{a}{2}\right)=0$ nên ta có bảng biến thiên sau của hàm $g(t)$ trên $(1\ ;\ a-1)$:

t	1	$\frac{a}{2}$	$\frac{a+1}{2}$	$a-1$
$g'(t)$	$\vert\ +$	0		$-\ \vert$
$g(t)$	$-\ln 8.\ln 9\ \nearrow$	$g\left(\frac{a}{2}\right)\ \searrow$	$g\left(\frac{a+1}{2}\right)\ \searrow$	$-\ln 8.\ln 9$

Vì $a \geq 17$ nên $\frac{a+1}{2} \geq 9$ và $\frac{a-1}{2} \geq 8$; do đó, $g\left(\frac{a+1}{2}\right)=\ln\left(\frac{a+1}{2}\right)\ln\left(\frac{a-1}{2}\right)-\ln 8.\ln 9 \geq 0$. Vì thế, từ bảng biến thiên trên suy ra PT (4') có đúng 2 nghiệm thuộc khoảng $(1;\ a-1)$. Vì vậy, hệ (I) có tất cả 2 nghiệm.

Chú ý. 1) Các kết quả đã được sử dụng để chứng minh tính đơn điệu của các hàm $f'(t)$ và $g'(t)$ ở các lời giải trên nằm trong phạm vi nội dung giảng dạy môn Toán cho học sinh lớp 10 chuyên Toán theo hướng dẫn của Bộ GD&ĐT. Trong kì thi chọn học sinh giỏi quốc gia lớp 12 THPT môn Toán, các thí sinh được phép sử dụng các kết quả đó như kết quả sách giáo khoa (SGK) theo quy định của Bộ GD&ĐT tại các công văn số 11636/THPT, ngày 25/12/2000, và 1403/THPT, ngày 25/02/2002.

2) Có thể chứng minh hàm $f'(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$ và hàm $g'(t)$ nghịch biến trên $(1\ ;\ a-1)$ bằng cách xét dấu của $f''(t)$ và $g''(t)$ trên các khoảng đó.

3) Với $a \geq 18$, ta có $g\left(\frac{a}{2}\right) > 0$. Vì thế, trong trường hợp này, để có được kết luận về số nghiệm thuộc khoảng $(1;\ a-1)$ của PT (4') không cần xét giá trị $g\left(\frac{a+1}{2}\right)$ trong quá trình khảo sát sự biến thiên của hàm số $g(t)$ trên khoảng đó.

• **Lời bàn 1.2.** - Có thể thấy, việc gán cho a các giá trị cụ thể không tạo ra được các cách giải mới (ngoài hai cách đã trình bày trên đây) cho các bài toán cụ thể nhận được.

- Khi chọn $a = 17$, từ Bài 1* ta có thể tạo được bài toán khó hơn và đẹp hơn về mặt Toán học so với Bài 1: "*Giải hệ phương trình (I) ứng với* $a = 17$". (*Đáp số*: $(x\ ;\ y) = (3\ :\ 2)$ và $(x\ ;\ y) = (2\sqrt{2}\ ;\ \sqrt[3]{9})$. Tiếc rằng bài toán vừa nêu không thể phù hợp cho việc sử dụng làm bài toán thi trong một đề thi gồm 7 câu với thời lượng làm bài là 180 phút!

BÀI 2. *Cho tam giác ABC có góc* $\widehat{BEC}$ *là góc nhọn, trong đó E là trung điểm của cạnh AB. Trên tia EC lấy điểm M sao cho* $\widehat{BME} = \widehat{ECA}$. *Kí hiệu* α *là số đo của góc* $\widehat{BEC}$, *hãy tính tỉ số* $\frac{MC}{AB}$ *theo* α.

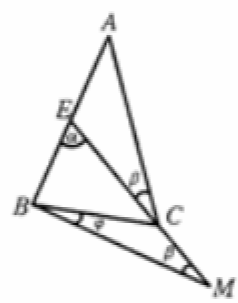
• **Lời bàn 2.1.** Bài đã ra là trường hợp riêng của bài toán sau đây

Bài 2*. *Cho tam giác ABC. Gọi E là trung điểm của cạnh AB. Trên tia EC lấy điểm M sao cho* $\widehat{BME} = \widehat{ECA}$. *Kí hiệu* α *là số đo của góc* $\widehat{BEC}$, *hãy tính tỉ số* $\frac{MC}{AB}$ *theo* α.

