DẠNG 4 Phương trình bậc hai hệ số thực

I. PHẦN ĐỀ BÀI

Câu 1: Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $2z^2 - z + 7 = 0$. Tính $S = \left|z_1.\overline{z_2} + z_2.\overline{z_1}\right|$.

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{27}{4}$. **C.** 2. **D.** $\frac{7}{2}$.

Câu 2: Phương trình nào dưới đây nhận hai số phức $1+\sqrt{2}i$ và $1-\sqrt{2}i$ làm nghiệm?

A. $z^2 + 2z + 3 = 0$. **B.** $z^2 - 2z - 3 = 0$. **C.** $z^2 - 2z + 3 = 0$. **D.** $z^2 + 2z - 3 = 0$.

Câu 3: Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 + 2z + 2^{2020} = 0$. Giá trị của $|z_1| + |z_2|$ bằng

A. 2^{2021}. **B.** 2^{1011}. **C.** 2^{2020}. **D.** 2^{1010}.

Câu 4: Cho số phức $z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Phương trình bậc hai với hệ số thực nhận z và $\overline{z}$ làm nghiệm là

A. $z^2 - z + 2 = 0$. **B.** $2z^2 + z + 2 = 0$. **C.** $z^2 - z + 1 = 0$. **D.** $z^2 + z + 1 = 0$.

Câu 5: Biết phương trình $z^2 + mz + n = 0$ có một nghiệm là $z = 1 + i$. Tính môđun của số phức $z = m + ni$.

A. $2\sqrt{2}$. **B.** 4. **C.** 16. **D.** 8.

Câu 6: Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $2z^2 + \sqrt{3}z + 3 = 0$. Giá trị của biểu thức $z_1^{\,2} + z_2^{\,2}$ bằng

A. $\frac{3}{18}$. **B.** $\frac{-9}{8}$. **C.** 3. **D.** $\frac{-9}{4}$.

Câu 7: Cho phương trình $z^2 + bz + c = 0$ có hai nghiệm z_1; z_2 thỏa mãn $z_2 - z_1 = 4 + 2i$. Gọi A, B là điểm biểu diễn các nghiệm của phương trình $z^2 - 2bz + 4c = 0$. Tính độ dài đoạn AB.

A. $8\sqrt{5}$. **B.** $2\sqrt{5}$. **C.** $4\sqrt{5}$. **D.** $\sqrt{5}$.

Câu 8: Kí hiệu n là số các giá trị của tham số a sao cho phương trình $z^2 + az + 3 = 0$
, có hai nghiệm phức z_1, z_2 thỏa mãn $z_1^2 + z_2^2 = -5$. Tìm n.

A. $n = 0$. **B.** $n = 1$. **C.** $n = 2$. **D.** $n = 3$.

Câu 9: Ký hiệu z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $2z^2 - 4z + 9 = 0$. Tính $P = \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}$.

A. $P = -\frac{9}{4}$. **B.** $P = \frac{4}{9}$. **C.** $P = \frac{9}{4}$. **D.** $P = -\frac{4}{9}$.

Câu 10: Phương trình $z^2 + az + b = 0$; với a, b là các tham số thực nhận số phức $1 + i$ là một nghiệm. Tính $a - b$?

A. -2. **B.** -4. **C.** 4. **D.** 0.

Câu 11: Biết rằng hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1-3-4i|=1$ và $|z_2-3-4i|=\frac{1}{2}$. Số phức z có phần thực là a và phần ảo là b thỏa mãn $3a-2b=12$. Giá trị nhỏ nhất của $P=|z-z_1|+|z-2z_2|+2$ bằng:

A. $P=\frac{\sqrt{9945}}{11}$. **B.** $P=5-2\sqrt{3}$. **C.** $P=\frac{\sqrt{9945}}{13}$. **D.** $P=5+2\sqrt{5}$.

Câu 12: Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $3z^2-2z+27=0$. Giá trị của $z_1|z_2|+z_2|z_1|$ bằng

A. 2. **B.** 6. **C.** $3\sqrt{6}$. **D.** $\sqrt{6}$.

Câu 13: Gọi z_1,z_2 là 2 nghiệm phức của phương trình $4z^2-8z+5=0$. Giá trị của biểu thức $|z_1|^2+|z_2|^2$ là

A. 2. **B.** $\sqrt{5}$. **C.** $\frac{5}{2}$ **D.** $\frac{3}{2}$.

Câu 14: Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $2z^2-6z+17=0$. Giá trị của $|z_1-z_2|$ bằng

A. $\sqrt{34}$. **B.** 3. **C.** $\frac{\sqrt{34}}{2}$. **D.** 5.

Câu 15: Gọi z_1,z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2-4z+5=0$. Giá trị của biểu thức $(z_1-1)^{2019}+(z_2-1)^{2019}$ bằng

A. 2^{1009}. **B.** 2^{1010}. **C.** 0. **D.** -2^{1010}.

Câu 16: Có bao nhiêu giá trị **dương** của số thực a sao cho phương trình $z^2+\sqrt{3}z+a^2-2a=0$ có nghiệm phức z_0 thỏa $|z_0|=\sqrt{3}$.

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4.

Câu 17: Trong các số phức z thỏa mãn $|z-1+i|=|\bar{z}+1-2i|$, số phức z có mô đun nhỏ nhất có phần ảo là

A. $\frac{3}{10}$. **B.** $\frac{3}{5}$. **C.** $-\frac{3}{5}$. **D.** $-\frac{3}{10}$.

Câu 18: Cho z_1,z_2 là các nghiệm phức của phương trình $2z^2-4z+11=0$. Tính giá trị biểu thức $P=\frac{|z_1|^2+|z_2|^2}{(z_1+z_2)^2}$

A. $\frac{9}{2}$. **B.** $\frac{11}{4}$. **C.** $\frac{11}{2}$. **D.** $\frac{9}{4}$.

Câu 19: Có tất cả bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z+\bar{z}|+|z-\bar{z}|=4$ và $|z-2-2i|=3\sqrt{2}$.