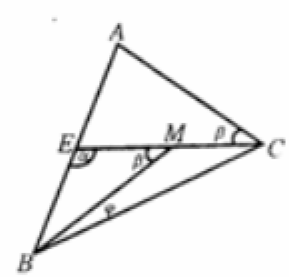
Lời giải bài 2*. + Dễ thấy nếu $\alpha = 90^0$ thì điểm M trùng với điểm C. Do đó, trong trường hợp này ta có $\frac{MC}{AB} = 0 = \cos\alpha$.

+ Xét $\alpha \neq 90^0$. Nhận thấy:

- *Nếu* $\alpha < 90^0$ *thì điểm M nằm ngoài đoạn thẳng EC* (h. 1).



Hình 1



Hình 2

Thật vậy, từ $\alpha < 90^0$ dễ dàng suy ra $AC > BC$.

Giả sử ngược lại, M thuộc đoạn EC. Khi đó, do M không thể trùng E, C nên M phải nằm giữa E và C. Do đó $\widehat{ECA} = \widehat{BME} = \widehat{ECB} + \widehat{CBM}$. Suy ra $\widehat{ECA} > \widehat{ECB}$. Vì thế, nếu gọi D là giao của đường phân giác góc $\widehat{ACB}$ và cạnh AB thì D phải nằm giữa E và A. Dẫn tới

$$1 < \frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB} < 1.$$

Mâu thuẫn nhận được cho ta điều muốn chứng minh.

- Nếu $90^0 < \alpha < 180^0$ thì điểm M nằm giữa hai điểm E và C. (Chứng minh tương tự trên) (h. 2).

Tiếp theo, ta có thể giải bài toán theo một trong hai cách sau:

Cách 1. (h.1 và h.2). Đặt $\widehat{ECA} = \beta$ và $\widehat{MBC} = \varphi$.

Áp dụng định lí sin lần lượt cho các tam giác ACE và BME, ta được

$$\frac{AC}{\sin(\pi - \alpha)} = \frac{EA}{\sin\beta} = \frac{EB}{\sin\beta} = \frac{BM}{\sin\alpha}.$$

Suy ra $AC = BM$. Từ đó, áp dụng định lí côsin lần lượt cho các tam giác BCM và ABC ta được

$$\begin{aligned} MC^2 &= BC^2 + BM^2 - 2BC.BM.\cos\varphi \\ &= BC^2 + AC^2 - 2BC.AC.\cos\varphi \\ &= AB^2 + 2BC.AC.(\cos\widehat{ACB} - \cos\varphi) \\ &= AB^2 - 4BC.AC\sin\frac{\widehat{ACB}+\varphi}{2}\sin\frac{\widehat{ACB}-\varphi}{2} \quad (*) \end{aligned}$$

Ta có:

- Nếu điểm M nằm giữa hai điểm E và C (h. 2) thì

$$\frac{\widehat{ACB}+\varphi}{2} = \frac{\beta + \widehat{ECB} + \varphi}{2} = \frac{\beta+\beta}{2} = \beta$$

và $$\frac{\widehat{ACB}-\varphi}{2} = \frac{\left(\beta + \widehat{ECB}\right) - \left(\beta - \widehat{ECB}\right)}{2} = \widehat{ECB}.$$

- Nếu điểm M nằm ngoài đoạn thẳng EC (h. 1) thì

$$\frac{\widehat{ACB}+\varphi}{2} = \frac{\left(\beta + \widehat{ECB}\right) + \left(\widehat{ECB} - \beta\right)}{2} = \widehat{ECB}$$ và

$$\frac{\widehat{ACB}-\varphi}{2} = \frac{\beta + \widehat{ECB} - \varphi}{2} = \frac{\beta+\beta}{2} = \beta.$$

Vì vậy, từ (*) ta có

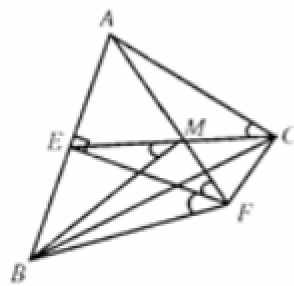
$$\begin{aligned} MC^2 &= AB^2 - 4(AC.\sin\beta).(BC.\sin\widehat{ECB}) \\ &= AB^2 - 4(EA.\sin\alpha).(EB.\sin\alpha) \\ &= AB^2.(1 - \sin^2\alpha) = AB^2.\cos^2\alpha. \end{aligned}$$

Suy ra $\dfrac{MC}{AB} = |\cos\alpha|$.

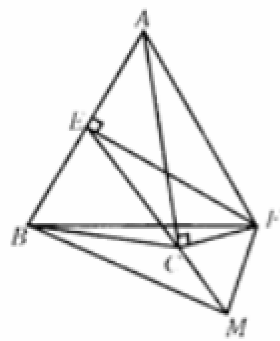
Cách 2. Gọi F là giao điểm thứ hai (khác E) của các đường tròn (AEC) và (BEM). Dễ thấy:

- Nếu điểm M nằm giữa hai điểm E và C (h. 3) thì F nằm trong phần mặt phẳng giới hạn bởi tia đối của tia BA, đoạn thẳng BM và tia MC.

- Nếu điểm M nằm ngoài đoạn thẳng EC (h. 4) thì F nằm trong phần mặt phẳng giới hạn bởi tia đối của tia AB, đoạn thẳng AC và tia CM.



Hình 3



Hình 4

Từ đó, do bốn điểm A, E, C, F đồng viên (tức cùng nằm trên một đường tròn) và bốn điểm B, E, F, M đồng viên, ta có $\widehat{FCM} = \widehat{FAB}$ và $\widehat{FMC} = \widehat{FBA}$. Do đó $\Delta FCM \backsim \Delta FAB$. Suy ra

$$\frac{MC}{AB} = \frac{FC}{FA} \qquad (1)$$

Cũng từ sự đồng viên của các bộ bốn điểm nêu trên, ta còn có $\widehat{AFE} = \widehat{ACE} = \widehat{BME} = \widehat{BFE}$. Do đó ΔAFB cân tại F. Suy ra $FE \perp AB$, hay $\widehat{AEF} = 90^0$. Dẫn tới $\widehat{FCA} = 90^0$ (2)

Từ (1), (2) và do bốn điểm A, E, C, F đồng viên, suy ra

$$\frac{MC}{AB} = \sin\widehat{FAC} = \sin\widehat{FEC} \qquad (3)$$

Dễ thấy, tùy thuộc vào vị trí tương đối của điểm M đối với hai điểm E, C, ta sẽ có $\widehat{FEC} = \alpha - 90^0$ hoặc $\widehat{FEC} = 90^0 - \alpha$.

Vì thế, từ (3) ta được $\dfrac{MC}{AB} = |\cos\alpha|$.

+ Tóm lại, trong mọi trường hợp ($\alpha = 90^0$, $\alpha \neq 90^0$), ta luôn có $\dfrac{MC}{AB} = |\cos\alpha|$.

• **Lời bàn 2.2.** - Sử dụng phương pháp của Cách 1, ta còn có thể có được các lời giải khác lời giải đã trình bày ở trên (cho trường hợp $\alpha \neq 90^0$).

- Ở Bài 2, có thể thay giả thiết "góc $\widehat{BEC}$ là góc nhọn" bởi giả thiết "$AC > BC$" (đẹp hơn và "kín đáo" hơn!).

- Có thể coi Bài 2 và Bài 2* có mức độ khó-dễ tương đương nhau. Vì thế, việc dùng Bài 2 (mà không phải Bài 2*) làm bài toán thi không những làm giảm tính hay và vẻ đẹp Toán học của đề thi, mà còn không có ý nghĩa đáng kể trong việc giảm mức độ khó-dễ của đề thi. Tuy nhiên, sự lựa chọn đó đảm bảo hai điều dưới đây:

+ Giảm thời gian dùng cho việc trình bày lời giải của bài toán;

+ Giúp thí sinh không bị mất điểm vì lí do "quên" không xét đầy đủ các trường hợp có thể xảy ra.

∢Nhận xét về bài làm của các thí sinh. Hầu hết các thí sinh giải được bài đã ra đều không có lập luận nào về vị trí tương đối của điểm M đối với các điểm E, C. Lời giải cho bài toán của các thí sinh đó, hiển nhiên, không thể được coi là hoàn chỉnh. Tuy nhiên, sau khi cân nhắc, Tổ chấm thi đã quyết định châm chước cho các thí sinh về thiếu sót nêu trên.

✪**Bài 4.** *Cho dãy số thực (x_n) được xác định như sau :*

$x_1 = 0$, $x_2 = 2$ và $x_{n+2} = 2^{-x_n} + \dfrac{1}{2}$ *với mọi* $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Chứng minh rằng dãy (x_n) có giới hạn hữu hạn khi $n \to +\infty$. Hãy tìm giới hạn đó.