A. 7. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 5.

Câu 20: Tổng môđun các nghiệm phức của phương trình $z^2+4z+5=0$ bằng

A. $\sqrt{5}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $2\sqrt{5}$. **D.** $2\sqrt{3}$.

Câu 21: Gọi S là tổng các giá trị thực của m để phương trình $9z^2+6z+1-m=0$ có nghiệm phức thỏa mãn $|z|=1$. Tính S.

A. 20. **B.** 12. **C.** 14. **D.** 8.

Câu 22: Cho số phức z thoả mãn $|z-3-4i|=\sqrt{5}$ và biểu thức $P=|z+2|^2-|z-i|^2$ đạt giá trị lớn nhất. Tính $|z+i|$

A. $\sqrt{61}$. **B.** $\sqrt{41}$. **C.** $5\sqrt{3}$. **D.** $3\sqrt{5}$.

Câu 23: Cho hai số phức z,w thỏa mãn $\left|z-3\sqrt{2}\right|=\sqrt{2}$, $\left|w-4\sqrt{2}i\right|=2\sqrt{2}$. Biết rằng $|z-w|$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $z=z_0$, $w=w_0$. Tính $|3z_0-w_0|$.

A. $2\sqrt{2}$. **B.** $4\sqrt{2}$. **C.** 1. **D.** $6\sqrt{2}$.

Câu 24: Cho số phức z thỏa mãn $3\left|z+\bar{z}\right|+2\left|z-\bar{z}\right|\le 12$. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của $|z-4+3i|$. Giá trị của $M.m$ bằng

A. 28. **B.** 24. **C.** 26. **D.** 20.

Câu 25: Cho hai số phức z_1,z_2 thỏa mãn $|z_1-3i+5|=2$ và $|iz_2-1+2i|=4$.Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T=|2iz_1+3z_z|$

A. $\sqrt{313}$. **B.** $\sqrt{313}+8$. **C.** $\sqrt{313}+16$. **D.** $\sqrt{313}+2\sqrt{5}$.

Câu 26: Cho số phức z thỏa mãn $\left|z^2+iz+2\right|=\left|z^2+z-i+1\right|$. Giá trị nhỏ nhất của $|z-2+i|$ là

A. $2\sqrt{2}$. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** 2. **D.** $\sqrt{5}-\dfrac{1}{2}$.

Câu 27: Cho hai số phức z_1,z_2 thoả mãn $|z_1+2-i|+|z_1-4-7i|=6\sqrt{2}$ và $|iz_2-1+2i|=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=|z_1+z_2|$.

A. $\sqrt{2}-1$. **B.** $\sqrt{2}+1$. **C.** $2\sqrt{2}+1$. **D.** $2\sqrt{2}-1$.

Câu 28: Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $(z-3+i)^2-4z-4i+25=0$. Tính giá trị của biểu thức $A=|z_1|^2+|z_2|^2$.

A. $A=50$. **B.** $A=70$. **C.** $A=13$. **D.** $A=8$.

Câu 29: Gọi S là tập tất cả các nghiệm phức của phương trình $z^4-2iz^3+(i-1)z^2+2z-i=0$. Tổng các phần tử của S bằng

A. 1. **B.** $1+i$. **C.** i. **D.** $2i$.

Câu 30: Kí hiệu $z_1;z_2;z_3;z_4$ là bốn nghiệm phức của phương trình $\left(z^2-3z+6\right)\left(z^2+3z+3\right)-z\left(9+2z^2\right)+z^2=0$. Giá trị của biểu thức $|z_1|+|z_2|+|z_3|+|z_4|$ bằng

A. $2\sqrt{3}\left(1+\sqrt{2}\right)$. **B.** 2. **C.** $2\sqrt{2}\left(1+\sqrt{2}\right)$. **D.** $2\sqrt{3}\left(1+\sqrt{3}\right)$.

Câu 31: Cho số phức z,w khác 0 thỏa mãn $z+w\ne 0$ và $\dfrac{1}{z}+\dfrac{3}{w}=\dfrac{6}{z+w}$. Khi đó $\left|\dfrac{z}{w}\right|$ bằng:

A. 3. **B.** $\dfrac{1}{3}$. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

II. PHẦN HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

BẢNG ĐÁP ÁN

1.B	2.C	3.B	4.D	5.A	6.D	7.C	8.C.	9.B	10.B
11.C	12.A	13.C	14.D	15.D	16.B	17.D	18.B	19.B	20.C
21.B	22.A	23.D	24.B	25.C	26.B	27.D	28.B	29.C	30.C
31.D									

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: **Chọn B**

Vì phương trình $2z^2 - z + 7 = 0$ có hệ số thực và $\Delta < 0$ nên $z_1 = \overline{z_2}$ và $z_2 = \overline{z_1}$.

Do đó: $S = \left|z_1.\overline{z_2} + \overline{z_1}.z_2\right| = \left|z_1^2 + z_2^2\right| = \left|(z_1 + z_2)^2 - 2z_1.z_2\right| = \left|\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2.\frac{7}{2}\right| = \frac{27}{4}$.

Câu 2: **Chọn C**

Đặt $z_1 = 1 + \sqrt{2}i$ và $z_2 = 1 - \sqrt{2}i$.

Ta có: $\begin{cases} z_1 + z_2 = (1+\sqrt{2}i) + (1-\sqrt{2}i) = 2 \\ z_1.z_2 = (1+\sqrt{2}i)(1-\sqrt{2}i) = 3 \end{cases} \Rightarrow z_1, z_2$ là nghiệm của phương trình $z^2 - 2z + 3 = 0$.

Câu 3: **Chọn B**

Nhận xét: $\begin{cases} z_1.z_2 = 2^{2020} \\ \overline{z_1} = z_2 \\ |z_1| = |z_2| \end{cases}$. Ta có: $|z_1| = \sqrt{|z_1|^2}$, mặt khác $|z_1|^2 = z_1.\overline{z_1} = z_1.z_2 = 2^{2020}$ nên $|z_1| = 2^{1010}$.