Lời giải. Xét hàm số $f(x) = 2^{-x} + \dfrac{1}{2}$, xác định trên $\mathbb{R}$.

Với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có $x_{n+4} = f(x_{n+2}) = f(f(x_n))$, hay $x_{n+4} = g(x_n)$, trong đó g là hàm số xác định trên $\mathbb{R}$ và $g(x) = f(f(x))\ \ \forall x \in \mathbb{R}$ (1)

Dễ thấy, hàm số f giảm trên $\mathbb{R}$; do đó, hàm số g tăng trên $\mathbb{R}$. Vì thế từ (1) suy ra: với mỗi $k \in \{1; 2; 3; 4\}$, dãy (x_{4n+k}), $n \in \mathbb{N}$, là dãy đơn điệu. Hơn nữa, từ cách xác định dãy (x_n) dễ thấy $0 \le x_n \le 2$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Do đó, với mỗi $k \in \{1; 2; 3; 4\}$, dãy (x_{4n+k}) là dãy hội tụ.

Với mỗi $k \in \{1; 2; 3; 4\}$, đặt $\lim x_{4n+k} = a_k$, ta có $0 \le a_k \le 2$. Hơn nữa, do hàm số g liên tục trên $\mathbb{R}$ nên từ (1) suy ra $g(a_k) = a_k$ (2)

Xét hàm số $h(x) = g(x) - x$ trên $[0\ ;\ 2]$. Ta có

$h'(x) = 2^{-(f(x)+x)}.(\ln 2)^2 - 1 < 0$, $\forall x \in [0\ ;\ 2]$ (do $f(x) + x > 0$, $\forall x \in [0\ ;\ 2]$).

Suy ra, hàm số h giảm trên $[0\ ;\ 2]$. Vì thế, sẽ có không quá một điểm $x \in [0\ ;\ 2]$ sao cho $h(x) = 0$, hay $g(x) = x$. Mà $g(1) = 1$ (dễ thấy), nên từ (2) ta được $a_k = 1$, $\forall k \in \{1; 2; 3; 4\}$. Từ đây, vì dãy (x_n) là hợp của bốn dãy con (x_{4n+k}) nên (x_n) là dãy hội tụ và $\lim x_n = 1$.

• **Lời bàn.** Bài toán trên có thể được coi như một "bài tập SGK" đối với học sinh các lớp chuyên Toán. Vì thế, việc có tới 55,83% tổng số thí sinh dự thi không giải được bài toán, thiết nghĩ, là một sự kiện đáng được các học sinh quan tâm, khi chuẩn bị dự thi các kì thi chọn học sinh giỏi quốc gia môn Toán lớp 12 THPT sắp tới.

∢Nhận xét về bài làm của các thí sinh. Nhiều thí sinh đã gặp lúng túng khi giải quyết bài toán do đã tiến hành khảo sát tính hội tụ và tìm giới hạn của dãy (x_n) thông qua tính hội tụ và giới hạn của chỉ hai dãy con (x_{2n-1}) và (x_{2n}), $n \in \mathbb{N}^*$.

(*Kì sau đăng tiếp*)

✲❂❖✲ LỜI GIẢI VÀ BÌNH LUẬN ✲❂❖✲

CÁC BÀI TOÁN THI CHỌN HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA PTTH NĂM 2008

(Tiếp theo kì trước)

NGUYỄN KHẮC MINH
(Cục Khảo thí và Kiểm định CLGD - Bộ GD&ĐT)

✪**BÀI 7.** *Cho tam giác ABC, trung tuyến AD. Cho đường thẳng d vuông góc với đường thẳng AD. Xét điểm M nằm trên d. Gọi E và F lần lượt là trung điểm của MB và MC. Đường thẳng đi qua E và vuông góc với d cắt đường thẳng AB tại P, đường thẳng đi qua F và vuông góc với d cắt đường thẳng AC tại Q. Chứng minh rằng đường thẳng đi qua M và vuông góc với đường thẳng PQ luôn đi qua một điểm cố định, khi điểm M di động trên đường thẳng d.*

Lời giải. Chọn hệ trục toạ độ Oxy có $O \equiv D$, trục Oy trùng với đường thẳng DA. (Bạn đọc tự vẽ hình). Khi đó $Ox \parallel d$.

Đặt $\overline{OA} = a$; do A không trùng D nên $a \neq 0$. Vì $A \in Oy$ nên $A = (0\ ;\ a)$.

Gọi $(b\ ;\ c)$ là tọa độ của B; do $B \notin Oy$ nên $b \neq 0$. Vì B và C đối xứng với nhau qua D nên $C = (-b\ ;\ -c)$. Suy ra $\overrightarrow{AB} = (b; c-a)$ và $\overrightarrow{AC} = (-b; -c-a)$. Do đó, các đường thẳng AB và AC có PT là

$$AB:\ (a-c)x + by - ab = 0\ ;$$
$$AC:\ (a+c)x - by + ab = 0. \qquad (1)$$

Kí hiệu $(x_M\ ;y_M)$ là tọa độ của M; do $M \in d$ nên $|y_M|$ là khoảng cách giữa d và Ox. Vì thế, khi M di động trên d thì x_M *thay đổi* và y_M giữ nguyên giá trị. Đặt $y_M = h$, ta có

$$E = \left(\frac{b+x_M}{2}; \frac{c+h}{2}\right) \text{ và } F = \left(\frac{x_M - b}{2}; \frac{h-c}{2}\right).$$

Gọi d_1 là đường thẳng đi qua E và vuông góc với d; d_2 là đường thẳng đi qua F và vuông góc với d. PT của các đường thẳng d_1 và d_2 là:

$$d_1:\ x = \frac{b+x_M}{2} \quad \text{và} \quad d_2:\ x = \frac{x_M - b}{2} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$P = d_1 \cap AB = \left(\frac{b+x_M}{2}; a - \frac{(a-c)(b+x_M)}{2b}\right);$$

$$Q = d_2 \cap AC = \left(\frac{x_M - b}{2}; a + \frac{(a+c)(x_M - b)}{2b}\right).$$

Do đó $\overrightarrow{PQ} = \left(-b; \frac{a.x_M - bc}{b}\right)$. Vì vậy, đường thẳng Δ đi qua $M(x_M\ ;h)$ và vuông góc với đường thẳng PQ có phương trình

$$-b(x - x_M) + \frac{a.x_M - bc}{b}(y - h) = 0 \text{ hay}$$

$$b^2\left(x - \frac{bc}{a}\right) - (a.x_M - bc)\left(y - h + \frac{b^2}{a}\right) = 0.$$

Suy ra, khi M di động trên d, đường thẳng Δ luôn đi qua điểm cố định $\left(\frac{bc}{a}; h - \frac{b^2}{a}\right)$. ❐

• **Lời bàn.** Với việc được chỉ dẫn phương pháp giải trước khi làm bài, bài toán trên chỉ có thể sử dụng để kiểm tra việc thuộc lí thuyết cơ bản trong phạm vi chương trình Hình học lớp 10 THPT (chương trình chuẩn) hiện hành. Trường hợp không được chỉ dẫn phương pháp giải trước khi làm bài, bài toán trên cũng chỉ có thể được xếp vào loại "bài tập SGK Hình học 10 theo chương trình nâng cao môn Toán THPT hiện hành". Vì thế, câu hỏi "Vì sao có tới 81,2% tổng số thí sinh dự thi bị điểm 0 ở bài toán trên ?" là một câu hỏi cần được những người có trách nhiệm, tâm huyết với phong trào học sinh giỏi Toán bậc phổ thông, cũng như các học sinh khá, giỏi Toán bậc phổ thông, quan tâm giải đáp thỏa đáng.

✪**BÀI 6.** *Cho x, y, z là các số thực không âm, đôi một khác nhau. Chứng minh rằng*

$$(xy + yz + zx)\left(\frac{1}{(x-y)^2} + \frac{1}{(y-z)^2} + \frac{1}{(z-x)^2}\right) \geq 4.$$

Hỏi dấu bằng xảy ra khi nào ?

Lời giải. Không mất tổng quát, giả sử $z > y > x \geq 0$.

Đặt $y = x + a,\ z = x + a + b;\ a, b > 0$. Khi đó, biểu thức ở vế trái của bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại dưới dạng

$$P(x, a, b) = (3x^2 + 2(2a+b)x + a(a+b)) \times$$
$$\times \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{(a+b)^2}\right).$$

Ta có

$$P \geq a(a+b)\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{(a+b)^2}\right)$$
$$= \frac{a+b}{a} + \frac{a(a+b)}{b^2} + \frac{a}{a+b}$$
$$= 1 + \frac{b}{a} + \frac{a(a+b)}{b^2} + 1 - \frac{b}{a+b}$$
$$= 2 + \frac{a(a+b)}{b^2} + \frac{b^2}{a(a+b)} \geq 4.$$