Vậy $|z_1| + |z_2| = 2.2^{1010} = 2^{1011}$.

Câu 4: **Chọn D**

Ta có: $z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \overline{z} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \begin{cases} S = z + \overline{z} = -1 \\ P = z.\overline{z} = 1 \end{cases}$.

Theo Vi-et ta có z và $\overline{z}$ là nghiệm của phương trình $z^2 - S.z + P = 0 \Leftrightarrow z^2 + z + 1 = 0$.

Câu 5: **Chọn A**

Vì $z = 1 + i$ là nghiệm của phương trình $z^2 + mz + n = 0$ nên:

$(1+i)^2 + m(1+i) + n = 0 \Leftrightarrow m + n + (2+m)i = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m + n = 0 \\ 2 + m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -2 \\ n = 2 \end{cases}$.

$\Rightarrow |z| = \sqrt{m^2 + n^2} = 2\sqrt{2}$.

Câu 6: **Chọn D**

Cách 1: Phương trình $2z^2 + \sqrt{3}z + 3 = 0$ có hai nghiệm $z_1 = -\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{21}}{4}i; z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{21}}{4}i$

Suy ra biểu thức $z_1{}^2 + z_2{}^2 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{21}}{4}i\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{21}}{4}i\right)^2 = -\frac{9}{4}$

Cách 2: Áp dụng định lý Viet cho phương trình: $2z^2+\sqrt{3}z+3=0$. Ta có: $\begin{cases} z_1+z_2=\dfrac{-\sqrt{3}}{2} \\ z_1.z_2=\dfrac{3}{2} \end{cases}$

Biểu thức $z_1{}^2+z_2{}^2=\left(z_1+z_2\right)^2-2z_1.z_2=\left(\dfrac{-\sqrt{3}}{2}\right)^2-2.\dfrac{3}{2}=\dfrac{-9}{4}$.

Câu 7: Chọn C

Phương trình $z^2+bz+c=0$ có hai nghiệm z_1; z_2 nên $z_1+z_2=-b$; $z_1z_2=c$.

$z^2-2bz+4c=0 \Leftrightarrow z^2+2z\left(z_1+z_2\right)+4z_1z_2=0$

$\Leftrightarrow \left(z+2z_1\right)\left(z+2z_2\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=-2z_1 \\ z=-2z_2 \end{array}\right.$. Suy ra $AB=\left|-2z_1+2z_2\right|=2\left|-z_1+z_2\right|=4\sqrt{5}$.

Câu 8: Chọn C

Ta có z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2+az+3=0 \Rightarrow \begin{cases} z_1+z_2=-a \\ z_1z_2=3 \end{cases}$.

Khi đó $z_1^2+z_2^2=\left(z_1+z_2\right)^2-2z_1z_2=-5 \Leftrightarrow a^2-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=1 \\ a=-1 \end{array}\right.$.

Vậy có 2 giá trị của a thỏa mãn $\Rightarrow n=2$.

Câu 9: Chọn B

Ta có $z_1+z_2=2, z_1.z_2=\dfrac{9}{2}$. Do đó $P=\dfrac{1}{z_1}+\dfrac{1}{z_2}=\dfrac{z_1+z_2}{z_1.z_2}=\dfrac{4}{9}$.

Câu 10: Chọn B

Cách 1:

$z^2+az+b=0$ (1).

Phương trình (1) nhận $z=1+i$ là nghiệm. Thay $z=1+i$ vào (1) ta được:

$(1+i)^2+a(1+i)+b=0 \Leftrightarrow 2i+a+ai+b=0 \Leftrightarrow (a+b)+(a+2)i=0 \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ a+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=2 \end{cases}$.

Vậy $a-b=-4$.

Câu 11: Chọn C

Gọi A là điểm biểu diễn của số phức z_1 suy ra A thuộc đường tròn (C) tâm $I(3;4)$, bán kính $R=1$.

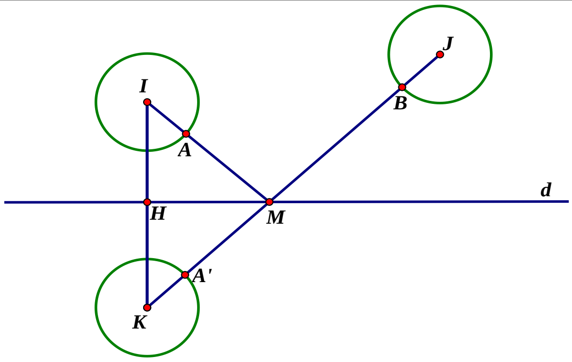
Gọi A' là điểm đối xứng của A qua đường thẳng d.

$\left|z_2-3-4i\right|=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \left|2z_2-6-8i\right|=1$.

Gọi B là điểm biểu diễn của số phức $2z_2$ suy ra B thuộc đường tròn $\left(C_1\right)$ tâm $J(6;8)$ bán kính $R_1=1$.

Gọi M là điểm biểu diễn của số phức z suy ra M thuộc đường thẳng $d: 3x-2y-12=0$.

Ta có: điểm I, J cùng phía so với đường thẳng d và đường thẳng d không có điểm chung với đường tròn (C) và đường tròn $\left(C_1\right)$.



Gọi (C_2) là đường tròn tâm K đối xứng với đường tròn (C) qua đường thẳng d.

Khi đó điểm K đối xứng với điểm I qua đường thẳng d.

Ta tìm được $K\left(\dfrac{105}{13};\dfrac{8}{13}\right)$, $JK=\dfrac{\sqrt{9945}}{13}$.

Khi đó: $P=|z-z_1|+|z-2z_2|+2=MA+MB+2=MA'+MB+2\geq A'B+2$

Suy ra $P_{\min}=A'B+2=JK-1-1+2=JK=\dfrac{\sqrt{9945}}{13}$.

Câu 12: Chọn A

Ta có: $z_1+z_2=\dfrac{2}{3}$ và $z_1.z_2=9$. Mặt khác: $|z_1|=|z_2|=\sqrt{|z_1||z_2|}=\sqrt{|z_1.z_2|}=\sqrt{9}=3$.

Do đó $z_1|z_2|+z_2|z_1|=z_1.3+z_2.3=3(z_1+z_2)=3.\dfrac{2}{3}=2$.

Câu 13: Chọn C

Ta có $z_1=1+\dfrac{1}{2}i,\ z_2=1-\dfrac{1}{2}i$ nên ta có $|z_1|^2+|z_2|^2=\dfrac{5}{2}$.

Câu 14: Chọn D

Ta có: $2z^2-6z+17=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} z=\dfrac{3}{2}+\dfrac{5}{2}i\\ z=\dfrac{3}{2}-\dfrac{5}{2}i\end{array}\right.$

Do đó: $|z_1-z_2|=\left|\left(\dfrac{3}{2}+\dfrac{5}{2}i\right)-\left(\dfrac{3}{2}-\dfrac{5}{2}i\right)\right|=|5i|=5$.

Câu 15: Chọn D

Xét phương trình $z^2-4z+5=0\Leftrightarrow(z-2)^2=-1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} z_1=2+i\\ z_2=2-i\end{array}\right.$

Khi đó ta có: $(z_1-1)^{2019}+(z_2-1)^{2019}=(1+i)^{2019}+(1-i)^{2019}$

$=(1+i).\left((1+i)^2\right)^{1009}+(1-i).\left((1-i)^2\right)^{1009}$

$=(1+i).(2i)^{1009}+(1-i).(-2i)^{1009}$

$=(2i)^{1009}\left((1+i)-(1-i)\right)=(2i)^{1010}=-2^{1010}$.

Câu 16: Chọn B

Phương trình $z^2+\sqrt{3}z+a^2-2a=0$ có $\Delta=-4a^2+8a+3$.

Xét 2 trường hợp:

Trường hợp 1. $\Delta \ge 0 \Leftrightarrow -4a^2 + 8a + 3 \ge 0 \Leftrightarrow \dfrac{2-\sqrt{7}}{2} \le a \le \dfrac{2+\sqrt{7}}{2}$.

Khi đó, phương trình có nghiệm z_0 thì $z_0 \in \mathbb{R}$.

Theo đề bài: $|z_0| = \sqrt{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z_0 = \sqrt{3} \\ z_0 = -\sqrt{3} \end{array}\right.$.

$z_0 = -\sqrt{3}$, thay vào phương trình ta được $a^2 - 2a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0 \\ a = 2 \end{array}\right.$.

$z_0 = \sqrt{3}$, thay vào phương trình ta được $a^2 - 2a + 6 = 0$.

Kết hợp điều kiện $a > 0$ và điều kiện suy ra $a = 2$.

Trường hợp 2. $\Delta < 0 \Leftrightarrow -4a^2 + 8a + 3 < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a < \dfrac{2-\sqrt{7}}{2} \\ a > \dfrac{2+\sqrt{7}}{2} \end{array}\right.$.

Khi đó, phương trình có nghiệm phức z_0 thì $\overline{z_0}$ cũng là một nghiệm của phương trình.

Ta có $z_0.\overline{z_0} = a^2 - 2a \Leftrightarrow |z_0|^2 = a^2 - 2a \Leftrightarrow a^2 - 2a - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = -1 \\ a = 3 \end{array}\right.$.

Kết hợp điều kiện $a > 0$ và điều kiện suy ra $a = 3$.

Vậy có 2 giá trị a dương thỏa mãn là $a = 2$; $a = 3$.

Câu 17: Chọn D

Gọi $z = x + yi$, $(x, y \in \mathbb{R})$ được biểu diễn bởi điểm $M(x; y)$.

$|z - 1 + i| = |\overline{z} + 1 - 2i| \Leftrightarrow |(x-1) + (y+1)i| = |(x+1) - (y+2)i|$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2} = \sqrt{(x+1)^2 + (y+2)^2} \Leftrightarrow 4x + 2y + 3 = 0 \Leftrightarrow y = -2x - \dfrac{3}{2}$.

Cách 1:

$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + \left(-2x - \dfrac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{5x^2 + 6x + \dfrac{9}{4}} = \sqrt{5\left(x + \dfrac{3}{5}\right)^2 + \dfrac{9}{20}} \ge \dfrac{3\sqrt{5}}{10}, \forall x$.

Suy ra $min|z| = \dfrac{3\sqrt{5}}{10}$ khi $x = -\dfrac{3}{5}; y = -\dfrac{3}{10}$.

Vậy phần ảo của số phức z có mô đun nhỏ nhất là $-\dfrac{3}{10}$.

Cách 2:

Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, tập hợp điểm biểu diễn số phức z là đường thẳng $d: 4x + 2y + 3 = 0$.

Ta có $|z| = OM$. $|z|$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow OM$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow M$ là hình chiếu của O trên d.

Phương trình đường thẳng OM đi qua O và vuông góc với d là: $x - 2y = 0$.

Tọa độ của M là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases}4x+2y+3=0\\x-2y=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-\dfrac{3}{5}\\y=-\dfrac{3}{10}\end{cases}$

$\Rightarrow M\left(-\dfrac{3}{5};-\dfrac{3}{10}\right)$. Hay $z=-\dfrac{3}{5}-\dfrac{3}{10}i$.

Vậy phần ảo của số phức z có mô đun nhỏ nhất là $-\dfrac{3}{10}$.