Dấu bằng ở BĐT cuối cùng xảy ra khi và chỉ khi $x = 0$ và $a(a+b) = b^2$. Suy ra, dấu bằng ở BĐT của đề bài xảy ra khi và chỉ khi $x = 0$ và $\dfrac{y}{z} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

✪**BÀI 5.** *Hỏi có tất cả bao nhiêu số tự nhiên chia hết cho 9 mà mỗi số gồm tối đa 2008 chữ số và trong đó có ít nhất hai chữ số 9?*

Lời giải. Giả sử X là tập hợp gồm tất cả các số tự nhiên thỏa mãn các điều kiện của đề bài. Theo bài ra, ta cần tìm $|X|$. Kí hiệu:

$A^* = \{a \in \mathbb{N} |\ a$ có không quá 2008 chữ số$\}$;

$A = \{a \in A^* |\ a \equiv 0 \pmod 9\}$;

$A_k = \{a \in A |$ trong các chữ số của a có đúng k chữ số 9$\}$, $k = \overline{0, 2008}$.

Xét số a bất kì thuộc A^*; giả sử a có m chữ số. Do khi viết thêm các chữ số 0 vào ngay trước một số tự nhiên ta không làm thay đổi số đó nên bằng cách viết thêm $2008 - m$ chữ số 0 vào ngay trước số a, ta có một biểu diễn của a, mà trong biểu diễn đó có đúng 2008 chữ số. Ta gọi biểu diễn như vậy là biểu diễn (*). Để kí hiệu biểu diễn (*) của a gồm 2008 chữ số, được kí hiệu lần lượt (từ trái qua phải) bởi $a_1, a_2, \ldots, a_{2008}$, ta viết $\overline{a_1a_2\ldots a_{2008}}^{\,*}$. Khi đó, $A_k = \left\{\overline{a_1a_2\ldots a_{2008}}^{\,*} \,\middle|\, \text{trong các chữ số } a_1, a_2, \ldots, a_{2008} \text{ có đúng } k \text{ chữ số 9 và } \sum_{i=1}^{2008} a_i \equiv 0 \pmod 9\right\}$, $k = \overline{0, 2008}$.

Có thể tiếp tục giải bài toán theo một trong hai cách sau:

Cách 1. Ta có $X = A \setminus (A_0 \cup A_1)$. Từ đó, vì $A_0, A_1 \subset A$ và $A_0 \cap A_1 = \varnothing$ nên

$$|X| = |A| - (|A_0| + |A_1|). \qquad (1)$$

Ta có các nhận xét sau:

Nhận xét 1.1. $|A_0| = 9^{2007}$.

Chứng minh. Từ định nghĩa A_0 dễ thấy $\overline{a_1a_2\ldots a_{2008}}^{\,*} \in A_0$ khi và chỉ khi $a_i \in \{0; 1; 2; \ldots; 8\}$ $\forall i = \overline{1, 2007}$ và $a_{2008} = 9 - r$, trong đó r là số nguyên thuộc đoạn $[1; 9]$ mà $r \equiv \sum_{i=1}^{2007} a_i \pmod 9$.

Suy ra, $|A_0|$ chính bằng số dãy 2007 chữ số có thể lập được từ các chữ số 0, 1, 2, … , 8. Vì thế $|A_0| = 9^{2007}$.

Nhận xét 1.2. $|A_1| = 2008.9^{2006}$.

Chứng minh. Dễ thấy, số (trong dạng biểu diễn (*)) thuộc A_1 có thể được tạo ra từ việc thực hiện liên tiếp hai bước sau:

- *Bước 1.* Từ các chữ số 0, 1, 2, … , 8, lập dãy gồm 2007 chữ số thỏa mãn tổng các chữ số trong dãy chia hết cho 9;
- *Bước 2.* Với dãy lập được ở *bước 1*, ghi chữ số 9 vào ngay trước chữ số đầu tiên hoặc vào ngay sau chữ số cuối cùng hoặc vào giữa 2 chữ số liền nhau của dãy.

Lập luận tương tự phần chứng minh Nhận xét 1.1, ta thấy có 9^{2006} cách thực hiện bước 1. Từ đó, do có 2008 cách thực hiện bước 2 nên có 2008.9^{2006} phương án thực hiện liên tiếp hai bước nêu trên. Mỗi phương án cho một số thuộc A_1, hai phương án khác nhau cho hai số khác nhau. Vì thế $|A_1| = 2008.9^{2006}$.

Từ các nhận xét trên và do $|A|=1+\dfrac{10^{2008}-1}{9}$ nên từ (1) ta được $|X|=\dfrac{10^{2008}-2017.9^{2007}+8}{9}$.

Cách 2. Ta có $X=\bigcup_{k=2}^{2008} A_k$. Từ đó, vì $A_0, A_1, \ldots, A_{2008}$ đôi một rời nhau nên $|X|=\sum_{k=2}^{2008}|A_k|$ (2)

Ta có nhận xét sau:

Nhận xét 2. $|A_{2008}|=1$ và $|A_k|=9^{2007-k}.C_{2008}^k$, $\forall k=\overline{0,2007}$.

Chứng minh. Hiển nhiên ta có $|A_{2008}|=1$.

Xét $k\in\{0; 1; 2; \ldots ; 2007\}$.

Dễ thấy, số (trong dạng biểu diễn (*)) thuộc A_k có thể được tạo ra từ việc thực hiện liên tiếp hai bước sau:

• *Bước 1.* Chọn k vị trí trong dãy gồm 2008 vị trí trống rồi điền vào mỗi vị trí một chữ số 9;

• *Bước 2.* Với $2008-k$ vị trí trống còn lại, điền vào mỗi vị trí một chữ số khác 9 sao cho tổng các chữ số được điền (ở bước này) chia hết cho 9.

Tương tự phần chứng minh Nhận xét 1.1 ở Cách 1, ta chứng minh được: có $9^{2008-k-1}$ cách thực hiện bước 2. Từ đó, do có C_{2008}^k cách thực hiện bước 1 nên có $9^{2008-k-1}.C_{2008}^k$ phương án thực hiện liên tiếp hai bước nêu trên. Mỗi phương án cho một số thuộc A_k, hai phương án khác nhau cho hai số khác nhau. Vì thế $|A_k|=9^{2007-k}.C_{2008}^k$.

Từ Nhận xét trên và (2) ta được

$$|X|=1+\sum_{k=2}^{2007}9^{2007-k}.C_{2008}^k$$
$$=1+\frac{1}{9}\left(\sum_{k=0}^{2008}9^{2008-k}.C_{2008}^k-\sum_{k=0}^{1}9^{2008-k}.C_{2008}^k-1\right)$$
$$=1+\frac{1}{9}\left(10^{2008}-9^{2008}-2008.9^{2007}-1\right)$$
$$=\frac{10^{2008}-2017.9^{2007}+8}{9}. \ \square$$

Lời bàn. Dựa trên ý tưởng chứng minh các Nhận xét 1 và 2, có thể chứng minh được kết quả tổng quát sau :

"Cho k và n là các số nguyên thỏa mãn $1\le k\le n$. Gọi T là tập hợp tất cả các số tự nhiên chia hết cho 9 mà mỗi số gồm tối đa n chữ số và trong đó có ít nhất k chữ số 9. Ta có $|T|=1$, nếu $k=n$, và $|T|=9^{n-k-1}.C_n^k$, nếu $k<n$". Dựa vào kết quả trên, có thể tìm $|X|$ theo công thức $|X|=\sum_{k=2}^{2008}|A_k|$.

✪**BÀI 3.** *Đặt $m=2007^{2008}$. Hỏi có tất cả bao nhiêu số tự nhiên n mà $n<m$ và $n(2n+1)(5n+2)$ chia hết cho m?*

Lời giải. Dễ thấy $(m, 10)=1$. Do đó

$$n(2n+1)(5n+2)\equiv 0 \pmod m$$
$$\Leftrightarrow 10n(10n+5)(10n+4)\equiv 0 \pmod m \quad (*)$$

Ta có $m=3^{4016}.223^{2008}$. Để cho tiện, đặt $10n=x$; $3^{4016}=q_1$ và $223^{2008}=q_2$. Khi đó, do $(q_1, q_2)=1$ nên

$$(*)\Leftrightarrow \begin{cases} x(x+5)(x+4)\equiv 0 \pmod{q_1} & (1)\\ x(x+5)(x+4)\equiv 0 \pmod{q_2} & (2)\end{cases} \qquad \text{(I)}$$

Dễ thấy

• (1) xảy ra khi và chỉ khi $x\equiv 0 \pmod{q_1}$ hoặc $x\equiv -5 \pmod{q_1}$ hoặc $x\equiv -4 \pmod{q_1}$;

• (2) xảy ra khi và chỉ khi $x\equiv 0 \pmod{q_2}$ hoặc $x\equiv -5 \pmod{q_2}$ hoặc $x\equiv -4 \pmod{q_2}$.