Nhận xét: Ta có thể tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức z như sau:

$|z-1+i|=|\overline{z}+1-2i| \Leftrightarrow |z-(1-i)|=|z-(-1-2i)|$ $(*)$

Gọi M biểu diễn số phức z, điểm $A(1;-1)$ biểu diễn số phức $1-i$, điểm $B(-1;-2)$ biểu diễn số phức $-1-2i$.

Khi đó $(*) \Leftrightarrow MA=MB$. Suy ra tập hợp điểm biểu diễn số phức z là đường trung trực của đoạn thẳng AB có phương trình $d: 4x+2y+3=0$.

Câu 18: Chọn B

Cách 1.

$$2z^2-4z+11=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}z=1+\dfrac{3\sqrt{2}}{2}i\\z=1-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}i\end{array}\right..$$

$$P=\frac{|z_1|^2+|z_2|^2}{(z_1+z_2)^2}=\frac{\left(1^2+\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2\right)+\left(1^2+\left(\dfrac{-3\sqrt{2}}{2}\right)^2\right)}{\left(\dfrac{2+3\sqrt{2}i+2-3\sqrt{2}i}{2}\right)^2}=\frac{\dfrac{11}{2}+\dfrac{11}{2}}{4}=\frac{11}{4}.$$

Cách 2.

$$2z^2-4z+11=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}z=1+\dfrac{3\sqrt{2}}{2}i\\z=1-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}i\end{array}\right..|z_1|^2=|z_2|^2=z_1.\overline{z_1}=z_1.z_2=\frac{11}{2};z_1+z_2=2\Rightarrow P=\frac{2.\dfrac{11}{2}}{2^2}=\frac{11}{4}.$$

Câu 19: Chọn B

Cách 1:

Với $z=a+bi \Rightarrow |z+\overline{z}|+|z-\overline{z}|=4 \Leftrightarrow |2a|+|2b|=4 \Leftrightarrow |a|+|b|=2.$

Khi đó $|z-2-2i|=3\sqrt{2} \Leftrightarrow (a-2)^2+(b-2)^2=18.$

Vậy ta có hệ

$$\begin{cases} |a|+|b|=2 \\ (a-2)^2+(b-2)^2=18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a+b=2(a,b\ge 0)(1) \\ -a+b=2(a\le 0,b\ge 0)(2) \\ a-b=2(a\ge 0,b\le 0)(3) \\ -a-b=2(a\le 0,b\le 0)(4) \end{array}\right. \\ (a-2)^2+(b-2)^2=18(*) \end{cases}$$

Từ $(1),(*)$ ta có hệ $\begin{cases} a=2-b(a,b\ge 0) \\ b^2+(b-2)^2=18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2-b(a,b\ge 0) \\ \left[\begin{array}{l} b=1+2\sqrt{2} \Rightarrow a=1-2\sqrt{2}(l) \\ b=1-2\sqrt{2}(l) \end{array}\right. \end{cases}$.

Từ $(2),(*)$ ta có hệ $\begin{cases} a=b-2(a\le 0,b\ge 0) \\ (b-4)^2+(b-2)^2=18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b-2(a\le 0,b\ge 0) \\ \left[\begin{array}{l} b=3+2\sqrt{2} \Rightarrow a=1+2\sqrt{2}(l) \\ b=3-2\sqrt{2} \Rightarrow a=1-2\sqrt{2} \end{array}\right. \end{cases}$.

Từ $(3),(*)$ ta có hệ $\begin{cases} a=b+2(a\ge 0,b\le 0) \\ b^2+(b-2)^2=18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b+2(a\ge 0,b\le 0) \\ \left[\begin{array}{l} b=1+2\sqrt{2}(l) \\ b=1-2\sqrt{2} \Rightarrow a=3-2\sqrt{2} \end{array}\right. \end{cases}$.

Từ $(4),(*)$ ta có hệ $\begin{cases} a=-b-2(a\le 0,b\le 0) \\ (b+4)^2+(b-2)^2=18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-b-2(a\le 0,b\le 0) \\ b=-1 \Rightarrow a=-1 \end{cases}$.

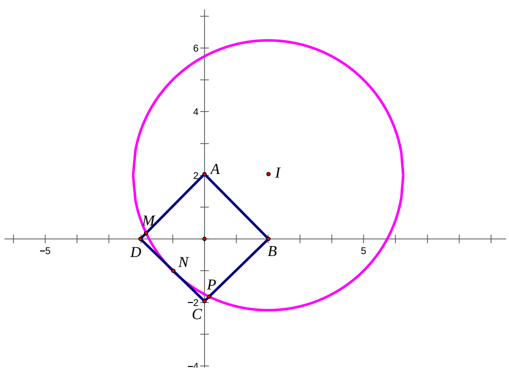
Vậy có 3 số phức thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Cách 2:

Với $z=x+yi;x,y\in\mathbb{R}$

$|z+\bar{z}|+|z-\bar{z}|=4 \Leftrightarrow |x|+|y|=2$. Khi đó tập hợp điểm biểu diễn số phức z là 4 cạnh hình vuông $ABCD$.

$|z-2-2i|=3\sqrt{2} \Leftrightarrow (x-2)^2+(y-2)^2=18$. Tập hợp điểm biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I(2;2), R=3\sqrt{2}$.



Dựa vào hình vẽ, ta thấy có 3 số phức thỏa mãn yêu cầu bài toán tương ứng với 3 điểm biểu diễn M,N,P.

Câu 20: Chọn C

$z^2+4z+5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=-2+i \\ z=-2-i \end{array}\right.$.

Vậy tổng môđun các nghiệm phức của phương trình $z^2+4z+5=0$ bằng: $|-2+i|+|-2-i|=2\sqrt{5}$.

Câu 21: Chọn B

Ta có: $9z^2+6z+1-m=0$ $(*)$.

Trường hợp 1: $(*)$ có nghiệm thực $\Leftrightarrow \Delta' \ge 0 \Leftrightarrow 9-9(1-m)\ge 0 \Leftrightarrow m\ge 1$.

$|z|=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=1 \\ z=-1 \end{array}\right.$.

$z=1 \Rightarrow m=16$.

$z=-1 \Rightarrow m=4$.

Trường hợp 2: $(*)$ có nghiệm phức $z=a+bi\,(b\ne 0)$ $\Leftrightarrow \Delta'<0 \Leftrightarrow 9-9(1-m)<0 \Leftrightarrow m<1$.

Nếu z là một nghiệm của phương trình $9z^2+6z+1-m=0$ thì $\bar{z}$ cũng là một nghiệm của phương trình $9z^2+6z+1-m=0$.

Ta có $|z|=1 \Leftrightarrow |z|^2=1 \Leftrightarrow z.\bar{z}=1 \Leftrightarrow \dfrac{c}{a}=1 \Leftrightarrow \dfrac{1-m}{9}=1 \Leftrightarrow m=-8$.

Vậy tổng các giá trị thực của m bằng 12.

Câu 22: Chọn A

Gọi $z=x+yi$ với $x,y\in\mathbb{R}$.

Vì $|z-3-4i|=\sqrt{5} \Leftrightarrow (x-3)^2+(y-4)^2=5$.

Vậy tập hợp điểm biểu diễn của số phức z là đường tròn tâm $I(3;4)$, bán kính $R=\sqrt{5}$.

Ta có $P=|z+2|^2-|z-i|^2=(x+2)^2+y^2-x^2-(y-1)^2=4x+2y+3$

$=4x-12+2y-8+23=4(x-3)+2(y-4)+23$.

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki cho 4 số: $4, x-3, 2, y-4$ ta có:

$P-23=4(x-3)+2(y-4)\le\sqrt{16+4}.\sqrt{(x-3)^2+(y-4)^2}=10 \Rightarrow P\le 33$

$\Rightarrow \text{Max}P=33$ khi $\begin{cases} \dfrac{x-3}{4}=\dfrac{y-4}{2} \\ 4x+2y=30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-4y=-10 \\ 4x+2y=30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=5 \end{cases} \Rightarrow |z+1|=|5+6i|=\sqrt{61}$.

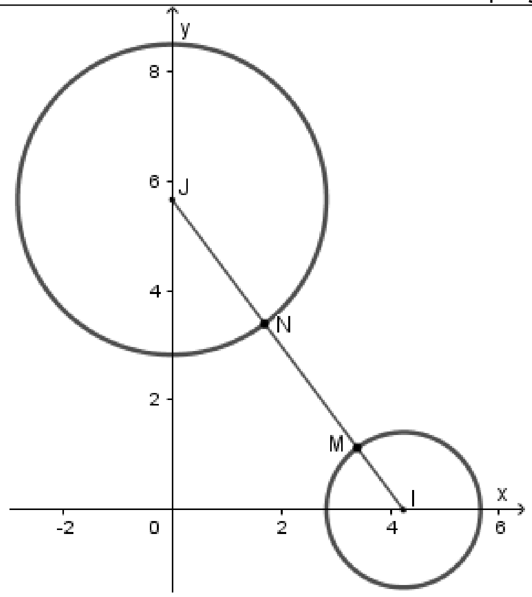
Câu 23: Chọn D

Ta có: + $\left|z-3\sqrt{2}\right|=\sqrt{2}$, suy ra tập hợp điểm biểu diễn M biểu diễn số phức z là đường tròn có tâm $I\left(3\sqrt{2};0\right)$, bán kính $r=\sqrt{2}$.

$\left|w-4\sqrt{2}i\right|=2\sqrt{2}$, suy ra tập hợp điểm biểu diễn N biểu diễn số phức w là đường tròn có tâm $J\left(0;4\sqrt{2}\right)$, bán kính $R=2\sqrt{2}$.

Ta có $\min|z-w|=\min MN$.

$IJ=5\sqrt{2}; IM=r=\sqrt{2}; NJ=R=2\sqrt{2}$.



Mặt khác $IM+MN+NJ\ge IJ\ \Rightarrow MN\ge IJ-IM-NJ$ hay $MN\ge 5\sqrt{2}-\sqrt{2}-2\sqrt{2}=2\sqrt{2}$.

Suy ra $\min MN=2\sqrt{2}$ khi I,M,N,J thẳng hàng và M,N nằm giữa I,J.

Cách 1:

Khi đó ta có: $\left|3z_0-w_0\right|=\left|3\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{ON}\right|$ và $IN=3\sqrt{2}\ \Rightarrow \overrightarrow{IM}=\frac{1}{5}\overrightarrow{IJ};\ \overrightarrow{IN}=\frac{3}{5}\overrightarrow{IJ}$.

Mặt khác $\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{IN}\ =\overrightarrow{OI}+\frac{3}{5}\overrightarrow{IJ}$; $3\overrightarrow{OM}=3\left(\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{IM}\right)=\ 3\left(\overrightarrow{OI}+\frac{1}{5}\overrightarrow{IJ}\right)=\ 3\overrightarrow{OI}+\frac{3}{5}\overrightarrow{IJ}$.

Suy ra $\left|3z_0-w_0\right|=\left|3\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{ON}\right|\ =\left|3\overrightarrow{OI}+\frac{3}{5}\overrightarrow{IJ}-\left(\overrightarrow{OI}+\frac{3}{5}\overrightarrow{IJ}\right)\right|=\left|2\overrightarrow{OI}\right|\ =6\sqrt{2}$.

Cách 2:

Ta có $\overrightarrow{IN}=3\overrightarrow{IM}\Rightarrow 3\overrightarrow{IM}-\overrightarrow{IN}=\vec{0}$.