Do đó từ (I), với lưu ý $x\equiv 0 \pmod{10}$, suy ra n là số tự nhiên thỏa mãn các điều kiện của đề bài khi và chỉ khi $n=\dfrac{x}{10}$, với x là số nguyên thỏa mãn hệ điều kiện (*còn nói: x là nghiệm của hệ*) sau:

$$\begin{cases} x\equiv 0 \pmod{10}\\ x\equiv r_1 \pmod{q_1}\\ x\equiv r_2 \pmod{q_2}\\ 0\le x<10q_1q_2\end{cases} \qquad \text{(II)}$$

trong đó $r_1, r_2\in\{0;-4;-5\}$.

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh ứng với mỗi cặp $(r_1;r_2)$ thỏa mãn $r_1, r_2\in\{0;-4;-5\}$, hệ (II) có duy nhất nghiệm.

Thật vậy, xét cặp $(r_1;r_2)$ tùy ý thỏa mãn $r_1, r_2\in\{0;-4;-5\}$. Đặt $m_1=10q_2$ và $m_2=10q_1$, ta có $(m_1, q_1)=(m_2, q_2)=1$. Do đó tồn tại các số nguyên s_1, s_2 sao cho $s_1m_1 \equiv 1 (\bmod q_1)$ và $s_2m_2 \equiv 1 (\bmod q_2)$. Suy ra số $a = r_1s_1m_1 + r_2s_2m_2$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện: $a \equiv 0 \pmod{10}$ và $a \equiv r_i (\bmod q_i)$, $i = 1, 2$. Vì vậy, chọn số nguyên x sao cho $x \equiv a (\bmod 10q_1q_2)$ và $x \in [0; 10q_1q_2)$, ta có x là nghiệm của hệ (II).

Giả sử, hệ (II) có hai nghiệm x và x' ($x > x'$). Khi đó, do $x, x' \in [0; 10q_1q_2)$ và $x \equiv x' (\bmod 10q_1q_2)$ nên $0 < x - x' < 10q_1q_2$ và $x - x' \equiv 0 (\bmod 10q_1q_2)$. Mâu thuẫn nhận được chứng tỏ hệ (II) có duy nhất nghiệm.

Tóm lại, ta được điều muốn chứng minh.

Dễ thấy, ứng với hai cặp $(r_1; r_2)$ khác nhau, ta sẽ có hai số x khác nhau là nghiệm của hai hệ (II) tương ứng. Từ đây, vì có tất cả $3^2 = 9$ cặp $(r_1; r_2)$ đôi một khác nhau nên sẽ có 9 số x là nghiệm của 9 hệ (II) tương ứng. Vì mỗi số x cho ta đúng một số n và hai số x khác nhau cho hai số n khác nhau nên có tất cả 9 số n thỏa mãn các điều kiện của đề bài. ❐

• **Chú ý.** Theo Quy định của Bộ GD&ĐT tại công văn số 1403/THPT ngày 25/02/2002, các thí sinh được phép sử dụng định lí Trung Quốc về các số dư như một kết quả SGK. Vì thế, *đối với bài làm của thí sinh không yêu cầu trình bày phần chứng minh hệ* (II) *có duy nhất nghiệm*; thay cho phần đó, thí sinh chỉ cần nêu nội dung sau: "Vì 10, q_1, q_2 đôi một nguyên tố cùng nhau nên hệ (II) có duy nhất nghiệm (theo định lí Trung Quốc về các số dư)".

Thay cho lời kết. Tại IMO2008, tổ chức tại Madrid - Tây Ban Nha từ ngày 10/7 đến ngày 22/7/2008, lãnh đạo nhiều đoàn đã gặp gỡ, trao đổi với người viết bài này về đề thi chọn học sinh giỏi Quốc gia môn Toán lớp 12 THPT của Việt Nam. Xin nêu ra đây một trong các ý kiến của họ: "Chúng tôi thích các đề thi của nước ông vì trong đó có nhiều *bài toán* (tiếng Anh là *problem*) hay, thú vị. Vì thế, chúng tôi rất ngạc nhiên khi đề thi năm nay (2008) của nước ông chỉ gồm toàn *bài tập* (tiếng Anh là *exercise*) mà không có một bài toán nào!".