Do đó $\left|3z_0-w_0\right|=\left|3\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{ON}\right|=\left|3\left(\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{IM}\right)-\left(\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{IN}\right)\right|=\left|2\overrightarrow{OI}\right|=2.OI=2.3\sqrt{2}=6\sqrt{2}.$

Cách 3:

$$\overrightarrow{IM}=\frac{IM}{IJ}\overrightarrow{IJ}\Leftrightarrow \overrightarrow{IM}=\frac{1}{5}\overrightarrow{IJ}\Leftrightarrow \begin{cases} x_M=\dfrac{12\sqrt{2}}{5} \\ y_M=\dfrac{4\sqrt{2}}{5} \end{cases}\Rightarrow z_0=\frac{12\sqrt{2}}{5}+\frac{4\sqrt{2}}{5}i.$$

$$\overrightarrow{IN}=\frac{IN}{IJ}\overrightarrow{IJ}\Leftrightarrow \overrightarrow{IN}=\frac{3}{5}\overrightarrow{IJ}\Leftrightarrow \begin{cases} x_N=\dfrac{6\sqrt{2}}{5} \\ y_N=\dfrac{12\sqrt{2}}{5} \end{cases}\Rightarrow w_0=\frac{6\sqrt{2}}{5}+\frac{12\sqrt{2}}{5}i.$$

Suy ra $\left|3z_0-w_0\right|=\left|6\sqrt{2}\right|=6\sqrt{2}$.

Câu 24: Chọn B

Đặt $z=x+yi,\ \left(x;y\in \mathbb{R}\right)$, $P\left(x;y\right)$ là điểm biểu diễn của số phức z.

Ta có $3\left|z+\bar{z}\right|+2\left|z-\bar{z}\right|\le 12\ \Leftrightarrow 3\left|2x\right|+2\left|2yi\right|\le 12\ \Leftrightarrow 3\left|x\right|+2\left|y\right|\le 6\ \left(1\right)$.

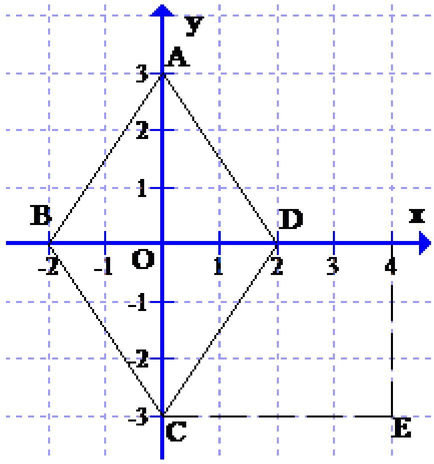
Khi $x\ge 0; y\ge 0$, ta có $(1)\Leftrightarrow 3x+2y\le 6$.

Khi $x\le 0; y\le 0$, ta có $(1)\Leftrightarrow -3x-2y\le 6$.

Khi $x\le 0; y\ge 0$, ta có $(1)\Leftrightarrow -3x+2y\le 6$.

Khi $x\ge 0; y\le 0$, ta có $(1)\Leftrightarrow 3x-2y\le 6$.

Suy ra quỹ tích điểm P là hình thoi $ABCD$ cùng miền trong của nó.



+) $|z-4+3i|=EP$ với $E(4;-3)$ là điểm biểu diễn của số phức $z_1=4-3i$.

Từ hình vẽ ta có $m=\min EP=d(E,CD)$.

Đường thẳng CD có phương trình $3x-2y-6=0$, suy ra $m=\dfrac{12}{\sqrt{13}}$.

$\max EP=\max\{EA,EB,EC,ED\}$.

Lại có $EA=\sqrt{16+36}=\sqrt{52}$, $EB=\sqrt{9+36}=3\sqrt{5}$, $EC=4$, $ED=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}$.

Do đó $M=EA=\sqrt{52}$. Vậy $M.m=24$.

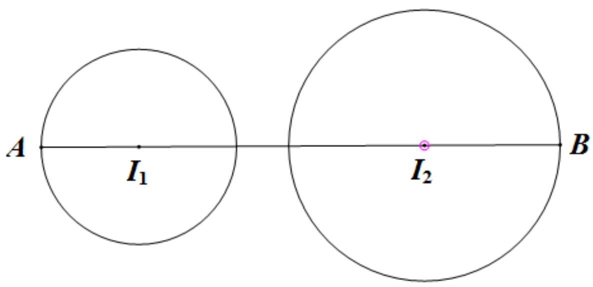
Câu 25: Chọn C

Ta có $|z_1-3i+5|=2\Leftrightarrow|2iz_1+6+10i|=4(1)$

$|iz_2-1+2i|=4\Leftrightarrow|(-3z_2)-6-3i|=12\ (2)$

Gọi A là điểm biểu diễn số phức $2iz_1$, B là điểm biểu diễn số phức $-3z_2$

Từ (1) và (2) suy ra điểm A nằm trên đường tròn tâm $I_1(-6;-10)$, bán kính $R_1=4$, điểm B nằm trên đường tròn tâm $I_2(6;3)$, bán kính $R_2=12$



Ta có $T=|2iz_1+3z_z|=AB\le I_1I_2+R_1+R_2=\sqrt{12^2+13^2}+4+12=\sqrt{313}+16$

Vậy $\max T=\sqrt{313}+16.$

Câu 26: Chọn B

Ta có $|z^2+iz+2|=|z^2+z-i+1|\Leftrightarrow|z^2+iz-2i^2|=|z^2+z-i-i^2|$

$\Leftrightarrow \left|(z-i)(z+2i)\right| = \left|(z-i)(z+i+1)\right| \Leftrightarrow |z-i|.|z+2i| = |z-i|.|z+i+1|$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} |z-i| = 0 & (1) \\ |z+2i| = |z+i+1| & (2) \end{array}\right.$.

Giải phương trình (1): Ta có $z = i \Rightarrow |z-2+i| = |2i-2| = 2\sqrt{2}$ $(*)$.

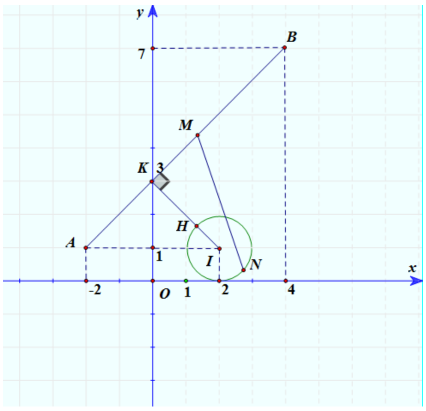
Giải phương trình (2) : Đặt $z = x+yi, \left(x, y \in \mathbb{R}\right)$, ta có

$|z+2i| = |z+i+1| \Leftrightarrow \sqrt{x^2+(y+2)^2} = \sqrt{(x+1)^2+(y+1)^2} \Leftrightarrow y = x-1$

Khi đó $|z-2+i| = \sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2} = \sqrt{(x-2)^2+x^2} = \sqrt{2(x-1)^2+2} \geq \sqrt{2}$

Từ $(*)$ và $(**)$ ta có $min|z-2+i| = \sqrt{2}$. Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$ hay $z = 1$.

Câu 27: Chọn D



Gọi M là điểm biểu diễn số phức z_1 và $A(-2;1)$; $B(4;7)$ lần lượt là hai điểm biểu diễn hai số phức $-2+i$, $4+7i$. Ta có $AB = 6\sqrt{2}$. Phương trình đường thẳng AB là $d: x-y+3=0$.

$|z_1+2-i|+|z_1-4-7i| = 6\sqrt{2} \Leftrightarrow MA+MB = 6\sqrt{2} \Leftrightarrow MA+MB = AB$. Do đó tập hợp các điểm biểu diễn số phức z_1 là đoạn thẳng AB.

$|iz_2-1+2i| = 1 \Leftrightarrow |iz_2-1+2i||i| = 1 \Leftrightarrow |-z_2-2-i| = 1$.

Gọi N là điểm biểu diễn số phức $-z_2$ và $I(2;1)$ là điểm biểu diễn số phức $2+i$. Ta có $IN = 1$

Suy ra tập hợp các điểm biểu diễn số phức $-z_2$ là đường tròn (C) có phương trình: $(x-2)^2+(y-1)^2 = 1$.

$d(I, AB) = 2\sqrt{2} > 1$, suy ra AB không cắt đường tròn.

Gọi K là hình chiếu của $I(2;1)$ lên AB. Dễ thấy K nằm trên đoạn thẳng AB.

Gọi H là giao điểm của đoạn IK với đường tròn (C).

Ta có $|z_1+z_2| = MN \geq KH = d(I, AB) - R = 2\sqrt{2}-1$.

Suy ra $min|z_1+z_2| = 2\sqrt{2}-1$.

Câu 28: Chọn B

Có $(z-3+i)^2-4z-4i+25 = 0 \Leftrightarrow [(z+i)-3]^2-4(z+i)+25 = 0 \Leftrightarrow (z+i)^2-10(z+i)+34 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z+i=5+3i \\ z+i=5-3i \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} z_1=5+2i \\ z_2=5-4i \end{array}\right.$

$A=|z_1|^2+|z_2|^2=|5+2i|^2+|5-4i|^2=70.$

Câu 29: Chọn C

Ta có: $z^4-2iz^3+(i-1)z^2+2z-i=0$

$\Leftrightarrow (z-i)^2.(z^2+i)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z-i=0 \\ z^2+i=0 \Leftrightarrow z^2=-i \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=i \\ z=\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i \\ z=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i \end{array}\right.$

Khi đó, tập các nghiệm phức của phương trình đã cho: $S=\left\{i;-\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i;\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right\}$

Tổng các phần tử của S bằng: $i+\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right)+\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right)=i$.

Câu 30: Chọn A

Ta có $(z^2-3z+6)(z^2+3z+3)-z(9+2z^2)+z^2=0$

$\Leftrightarrow z^2-(9+2z^2)z+(z^2-3z+6)(z^2+3z+3)=0$

$\Delta=(9+2z^2)^2-4(z^2-3z+6)(z^2+3z+3)=(6z-3)^2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} z=\dfrac{2z^2+9-6z+3}{2}=z^2-3z+6 \\ z=\dfrac{2z^2+9+6z-3}{2}=z^2+3z+3 \end{array}\right.$.

Với $z=z^2-3z+6 \Leftrightarrow z^2-4z+6=0$.

Phương trình có hai nghiệm $z_1=2+\sqrt{2}i$ và $z_2=2-\sqrt{2}i$

Với $z=z^2+3z+3 \Leftrightarrow z^2+2z+3=0$.

Phương trình có hai nghiệm là $z_3=-1-\sqrt{2}i$ và $z_4=-1+\sqrt{2}i$ f

Vậy $|z_1|+|z_2|+|z_3|+|z_4|=|2+\sqrt{2}i|+|2-\sqrt{2}i|+|-1-\sqrt{2}i|+|-1+\sqrt{2}i|=2\sqrt{3}(1+\sqrt{2})$.

Câu 31: Chọn D

Với hai số phức z,w khác 0 thỏa mãn $z+w\neq 0$, ta có:

$\dfrac{1}{z}+\dfrac{3}{w}=\dfrac{6}{z+w} \Leftrightarrow \dfrac{w+3z}{zw}=\dfrac{6}{z+w} \Leftrightarrow (w+3z)(z+w)=6zw \Leftrightarrow 3z^2-2zw+w^2=0$

$\Leftrightarrow 3\left(\dfrac{z}{w}\right)^2-2.\left(\dfrac{z}{w}\right)+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{z}{w}=\dfrac{1}{3}-\dfrac{\sqrt{2}}{3}i \\ \dfrac{z}{w}=\dfrac{1}{3}+\dfrac{\sqrt{2}}{3}i \end{array}\right.$

Suy ra $\left|\dfrac{z}{w}\right|=\sqrt{\left(\dfrac{1}{3}\right)^2+\left(\pm\dfrac{\sqrt{2}}{3}\right)^2}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.